Máster en Matemática Computacional

Trabajo de Fin de Máster

Cuestiones computacionales aritméticas de δ-sucesiones como semigrupos numéricos.

Autora
Miriam Alonso Santamaria

Director:
Julio José Moyano Fernández

2017/2018

Por la presente certifico que el presente documento titulado

"Cuestiones computacionales aritméticas de δ-sucesiones como semigrupos numéricos"

constituye el Trabajo de Final de Máster de la estudiante Miriam Alonso, y presenta sus propios resultados bajo mi supervisión.

Julio José Moyano Fernández
Profesor Ayudante Doctor en el área de Álgebra
Universitat Jaume I de Castelló

Resumen

En este trabajo trataremos algunas cuestiones computacionales de la aritmética que encierran las δ-sucesiones como generadores de un semigrupo numérico. Haremos uso del programa GAP, debido a sus diversos paquetes algebraicos.

Seremos capaces, por medio de la definición de δ-sucesión y uso de ciertas propiedades, del diseño de un programa que nos identifique si una sucesión de tamaño finito es una δ-sucesión.

Nos centraremos en el estudio de dos casos particulares, δ- sucesiones de tamaño 2 y 3. Veremos y analizaremos ciertas cuestiones de interés que posteriormente serán llevadas al ámbito computacional, así como posibles generalizaciones de las mismas a otros tamaños.

Palabras clave

- álgebra conmutativa
- semigrupos numéricos
- δ-sucesiones
- curvas planas
- Algoritmos en la teoría de semigrupos numéricos

Índice

1. Introducción

La noción de semigrupo numérico, un tipo especial de sub-semigrupo aditivo de los números naturales, juega un papel muy importante dentro de la Geometría algebraica. Esta estructura se reconoce, por ejemplo, en ciertos invariantes asociados a los puntos singulares de las curvas algebraicas (ver por ejemplo [6]). La noción que permite esta relación es la de valoración. Sin entrar en los detalles técnicos, se puede decir que a una singularidad se le asocia una valoración discreta, que no es más que una aplicación de un cierto cuerpo, K, asociado al punto en el grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ satisfaciendo que transforma productos en sumas y que además la valoración de la suma está acotada por una cierta propiedad de mínimo. Más precisamente, una valoración discreta se define como una aplicación $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ que satisface

(i) $\nu(f + g) \geq \text{mín}\{\nu(f), \nu(g)\}$

(ii) $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$

para cualesquiera $f, g \in K \setminus \{0\}$ (ver [AtMc]). En los contextos de interés geométrico sucede que, cuando uno considera la imagen de esta aplicación ν, ésta está sumergida en los naturales, y de hecho posee estructura de semigrupo numérico. Estas propiedades conceden a los semigrupos numéricos y sus propiedades puramente aritméticas una importancia especial.

Naturalmente, uno puede abstraer esta situación a otros contextos álgebro-geométricos en los que intervenga una valoración discreta, por ejemplo de las que aparecen en la clasificación de valoraciones planas debida a Zariski [9] y completada por Spivakovski [8]. En uno de ellos se trabaja con valoraciones que resultan de una situación geométrica peculiar que queremos describir a continuación, porque es la justificación del interés que este TFM pueda tener.

Se considera el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero k, por ejemplo $k = \mathbb{C}$ (recordemos que renunciar a alguna de estas dos propiedades suele conducir a dificultades técnicas, a veces insalvables, cuando se trabaja en Geometría algebraica, ver [7]), con coordenadas homogéneas $(X : Y : Z)$, tal que $P = (1 : 0 : 0)$. Sea $L = \{Z = 0\}$ la recta del infinito.

Consideremos también una curva proyectiva plana irreducible C definida por la ecuación $F(X, Y, Z) = 0$, que tenga una rama en el infinito y tal que verifique que su intersección con la recta del infinito L sea exactamente el punto P. Una curva así se denomina *curva con un lugar en el infinito*. Ahora bien, el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ se puede describir mediante las dos cartas afines siguientes (una que contiene al punto P y otra que no):

- Carta afín dada por $X \neq 0$ con coordenadas afines (u, v) en un entorno de P tales que
$$u = \frac{Y}{X}, \quad v = \frac{Z}{X}.$$
- Carta afín dada por $Z \neq 0$ con coordenadas afines (x, y) tales que
$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Observemos que el cambio de cartas afines se traduce en los cambios de coordenadas

$$x = \tfrac{1}{v} \qquad \longleftrightarrow \qquad v = \tfrac{1}{x}$$

$$y = \tfrac{u}{v} \qquad \longleftrightarrow \qquad u = \tfrac{x}{y}$$

Localmente, es decir, en un entorno del punto P, la ecuación de la curva es entonces de la forma $f(u, v) = 0$, con f un elemento del anillo de series de potencias formales $k[[u, v]]$ (es decir, no consideramos cuestiones de convergencia) en las indeterminadas u, v con coeficientes en el cuerpo k; se considera entonces el anillo local

$$R := k[[u, v]]/(f),$$

siendo (f) el ideal generado por el polinomio f en este anillo R. Es un hecho básico de la geometría algebraica que este anillo R es una forma de estudiar desde el punto de vista del álgebra conmutativa las propiedades geométricas locales de la curva relativas al punto P (ver por ejemplo [5]). Su cuerpo de cocientes será $Q(R) = k((u, v)) = k((x, y))$, y sobre él podemos definir una valoración discreta $\nu : Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$. Simplificando bastante, la consideración de valoraciones discretas de este estilo permiten asociar semigrupos numéricos a la curva; uno de ellos se llama *semigrupo en el infinito*. Dado que los semigrupos numéricos son finitamente generados, es natural preguntarse por un conjunto de generadores de este semigrupo en el infinito. Abhyankar y Moh [3] encontraron la respuesta: se trata del objeto de estudio de este Trabajo Fin de Máster, las δ-sucesiones, que son un conjunto de números enteros positivos que satisfacen algunas propiedades especiales que lleva tiempo enumerar y que por eso no escribimos ahora explícitamente.

Este TFM no se ocupa de las implicaciones geométricas de las δ-sucesiones, difíciles por otra parte, sino de algunas cuestiones computacionales de la aritmética que encierran como generadores de un semigrupo numérico.

Veamos con más detalle el contenido de los distintos apartados de este trabajo. La sección 2 la hemos dedicado a establecer cierta notación y a recordar algunos conceptos de álgebra que usaremos a lo largo del trabajo. En la sección 3, comenzaremos propiamente la memoria con la definición de δ-sucesiones y algunas propiedades de las mismas (ver [1]). En la sección 4 veremos la diferencia entre nuestra definición de δ-sucesión y la implementada en GAP, así como nuestra primera cuestión computacional: algoritmo que nos proporcione la información sobre si una sucesión es una δ-sucesión (según nuestra definición). En la primera parte de la sección 5 nos centraremos en el estudio particular de δ-sucesiones de tamaño 2 y 3. En la segunda parte de esta sección abordaremos el resto de cuestiones computacionales a tratar: como completar mediante un número natural una sucesión de tamaño 2 para obtener una δ-sucesión, de cuantas formas se puede encontrar una δ-sucesión de tamaño 3 tal que el semigrupo numérico que genere sea el mismo que el de otra δ-sucesión de tamaño 2, cuando un semigrupo numérico con 3 generadores minimales que no formen una δ-sucesión se puede ampliar a una δ-sucesión generando el mismo semigrupo numérico, y cuando es la permutación de una δ-sucesión de tamaño 3 también una δ-sucesión. En la sección 6 comentaremos las conclusiones sacadas del trabajo. La memoria finaliza con la programación de los algoritmos que atienden a las cuestiones planteadas anteriormente (ver: A.APÉNDICE, B.APÉNDICE y C.APÉNDICE).

2. Nociones previas

Comencemos con un poco de notación:

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{N}_{>1} = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 1\}$.
- $mcd(a_0, a_1) =$ Máximo Común Divisor de a_0 y a_1 .

Definición 2.1. *Un **semigrupo numérico** es un conjunto de enteros cerrado para la suma, que contiene al* 0*, y cuyo complemento en* $\mathbb{N}$ *es finito. La condición de complemento finito es equivalente a imponer que el máximo común divisor de sus elementos sea 1.*

A lo largo del trabajo crearemos semigrupos numéricos mediante *sistemas de generadores*. Diremos que el conjunto de enteros positivos $\{a_0, a_1, ..., a_g\}$ es un **sistema generador** del semigrupo numérico S si

$$S = \{c_0 a_0 + c_1 a_1 + ... + c_g a_g | c_0, c_1, ..., c_g \in \mathbb{N}_0\} \equiv < a_0, a_1, ..., a_g >.$$

Si además ningún subconjunto propio de $\{a_0, a_1, ..., a_g\}$ genera a S, diremos que $\{a_0, a_1, ..., a_g\}$ es un **sistema generador minimal** de S.

Definición 2.2. *Sea* S *un semigrupo numérico, y sea* $\{a_0, ..., a_g\}$ *su sistema generador minimal, denotaremos* $d_1 = a_0$ *y* $\forall i \in \{2, ..., g+1\}$ $d_i = mcd(d_{i-1}, a_{i-1})$*. Si definimos* $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$ $\forall i \in \{1, ..., g\}$*, entonces diremos que **S es libre** si satisface las siguientes dos condiciones:*

- $n_i > 1$*, para* $i = 1, ..., g$*,*
- $n_i a_i \in < a_0, ..., a_{i-1} >$*, para* $i = 1, ..., g$*.*

Definición 2.3. *Diremos que un elemento de un semigrupo es **primitivo** si no es suma de dos elementos (distintos de cero) del semigrupo.*

Definición 2.4. *Sea* S *un semigrupo numérico, llamaremos **número de Frobenius** del semigrupo numérico* S *al número dado por:*

$$Fn(S) = max\{x \in \mathbb{N} | x \notin S\} \ .$$

*Y definiremos como **conductor** del semigrupo numérico* S *a*

$$c(S) = Fn(S) + 1 \ .$$

3. δ-sucesión

En este primer apartado, daremos la definición que utilizaremos como referencia de las δ-sucesiones, así como algunas propiedades de ellas.

3.1. Definición y algunos conceptos

Definición 3.1. *Una sucesión $\Delta = \{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_g\}$ se dice que es una δ-sucesión si definiendo*

$$d_i := mcd(\delta_0, ..., \delta_{i-1}), \text{ para } i = 1, ..., g+1,$$

$$n_i := \tfrac{d_i}{d_{i+1}}, \text{ para } i = 1, ..., g,$$

se verifican las siguientes propiedades:

- (I) $d_{g+1} = 1 \wedge n_i > 1$, *para* $i = 1, ..., g$,
- (II) $n_i\delta_i \in <\delta_0, ..., \delta_{i-1}> \subseteq (\mathbb{N}_0, +)$, *para* $i = 1, ..., g$,
- (III) $\delta_0 > \delta_1 \wedge \delta_{i-1}n_{i-1} > \delta_i$, *para* $i = 2, ..., g$.

Observación 3.2. *Es fácil ver que la propiedad (II) para el caso $i = 1$ es superflua, es decir, asumiendo (I), $n_1\delta_1 \in <\delta_0>$ siempre. Veámoslo:*

Sea $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) > 1$, entonces podemos escribir

$$\delta_0 = d_2(\tfrac{\delta_0}{d_2}) \wedge \delta_1 = d_2(\tfrac{\delta_1}{d_2}), \text{ con } \tfrac{\delta_0}{d_2}, \tfrac{\delta_1}{d_2} \in \mathbb{N} \text{ y donde el } mcd(\tfrac{\delta_0}{d_2}, \tfrac{\delta_1}{d_2}) = 1.$$

Ahora bien,

$$n_1 = \tfrac{d_1}{d_2} = \tfrac{mcd(\delta_0)}{mcd(\delta_0,\delta_1)} = \tfrac{\delta_0}{d_2} = \tfrac{d_2(\frac{\delta}{d_2})}{d_2} = \tfrac{\delta}{d_2} \ ,$$

luego

$$n_1\delta_1 = (\tfrac{\delta_0}{d_2})(d_2\tfrac{\delta_1}{d_2}) = ((\tfrac{\delta_0}{d_2})d_2)(\tfrac{\delta_1}{d_2}) = \delta_0(\tfrac{\delta_1}{d_2}) \in <\delta_0>.$$

Por tanto, la condición (II) podrá ser reescrita como:

- *(II)* $n_i\delta_i \in <\delta_0, ..., \delta_{i-1}> \subseteq (\mathbb{N}_0, +)$, *para* $i = 2, ..., g$.

Observación 3.3. *La propiedad* $\delta_0 > \delta_1$ *en* (III) *no es considerada en el artículo de Avinash Sathaye y Jon Stenerson (ver [1]), ni en el de Mitsushi Fugimoto y Masakazu Suzuki (ver [2]). Además Avinash Sathaye y Jon Stenerson distinguen entre las* δ*-sucesiones principales y no principales, cuya definición veremos a continuación.*

Definición 3.4. *Diremos que dos números enteros* ***no son principales*** *si ninguno de ellos es divisible por el otro. De esta forma, se dice que una* δ*-sucesión* $\{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_g\}$ ***no es principal*** *si* δ_0 *y* δ_1 *no son principales.*

Definición 3.5. *Un semigrupo generado por una* δ*-sucesión se denomina* ***semigrupo planar****.*

3.2. Propiedades

Supongamos que $\Gamma =< \delta_0, \delta_1, ..., \delta_g >$ es un semigrupo planar. Siguiendo [1], presentamos algunas propiedades relevantes de los semigrupos planares:

1ª Capa de un semigrupo planar

Sea i un índice fijo con $1 \leq i \leq g$, si definimos $\delta_j^{'} = \frac{\delta_j}{d_{i+1}}$, entonces el semigrupo

$$\Gamma_i = \{\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'}\}\mathbb{N}$$

es un semigrupo planar para todo i desde 0 a g, generado por la δ-sucesión $\{\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'}\}$.

Diremos que Γ_i es la i-ésima capa de $\Gamma = \Gamma_g$.

. . . Demostración . . .

Sea $i \in \{1, ..., g\}$ un índice fijado y sea $\Gamma' = \{\delta'_0, ..., \delta'_i\}\mathbb{N}$ su correspondiente semigrupo numérico. Veamos que $\{\delta'_0, ..., \delta'_i\}$ forma una δ-sucesión.

Comencemos comprobando dos igualdades. Para $j \in \{1, ..., i\}$ se tiene que:

- $d'_j = mcd(\delta'_0, ..., \delta'_{j-1}) = mcd((\frac{\delta_0}{d_{i+1}}), ..., (\frac{\delta_{j-1}}{d_{i+1}})) = (\frac{1}{d_{i+1}})mcd(\delta_0, ..., \delta_{j-1}) = \frac{d_j}{d_{i+1}}$.

- $n'_j = \frac{d'_j}{d'_{j+1}} = \frac{(\frac{d_j}{d_{i+1}})}{(\frac{d_{j+1}}{d_{i+1}})} = \frac{d_j}{d_{j+1}} = n_j$.

