Máster Universitario en Matemática Computacional

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UJI

Una versión del teorema de Stone-Weierstrass en Análisis Difuso.

Trabajo de Fin de Máster presentado por: Delia Sanchis

Directores:
Dr. Juan J. Font y Dr. Manuel Sanchis

Manuel Sanchis López, Catedrático de Universidad de Análisis Matemático, y Juan José Font Ferrandis, Profesor Titular de Universidad de Análisis Matemático, del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón

CERTIFICAMOS: que la presente memoria *Una versión del teorema de Stone-Weierstrass en Análisis Difuso* ha sido realizada bajo nuestra dirección por Delia Sanchis Minguez, en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón, y constituye su trabajo de fin de máster en el Máster Universitario en Matemática Computacional. Y para que así conste, presentamos la mencionada memoria, firmando el certificado presente.

Manuel Sanchis López   Juan José Font Ferrandis

Castellón, 15 de septiembre de 2016

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Existen datos que no tienen una definición precisa, como por ejemplo, "ser joven", "temperatura alta", "estatura media", "estar cerca de", etc. En 1965, y como posible solución a estos problemas, el profesor Lofti Zadeh, de la Universidad de California, en Berkeley, introdujo, en un artículo titulado "Fuzzy Sets", los conjuntos difusos (o borrosos), como una extensión de los conjuntos clásicos, mediante los cuales podemos manipular información que tiene un alto grado de incertidumbre. En dicho artículo, L. Zadeh presenta unos conjuntos sin límites precisos, los cuales, según él, juegan un papel importante en el reconocimiento de formas, interpretación de significados, y especialmente en la abstracción, la esencia del proceso del razonamiento humano.

Así pues, los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos que nos permiten describir nociones imprecisas. De este modo, la pertenencia de un elemento a un conjunto pasa a ser cuantificada mediante un "grado de pertenencia". Dicho grado toma un valor en el intervalo [0,1]; si este grado toma el valor 0 significa que el elemento no pertenece al conjunto, si es 1 pertenece al conjunto y si es otro valor del intervalo (0,1), pertenece con cierto grado al conjunto. En lugar del intervalo [0,1], también se suelen considerar otros conjuntos ordenados más generales, como cadenas, retículos (completos), multiretículos, etc. Actualmente, los conjuntos difusos se utilizan en multitud de campos; en ciencias de la computación para recuperación de información, bases de datos relacionales difusas, control difuso, ecuaciones diferenciales difusas, B-splines difusos, etc.

En [3], D. Dubois y H. Prade introdujeron un tipo particular de conjuntos difusos que generalizan el concepto de número real: los números difusos. Desde entonces, se han desarrollado los fundamentos del Análisis Difuso alrededor de los números difusos de forma análoga a como se desarrolló la teoría del Análisis Real alrededor de los números reales. En 1986, R. Goetschel y W. Voxman ([7]) establecieron una caracterización de los números difusos basándose en los llamados λ-cortes que ha impulsado enormemente el desarrollo del Análisis Difuso. De hecho, son relativamente recientes la mayoría de artículos que describen las propiedades topológicas del espacio de los números difusos cuando se le dota de las distintas métricas que admite ([4]).

Al igual que sucede en el Análisis Real, las funciones continuas que toman valores en el espacio de los números difusos (funciones difusas) forman el núcleo central de la teoría. La principal diferencia de este tipo de funciones respecto a la funciones continuas que toman valores reales es el hecho de que los números difusos no forman un espacio vectorial, lo cual condiciona todos los resultados, y, sobre todo, las demostraciones. El estudio de funciones difusas se ha desarrollado, principalmente, alrededor de dos lineas de investigación:

- Las ecuaciones diferenciales difusas, que han resultado ser la forma natural de modelizar problemas físicos y de ingeniería en contextos donde los parámetros son imprecisos o incompletos, lo que suele ser lo habitual ([9]).
- El problema de la aproximación de funciones difusas, básicamente utilizando la capacidad aproximativa de las redes neuronales difusas ([10]).