Ahora estamos en disposición de comprobar las condiciones de la definición de una δ-sucesión:

- (I)
  - $d'_{i+1} = \frac{d_{i+1}}{d_{i+1}} = 1$.
  - $n'_j = n_j > 1$ para $j \in \{1, ..., i\}$.
- (II)
  - $n'_j\delta'_j \in < \delta'_0, ..., \delta'_{j-1} >$ si y solo si $n_j(\frac{\delta_j}{d_{i+1}}) \in < (\frac{\delta_0}{d_{i+1}}), ..., (\frac{\delta_{j-1}}{d_{i+1}}) >$ si y solo si $(\frac{1}{d_{i+1}})\delta_j \in (\frac{1}{d_{i+1}}) < \delta_0, ..., \delta_{j-1} >$ si solo si $\delta_j \in < \delta_0, ..., \delta_{j-1} >$ para $j \in \{1, ..., i\}$.
- (III)
  - $\delta'_0 > \delta'_1$ si y solo si $\frac{\delta_0}{d_{i+1}} > \frac{\delta_1}{d_{i+1}}$ si y solo si $\delta_0 > \delta_1$.
  - $n'_j\delta'_j > \delta'_{j+1}$ si solo si $n_j(\frac{\delta_j}{d_{i+1}}) > (\frac{\delta_{j+1}}{d_i+1})$ si y solo si $n_j\delta_j > \delta_{j+1}$ para $j = 1, ..., i-1$.

Observar que se cumplen todas las condiciones por ser una $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ δ-sucesión .

$\square$

2ª Generación estándar

Todo entero a tiene una única expresión:

$$a = \sum_0^g a_i \cdot \delta_i, \text{ donde } 0 \leq a_i \leq n_i - 1 \text{ para } 1 \leq i.$$

Además, $a \in \Gamma$ si y solo si $0 \leq a_0$.

A este tipo de expresión la llamaremos expansión estándar de a con respecto a la

δ-sucesión.

. . . *Demostración* . . .

Recordemos que $mcd(\delta_0, .., \delta_g) = d_{g+1} = 1$ por lo que podemos escribir $a = \sum_0^g b_i\delta_i$ para $b_i \in \mathbb{N}_0$ con $i \geq 1$ sin pérdida de generalidad.
Asumamos que a ha sido estandarizado pasado un cierto j, es decir,

$$a = \sum_0^j b_{i,j}\delta_i + \sum_{j+1}^g a_p\delta_p, \text{ donde } 0 \leq a_p \leq n_p - 1 \text{ y } b_{i,j} > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq j \text{ .}$$

Veamos una mejor de la estandarización para $j-1$:

$a = \sum_0^{j-1} b_{i,(j-1)}\delta_i + \sum_j^g a_p\delta_p$, donde $0 \leq a_j \leq n_j - 1$ y $b_{i,(j-1)} \geq b_{i,j}$ para $0 \leq i \leq j-1$.

También tenemos que $n_j\delta_j = \sum_0^{j-1} u_i\delta_i$, con $u_i \geq 0$ (por la condición planaria). Entonces estableceremos la mejora dada por $b_{i,(j-1)} = b_{i,j} + uu_i$ para $0 \leq i \leq j-1$.

Continuando con la mejora para llegar a la deseada expresión estándar veamos la unicidad. Supongamos dos expresiones estándar distintas:

$$a = \sum_0^g a_i\delta_i = \sum_0^g a_i'\delta_i \text{ entonces } \sum_0^g (a_i - a_i')\delta_i = 0,$$

donde asumiremos que $(a_j - a_j')$ es el último término distinto de 0. Obviamente todos los términos anteriores son divisibles por d_j, luego tenemos que $d_j|(a_j - a_j')\delta_j$. Pero entonces $d_{j+1} = mcd(\delta_j, d_j)$ por lo que $n_j = \frac{d_j}{d_{j+1}}$ divide $(a_j - a_j')$, que nos lleva a una contradicción ya que como $0 \leq a_j, a_j' \leq n_j - 1$ entonces $0 < |a_j - a_j'| < n_j$.

Notemos que si $a_0 \geq 0$ entonces $a \in \Gamma$. Por lo contrario, si $a = \sum_0^g b_i\delta_i$ con $b_i \geq 0$ para todo $i \in \{0, ..., g\}$, entonces podemos aplicar el proceso de mejoras descrito arriba para obtener la expresión estándar

$$a = \sum_0^g a_i\delta_i \ .$$

Para acabar, notemos que si $a_0 > b_0$ entonces el coeficiente de δ_0 nunca disminuirá durante las etapas de mejora. Por lo tanto, que $a_0 \geq 0$ será necesario.

□

3ª Fórmula del Conductor

Sea

$$c(\Gamma) = 1 - \delta_0 + \sum_1^g (n_i - 1)\delta_i.$$

Entonces tenemos que $\alpha + \beta = c(\Gamma) - 1$ sí y solamente sí solo uno de ellos $\{\alpha, \beta\}$

pertenece a Γ. En consecuencia, $c(\Gamma)$ es el elemento más pequeño de Γ que cumple

que todo entero mayor o igual que él, está en Γ.

. . . Demostración . . .

Sea $\alpha = \sum_0^g a_i\delta_i$, donde $0 \leq a_i \leq n_i - 1$ para todo $i \in \{1, ..., g\}$. Entonces, tenemos que $\alpha + \beta = c(\Gamma) - 1$:

$$\beta = c(\Gamma) - 1 - \alpha = 1 - \delta_0 + \sum_1^g (n_i - 1)\delta_i - 1 - \sum_0^g a_i\delta_i =$$
$$-\delta_0 + \sum_1^g (n_i - 1)\delta_i - a_0\delta_0 - \sum_1^g a_i\delta_i = (-1 - a_0)\delta_0 + \sum_1^g (n_i - 1 - a_i)\delta_i \ .$$

Según la propiedad 2, *Generación estándar*, tenemos que

- $\alpha \in \Gamma \longleftrightarrow a_0 \geq 0$.
- $\beta \in \Gamma \longleftrightarrow (-1 - a_0) \geq 0$.

Es fácil ver que si $\alpha \in \Gamma \longrightarrow \beta \notin \Gamma$ (si $a_0 \geq 0$ entonces $(-1-a_0) < 0$) y si $\beta \in \Gamma \longrightarrow \alpha \notin \Gamma$ (si $-1 - a_0 \geq 0$ entonces $0 > -1 \geq -a_0$) .

Acabemos viendo la consecuencia. Observar que $c(\Gamma) - 1 = (c(\Gamma) + v) + (-v - 1)$. Entonces, si $v \geq 0$ se tiene que $(-v - 1) \notin \Gamma$ y por tanto, por lo que acabamos de ver $(c(\Gamma) + v) \in \Gamma$ para todo $v > 0$. Además como $0 \in \Gamma$, tenemos $(c(\Gamma) - 1) \notin \Gamma$ y de esta forma queda probado que $c(\Gamma)$ es el entero más pequeño de Γ que cumple que todo entero mayor o igual que él está en Γ .

□

4ª Límites en la sucesión del generador

Si la sucesión no es principal, entonces el $max(\delta_0, \delta_1) \leq c(\Gamma) + a$ y $\delta_i \leq c(\Gamma) - 1$ para

todo $2 \leq i \leq g$.

. . . *Demostración* . . .

Observar que:

$$c(\Gamma) - 1 = 1 - \delta_0 + \sum_1^g (n_i - 1)\delta_i - 1 = -\delta_0 + (n_1 - 1)\delta_1 + (\sum_2^g (n_i - 1)\delta_i) > \sum_2^g (n_i - 1)\delta_i$$
$$\text{si y solo si } -\delta_0 + (\tfrac{d_1}{d_2} - 1)\delta_1 > 0 \text{ si y solo si } -\tfrac{d_2\delta_0}{d_2} + \tfrac{\delta_0\delta_1}{d_2} - \tfrac{d_2\delta_1}{d_2} > 0 \text{ si y solo si}$$
$$d_2(-\tfrac{\delta_0}{d_2} + \tfrac{\delta_0}{d_2\frac{\delta_1}{d_2}} - \tfrac{\delta_1}{d_2}) > 0 \text{ si y solo si } (\tfrac{\delta_0}{d_2} - 1)(\tfrac{\delta_1}{d_2}) - 1 > 0 \ .$$

Luego nos interesará ver que $\frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} > 1$. Este último paso se sigue de la no principalidad de la sucesión que nos garantizará que dichas cantidades sean mayor que 1.

Recordemos que $n_i > 1$ para todo $i = 2, ..., g$. Entonces tendremos:

$$\delta_i < \tfrac{c(\Gamma)-1}{n_i - 1} \leq c(\Gamma) - 1, \text{ para todo } i \in \{2, ..., g\} \ .$$

Sea $\delta_0 > \delta_1$, veamos por inducción en g que $c(\Gamma) + 1 \geq \delta_0$:

- Si $g = 0$ entonces $c(\Gamma_0) = 0$ y acabamos.
- Supongamos que se cumple hasta $g-1$, es decir, se cumple que $\frac{\delta_0}{d_h} \leq c(\Gamma_{h-1}) + 1$. ¿Se cumplirá para g?

  $$c(\Gamma) = c(\Gamma_g) = (c(\Gamma_{g-1}) - 1)d_g + (n_g - 1)\delta_h + 1 \text{ como } n_g = \frac{d_g}{d_{g+1}} = \frac{d_g}{1} = d_g,$$
  $$c(\Gamma) = (c(\Gamma_{g-1}) + 1)d_g + (d_g - 1)\delta_g - 2d_g + 1, \text{ entonces}$$
  $$c(\Gamma) + 1 = (c(\Gamma_{g-1}) + 1)d_g + (d_g - 1)\delta_g - 2d_g + 2 =$$
  $$(c(\Gamma_{g-1}) + 1)d_g + (d_g - 1)(\delta_g - 2) \geq \delta_0 + (d_g - 1)(\delta_g - 2) \ .$$

  Observemos que para $\delta_g \leq 2$ la inducción quedaría totalmente probada. Entonces acabemos viendo el caso en el que $\delta_g = 1$. Si $\delta_g = 1$ entonces Γ contiene a todos los números naturales. Por tanto $c(\Gamma) = 0$. También tendremos que $g \leq 1$ (ya que si no sería contradecir $\delta_i < c(\Gamma) - 1 = -1$, para $i \in \{2, .., , g\}$). Si $g = 1$ y por definición $c(\Gamma) = -1 + \delta_0 + (n_1 - 1)\delta_1 = 0$ entonces $n_1 = 1 = \delta_0$ que contradice la hipótesis de sucesión no principal. Por tanto, $g = 0$ (no tengo nada).

□

5ª Generadores primitivos

Todo elemento primitivo de Γ es uno de los δ_j; en cambio, todo δ_j es primitivo, o

múltiplo de algún δ_r con $r > j$, o $\delta_j = \delta_i$ y $\delta_r = \delta_0$.

. . . *Demostración* . . .

Es bastante fácil de ver que un elemento primitivo de un semigrupo debe pertenecer al conjunto de generadores de este, $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$.

Por otro lado, supongamos que tenemos un $\delta_j \in \{\delta_0, ..., \delta_g\}$ que no es un elemento primitivo. Sea entonces $\delta_j = a + b$ con $a, b \neq 0$ tal que $a = \sum_0^g a_i\delta_i$ y $b = \sum_0^g b_i\delta_i$ expresiones estándar. Observemos que la expresión $\delta_j = \sum_0^g (a_i + b_i)\delta_i$ no será estándar (si lo fuese llegaríamos a una contradicción ya que por singularidad $a = a_j$ y $b = b_j\delta_j$, y nuevamente por singularidad tendríamos que uno de ellos debería ser 0).

Comencemos con el proceso de modificación de la expresión de δ_j descrito en la propiedad 2, *Generación estándar*. En el momento anterior del final del proceso de modificación tendremos:

$$\delta_j = \textstyle\sum_0^r (a_i + b_i + v_i)\delta_i, \text{ donde } a_r + b_r + v_r \neq 0 \text{ y } v_i \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., r \ .$$

Los v_i son las mejoras dadas por los pasos anteriores en el proceso de modificación. Observemos que el lado derecho de la expresión no es estándar por lo que $r > 0$. Además estamos en condiciones de afirmar que $r \geq j + 1$. De hecho, si r fuese menor que j el lado derecho de la expresión sí que hubiese mejorado a una expresión estándar en $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ es contradicción con la singularidad comentada anteriormente.

Sigamos mejorando la expresión. Tomaremos $a_r + b_r + v_r = un_r$ y $n_r\delta_r = \sum_0^{r-1} p_i\delta_i$, entonces:

$$\delta_j = \sum_0^r (a_i + b_i + v_i)\delta_i = (a_r + b_r + v_r)\delta_r + \sum_0^{r-1}(a_i + b_i + v_i)\delta_i =$$
$$un_r\delta_r + \sum_0^{r-1}(a_i+b_i+v_i)\delta_i = u\sum_0^{r-1} p_i\delta_i + \sum_0^{r-1}(a_i+b_i+v_i)\delta_i = \sum_0^{r-1}(a_i+b_i+v_i+up_i)\delta_i,$$

donde todos los coeficientes correspondientes a δ_i debe coincidir. Como a_i, b_i, v_i, u, p_i no son negativos, entonces $up_i = 0$ si $i \neq q$ y $up_i = 1$ si $i = q$. Por tanto, $u = 1 = p_j$, $p_i = 0$ para $i \neq j$ y por $n_r\delta_r = \sum_0^{r-1} p_i\delta_i$ tendremos que

$$\delta_j = n_r\delta_r.$$

□

6ª Números primos en semigrupos planares

Hay como máximo un número primo primitivo en Γ, a no ser que Γ se haya generado por dos primos. En particular, un semigrupo que contiene dos o más números primos primitivos y no está generado por ellos, no es un semigrupo planar.

. . . *Demostración* . . .

Sean a, b dos números primitivos primos en Γ. Por lo visto en la propiedad 5, *Generadores primitivos*, $a = \delta_i$ y $b = \delta_j$ para algún $i, j \in \{0, ..., g\}$ (asumiremos sin pérdida de generalidad que $i < j$). Si $(i, j) = (0, 1)$ ya está.

Notemos que d_{i+1} solo tendrá dos posibles valores, 1 o a, y $d_{j+1} = 1$; por lo que $j = g$. Si $d_{i+1} = a$, entonces Γ_i contiene a $\frac{\delta_i}{d_{i+1}} = \frac{a}{a} = 1$ por lo que el semigrupo $< \delta_0, ..., \delta_i >= a\Gamma_i = a\mathbb{N}$ y por tanto, podremos dejar $\{\delta_0, .., \delta_{i-1}\}$ como sucesión generadora. Asumamos ahora que $a = \delta_0$ y $d_1 = a$. Entonces si $d_2 = a$ tendremos que $a|\delta_1$ y nuevamente podremos omitir δ_1 sin pérdida de generalidad. Por lo tanto, tendremos que $d_2 = 1$ y así $g = 1 = j$.

□

4. Programación

Nuestro primer objetivo será la programación de un algoritmo que nos permita conocer si una sucesión es una δ-sucesión. En este caso, en el sistema GAP, hay implementado un comando llamado *IsDeltaSequence(.)* que dice si . es una δ-sucesión según su definición. Pero, ¿es la misma definición que la nuestra? Veámosla:

Definición 4.1. ***(Definición GAP)*** *Una sucesión $\Delta = \{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_g\}$ se dice que es una δ-sucesión si definiendo*

$$\begin{cases} D_1 = \delta_0, \\ D_i := mcd(D_{i-1}, \delta_{i-1}), \text{ para } i = 2, ..., g+1, \end{cases}$$

se cumple:

- *(i)* $mcd(\delta_0, ..., \delta_g) = 1$,
- *(ii)* $< \delta_0, ..., \delta_g >$ *es libre,*
- *(iii)* $\delta_i D_i > \delta_{i+1} D_{i+1}$, *para* $i = 1, ..., g-1$,
- *(iv)* $\delta_0 > \delta_1 > D_2 > D_3 > ... > D_{g+1}$.

Observación 4.2. *Hagamos una pequeña observación sobre la forma de definición de d_i y D_i, para $i = 1, ..., g+1$. Veamos que son equivalentes. Para ello procedamos por inducción:*

- $D_1 = \delta_0 = mcd(\delta_0) = d_1$.
- *Supongamos cierto para $i = k$ ($D_k = d_k$). ¿Será cierto para $i = k+1$?*

$$D_{k+1} = mcd(D_k, \delta_k) = mcd(d_k, \delta_k) = mcd(mcd(\delta_0, ..., \delta_{k-1}), \delta_k) = \\ mcd(d_k, \delta_k) = mcd(\delta_0, ..., \delta_{k-1}, \delta_k) = d_{k+1} .$$

Que es cierto.

Por tanto $D_i = d_i$, para $i = 1, ..., g+1$.

A continuación, mediante un ejemplo veremos que las definiciones 3.1. y 4.1. no son equivalentes. Sea la sucesión $\{10, 5, 3\}$, ¿será una δ-sucesión?

- Por la *Definición 3.1.*: sean $d_1 = mcd(\delta_0) = \delta_0 = 10, d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = mcd(10, 5) = 5 \ \wedge \ d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(10, 5, 3) = 1$ entonces $n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{10}{5} = 2 > 1$ $\wedge \ n_2 = \frac{d_2}{d_3} = \frac{5}{1} = 5 > 1$, por tanto cumple la condición (I) de nuestra definición. Por otro lado, $n_2\delta_2 = 5 \cdot 3 = 15 \in < 10, 5 >=< \delta_0, \delta_1 >$, luego también satisface la condición (II). Para acabar comprobemos (III): $\delta_0 = 10 > 5 = \delta_1 \wedge n_1\delta_1 = 2 \cdot 5 = 10 > 3 = \delta_2$. Estamos en disposición de afirmar que según nuestra definición la sucesión $\{10, 5, 3\}$ es una δ-sucesión.

- Por la *Definición 4.1.*: sean $d_1 = \delta_0 = 10$, $d_2 = mcd(d_1, \delta_1) = mcd(10, 5) = 5 \;\wedge$ $d_3 = mcd(d_2, \delta_2) = mcd(5, 3) = 1$, observemos que $\delta_1 = 5 = d_2$ luego incumple la condición (iv), $\delta_0 > \delta_1 > d_2 > d_3$. Por tanto la sucesión $\{10, 5, 3\}$ no será una δ-sucesión según la definición implementada en GAP.

Profundicemos un poco sobre este hecho. *¿Cuál será la diferencia entre las dos definiciones?*

La clave está en si la sucesión es principal o no. Supongamos que tenemos una sucesión principal, $\{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_g\}$, entonces $\delta_0 = k\delta_1$ con $k \in \mathbb{N}_{>1}$. Observemos que $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = mcd(k\delta_1, \delta_1) = \delta_1$. Por la condición (iv) de la *Definición 4.1.*, $\delta_0 > \boxed{\delta_1 > d_2} > .... > d_{g+1}$, esta sucesión ya no sería una δ-sucesión. Sin embargo, según nuestra definición (*Definición 3.1.*) esto no sería ningún impedimento para serlo, ya que hay δ-sucesiones principales, como el ejemplo a anterior.

Esto nos permite realizar afirmaciones como la siguiente:

Lema 4.3. *Sea la sucesión formada por los números enteros $\delta_0, ..., \delta_g$ tal que el conjunto $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ es un sistema generador minimal del semigrupo numérico $< \delta_0, ..., \delta_g >$, entonces:*

$$\textit{Definición 3.1.} \iff \textit{Definición 4.1.}$$

. . . Demostración . . .

$\Longrightarrow$ Definición 3.1. $\longrightarrow$ Definición 4.1. :
La condición (i), $mcd(\delta_0, ..., \delta_g) = 1$, se sigue de inmediato de la condición (I), $d_{g+1} = mcd(\delta_0, ..., \delta_g) = 1$. Por otro lado la condición (ii), $< \delta_0, ..., \delta_g >$ es libre (recordar *Definición 2.2.*), se sigue por ser $\{\delta_0, .., \delta_g\}$ sistema generador minimal (por (II), $n_i \cdot \delta_i \in < \delta_0, ..., \delta_{i-1} >$, para $i = 1, ..., g$; y por (I), $n_1 > 1$, para $i = 1, ..., g$). Veamos la condición (iii), $\delta_i d_i > \delta_{i+1} d_{i+1}$, para $i = 1, ..., g-1$: por (III) tenemos que $\delta_i n_i > \delta_{i+1}$, para $i = 1, ..., g-1$ si y solo si $\delta_i \frac{d_i}{d_{i+1}} > \delta_{i+1}$, para $i = 1, ..., g-1$ si y solo si $\delta_i d_i > \delta_{i+1} d_{i+1}$, para $i = 1, ..., g-1$, que es lo que queríamos probar. Acabemos viendo (iv) por pasos: $\delta_0 > \delta_1$, inmediato por (III) $(\delta_0 > \delta_1)$; $\delta_1 > d_2$, por definición de d_2 tenemos que $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) \leq \delta_1$, pero como δ_0 y δ_1 son generadores minimales implica que δ_0 no puede ser múltiplo de δ_1 luego $d_2 \neq \delta_1$ y así $\delta_1 > d_2$; por otro lado que $d_2 > d_3 > ... > d_{g+1}$ será inmediato por (I), $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}} > 1$, para $i = 1, ..., g$ y por tanto $d_i > d_{i+1}$, para $i = 1, ..., g$.

$\Longleftarrow$ Definición 4.1. $\longrightarrow$ Definición 3.1. :
(I) $d_{g+1} = 1$, se sigue de inmediato por (i), ya que $d_{g+1} = mcd(\delta_0, ..., d_g)$; y $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}} > 1$, para $i = 1, ..., g$, que también se sigue de inmediato por (ii), $< \delta_0, ..., \delta_g >$ es libre (primer punto de la *Definición 2.2*). (II) $n_i\delta_i \in < \delta_0, ..., \delta_{i-1} >$, con $i = 2, ..., g$, se cumple también por (ii), $< \delta_0, ..., \delta_g >$ es libre (segundo punto de la *Definición 2.2*). Para acabar veamos las dos condiciones de (III): $\delta_0 > \delta_1$, inmediato por (iv); y $\delta_i n_i > \delta_{i+1}$, para $i = 1, ..., g$, sabemos por (iii) que $\delta_i d_i > \delta_{i+1} d_{i+1}$, para $i = 1, ..., g$ si y solo si $\delta_i \frac{d_i}{d_{i+1}} > \delta_{i+1}$, para $i = 1, ..., g$ si y solo si $\delta_i n_i > \delta_{i+1}$, para $i = 1, ..., g$.

$\square$

4.1. ALGORITMO: ¿Es δ-sucesión?

Antes de presentar el algoritmo que hemos diseñado para responder a la cuestión acerca de si una sucesión es o no una δ-sucesión (según nuestra definición), es importante notar que si la sucesión $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ no es principal o es un sistema generador minimal del semigrupo numérico $< \delta_0, ..., \delta_g >$ (*Lema 4.3.*), entonces podríamos utilizar directamente el comando *IsDeltaSequence(.)* para conocer la respuesta.

¿Es una sucesión $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ *una* δ*-sucesión?*

Para la programación de este algoritmo necesitaremos del uso de listas y semigrupos. Por ello necesitaremos cargar en esta ocasión el paquete *numericalsgps*. Empecemos definiendo e iniciando las variables:

```
gap> sucesion:=[16,24,12,18,15];;
gap> auxsuce:=[];;
gap> semi:=[];;
gap> d:=[];;
gap> n:=[];;
gap> s:=NumericalSemigroupByGenerators([2,3]);;
gap> l:=0;;
gap> i:=0;;
gap> j:=0;;
gap> aux:=0;;
gap> respI:=false;;
gap> respII:=false;;
gap> respIII:=false;;
```

ALGORITMO:

```
gap> esDELTAsucesion:=function(sucesion)
> auxsuce:=[];
> semi:=[];
> d:=[];
> n:=[];
> l:=Length(sucesion);
> respI:=false;                          # Tamaño de la sucesión sucesion
> respII:=false;
> respIII:=false;
> d[1]:=sucesion[1];
> i:=2;
> for i in [2..l] do                     # Vamos calculando los diferentes
> aux:=Gcd(d[i-1],sucesion[i]);          # d_i mientras son almacenados en
> Add(d,aux);                            # la lista d[ ]
> od;
> i:=1;
> for i in [1..(l-1)] do                 # Calculamos los diferentes n_i y
> aux:=(d[i]/d[i+1]);                    # los almacenamos en la lista n[ ]
```

```
> Add(n,aux);
> od;
> i:=1;                                              # CONDICIÓN (I):
> if (d[l]=1)then                                    # Condicional que modifica el va-
> respI:=true;                                       # lor de la varible respI dependien-
> for i in [1.. (l-1)]                               # do de si cumple o no las condi-
> if (n[i] <= 1) then                                # ciones d_{g+1} = 1 y n_i > 1 (para
> respI:=false;                                      # i = 1, ..., g) o no (true o false)
> fi;
> od;
> fi;
> i:=2;                                              # CONDICIÓN (III):
> if ( sucesion[1] > sucesion[2]) then               # Condicional que modifica el va-
> respIII:=true;                                     # lor de la varible respIII depen-
> for i in [2.. (l-1)] do                            # diendo de si cumple o no las con-
> if (n[i-1]*sucesion[i] <= sucesion[i+1]) then      # diciones δ_0 > δ_1 y n_i δ_i > δ_{i+1}
> respIII:=false;                                    # (para i = 1, ..., g) o no (true o
> fi;                                                # false)
> od;
> fi;
> respII:= true;                                     # CONDICIÓN (II):
> i:=2;                                              # Para verificar esta condición
> j:= 1;                                             # necesitaremos el comando Nu-
> semi:=[sucesion[1]];                               # mericalSemigroupByGenera-
> for i in [2.. (l-1)] do                            # tors() que nos irá generando
> Add(semi,sucesion[i]);                             # < δ_0/d_i, ..., δ_i/d_i >. Mediante
> for j in [1.. i] do                                # for y el comando IsSubset()
> auxsuce[j]:=semi[j]/d[i];                          # comprobaremos si δ_i/d_{i+1} per-
> od;                                                # tenece. Si en algún caso no se
> s:= NumericalSemigroupByGenerators(auxsuce);       # cumple, la variable respII toma-
> if (IsSubset(s,[sucesion[i]/d[i+1]])=false) then   # rá el valor false
> respII:=false;
> fi;
> od;
> if (respI=true) and (respII=true) and (respIII=true) then
> return true; las
> else return false;
> fi;                                                # Devuelve true, si las variables
> end;                                               # respI, respII, respII tienen el
function( sucesion ) ... end                         # valor true
```

Comprobemos si las siguiente sucesiones son δ-sucesiones:

(a) $\{16, 24, 12, 18, 15\}$

```
gap> sucesion:=[16,24,12,18,15];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false
```

En este caso nos dice que la sucesión $\{16, 24, 12, 18, 15\}$ no es un δ-sucesión según nuestra definición.

(b) $\{24, 16, 12, 18, 15\}$
gap> sucesion:=[24,16,12,18,15];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
true
Esta si es una δ-sucesión.

(c) $\{15, 10, 6\}$
gap> sucesion:=[15,10,6];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
true
También es una δ-sucesión

(d) $\{6, 4, 3\}$
gap> sucesion:=[6,4,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
true

(e) $\{16, 24, 20, 10, 3\}$
gap> sucesion:=[16,24,20,10,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

(f) $\{24, 16, 20, 10, 3\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
true

(g) $\{24, 16, 20, 10, 6\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,6];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

(h) $\{24, 16, 20, 10, 6, 5\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,6,5];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

(i) $\{24, 16, 20, 10, 6, 3\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,6,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

g(j) $\{24, 16, 20, 10, 4\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,4];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

(k) $\{24, 16, 20, 10, 4, 3\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,4,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
false

(l) $\{24, 16, 20, 10, 3\}$
gap> sucesion:=[24,16,20,10,3];;
gap> esDELTAsucesion(sucesion);
true

5. Casos particulares

A continuación, procederemos a profundizar sobre algunas cuestiones de interés para abordar el propósito de este trabajo.

5.1. δ-sucesiones de tamaño 2

Con $g = 1$ las δ-sucesiones serán de la forma $\{\delta_0, \delta_1\}$, donde $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{N}_0$, $d_1 = \delta_0$, $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1)$, y $n_1 = \frac{d_1}{d_2}$. Veamos las condiciones que deben cumplir δ_0 y δ_1 según la definición de δ-sucesión:

- (I) Se debe cumplir que $d_{g+1} = 1 : d_{g+1} = \boxed{d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = 1}$. Además por la definición de n_i , $n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\delta_0}{1} = \delta_0$. Luego la otra condición será: $n_1 = \boxed{\delta_0 > 1}$.
- (II) En este caso, tras ver la *Observación 3.2.*, se tratará de una condición vacía.
- (III) Tenemos que $\boxed{\delta_0 > \delta_1}$. El resto de condiciones también serán vacías.

Por tanto, las condiciones que deberán cumplir serán:

$$\begin{cases} 1^{\text{a}}\ \delta_0 > 1 \\ 2^{\text{a}}\ \delta_0 > \delta_1 \\ 3^{\text{a}}\ d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = 1 \end{cases}.$$

Llegamos a la conclusión de que δ_0, δ_1 tendrán que ser coprimos.

5.2. δ-sucesiones de tamaño 3

En este caso $g = 2$. Las δ-sucesiones serán de la forma $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Para ver las condiciones que deben satisfacer las sucesiones distingamos entre dos casos:

- <u>$\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ sucesión principal:</u>

  La definición de sucesión principal implica que $\delta_0 = k\delta_1$, con $k \in \mathbb{N}_{>1}$ (la otra opción sería que δ_1 fuese múltiplo de δ_0, pero tomar esta posibilidad sería contradecir la condición (III), $\delta_0 > \delta_1$).
  Sean $d_1 = mcd(\delta_0) = \delta_0 = k\delta_1$, $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = mcd(k\delta_1, \delta_1) = \delta_1$ y $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(\delta_1, \delta_2)$:

  - (I)
    - $\boxed{d_3 = mcd(\delta_1, \delta_2) = 1}$.
    - $$\begin{cases} n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{k\delta_1}{\delta_1} = k > 1, \\ n_2 = \frac{d_2}{d_3} = \frac{\delta_1}{1} = \boxed{\delta_1 > 1}. \end{cases}$$

- (II)
  - $n_2\delta_2 \in <\delta_0, \delta_1>$ si y solo si $\delta_1\delta_2 \in <\delta_0, \delta_1>$.
    Siempre se cumple.
- (III)
  - $\delta_0 > \delta_1$ si y solo si $k\delta_1 > \delta_1$ si y solo si $k > 1$.
  - $n_1\delta_1 > \delta_2$ si y solo si $k\delta_1 > \delta_2$ si y solo si $\boxed{\delta_0 > \delta_2}$.