En esta memoria nos centraremos en esta segunda línea de investigación, aunque nuestro enfoque no se basará en las redes neuronales difusas sino en una adaptación del Teorema de Stone-Weierstrass al contexto difuso. Así pues, introducimos el concepto de *multiplicador* de un conjunto de funciones difusas y lo utilizamos para dar una demostración constructiva de un Teorema tipo Stone-Weierstrass para funciones difusas. Concretamente, dada una función difusa f, estudiamos las condiciones que debe satisfacer un conjunto de funciones difusas para que entre ellas podamos encontrar una que esté arbitrariamente "cerca" de f y, además, apoyándonos en sus multiplicadores, damos la forma explícita de dicha aproximación. Este resultado es novedoso puesto que no aparece, como tal, en la literatura matemática.

La estructura de la memoria es la siguiente. En la sección 2 introduciremos los conjuntos difusos; daremos su definición y explicaremos en qué consisten las funciones de pertenencia. También enunciaremos algunas operaciones básicas con este tipo de conjuntos y veremos el uso de las variables lingüísticas. La sección 3 está dedicada a los números difusos; veremos su definición y presentaremos algunas de sus propiedades, como por ejemplo, la aritmética difusa. También enunciaremos el Teorema de representación de Goetschel y Voxman, junto con un ejemplo para facilitar su comprensión, y estudiaremos la métrica más utilizada en el espacio de los números difusos: la métrica supremo. En la sección 4 demostraremos con todo detalle una versión inédita del Teorema de Stone-Weierstrass en el ámbito difuso. En la sección 5 exponemos las posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Conjuntos Difusos

2.1. Introducción

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos bien especificados que poseen una propiedad común. Recordemos que se puede definir de diversas formas:

- Por enumeración de los elementos que lo componen. Para un conjunto E finito, de n elementos, tendríamos, por ejemplo, la siguiente representación: $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Por descripción analítica de una propiedad que caracterice a todos los miembros del conjunto. Por ejemplo, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\}$.

- Usando la función característica (también llamada función de pertenencia) para definir sus elementos. Si llamamos $\mu_A : U \to \{0, 1\}$ a dicha función de pertenencia, siendo U el conjunto universal de posibles valores que puede tomar nuestra variable x, tendremos que,

  $$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

  Así, un conjunto A está completamente definido por el conjunto de pares:

  $$A = \{(x, m_A(x) : x \in U, \mu_A(x) \in \{0, 1\}\}.$$

  Es decir, si la función de pertenencia para un valor dado de x toma el valor 1, ese valor es un elemento del conjunto; por el contrario, si toma el valor cero, no pertenece al conjunto.

EJEMPLO 2.1.1 Si $U = \{a, e, i, o, u\}$ es el conjunto de las vocales del alfabeto y $A = \{a, i, u\}$ un subconjunto del mismo, podríamos representarlos en la siguiente forma:

$$U = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1)\}$$

$$A = \{(a, 1), (e, 0), (i, 1), (o, 0), (u, 1)\}$$

Para un conjunto difuso, sin embargo, la cuestión de pertenencia de un elemento al conjunto no es “un problema” de todo o nada, sino que puede haber diferentes grados de pertenencia. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real [0,1].

DEFINICIÓN 2.1.2 *Un conjunto difuso A se define como una función de pertenencia μ_A que enlaza o empareja los elementos de un dominio o universo de discurso U con elementos del intervalo* $[0,1]$*:*

$$\mu_A : U \to [0,1],$$

quedando perfectamente definido como sigue:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0,1]\}.$$

Así, cualquier elemento x en U tiene grado de pertenencia $\mu_A(x) \in [0,1]$.

EJEMPLO 2.1.3 Supóngase que alguien quiere describir la clase de *animales terrestres veloces*. Algunos animales pertenecen definitivamente a esta clase, como el guepardo o la gacela, mientras otros, como la tortuga o la araña, no pertenecen. Pero existe otro grupo de animales para los que es difícil determinar si son veloces o no. Utilizando notación difusa, el conjunto difuso para los animales *veloces* sería

$$\{(Guepardo, 1), (Avestruz, 0{,}9), (Liebre, 0{,}8), (Gacela, 0{,}7), (Gato, 0{,}4), ...\},$$

es decir, la liebre pertenece con grado de 0.8 a la clase de animales *veloces*, la gacela con grado de 0.7 y el gato con grado de 0.4.