En este caso la sucesión deberá satisfacer tres condiciones:

$$\begin{cases} 1^{\text{a}}\ d_3 = 1 \\ 2^{\text{a}}\ \delta_1 > 1 \\ 3^{\text{a}}\ \delta_0 > \delta_2 \end{cases} .$$

- $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ sucesión no principal:

  Esto implica que $\delta_0 \neq k\delta_1$, con $k \in \mathbb{N}_{>1}$.
  Sean $d_1 = mcd(\delta_0) = \delta_0$, $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1)$ y $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(d_2, \delta_2)$:

  - (I)
    - $\boxed{d_3 = mcd(d_2, \delta_2) = 1}$.
    - $$\begin{cases} n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \boxed{\frac{\delta_0}{d_2} > 1} , \\ n_2 = \frac{d_2}{d_3} = \frac{d_2}{1} = \boxed{d_2 > 1} . \end{cases}$$

    Más adelante omitiremos la condición $\frac{\delta_0}{d_2} > 1$ por ser implicación directa de otra condición.
  - (II)
    - $n_2\delta_2 \in <\delta_0, \delta_1>$ si y solo si $d_2\delta_2 \in <d_2\frac{\delta_0}{d_2}, d_2\frac{\delta_1}{d_2}>$ si y solo si $\boxed{\delta_2 \in <\frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2}>}$.
  - (III)
    - $\delta_0 > \delta_1$ si y solo si $d_2\frac{\delta_0}{d_2} > d_2\frac{\delta_1}{d_2}$ si y solo si $\boxed{\frac{\delta_0}{d_2} > \frac{\delta_1}{d_2}}$.
    - $n_1\delta_1 > \delta_2$ si y solo si $\boxed{\frac{\delta_0}{d_2}\delta_1 > \delta_2}$.

  Notemos que la condición $\frac{\delta_0}{d_2} > \frac{\delta_1}{d_2}$ implica la condición $\frac{\delta_0}{d_2} > 1$, ya que $\frac{\delta_1}{d_2} \geq 1$.

  Así, la sucesión deberá satisfacer cinco condiciones:

$$\begin{cases} 1^{\text{a}}\ d_2 > 1, \\ 2^{\text{a}}\ d_3 = 1, \\ 3^{\text{a}}\ \frac{\delta_0}{d_2} > \frac{\delta_1}{d_2} \geq 1, \\ 4^{\text{a}}\ \delta_2 \in <\frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2}>, \\ 5^{\text{a}}\ \frac{\delta_0\delta_1}{d_2} > \delta_2. \end{cases}$$

Veamos dos lemas que nos servirán de ayuda:

Lema 5.1. *Una sucesión* $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ *tal que satisfaga*

- *(i)* $\delta_0 = k\delta_1$, *con* $k \in \mathbb{N}_{>1}$,
- *(ii)* $mcd(\delta_1, \delta_2) = 1$,
- *(iii)* $\delta_1 > \delta_2$,

es una δ*-sucesión principal.*

. . . *Demostración* . . .

∘ Comencemos viendo que $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ es una sucesión principal. Por (i) $\delta_0 = k\delta_1$, con $k \in \mathbb{N}_{>1}$ luego δ_0 es múltiplo de δ_1 y así $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ será una sucesión principal.

∘ ¿δ-sucesión?

Sean $d_1 = mcd(\delta_0) = \delta_0 = k\delta_1$ (por (i)), $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = mcd(k\delta_1, \delta_1) = \delta_1$ y $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(\delta_1, \delta_2) = 1$ (por (ii)) , entonces:

- $\underline{1^{\text{a}}\ d_3 = 1}$: visto que se cumple.
- $\underline{2^{\text{a}}\ \delta_1 > 1}$: como $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{N}$ y además $\delta_1 > \delta_2$ (por (iii)) entonces $\delta_1 > 1$.
- $\underline{3^{\text{a}}\ \delta_0 > \delta_2}$: como $\delta_0 = k\delta_1 > \delta_1 > \delta_2$ (por (iii)) .

□

Lema 5.2. *Sean* $p, q, r \in \mathbb{N}_{>1}$ *coprimos dos a dos. Sean* $a = p \cdot q$, $b = p \cdot r$ *y* $c = q \cdot r$. *Entonces* $\{a, b, c\}$ *es una* δ*-sucesión si* $a > b$, *es decir, si* $q > r$.

. . . *Demostración* . . .

Sean $\delta_0 = a$, $\delta_1 = b$ y $\delta_2 = c$, comprobemos que $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ forman una δ-sucesión:

- (I) Tenemos que $d_1 = \delta_0 = pq$, $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = mcd(pq, pr) = p$ y $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(pq, pr, qr) = 1$. Por otro lado $n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{pq}{p} = q > 1$ y $n_2 = \frac{d_2}{d_3} = \frac{p}{1} = p > 1$, ya que son coprimos dos a dos.
- (II) Recordemos que por la *Observación 3.2.* solo será necesario comprobar el caso $i = 2$:

$$n_2\delta_2 = pqr = r(pq) \in < \delta_0, \delta_1 >=< pq, pr > .$$

- (III) Por hipótesis se cumple la condición $\delta_0 > \delta_1$ $(\delta_0 = a > b = \delta_1)$. Además,

$$\delta_2 = qr < n_1\delta_1 = qpr, \text{ ya que } p > 1 .$$

Como satisface las condiciones (I), (II) y (III), entonces $\{a, b, c\}$ será una δ-sucesión.

$\square$

5.3. Cuestiones de interés

5.3.1. ¿Cómo completar con δ_2 una sucesión $\{\delta_0, \delta_1\}$ para obtener una δ-sucesión ?

Queremos buscar un $\delta_2 \in \mathbb{N}_{>1}$ tal que para $\delta_0 > \delta_1$ y con $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) > 1$, la sucesión $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ sea una δ-sucesión. Veamos las condiciones que debe cumplir δ_2 según la definición de δ-sucesión:

- (I) : en primer lugar se debe cumplir que $\boxed{d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = 1}$. Por otro lado, como $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) > 1$, podemos escribir $\delta_0 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2})$ y $\delta_1 = d_2(\frac{\delta_1}{d_2})$, donde el $mcd(\frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2}) = 1$ con $\frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} \in \mathbb{N}$. Así tendremos que $n_1 = \frac{d_1}{d_2} = \boxed{\frac{\delta_0}{d_2} > 1}$. Por último, como $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = 1$ entonces $n_2 = \frac{d_2}{d_3} = \frac{d_2}{1} = d_2 > 1$.
- (II) : $n_2\delta_2 = d_2\delta_2 \in < \delta_0, \delta_1 > = < d_2(\frac{\delta_0}{d_2}), d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) >$ si y solo si $\delta_2 \in < \frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} >$ luego $\boxed{\delta_2 = a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_0}{d_2})}$, con $a_0, a_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$.
- (III) : $\delta_2 < n_1\delta_1 = (\frac{\delta_0}{d_2})\delta_1 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2})$. Si sustituimos δ_2 de (II) en (III) tenemos:

$$\delta_2 < d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) \longrightarrow a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_1}{d_2}) < d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) \longrightarrow a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) < (d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) - a_1)(\frac{\delta_1}{d_2})$$

$$\text{luego } \frac{a_0(\frac{\delta_0}{d_2})}{(d_2 \cdot (\frac{\delta_0}{d_2}) - a_1)} < (\frac{\delta_1}{d_2}) \text{ si y solo si } \boxed{\frac{a_0 \cdot \delta_0}{(\delta_0 - a_1)} < \delta_1} .$$

Analicemos la inecuación $\frac{a_0 \cdot \delta_0}{(\delta_0 - a_1)} < \delta_1$. Nos interesa el cambio de signo del denominador $\delta_0 - a_1$:

- Si $a_1 = 0$: $\frac{a_0\delta_0}{\delta_0} = a_0 < \delta_1$.
- Si $a_1 = \delta_0 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2})$:

$$a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_1}{d_2}) = a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) < d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) \text{ que no tiene sentido.}$$

  Luego no podrá darse este caso.
- Si $a_1 > \delta_0$: supongamos que $a_1 = \delta_0 + 1 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) + 1$, entonces:

$$a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_1}{d_2}) = a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + (d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) + 1)(\frac{\delta_1}{d_2}) =$$

$$a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) + (\frac{\delta_1}{d_2}) < d_2(\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2}) \text{ que tampoco tiene sentido.}$$

  Tampoco será posible este caso.

- Falta por ver el caso en el que $\underline{a_1 \in \{1, ..., \delta_0 - 1\}}$. Supongamos que $a_1 = \delta_0 - 1$:

  $$\frac{a_0\delta_0}{(\delta_0-(\delta_0-1))} = \frac{a_0\delta_0}{(\delta_0-\delta_0+1)} = a_0\delta_0 < \delta_1 \text{ luego } a_0 < \frac{\delta_1}{\delta_0}.$$

  Según nuestra definición de δ-sucesión $\delta_0 > \delta_1$, luego en este caso $a_0 = 0$. Veamos lo que ocurre para otro $a_1 \in \{1, ..., \delta_0 - 1\}$. Sea $n \in \{1, ..., \delta_0 - 1\}$ cualquiera, si $a_1 = \delta_0 - n$ tendremos que:

  $$\frac{a_0\delta_0}{(\delta_0-(\delta_0-n))} = \frac{a_0\delta_0}{(\delta_0-\delta_0+n)} = a_0\delta_0 < n\delta_1 \text{ y así } a_0 < \frac{n\delta_1}{\delta_0} .$$

Llegamos a la siguiente conclusión: $\delta_2 = a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_1}{d_2})$, con $a_0, a_1 \in \mathbb{N}_0$, tal que $a_1 \in \{0, ..., \delta_0 - 1\}$, donde si $a_1 = 0$ entonces $a_0 < \delta_1$ y si $a_1 = \delta_0 - n$, con $n \in \{1, ..., \delta_0 - 1\}$ tendremos que $a_0 < \frac{n\delta_1}{\delta_0}$. Además se debe cumplir que $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = 1$.

Veamos algunos ejemplos (ver *A. APÉNDICE*):

- (*a*) $\{15, 10\}$:

  δ-sucesiones : $\{15, 10, 2\}$, $\{15, 10, 3\}$, $\{15, 10, 4\}$, $\{15, 10, 6\}$, $\{15, 10, 7\}$, $\{15, 10, 8\}$, $\{15, 10, 9\}$, $\{15, 10, 11\}$, $\{15, 10, 12\}$, $\{15, 10, 13\}$, $\{15, 10, 14\}$, $\{15, 10, 16\}$, $\{15, 10, 17\}$, $\{15, 10, 18\}$, $\{15, 10, 19\}$, $\{15, 10, 21\}$, $\{15, 10, 22\}$, $\{15, 10, 23\}$, $\{15, 10, 24\}$, $\{15, 10, 26\}$, $\{15, 10, 27\}$, $\{15, 10, 28\}$ y $\{15, 10, 29\}$.

- (*b*) $\{6, 3\}$:

  δ-sucesiones : $\{6, 3, 1\}$, $\{6, 3, 2\}$, $\{6, 3, 4\}$ y $\{6, 3, 5\}$.

- (*c*) $\{14, 7\}$:

  δ-sucesiones : $\{14, 7, 1\}$, $\{14, 7, 2\}$, $\{14, 7, 3\}$, $\{14, 7, 4\}$, $\{14, 7, 5\}$, $\{14, 7, 6\}$, $\{14, 7, 8\}$, $\{14, 7, 9\}$, $\{14, 7, 10\}$, $\{14, 7, 11\}$, $\{14, 7, 12\}$ y$\{14, 7, 13\}$.

- (*d*) $\{15, 5\}$:

  δ-sucesiones : $\{15, 5, 1\}$, $\{15, 5, 2\}$, $\{15, 5, 3\}$, $\{15, 5, 4\}$, $\{15, 5, 6\}$, $\{15, 5, 7\}$, $\{15, 5, 8\}$, $\{15, 5, 9\}$, $\{15, 5, 11\}$, $\{15, 5, 12\}$, $\{15, 5, 13\}$ y $\{15, 5, 14\}$.

Observación 5.3. *Bajo estas mismas condiciones, por el Lema 5.2., se tiene que la sucesión* $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ *es una* δ*-sucesión para* $\delta_2 = (\frac{\delta_0}{d_2})(\frac{\delta_1}{d_2})$.

5.3.2. Dada una δ-sucesión, $\{\delta_0, \delta_1\}$, ¿de cuántas formas se puede encontrar una δ-sucesión, $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$, de forma que el semigrupo numérico que generen sea el mismo?

Es decir, buscaremos un δ_2 de forma que se cumpla que $< \delta_0, \delta_1 > = < \delta'_0, \delta'_1, \delta'_2 >$, con $\delta_2 \in \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$. Como queremos que generen el mismo semigrupo numérico, $\delta_0, \delta_1 \in \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$. A continuación, presentaremos un resultado que utilizaremos para encontrar las diferentes posibilidades:

Observación 5.4. $< \delta_0, \delta_1 > = < \delta_0, \delta_1, \delta_2 > \iff \delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, *con* $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$.

Por la observación anterior, existirán seis posibilidades:

$$\begin{aligned}
1^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}\\
2^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_0, \delta_2, \delta_1\}\\
3^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_1, \delta_0, \delta_2\}\\
4^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_1, \delta_2, \delta_0\}\\
5^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_2, \delta_0, \delta_1\}\\
6^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} &= \{\delta_2, \delta_1, \delta_0\}
\end{aligned}$$

$\underline{1^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}}$:

Sean $d_1' = mcd(\delta_0') = mcd(\delta_0) = \delta_0$, $d_2' = mcd(\delta_0', \delta_1') = mcd(\delta_0, \delta_1) = d_2 = 1$ y $d_3' = mcd(\delta_0', \delta_1', \delta_2') = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = mcd(1, \delta_2) = 1$, comprobemos las condiciones de una δ-sucesión de tamaño tres:

- (I)
  - $d_3' = 1$.
  - $$\begin{cases} n_1' = \frac{d_1'}{d_2'} = \frac{\delta_0}{1} = \delta_0 > 1. \\ n_2' = \frac{d_2'}{d_3'} = \frac{1}{1} = 1 > 1, \text{ que no tiene sentido .} \end{cases}$$

Como no verifica la condición (III) de la definición de δ-sucesión, $n_i > 1$ para $i \in \{1, 2\}$, descartamos esta posibilidad.

$\underline{2^{\text{o}}\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} = \{\delta_0, \delta_2, \delta_1\}}$:

Sea entonces $\delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $(c_0, c_1) \neq (0, 0)$ y sean $d_1' = mcd(\delta_0') = mcd(\delta_0) = \delta_0$, $d_2' = mcd(\delta_0', \delta_1') = mcd(\delta_0, \delta_2) = mcd(\delta_0, c_0\delta_0 + c_1\delta_1) = mcd(\delta_0, c_1\delta_1) = mcd(\delta_0, c_1)$ y $d_3' = mcd(\delta_0', \delta_1', \delta_2') = mcd(\delta_0, \delta_2, \delta_1) = mcd(1, \delta_2) = 1$:

- (III) : comenzaremos por esta condición para simplificar δ_2.
  - Debe cumplirse que $\delta_0' > \delta_1'$ si y solo si $\delta_0 > \delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$ luego $c_0 = 0$ lo que implica que $\delta_2 = c_1\delta_1$. Por tanto $\boxed{\delta_0 > \delta_2 = c_1\delta_1}$.

  Más tarde continuaremos con (III) .
- (I) :
  - $d_3' = 1$.
  - $$\begin{cases} n_1' = \frac{d_1'}{d_2'} = \boxed{\frac{\delta_0}{d_2'} > 1} . \\ n_2' = \frac{d_2'}{d_3'} = \frac{d_2'}{1} = \boxed{d_2' > 1} . \end{cases}$$

Observar que la condición $\delta_0 > \delta_2$ implica la condición $\frac{\delta_0}{d_2'} > 1$:

$$\delta_0 > \delta_2 \text{ si y solo si } d_2'(\tfrac{\delta_0}{d_2'}) > d_2'(\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_1 \text{ si y solo si}$$
$$(\tfrac{\delta_0}{d_2'}) > (\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_2 \geq 1 \text{ si y solo si } \tfrac{\delta_0}{d_2'} > 1 \ .$$

- (II) :

$$n_2'\delta_2' \in <\delta_0', \delta_1'> \text{ si y solo si } d_2'\delta_1 \in <\delta_0, \delta_2> \text{ si y solo si } d_2'\delta_1 \in$$
$$<d_2'(\tfrac{\delta_0}{d_2'}), d_2'(\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_1> \text{ si y solo si } \delta_1 \in <(\tfrac{\delta_0}{d_2'}), (\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_1> \text{ si y solo si } c_1 = d_2' \ .$$

  Entonces $\delta_2 = d_2'\delta_1$.

- (III) :

  - Faltaba por ver que $n_1'\delta_1' > \delta_2'$ si y solo si $(\frac{\delta_0}{d_2'})\delta_2 > \delta_1$ si y solo si $(\frac{\delta_0}{d_2'})d_2'\delta_1 = \delta_0\delta_1 > \delta_1$.

Luego esta posibilidad será válida para $\delta_2 = d_2'\delta_1$, con $d_2' = mcd(\delta_0, \delta_2) \in \mathbb{N}_{>1}$ y tal que cumpla que $\delta_0 > \delta_2$.

3º$\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} = \{\delta_1, \delta_0, \delta_2\}$:

Descartemos rápidamente esta opción al fijarnos en la condición (III), $\delta_0' > \delta_1'$. En este caso $\delta_0' = \delta_1 > \delta_1' = \delta_0$, que es incoherente con la hipótesis $\{\delta_0, \delta_1\}$ δ-sucesión (ya que por (III) tenemos que $\delta_0 > \delta_1$) .

4º$\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_0\}$:

Esta posibilidad también se descartará fácilmente. Sea $\delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $(c_0, c_1) \neq (0,0)$. Por el primer apartado de la condición (III) tenemos que:

$$\delta_0' > \delta_1' \text{ si y solo si } \delta_1 > \delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1 \text{ entonces } c_0 = 0 = c_1 \text{ luego } \delta_2 = 0 \ .$$

Como δ_2 no puede ser 0, esta opción no será posible.

5º$\{\delta_0', \delta_1', \delta_2'\} = \{\delta_2, \delta_0, \delta_1\}$:

Sea $\delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $(c_0, c_1) \neq (0,0)$ y sean $d_1' = mcd(\delta_0') = mcd(\delta_2) = \delta_2$, $d_2' = mcd(\delta_0', \delta_1') = mcd(\delta_2, \delta_0) = mcd(c_0\delta_0 + c_1\delta_1, \delta_0) = mcd(c_1\delta_1, \delta_0) = mcd(c_1, \delta_0)$ y $d_3' = mcd(\delta_0', \delta_1', \delta_2') = mcd(\delta_2, \delta_0, \delta_1) = mcd(\delta_2, 1) = 1$:

- (I) :

  - $d_3' = 1$.
  - $$\begin{cases} n_1' = \frac{d_1'}{d_2'} = \frac{c_0\delta_0 + c_1\delta_1}{d_2'} = \boxed{c_0(\frac{\delta_0}{d_2'}) + (\frac{c_1}{d_2'})\delta_1 > 1} \ . \\ n_2' = \frac{d_2'}{d_3'} = \frac{d_2'}{1} = \boxed{d_2' > 1} \ . \end{cases}$$

- (II) :

$$n_2'\delta_2' \in <\delta_0',\delta_1'> \text{ si y solo si } d_2'\delta_1 \in <\delta_2,\delta_0> \text{ si y solo si } d_2'\delta_1 \in$$
$$< d_2'(c_0(\tfrac{\delta_0}{d_2'})+(\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_1), d_2'(\tfrac{\delta_0}{d_2'})> \text{ si y solo si } \delta_1 \in <(c_0(\tfrac{\delta_0}{d_2'})+(\tfrac{c_1}{d_2'})\delta_1),(\tfrac{\delta_0}{d_2'})>$$
$$\text{si y solo si } c_1 = d_2' \wedge c_0 = 0\ .$$

  Entonces $\delta_2 = d_2'\delta_1$.

- (III) :
  - $\delta_0' > \delta_1'$ si y solo si $\delta_2 > \delta_0$ si y solo si $\boxed{d_2'\delta_1 > \delta_0}$.
  - Por último $n_1'\delta_1' > \delta_2'$ si y solo si $\delta_1\delta_0 > \delta_1$.

Si $\delta_1 > 1$ esta posibilidad también será válida para $\delta_2 = d_2'\delta_1$, con $d_2' = mcd(\delta_0,\delta_2) \in \mathbb{N}_{>1}$ y tal que cumpla que $\delta_2 > \delta_0$.

$\underline{6^{\text{o}}\{\delta_0',\delta_1',\delta_2'\} = \{\delta_2,\delta_1,\delta_0\}}$:

Sea $\delta_2 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $(c_0,c_1) \neq (0,0)$ y sean $d_1' = mcd(\delta_0') = mcd(\delta_2) = \delta_2$, $d_2' = mcd(\delta_0',\delta_1') = mcd(\delta_2,\delta_1) = mcd(c_0\delta_0 + c_1\delta_1,\delta_1) = mcd(c_0\delta_0,\delta_1) = mcd(c_0,\delta_1)$ y $d_3' = mcd(\delta_0',\delta_1',\delta_2') = mcd(\delta_2,\delta_1,\delta_0) = mcd(\delta_2,1) = 1$:

- (I) :
  - $d_3' = 1$.
  - $$\begin{cases} n_1' = \frac{d_1'}{d_2'} = \frac{c_0\delta_0+c_1\delta_1}{d_2'} = \boxed{(\frac{c_0}{d_2'})\delta_0 + c_1(\frac{\delta_1}{d_2'}) > 1}\ . \\ n_2' = \frac{d_2'}{d_3'} = \frac{d_2'}{1} = \boxed{d_2' > 1}\ . \end{cases}$$
- (II) :

$$n_2'\delta_2' \in <\delta_0',\delta_1'> \text{ si y solo si } d_2'\delta_0 \in <\delta_2,\delta_1> \text{ si y solo si } d_2'\delta_0 \in$$
$$< d_2'((\tfrac{c_0}{d_2'})\delta_0 + c_1(\tfrac{\delta_1}{d_2'})), d_2'(\tfrac{\delta_1}{d_2'})> \text{ si y solo si } \delta_0 \in <((\tfrac{c_0}{d_2'})\delta_0 + c_1(\tfrac{\delta_1}{d_2'})),(\tfrac{\delta_1}{d_2'})>$$
$$\text{si y solo si } c_1 = 0 \wedge c_0 = d_2'\ .$$

  Entonces $\delta_2 = d_2'\delta_0$.

- (III) :
  - $\delta_0' > \delta_1'$ si y solo si $\delta_2 > \delta_1$ si y solo si $d_2'\delta > \delta_1$, cierto por ser $\{\delta_0,\delta_1\}$ δ-sucesión.
  - $n_1'\delta_1' > \delta_2'$ si y solo si $\delta_0\delta_1 > \delta_0$.

Por tanto, si $\delta_1 > 1$ esta última posibilidad será válida para $\delta_2 = d_2'\delta_0$, con $d_2' = mcd(\delta_1,\delta_2) \in \mathbb{N}_{>1}$.

A continuación veamos algunos ejemplos (ver *B. APÉNDICE*):

- (a) $\{11, 9\}$:
  δ-sucesiones: $\{33, 9, 11\}$, $\{99, 9, 11\}$ y $\{99, 11, 9\}$.
- (b) $\{13, 7\}$:
  δ-sucesiones: $\{91, 7, 13\}$ y $\{91, 13, 7\}$.
- (c) $\{16, 7\}$:
  δ-sucesiones: $\{16, 14, 7\}$, $\{112, 7, 16\}$, $\{28, 16, 7\}$, $\{56, 16, 7\}$ y $\{112, 16, 7\}$.
- (d) $\{308, 15\}$:
  δ-sucesiones: $\{308, 30, 15\}$, $\{308, 60, 15\}$, $\{308, 105, 15\}$, $\{308, 165, 15\}$, $\{308, 210, 15\}$, $\{924, 15, 308\}$, $\{1540, 15, 308\}$, $\{4620, 15, 308\}$, $\{330, 308, 15\}$, $\{420, 308, 15\}$, $\{660, 308, 15\}$, $\{1155, 308, 15\}$, $\{2310, 308, 15\}$ y $\{4620, 308, 15\}$.

5.3.3. ¿Cuándo un semigrupo numérico con 3 generadores minimales que no es una δ-sucesión se puede ampliar a una δ-sucesión generando el mismo semigrupo numérico?

Veamos un resultado similar a la *Observación 5.4.* .

Observación 5.5. $< \delta_0, \delta_1, \delta_2 >=< \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 > \iff \delta_3 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2$, *con* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$.

Ahora estamos en condiciones de analizar cuándo un semigrupo numérico con tres generadores minimales que no es una δ-sucesión se puede ampliar a una δ-sucesión generando el mismo semigrupo numérico. Recordemos que una δ-sucesión de tamaño tres debía satisfacer cinco condiciones. Por lo tanto nuestro semigrupo numérico de tres generadores minimales, que no es una δ-sucesión, incumple al menos una de las cinco condiciones. Veamos los diferentes casos:

- <u>1ª Supongamos que $d_2 = mcd(\delta_0, \delta_1) = 1$</u>: añadimos un δ_3 tal que $d_2' = mcd(\delta_0, \delta_3)$ sea mayor que 1. Pero en tal caso $d_3' = mcd(\delta_0, \delta_3, \delta_1) = 1$ y $d_4' = mcd(\delta_0, \delta_3, \delta_1, \delta_2) = 1$ lo que implica que $n_3' = \frac{d_3'}{d_4'} = \frac{1}{1} = 1$ que contradice la condición (I), $n_i > 1$, para $i = 1, ..., g$, de la definición de una δ-sucesión. Por tanto, si incumple la 1ª condición no se podrá completar conservando la misma generación de semigrupo numérico.
- <u>2ª Supongamos que $d_3 = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2) > 1$</u>: en este caso se ve fácilmente que aunque añadamos un δ_3, $d_4' = mcd(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3) \neq 1$ ya que δ_3 es combinación lineal de δ_0, δ_1 y δ_2. Por tanto, nunca podrá satisfacer la condición (I), $d_{g+1} = 1$, de la definición de δ-sucesión. Así que tampoco será posible completar la sucesión conservando el semigrupo numérico generado.
- <u>3ª La condición establece que $\frac{\delta_0}{d_2} > \frac{\delta_1}{d_2} \geq 1$</u>: como estamos ante un sistema generador minimal de un semigrupo numérico siempre existirá una combinación de δ_0, δ_1 y δ_2 para la que esta condición sea cierta sin tener que añadir ningún elemento.

- <u>4^{a} Supongamos que $n_2\delta_2 \notin <\delta_0,\delta_1>$</u>: observar que $n_2\delta_2 \notin <\delta_0,\delta_1> \longrightarrow (\frac{d_2}{d_3})\delta_2 \notin <\delta_0,\delta_1> \longrightarrow d_2\delta_2 \notin <\delta_0,\delta_1>$ $(d_3=1)$ luego $\delta_2 \notin <\frac{\delta_0}{d_2},\frac{\delta_1}{d_2}>$.
Tomaremos sin pérdida de generalidad $\delta_3 = c_0\delta_0 + c_1\delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$ y $(c_0,c_1) \neq (0,0)$. Observar que en este caso $d_2 = mcd(\delta_0,\delta_1) \leq mcd(\delta_0,\delta_3) := d_{03}d_2$ y $mcd(\delta_0,\delta_1) \leq mcd(\delta_1,\delta_3) := d_{13}d_2$, con $d_{03}, d_{13} \in \mathbb{N}$ y tal que $mcd(d_{03},d_{13}) = 1$. Luego nos convendrá cambiar el orden de los elementos de la sucesión. Distingamos tres posiciones:

  - $\{\delta'_0,\delta'_1,\delta'_2,\delta'_3,\} = \{\delta_0,\delta_3,\delta_1,\delta_2\}$:
  Observemos que por la condición (III), $\delta'_0 > \delta'_1$. De la definición de δ-sucesión tenemos que $\delta'_0 > \delta'_1$ si y solo si $\delta_0 > \delta_3$ si y solo si $\delta_0 > c_0\delta_0 + c_1\delta_1$ por tanto $c_0 = 0 \wedge \boxed{\delta_0 > c_1\delta_1}$.
  Sean $\delta'_0 = \delta_0 = d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}})$, $\delta'_1 = \delta_3 = c_{12}d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})$ (donde $c_1 = d_{03}c_{12}$), $\delta'_2 = \delta_1 = d_2(\frac{\delta_1}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$. Entonces $d'_1 = \delta_0$, $d'_2 = mcd(\delta_0,\delta_3) = d_{03}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_0,\delta_3,\delta_1) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_0,\delta_3,\delta_1,\delta_2) = 1$. Veamos si ahora se cumplen las condiciones de una δ-sucesión:
    - (I)
      - $d'_4 = 1$.
      - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{\frac{\delta_0}{d_2d_{03}} > 1} \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d_2d_{03}}{d_2} = \boxed{d_{03} > 1} \\ n'_3 = \frac{d'_3}{d'_4} = \frac{d_2}{1} = d_2 > 1 \end{cases} .$$
    - (II)
      - $n'_2\delta'_2 \in <\delta'_0,\delta'_1>$ si y solo si $d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) \in <d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), c_{12}d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})>$ si y solo si $(\frac{\delta_1}{d_2}) \in <(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), c_{12}(\frac{\delta_1}{d_2})>$ si y solo si $c_{12} = 1$, luego
      $\boxed{\delta_3 = d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})}$.
      - $n'_3\delta'_3 = d_2\delta_2 \in <\delta'_0,\delta'_1,\delta'_2> = <\delta_0,\delta_3,\delta_1> = <d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}), d_2(\frac{\delta_1}{d_2})>$ si y solo si $\delta_2 \in <d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}), (\frac{\delta_1}{d_2})>$ si y solo si $\delta_2 \in <d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), (\frac{\delta_1}{d_2})>$, luego $\delta_2 \in <\frac{\delta_0}{d_2},\frac{\delta_1}{d_2}>$.
      Contradicción en la hipótesis.