Si se supone que C es un conjunto clásico finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, entonces una notación alternativa es

$$C = x_1 + x_2 + ... + x_n,$$

siendo + una enumeración. A partir de ella, Zadeh propuso una notación más conveniente para conjuntos difusos. Así, otra forma de escribir el conjunto de los animales *veloces* del ejemplo 1 sería:

$$1/Guepardo + 0{,}9/Avestruz + 0{,}8/Liebre + 0{,}7/Gacela + 0{,}4/Gato$$

Es decir, se puede describir el conjunto difuso como sigue:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

donde el símbolo de división no es más que un separador de los conjuntos de cada par, y el sumatorio es la operación de unión entre todos los elementos del conjunto. Cuando U no es finito, se escribe la ecuación anterior como:

$$A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

EJEMPLO 2.1.4 La figura 2.1 muestra algunos conjuntos difusos definidos en el universo de discurso Edad. Concretamente, se representan las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos "joven", "maduro", "viejo".

Se puede ver que los conjuntos difusos se superponen, de manera que un individuo podría tener un grado de pertenencia en dos conjuntos: "joven" y "maduro", indicando que posee cualidades asociadas a ambos conjuntos. Por ejemplo, una persona con 35 años tiene un grado de pertenencia 0.5 para el conjunto "joven" y 0.5 para el conjunto "maduro".

Algunas definiciones relacionadas con los conjuntos difusos son:

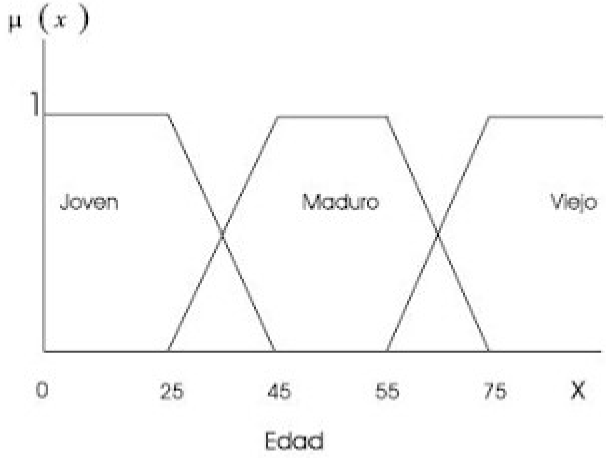

Figura 2.1: Ejemplo de conjuntos difusos

DEFINICIÓN 2.1.5 *El soporte de un conjunto difuso A es el conjunto clásico que contiene todos los elementos de A cuyos grados de pertenencia no son cero. Esto se define por $S(A)$. Es decir:*

$$S(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}.$$

DEFINICIÓN 2.1.6 *Un conjunto difuso A es convexo si*

$$\mu_A(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

para todo $x, y \in U$ y para todo $\alpha \in [0,1]$. En la teoría de control difuso, es usual tratar sólo con conjuntos difusos convexos.

DEFINICIÓN 2.1.7 *Se define la altura de un conjunto difuso A sobre X, que se denota por $Alt(A)$, como:*

$$Alt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x).$$

DEFINICIÓN 2.1.8 *Dado un número $\lambda \in [0,1]$ y un conjunto difuso A, definimos el λ-corte de A como el conjunto clásico A_λ que tiene la siguiente función de pertenencia:*

$$\mu_{A_\lambda}(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \mu_A(x) \geq \lambda, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En definitiva, el λ-corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala el umbral λ.

2.2. Funciones de pertenencia

Lógicamente, la gráfica de una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso puede tomar formas muy variadas. Las más comunes son las siguientes:

1. Forma singleton

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

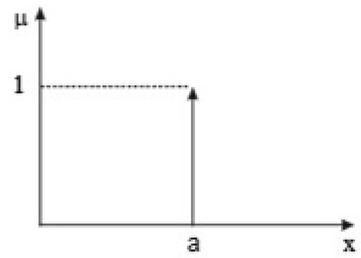

Figura 2.2: Ejemplo forma singleton

2. Forma triangular

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a,m], \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m,b), \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

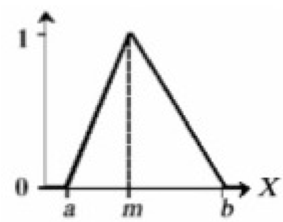

Figura 2.3: Ejemplo forma triangular

3. Forma S

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (a,m], \\ 1 - 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (m,b), \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