  Por tanto, este caso no es posible.

  - $\{\delta'_0,\delta'_1,\delta'_2,\delta'_3,\} = \{\delta_3,\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$:
  Sean $\delta'_0 = \delta_3 = c_{02}d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}) + c_{12}d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})$ (donde $c_0 = d_{03}c_{02}$ y $c_1 = d_{03}c_{12}$),$\delta'_1 = \delta_0 = d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}})$, $\delta'_2 = \delta_1 = d_2(\frac{\delta_1}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$ entonces $d'_1 = \delta_3$, $d'_2 = mcd(\delta_3,\delta_0) = d_{03}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_3,\delta_0,\delta_1) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_3,\delta_0,\delta_1,\delta_2) = 1$. Comprobemos las condiciones de la definición de una δ-sucesión:

- (I)
  - $d'_4 = 1$.
  - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{c_{02}(\frac{\delta_1}{d_2}) + c_{12}(\frac{\delta_1}{d_2}) > 1} \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d_2 d_{03}}{d_2} = \boxed{d_{03} > 1} \\ n'_3 = \frac{d'_3}{d'_4} = \frac{d_2}{1} = d_2 > 1 \end{cases}.$$
- (II)
  - $n'_2\delta'_2 \in < \delta'_0, \delta'_1 >$ si y solo si $d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) \in < c_{02}d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2}) + c_{12}d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}), d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}) >$ si y solo si $(\frac{\delta_1}{d_2}) \in < c_{02}(\frac{\delta_0}{d_2}) + c_{12}(\frac{\delta_1}{d_2}), (\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}) >$ si y solo si $c_{12} = 1 \wedge c_{02} = 0$, luego $\boxed{\delta_3 = d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})}$.
  - $n'_3\delta'_3 = d_2\delta_2 \in < \delta'_0, \delta'_1, \delta'_2 >=< \delta_3, \delta_0, \delta_1 >=< d_2d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}), d_2d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) >$ si y solo si $\delta_2 \in < d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2}), d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), (\frac{\delta_1}{d_2}) >$ si y solo si $\delta_2 \in < d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2d_{03}}), (\frac{\delta_1}{d_2}) >$, luego $\delta_2 \in < \frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} >$.
    Contradicción en la hipótesis.

Tampoco este caso será posible. Veamos el último caso.

- $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3,\} = \{\delta_3, \delta_1, \delta_0, \delta_2\}$:
  Sean $\delta'_0 = \delta_3 = c_{02}d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2}) + c_{12}d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2})$ (donde $c_0 = d_{13}c_{02}$ y $c_1 = d_{13}c_{12}$), $\delta'_1 = \delta_1 = d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2d_{13}})$, $\delta'_2 = \delta_0 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$ entonces $d'_1 = \delta_3$, $d'_2 = mcd(\delta_3, \delta_1) = d_{13}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_3, \delta_1, \delta_0) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_3, \delta_1, \delta_0, \delta_2) = 1$.
  Veamos si ahora se cumplen las condiciones de una δ-sucesión:
  - (I)
    - $d'_4 = 1$.
    - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{c_{02}(\frac{\delta_1}{d_2}) + c_{12}(\frac{\delta_1}{d_2}) > 1} \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d_2 d_{13}}{d_2} = \boxed{d_{13} > 1} \\ n'_3 = \frac{d'_3}{d'_4} = \frac{d_2}{1} = d_2 > 1 \end{cases}.$$
  - (II)
    - $n'_2\delta'_2 \in < \delta'_0, \delta'_1 >$ si y solo si $d_{13}d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) \in < c_{02}d_2d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2}) + c_{12}d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2}), d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2d_{13}}) >$ si y solo si $(\frac{\delta_0}{d_2}) \in < c_{02}(\frac{\delta_0}{d_2}) + c_{12}(\frac{\delta_1}{d_2}), (\frac{\delta_1}{d_2d_{03}}) >$ si y solo si $c_{12} = 0 \wedge c_{02} = 1$, luego $\boxed{\delta_3 = d_2d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2})}$.
    - $n'_3\delta'_3 = d_2\delta_2 \in < \delta'_0, \delta'_1, \delta'_2 >=< \delta_3, \delta_1, \delta_0 >=< d_2d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2}), d_2d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2d_{13}}), d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) >$ si y solo si $\delta_2 \in < d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2}), d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2d_{13}}), (\frac{\delta_0}{d_2}) >$ si y solo si $\delta_2 \in < d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2d_{13}}), (\frac{\delta_1}{d_2}) >$, luego $\delta_2 \in < \frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} >$.
      Contradicción en la hipótesis.

  Este caso también es descartado.

Por tanto, tampoco será posible completar la sucesión conservando el semigrupo numérico generado.

- 5^a Para acabar supondremos que $\frac{\delta_0\delta_1}{d_2} < \delta_2$: con la misma notación que antes distingamos los tres casos similares:

  - $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \} = \{\delta_0, \delta_3, \delta_1, \delta_2\}$:
    Sean $\delta'_0 = \delta_0 = d_2 d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2 d_{03}})$, $\delta'_1 = \delta_3 = d_2 d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})$, $\delta'_2 = \delta_1 = d_2(\frac{\delta_1}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$ entonces $d'_1 = \delta_0$, $d'_2 = mcd(\delta_0, \delta_3) = d_{03}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_0, \delta_3, \delta_1) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_0, \delta_3, \delta_1, \delta_2) = 1$. Veamos si ahora se cumplen las condiciones de una δ-sucesión:
    - (III)
      - $n'_2\delta'_2 = d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) > \delta'_3 = \delta_2$. Pero $n'_2\delta'_2 = d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) \leq \frac{\delta_0\delta_1}{d_2} < \delta_2$.

      Luego no se cumple este punto.

    Descartamos este caso.

  - $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \} = \{\delta_3, \delta_0, \delta_1, \delta_2\}$:
    Sean $\delta'_0 = \delta_3 = d_2 d_{03}(\frac{\delta_1}{d_2})$, $\delta'_1 = \delta_0 = d_2 d_{03}(\frac{\delta_0}{d_2 d_{03}})$, $\delta'_2 = \delta_1 = d_2(\frac{\delta_1}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$ entonces $d'_1 = \delta_3$, $d'_2 = mcd(\delta_3, \delta_0) = d_{03}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_3, \delta_0, \delta_1) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_3, \delta_0, \delta_1, \delta_2) = 1$. Veamos si ahora se cumplen las condiciones de una δ-sucesión:
    - (III)
      - $n'_2\delta'_2 = d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) > \delta'_3 = \delta_2$. Pero $n'_2\delta'_2 = d_{03}d_2(\frac{\delta_1}{d_2}) \leq \frac{\delta_0\delta_1}{d_2} < \delta_2$.

      Luego no se cumple este punto.

    Descartamos nuevamente este caso.

  - $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \} = \{\delta_3, \delta_1, \delta_0, \delta_2\}$:
    Sean $\delta'_0 = \delta_3 = d_2 d_{13}(\frac{\delta_0}{d_2})$, $\delta'_1 = \delta_1 = d_2 d_{13}(\frac{\delta_1}{d_2 d_{13}})$, $\delta'_2 = \delta_0 = d_2(\frac{\delta_0}{d_2})$ y $\delta'_3 = \delta_2$ entonces $d'_1 = \delta_3$, $d'_2 = mcd(\delta_3, \delta_1) = d_{13}d_2$, $d'_3 = mcd(\delta_3, \delta_1, \delta_0) = d_2$ y $d'_4 = mcd(\delta_3, \delta_1, \delta_0, \delta_2) = 1$. Veamos si ahora se cumplen las condiciones de una δ-sucesión:
    - (III)
      - $n'_2\delta'_2 = d_{13}d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) > \delta'_3 = \delta_2$. Pero $n'_2\delta'_2 = d_{13}d_2(\frac{\delta_0}{d_2}) \leq \frac{\delta_0\delta_1}{d_2} < \delta_2$.

      Luego no se cumple este punto.

    Este caso también es descartado.

  Determinamos nuevamente que no será posible completar la sucesión conservando el semigrupo numérico generado.

Por tanto, llegamos a la conclusión de que bajo ninguna circunstancia, un semigrupo numérico con 3 generadores minimales que no es una δ-sucesión puede ser ampliado a una δ-sucesión generando el mismo semigrupo numérico.

Relacionado con esta cuestión nos surge la siguiente pregunta:

¿Un semigrupo numérico con tres generadres minimales que no es una δ-sucesión se puede ampliar a una δ-sucesión?

Veamos mediante un ejemplo que si se puede. Sea el sistema generador minimal $< 42, 30, 38 >$, observar que no es una δ-sucesión ya que incumple la 2^{a} condición: $d_3 = mcd(42, 30, 38) = 2 \neq 1$. Ampliemos a la sucesión $\{42, 30, 38, 57\}$, ¿Será una δ-sucesión?

Tenemos que $d_1 = 42$, $d_2 = mcd(42, 30) = 6$, $d_3 = mcd(42, 30, 38) = 2$ y $d_4 = mcd(42, 30, 38, 57) = 1$ entonces $n_1 = \frac{42}{6} = 7 > 1$, $n_2 = \frac{6}{2} = 3 > 1 \wedge n_3 = \frac{2}{1} = 2 > 1$, queda comprobado que cumple la cndición (I). Veamos (II): $n_2\delta_2 \in < \delta_0, \delta_1 >$ si y solo si $114 \in < 42, 30 >$, cierto, $114 = 2 \cdot 42 + 30$; y $n_3\delta_3 \in < \delta_0, \delta_1, \delta_2 >$ si y solo si $114 \in < 42, 30, 38 >$, cierto, $114 = 2 \cdot 42 + 30 = 3 \cdot 38$. Acbemos comprobando (III):(es obvio que $\delta_0 > \delta_1, 42 > 30$) $n_1\delta_1 > \delta_2$ si y solo si $210 > 38$, cierto; y $n_2\delta_2 > \delta_3$ si y solo si $114 > 57$.

Por tanto, la sucesión $\{42, 30, 38, 57\}$ es una δ-sucesión.

5.3.4. ¿Cuándo es la permutación de una δ-sucesión de tamaño 3 también una δ-sucesión?

Supongamos que tenemos la δ-sucesión $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, queremos encontrar todas las posibles δ-sucesiones, $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$, formada por permutaciones de los elementos de la primera δ-sucesión.

Sabemos por (III), $\delta_0 > \delta_1$, que solo existirán las siguientes posibilidades:

$$
\begin{aligned}
1^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} &= \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} \\
2^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} &= \{\delta_0, \delta_2, \delta_1\} \\
3^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} &= \{\delta_1, \delta_2, \delta_0\} \\
4^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} &= \{\delta_2, \delta_0, \delta_1\} \\
5^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} &= \{\delta_2, \delta_1, \delta_0\}
\end{aligned}
$$

$\underline{1^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}}$:

Trivialmente la permutación identidad siempre será posible.

$\underline{2^{o}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_0, \delta_2, \delta_1\}}$:

Sean $d'_1 = mcd(\delta'_0) = mcd(\delta_0) = \delta_0$, $d'_2 = mcd(\delta'_0, \delta'_1) = mcd(\delta_0, \delta_2)$, y $d'_3 = mcd(\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2) = mcd(\delta_0, \delta_2, \delta_1) = d_3 = 1$. Veamos las condiciones,

- (I)
  - $d'_3 = 1$.
  - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{\frac{\delta_0}{d'_2} > 1}. \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d'_2}{1} = \boxed{d'_2 > 1}. \end{cases}$$

  Obtenemos dos condiciones. Más adelante veremos que una puede ser omitida.

- (II)
  - $n'_2\delta'_2 \in <\delta'_0, \delta'_1>$ si y solo si $d'_2\delta_1 \in <\delta_0, \delta_2>$ si y solo si $d'_2 d_2 \frac{\delta_1}{d_2} \in < d'_2\frac{\delta_0}{d'_2}, d'_2\frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $d_2\frac{\delta_1}{d_2} \in < \frac{\delta_0}{d'_2}, \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $d_2\frac{\delta_1(\frac{\delta_0}{d_2})}{\delta_0} \in < \frac{(d_2\frac{\delta_0}{d_2})}{d'_2}, \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_1}{\delta_0}(d_2\frac{\delta_0}{d_2}) \in < \frac{1}{d'_2}(d_2\frac{\delta_0}{d_2}), \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_1 d'_2}{\delta_0} \in \mathbb{N}$.
    Por tanto tendremos la condición $\boxed{\delta_1 \text{ divisible por } \frac{\delta_0}{d'_2}}$.

$$\begin{pmatrix} d_2\frac{\delta_0}{d_2} = \delta_0 = d'_2\frac{\delta_0}{d'_2} \longrightarrow \frac{\delta_0}{d'_2} = \frac{(d_2\frac{\delta_0}{d_2})}{d'_2} \\ \frac{\delta_1}{(\frac{\delta_1}{d_2})} = d_2 = \frac{\delta_0}{(\frac{\delta_0}{d_2})} \longrightarrow (\frac{\delta_1}{d_2}) = \frac{\delta_1(\frac{\delta_0}{d_2})}{\delta_0} \end{pmatrix}$$

  Nueva condición.

- (III)
  - $\delta'_0 > \delta'_1$ si y solo si $\boxed{\delta_0 > \delta_2}$.
  - $n'_1\delta'_1 > \delta'_2$ si y solo si $\frac{\delta_0}{d'_2}\delta_2 > \delta_1$ si y solo si $\frac{\delta_0}{d'_2}d'_2(\frac{\delta_2}{d'_2}) > \delta_1$ si y solo si $\frac{\delta_2}{d'_2} > \frac{\delta_1}{\delta_0}$.
    Siempre se dará ya que $\delta_0 > \delta_1$ lo que implica que $\frac{\delta_1}{\delta_0} < 1$.

Notar que la condición $\delta_0 > \delta_2$ implica la condición $\frac{\delta_0}{d'_2} > 1$:

$$\delta_0 > \delta_2 \text{ si y solo si } d'_2(\frac{\delta_0}{d'_2}) > d'_2(\frac{\delta_2}{d'_2}) \text{ si y solo si } (\frac{\delta_0}{d'_2}) > (\frac{\delta_2}{d'_2}) \geq 1 \text{ entonces } \frac{\delta_0}{d'_2} > 1 \ .$$

Luego para poder realizar la permutación 2ª la δ-sucesión deberá satisfacer tres condiciones.

<u>3º $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_0\}$</u>:

Sean $d'_1 = mcd(\delta'_0) = mcd(\delta_1) = \delta_1$, $d'_2 = mcd(\delta'_0, \delta'_1) = mcd(\delta_1, \delta_2)$, y $d'_3 = mcd(\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2) = mcd(\delta_1, \delta_2, \delta_0) = d_3 = 1$. Veamos las condiciones,

- (I)
  - $d'_3 = 1$.
  - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{\frac{\delta_1}{d'_2} > 1}. \\ \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d'_2}{1} = \boxed{d'_2 > 1}. \end{cases}$$

  Obtenemos dos condiciones, como antes veremos que una puede ser omitida.
- (II)
  - $n'_2\delta'_2 \in <\delta'_0, \delta'_1>$ si y solo si $d'_2\delta_0 \in <\delta_1, \delta_2>$ si y solo si $d'_2 d_2\frac{\delta_0}{d_2} \in < d'_2\frac{\delta_1}{d'_2}, d'_2\frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $d_2\frac{\delta_0}{d_2} \in < \frac{\delta_1}{d'_2}, \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $d_2\frac{\delta_0(\frac{\delta_1}{d_2})}{\delta_1} \in < \frac{(d_2\frac{\delta_1}{d_2})}{d'_2}, \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_0}{\delta_1}(d_2\frac{\delta_1}{d_2}) \in < \frac{1}{d'_2}(d_2\frac{\delta_1}{d_2}), \frac{\delta_2}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_0 d'_2}{\delta_1} \in \mathbb{N}$.

    Y así tendremos la condición $\boxed{\delta_0 \text{ divisible por } \frac{\delta_1}{d'_2}}$.

    $$\begin{pmatrix} d_2\frac{\delta_1}{d_2} = \delta_1 = d'_2\frac{\delta_1}{d'_2} \longrightarrow \frac{\delta_1}{d'_2} = \frac{(d_2\frac{\delta_1}{d_2})}{d'_2} \\ \\ \frac{\delta_1}{(\frac{\delta_1}{d_2})} = d_2 = \frac{\delta_0}{(\frac{\delta_0}{d_2})} \longrightarrow (\frac{\delta_0}{d_2}) = \frac{\delta_0(\frac{\delta_1}{d_2})}{\delta_1} \end{pmatrix}$$

  Nueva condición.
- (III)
  - $\delta'_0 > \delta'_1$ si y solo si $\boxed{\delta_1 > \delta_2}$.
  - $n'_1\delta'_1 > \delta'_2$ si y solo si $\boxed{\frac{\delta_1\delta_2}{d'_2} > \delta_0}$.

Notar que como antes, la condición $\delta_1 > \delta_2$ implica la condición $\frac{\delta_1}{d'_2} > 1$. Demostración similar.

En este caso para realizar la permutación 3ª la δ-sucesión deberá satisfacer cuatro condiciones.

<u>4º $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_2, \delta_0, \delta_1\}$:</u>

Sean $d'_1 = mcd(\delta'_0) = mcd(\delta_2) = \delta_2$, $d'_2 = mcd(\delta'_0, \delta'_1) = mcd(\delta_2, \delta_0)$, y $d'_3 = mcd(\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2) = mcd(\delta_2, \delta_0, \delta_1) = d_3 = 1$. Veamos las condiciones,

- (I)
  - $d'_3 = 1$.
  - $$\begin{cases} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{\frac{\delta_2}{d'_2} > 1}. \\ \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d'_2}{1} = \boxed{d'_2 > 1}. \end{cases}$$

Dos condiciones de las cuales una será omitida.

- (II)

  - $n'_2\delta'_2 \in < \delta'_0, \delta'_1 >$ si y solo si $d'_2\delta_1 \in < \delta_2, \delta_0 >$ si y solo si $d'_2 d_2 \frac{\delta_1}{d_2} \in < d'_2 \frac{\delta_2}{d'_2}, d'_2 \frac{\delta_0}{d'_2} >$ si y solo si $d_2 \frac{\delta_1}{d_2} \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{\delta_0}{d'_2} >$ si y solo si $d_2 \frac{\delta_1(\frac{\delta_0}{d_2})}{\delta_0} \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{(d_2\frac{\delta_0}{d_2})}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_1}{\delta_0}(d_2\frac{\delta_0}{d_2}) \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{1}{d'_2}(d_2\frac{\delta_0}{d_2}) >$ si y solo si $\frac{\delta_1 d'_2}{\delta_0} \in \mathbb{N}$.

    Deberá cumplir $\boxed{\delta_1 \text{ divisible por } \frac{\delta_0}{d'_2}}$.

$$\left(\begin{array}{l} d_2\frac{\delta_0}{d_2} = \delta_0 = d'_2\frac{\delta_0}{d'_2} \longrightarrow \frac{\delta_0}{d'_2} = \frac{(d_2\frac{\delta_0}{d_2})}{d'_2} \\ \frac{\delta_1}{(\frac{\delta_1}{d_2})} = d_2 = \frac{\delta_0}{(\frac{\delta_0}{d_2})} \longrightarrow (\frac{\delta_1}{d_2}) = \frac{\delta_1(\frac{\delta_0}{d_2})}{\delta_0} \end{array}\right)$$

Nueva condición.

- (III)

  - $\delta'_0 > \delta'_1$ si y solo si $\boxed{\delta_2 > \delta_0}$.
  - $n'_1\delta'_1 > \delta'_2$ si y solo si $\frac{\delta_2}{d'_2}\delta_0 > \delta_1$.

    Siempre se dará ya que $\delta_0 > \delta_1$ implica $\frac{\delta_2}{d'_2}\delta_0 > \delta_1$, recordemos que $\frac{\delta_2}{d'_2} \geq 1$.

La condición $\frac{\delta_2}{d'_2} > 1$ será omitida por ser implicación directa de la condición $\delta_2 > \delta_0$.

Entonces para poder realizar la permutación 4ª la δ-sucesión deberá satisfacer tres condiciones.

<u>5º $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_2, \delta_1, \delta_0\}$:</u>

Sean $d'_1 = mcd(\delta'_0) = mcd(\delta_2) = \delta_2$, $d'_2 = mcd(\delta'_0, \delta'_1) = mcd(\delta_2, \delta_1)$, y $d'_3 = mcd(\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2) = mcd(\delta_2, \delta_1, \delta_0) = d_3 = 1$. Veamos las condiciones,

- (I)

  - $d'_3 = 1$.
  - $$\left\{\begin{array}{l} n'_1 = \frac{d'_1}{d'_2} = \boxed{\frac{\delta_2}{d'_2} > 1}. \\ n'_2 = \frac{d'_2}{d'_3} = \frac{d'_2}{1} = \boxed{d'_2 > 1}. \end{array}\right.$$

Dos condiciones, de las que omitiremos una.

- (II)

  - $n'_2\delta'_2 \in < \delta'_0, \delta'_1 >$ si y solo si $d'_2\delta_0 \in < \delta_2, \delta_1 >$ si y solo si $d'_2 d_2 \frac{\delta_0}{d_2} \in < d'_2 \frac{\delta_2}{d'_2}, d'_2 \frac{\delta_1}{d'_2} >$ si y solo si $d_2 \frac{\delta_0}{d_2} \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{\delta_1}{d'_2} >$ si y solo si $d_2 \frac{\delta_0(\frac{\delta_1}{d_2})}{\delta_1} \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{(d_2\frac{\delta_1}{d_2})}{d'_2} >$ si y solo si $\frac{\delta_0}{\delta_1}(d_2\frac{\delta_1}{d_2}) \in < \frac{\delta_2}{d'_2}, \frac{1}{d'_2}(d_2\frac{\delta_1}{d_2}) >$ si y solo si $\frac{\delta_0 d'_2}{\delta_1} \in \mathbb{N}$.

Por tanto $\boxed{\delta_0 \text{ divisible por } \frac{\delta_1}{d_2'}}$.

$$\left(\begin{array}{l} d_2\frac{\delta_1}{d_2} = \delta_1 = d_2'\frac{\delta_1}{d_2'} \longrightarrow \frac{\delta_1}{d_2'} = \frac{(d_2\frac{\delta_1}{d_2})}{d_2'} \\ \frac{\delta_1}{(\frac{\delta_1}{d_2})} = d_2 = \frac{\delta_0}{(\frac{\delta_0}{d_2})} \longrightarrow (\frac{\delta_0}{d_2}) = \frac{\delta_0(\frac{\delta_1}{d_2})}{\delta_1} \end{array} \right)$$

- (III)

  - $\delta_0' > \delta_1'$ si y solo si $\boxed{\delta_2 > \delta_1}$.
  - $n_1'\delta_1' > \delta_2'$ si y solo si $\boxed{\frac{\delta_1\delta_2}{d_2'} > \delta_0}$.

La condición $\delta_2 > \delta_1$ implica la condición $\frac{\delta_2}{d_2'} > 1$.

De esta forma, para poder realizar la permutación 5ª la δ-sucesión deberá satisfacer cuatro condiciones.

Procedamos a esquematizar lo visto hasta ahora. Sea una δ-sucesión $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, ¿qué posibles permutaciones de sus elementos nos darán también una δ-sucesión?

Realicemos una posible clasificación:

(a) Si $\delta_2 > \delta_0 > \delta_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } mcd(\delta_2, \delta_0) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_1 \text{ divisible por } \frac{\delta_0}{mcd(\delta_0,\delta_2)} \end{array} \right. \Bigg| \longrightarrow 4^{\text{o}}\{\delta_2, \delta_0, \delta_1\} \\ \\ \circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } mcd(\delta_2, \delta_1) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_0 \text{ divisible por } \frac{\delta_1}{mcd(\delta_1,\delta_2)} \\ \wedge \\ \frac{\delta_2\delta_1}{mcd(\delta_2,\delta_1)} > \delta_0 \end{array} \right. \Bigg| \longrightarrow 5^{\text{o}}\{\delta_2, \delta_1, \delta_0\} \\ \\ \circ \left\{ \ 1^{\text{o}}\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} \right. \end{array} \right.$$

(b) Si $\delta_0 > \delta_2 > \delta_1$:

$$\begin{cases} \circ \begin{cases} \text{Si } mcd(\delta_2,\delta_0) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_1 \text{ divisible por } \frac{\delta_0}{mcd(\delta_0,\delta_2)} \end{cases} \Bigg| \longrightarrow 2^{o}\{\delta_0,\delta_2,\delta_1\} \\ \\ \circ \begin{cases} \text{Si } mcd(\delta_2,\delta_1) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_0 \text{ divisible por } \frac{\delta_1}{mcd(\delta_1,\delta_2)} \\ \wedge \\ \frac{\delta_2\delta_1}{mcd(\delta_2,\delta_1)} > \delta_0 \end{cases} \Bigg| \longrightarrow 5^{o}\{\delta_2,\delta_1,\delta_0\} \\ \\ \circ \ \{ \ 1^{o}\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\} \end{cases}$$

(c) Si $\delta_0 > \delta_1 > \delta_2$:

$$\begin{cases} \circ \begin{cases} \text{Si } mcd(\delta_2,\delta_0) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_1 \text{ divisible por } \frac{\delta_0}{mcd(\delta_0,\delta_2)} \end{cases} \Bigg| \longrightarrow 2^{o}\{\delta_0,\delta_2,\delta_1\} \\ \\ \circ \begin{cases} \text{Si } mcd(\delta_2,\delta_1) > 1 \\ \wedge \\ \text{Si } \delta_0 \text{ divisible por } \frac{\delta_1}{mcd(\delta_1,\delta_2)} \\ \wedge \\ \frac{\delta_2\delta_1}{mcd(\delta_2,\delta_1)} > \delta_0 \end{cases} \Bigg| \longrightarrow 3^{o}\{\delta_1,\delta_2,\delta_0\} \\ \\ \circ \ \{ \ 1^{o}\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\} \end{cases}$$

Procedamos con algunos ejemplos (ver *C. APÉNDICE*):

- *a*) $\{15,10,6\}$ (opción (b)):
  Permutaciones posibles: $\{15,6,10\},\{10,6,15\}$ y $\{15,10,6\}$.
- *b*) $\{8,6,9\}$ (opción (a)):
  Permutaciones posibles: $\{9,6,8\}$ y $\{8,6,9\}$.
- *c*) $\{6,3,5\}$ (opción (b)):
  Permutaciones posibles: $\{6,3,5\}$.
- *d*) $\{6,4,3\}$ (opción (c)):
  Permutaciones posibles: $\{6,3,4\}$ y $\{6,4,3\}$.

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos resuelto diversas cuestiones computacionales algebraicas de las δ-sucesiones.

Una vez planteada nuestra definición de δ-sucesiones hemos presentado algunas propiedades tomadas de [1] estableciendo así una relación directa con la teoría de semigrupos numéricos, más en concreto con los semigrupos planares.

Con el marco teórico planteado, tomamos nuestro primer contacto con la parte computacional de la memoria. Demostramos que nuestra definición de δ-sucesiones y la implementada en *GAP* no son equivalentes. La diferencia se basa en la condición $((iv))$ $\delta_0 > \delta_1 > d_2 > ... > d_{g+1}$ que implica no aceptar como δ-sucesiones todas aquellas sucesiones que sean principales (según nuestra definición, sí se puede dar el caso). Por esta razón decidimos crear nuestro propio algoritmo que nos diga si una sucesión es una δ-sucesión. Vemos un caso concreto en el que las dos definiciones son equivalentes: cuando $\{\delta_0, ..., \delta_g\}$ formen un sistema generador minimal.

Profundizando en los casos particulares de δ-sucesiones de tamaño 2 y 3 obtenemos las siguientes conclusiones:

- Para que una δ-sucesión de tamaño 2 sea una δ-sucesión δ_0 y δ_1 deberán ser primos entre sí.
- En δ-sucesiones de tamaño 3 haremos una distinción entre las sucesiones principales de las no principales. Las sucesiones que sean principales deberán satisfacer tres condiciones: $d_3 = 1$, $\delta_1 > 1$ y $\delta_0 > \delta_2$. Si de lo contrario son sucesiones no principales deberán satisfacer cinco condiciones: $d_2 > 1$, $d_3 = 1$, $\frac{\delta_0}{d_2} > \frac{\delta_1}{d_2} \geq 1$, $\delta_2 \in < \frac{\delta_0}{d_2}, \frac{\delta_1}{d_2} >$ y $\frac{\delta_0 \delta_1}{d_2} > \delta_2$.

Acabamos la memoria con el estudio de cuatro cuestiones algebraicas que son llevadas al ámbito computaciones en los apéndices. Vemos lo que nos aportan estas cuestiones:

- Si tenemos una sucesión $\{\delta_0, \delta_1\}$ nos interesará saber que debe satisfacer un número natural δ_2, para que $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ sea una δ-sucesión. Llegamos a la siguiente conclusión: δ_2 debe cumplir que $d_3 = 1$ y ser de la forma $\delta_2 = a_0(\frac{\delta_0}{d_2}) + a_1(\frac{\delta_1}{d_2})$, con $a_0, a_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $a_1 \in \{0, ..., \delta_0 - 1\}$, donde si $a_1 = 0$ entonces $a_0 < \delta_1$ y si $a_1 = \delta_0 - n$, con $n \in \{1, ..., \delta_0 - 1\}$ tendremos que $a_0 < \frac{n\delta_1}{\delta_0}$.
- Dada una δ-sucesión, $\{\delta_0, \delta_1\}$, ¿de cuántas formas se puede encontrar una δ-sucesión, $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$, de forma que el semigrupo numérico que generen sea el mismo? En primer lugar se debe cumplir que $\delta_0, \delta_1 \in \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$ y que el nuevo generador sea de la forma $\delta_2 c_0 \delta_0 + c_1 \delta_1$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{N}_0$. Como conclusión llegamos a que existen tres posibilidades según la posición de sus generadores y existen dos posibilidades para el valor de δ_2: $\delta_2 = (mcd(\delta_1, \delta_2))\delta_0$, con $mcd(\delta_1, \delta_2) > 1$ y $\delta_2 = (mcd(\delta_0, \delta_2))\delta_1$, con $mcd(\delta_0, \delta_2) > 1$.
- ¿Cuándo un semigrupo numérico con 3 generadores minimales que no es una δ-sucesión se puede ampliar a una δ-sucesión generando el mismo semigrupo numérico? En este caso las condiciones nos llevan a la conclusión de que bajo ninguna

circunstancia será posibles. Sin embargo, si omitimos el hecho de que tenga que generar el mismo semigrupo numérico si será posible.