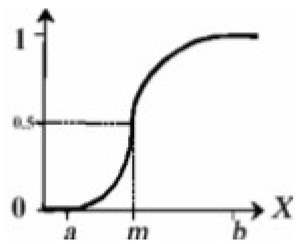

Figura 2.4: Ejemplo forma S

4. Forma trapezoidal

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \leq a) \text{ o } (x \geq d), \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } x \in (a, b], \\ 1 & \text{si } x \in (b, c), \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } x \in (b, d). \end{cases}$$

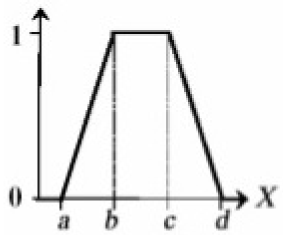

Figura 2.5: Ejemplo forma trapezoidal

2.3. Operaciones básicas con conjuntos difusos

Las operaciones más usadas en el contexto de los conjuntos difusos son las siguientes:

- *Intersección*: La intersección de dos conjuntos, A y B, es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- *Unión*: La unión de dos conjuntos difusos, A y B, es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- *El conjunto complementario*: El conjunto complementario de A se denota por $\overline{A}$, y es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

EJEMPLO 2.3.1 En la Figura 2.6 se observa un un conjunto difuso cuya función de pertenencia es trapezoidal A entre 5 y 8 (rojo), triangular B entorno al 4 (verde) y la intersección de ambos conjuntos difusos (el resultado es la línea de color azul):

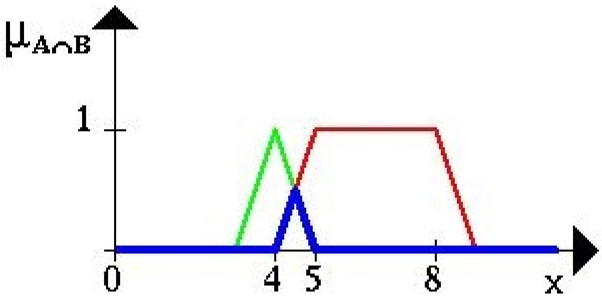

Figura 2.6: Ejemplo de intersección

La figura 2.7 muestra la unión de ambos conjuntos difusos (el resultado es la línea de color azul):

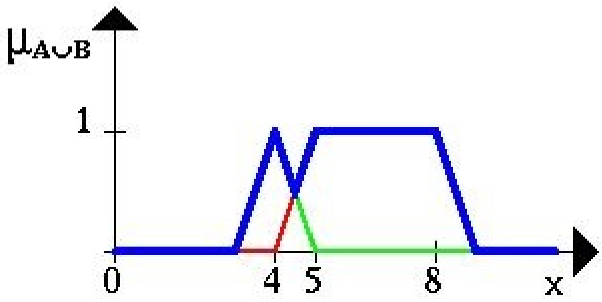

Figura 2.7: Ejemplo de unión

La figura 2.8 muestra la negación del conjunto difuso A (el resultado es la línea de color azul):

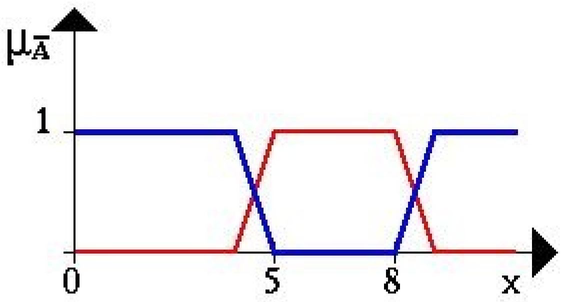

Figura 2.8: Ejemplo de negación

2.4. Variables lingüísticas

Una variable lingüística, como su nombre sugiere, es una variable cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o sintético (no números). Por ejemplo, *Velocidad* es una variable lingüística cuyos valores pueden ser “alta”, “no alta”, “baja”, “no baja” y “muy baja” (ver Figura 2.9). Si disponemos de un valor concreto de velocidad, lo podríamos representar mediante un punto en el conjunto, mientras que una etiqueta lingüística es una colección de puntos (velocidades posibles).