- La última cuestión de interés se centra en establecer las condiciones y encontrar las δ-sucesiones que respondan a la siguiente pregunta: ¿Cuándo es la permutación de una δ-sucesión de tamaño 3 también una δ-sucesión? Existen cinco posible permutaciones, las cuales deben satisfacer varias condiciones. En la *páginas:* $42 - 43$ hay realizada una pequeña clasificación esquemática de ellas.

A. APÉNDICE

A continuación mostramos un algoritmo diseñado para proporcionar una respuesta inmediata a la *cuestión 4.3.1.* .

Supongamos que tenemos una sucesión $\{\delta_0, \delta_1\}$ *tal que el* $mcd(\delta_0, \delta_1) = m > 1$, *¿cuántas formas distintas existen de completar la sucesión anterior mediante un* δ_2 *de forma que* $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ *sea una* δ*-sucesión?*

Veamos un algoritmo que nos lo calcule. Comencemos definiendo las variables y dándoles valores iniciales. Sea $a := \delta_0$ y $b := \delta_1$:

```
gap> a:=15;;
gap> b:=10;;
gap> aa:=0;;
gap> bb:=0;;
gap> c:=0;;
gap> i:=0;;
gap> j:=0;;
gap> n:=0;;
gap> m:=0;;
gap> NamesUserGVars();
["a","aa","b","bb","c","i","j","m","n"]
```

ALGORITMO:

```
gap> completacion:=function(a,b)
> m:=Gcd(a,b);
> aa:=a/m;
> bb:=b/m;
> i:=0;
> for i in [0..(a-1)] do
> if (i=0) then
> j:=1;
> for j in [1..(b-1)] do
> c:=j*aa;
> if (Gcd(c,a,b)=1) then
> Print(-c);
> fi;
> od;
> fi;
> if (i > 0) and ((a-1) > i) then
> n:=a-i;
> j:=0;
> for j in [0..b] do
> if (j < (n*b/a)) then
> c:=(i*bb)+(j*aa);
```

```
> if (Gcd(c,a,b)=1) then
> Print(-c);
> fi;
> fi;
> od;
> fi;
> od;
> end;
function( a, b ) ... end
```

Veamos algunos ejemplos:

a) $\{15, 10\}$
gap> completacion(15,10);
-3-6-9-12-18-21-24-27-2-8-11-14-17-23-26-29-4-7-13-16-19-22-28-6-9-12-18-21-24-27-8-11-14-17-23-26-29-13-16-19-22-28-12-18-21-24-27-14-17-23-26-29-16-19-22-28-18-21-24-27-23-26-29-22-28-24-27-26-29
Luego las δ-sucesiones formadas serán $\{15, 10, 2\}$, $\{15, 10, 3\}$, $\{15, 10, 4\}$, $\{15, 10, 6\}$, $\{15, 10, 7\}$, $\{15, 10, 8\}$, $\{15, 10, 9\}$, $\{15, 10, 11\}$, $\{15, 10, 12\}$, $\{15, 10, 13\}$, $\{15, 10, 14\}$, $\{15, 10, 16\}$, $\{15, 10, 17\}$, $\{15, 10, 18\}$, $\{15, 10, 19\}$, $\{15, 10, 21\}$, $\{15, 10, 22\}$, $\{15, 10, 23\}$, $\{15, 10, 24\}$, $\{15, 10, 26\}$, $\{15, 10, 27\}$, $\{15, 10, 28\}$ y $\{15, 10, 29\}$.

b) $\{6, 3\}$
gap> completacion(6,3);
-2-4-1-5-2-4-5-4
En este caso serán $\{6, 3, 1\}$, $\{6, 3, 2\}$, $\{6, 3, 4\}$ y $\{6, 3, 5\}$.

c) $\{14, 7\}$
gap> completacion(14,7);
-2-4-6-8-10-12-1-3-5-9-11-13-2-4-6-8-10-12-3-5-9-11-13-4-6-8-10-12-5-9-11-13-6-8-10-12-9-11-13-8-10-12-9-11-13-10-12-11-13-12
Tendremos las siguientes δ-sucesiones $\{14, 7, 1\}$, $\{14, 7, 2\}$, $\{14, 7, 3\}$, $\{14, 7, 4\}$, $\{14, 7, 5\}$, $\{14, 7, 6\}$, $\{14, 7, 8\}$, $\{14, 7, 9\}$, $\{14, 7, 10\}$, $\{14, 7, 11\}$, $\{14, 7, 12\}$ y$\{14, 7, 13\}$.

d) $\{15, 5\}$
gap> completacion(15,5);
-3-6-9-12-1-4-7-13-2-8-11-14-3-6-9-12-4-7-13-8-11-14-6-9-12-7-13-8-11-14-9-12-13-11-14-12-13
Por último tendremos $\{15, 5, 1\}$, $\{15, 5, 2\}$, $\{15, 5, 3\}$, $\{15, 5, 4\}$, $\{15, 5, 6\}$, $\{15, 5, 7\}$, $\{15, 5, 8\}$, $\{15, 5, 9\}$, $\{15, 5, 11\}$, $\{15, 5, 12\}$, $\{15, 5, 13\}$ y $\{15, 5, 14\}$.

B. APÉNDICE

En este caso se trata de un algoritmo con el propósito de calcular todas las posibles δ-sucesiones satisfaciendo la *cuestión 4.3.2.* .

Dada un δ-sucesión de tamaño 2, $\{\delta_0, \delta_1\}$, ¿de cuántas formas se puede encontrar una δ-sucesión de tamaño 3, $\{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\}$, de forma que el semigrupo numérico que generen sea el mismo?

Usaremos lo visto en teoría. Tendremos las siguiente posibilidades:

$$
\begin{array}{l}
1^{\text{a}}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_0, \delta_2, \delta_1\} \\
2^{\text{a}}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_2, \delta_1, \delta_0\} \\
3^{\text{a}}\ \{\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2\} = \{\delta_2, \delta_0, \delta_1\}
\end{array}
$$

Sea $a := \delta_0$, $b := \delta_1$ y $c := \delta_2$; veamos un algoritmo que nos calcule todos los posibles c. Definamos las variables y proporcionémosles valores iniciales:

```
gap> a:=11;;
gap> b:=9;;
gap> i:=0;;
gap> c:=0;;
gap> m:=0;;
gap> NamesUserGVars();
["a","b","c","i","m"]
```

ALGORITMO:

```
gap> completacion:=function(a,b)
> if (a > b) then
> i:=1;
> for i in [1..a] do
> c:=i*b;
> if (a > c) then
> m:=Gcd(i,a);
> if (m=i) and (m > 1) then
> Print (". a,c,b, con c = ");
> Print (c);
> fi;
> fi;
> i:=i+1;
> od;
> i:=1;
> for i in [1..b] do
> c:=i*a;
> m:=Gcd(i,b);
```

```
> if (m=i) and (m > 1) then
> Print (". c,b,a, con c = ");
> Print (c);
> fi;
> i:=i+1;
> od;
> i:=1;
> for i in [1..a] do
> c:=i*b;
> if (c > a) then
> m:=Gcd(i,a);
> if (m=i) and (m > 1) then
> Print (". c,a,b, con c = ");
> Print (c);
> fi;
> fi;
> i:=i+1;
> od;
> fi;
> end;
function( a, b ) ... end
```

Ejecutémoslo con algunos ejemplos:

a) $\{11, 9\}$
gap> completacion(11,9);
. $\{c, b, a\}$, con c = 33. $\{c, b, a\}$, con c = 99. $\{c, a, b\}$, con c = 99
δ-sucesiones generadas: $\{33, 9, 11\}$, $\{99, 9, 11\}$ y $\{99, 11, 9\}$.

b) $\{13, 7\}$
gap> completacion(13,7);
. $\{c, b, a\}$, con c = 91. $\{c, a, b\}$, con c = 91
δ-sucesiones generadas: $\{91, 7, 13\}$ y $\{91, 13, 7\}$.

c) $\{16, 7\}$:
gap> completacion(16,7);
. $\{a, c, b\}$, con c = 14. $\{c, b, a\}$, con c = 112. $\{c, a, b\}$, con c = 28. $\{c, a, b\}$, con c = 56. $\{c, a, b\}$, con c = 112
δ-sucesiones generadas: $\{16, 14, 7\}$, $\{112, 7, 16\}$, $\{28, 16, 7\}$, $\{56, 16, 7\}$ y $\{112, 16, 7\}$.

d) $\{308, 15\}$:
gap> completacion(308,15);
. $\{a, c, b\}$, con c = 30. $\{a, c, b\}$, con c = 60. $\{a, c, b\}$, con c = 105. $\{a, c, b\}$, con c = 165. $\{a, c, b\}$, con c = 210. $\{c, b, a\}$, con c = 924. $\{c, b, a\}$, con c = 1540. $\{c, b, a\}$, con c = 4620. $\{c, a, b\}$, con c = 330. $\{c, a, b\}$, con c = 420. $\{c, a, b\}$, con c = 660. $\{c, a, b\}$, con c = 1155. $\{c, a, b\}$, con c = 2310. $\{c, a, b\}$, con c = 4620
δ-sucesiones generadas: $\{308, 30, 15\}$, $\{308, 60, 15\}$, $\{308, 105, 15\}$, $\{308, 165, 15\}$,
gap> # $\{308, 210, 15\}$, $\{924, 15, 308\}$, $\{1540, 15, 308\}$, $\{4620, 15, 308\}$, $\{330, 308, 15\}$, $\{420, 308, 15\}$,
gap> # $\{660, 308, 15\}$, $\{1155, 308, 15\}$, $\{2310, 308, 15\}$ y $\{4620, 308, 15\}$.

C. APÉNDICE

El algoritmo que viene a continuación nos proporciona los números de las posibilidades de las distintas permutaciones de una δ-sucesión de tamaño 3 dada (ver *cuestión 4.3.4.*) .

¿Cuándo la permutación de una δ-sucesión de tamaño 3 es también una δ-sucesión?

Sea la δ-sucesión $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, denotaremos $a := \delta_0$, $b := \delta_1$ y $c := \delta_2$. Por lo visto en teoría existirán las siguientes posibles permutaciones:

$$
\begin{array}{l}
1^{\text{a}}\ \{a, b, c\} \\
2^{\text{a}}\ \{a, c, b\} \\
3^{\text{a}}\ \{b, c, a\} \\
4^{\text{a}}\ \{c, a, b\} \\
5^{\text{a}}\ \{c, b, a\}
\end{array}
$$

Comencemos definiendo e iniciando las variables y estableciendo algunas funciones:

```
gap> a:=15;;
gap> b:=10;;
gap> c:=6;;
gap> i:=1;;
gap> max:=0;;
gap> mult:=0;;
gap> resp:=false;;
gap> NamesUserGVars();
["a","b","c","i","max","mult","resp"]
```

Funciones:

```
gap> maximo:=function(a,b,c,max)
> max:=Maximum([a,b,c]);
> return max;
> end;
function( a, b, c, max ) ... end

gap> divisible:=function(a,b,c,i,max,mult,resp)
> resp:=false;
> for i in [1..maximo(a,b,c,max)] do
> mult:=i*a/(Gcd(a,c));
> if (mult=b) then resp:=true;
> fi;
> od;
> return resp;
> end;
function( a, b, c, i, max, mult, resp ) ... end
```

```
gap> mayor:=function(a,b,c,mult,resp)
> resp:=false;
> mult:=b*c/(Gcd(b,c));
> if (mult > a) then resp:=true;
> fi;
> return resp;
> end;
function( a, b, c, mult, resp ) ... end
```

ALGORITMO:

```
gap> posibilidades:=function(a,b,c,max,mult,resp)
> if (c > a) and (a > b) then
> if (Gcd(a,c) > 1) then
> resp:=false;
> if (divisible(a,b,c,i,max,mult,resp)=true) then Print(4);
> fi;
> fi;
> if (Gcd(b,c) > 1) then
> resp:=false;
> if (divisible(b,a,c,i,max,mult,resp)=true) then
> resp:=false;
> if (mayor(a,b,c,mult,resp)=true) then Print (5);
> fi;
> fi;
> fi;
> fi;
> if (a > c) and (c > b) then
> if (Gcd(a,c) > 1) then
> resp:=false;
> if (divisible(a,b,c,i,max,mult,resp)=true) then Print(2);
> fi;
> fi;
> if (Gcd(b,c) > 1) then
> resp:=false;
> if (divisible(b,a,c,i,max,mult,resp)=true) then
> resp:=false;
> if (mayor(a,b,c,mult,resp)=true) then Print (5);
> fi;
> fi;
> fi;
> fi;
> if (a > b) and (b > c) then
> if (Gcd(a,c) > 1) then
> resp:=false;
> if (divisible(a,b,c,i,max,mult,resp)=true) then Print(2);
> fi;
> fi;
> if (Gcd(b,c) > 1) then
```

```
> resp:=false;
> if (divisible(b,a,c,i,max,mult,resp)=true) then
> resp:=false;
> if (mayor(a,b,c,mult,resp)=true) then Print (3);
> fi;
> fi;
> fi;
> fi;
> Print(1);
> end;
function( a, b, c, max, mult, resp ) ... end
```

Concluyamos con 4 ejemplos:

a) $\{15, 10, 6\}$
gap> posibilidades(15,10,6,max,mult,resp);
231
Serán posibles las permutaciones 1ª$\{15, 10, 6\}$, 2ª$\{15, 6, 10\}$ y 3ª$\{10, 6, 15\}$.

b) $\{8, 6, 9\}$
gap> posibilidades(8,6,9,max,mult,resp);
51
Posibles permutaciones 1ª$\{8, 6, 9\}$ y 5ª$\{9, 6, 8\}$.

c) $\{6, 3, 5\}$
gap> posibilidades(6,3,5,max,mult,resp);
1
Ninguna posibilidad distinta a la identidad.

d) $\{6, 4, 3\}$
gap> posibilidades(6,4,3,max,mult,resp);
21
Posibles permutaciones 1ª$\{6, 4, 3\}$ y 2ª$\{6, 3, 4\}$.

Referencias

[1] Avinash Sathaye and Jon Stenerson, On Plane Polynomial Curves, September 10 (2014).

[2] Mitsushi Fugimoto and Masakazu Suzuki, Construction of affine plane curves with one place at infinity, January 12, (2001).

[3] S.S. Abhyankar, T.T. Moh, Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation I, II. Journal fuer die Reine und Angewnadte Mathematik 260 (1973), 47–83; Journal fuer die Reine und angewandte Mathematik 261 (1973), 29–54.

[4] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1969.

[5] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, varieties, and algorithms. 3rd ed. Springer, New York, 2007.

[6] T. de Jong, G. Pfister, Local Analytic Geometry. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000.

[7] Q. Liu, Alebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford U.P., Oxford, 2002.

[8] M. Spivakovsky, Valuations in function fields of surfaces. American Journal of Mathematics 112 (1990), 107–156.

[9] O. Zariski, Local uniformization on algebraic varieties. Annals of Mathematics, 41 (1940), 852–896.