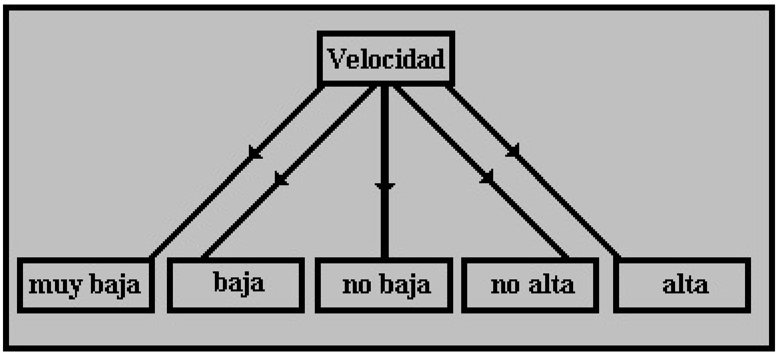

Figura 2.9: Valores lingüísticos de la variable difusa *Velocidad*.

Cada valor de una variable lingüística representa un conjunto difuso en un universo determinado como se muestra en la figura 2.10.

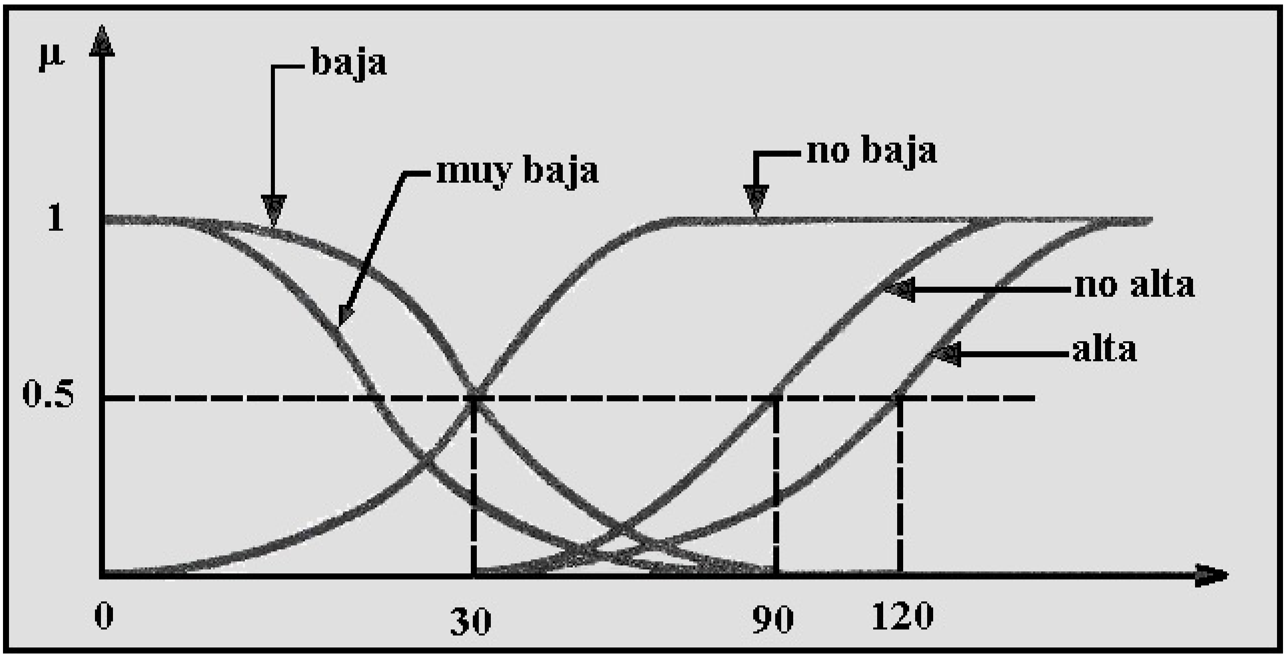

Figura 2.10: Conjuntos difusos de la variable lingüística *Velocidad* con sus correspondientes funciones de pertenencia.

Estrictamente, una variable lingüística esto formada por cinco partes (v, T(v), U, G, M) donde:

- v: nombre de la variable.
- T(v): conjunto de términos o valores lingüísticos de v.
- U: universo de discurso donde se define T(v).
- G: regla sintáctica para generar los términos lingüísticos de v.
- M: regla semántica para asociar cada valor a su significado.

Por ejemplo, *Velocidad* se puede considerar una variable lingüística v. El conjunto de términos lingüísticos (partición difusa de su universo) es:

$$T(Velocidad) = \{\text{muy alta, alta, no alta, lento, muy lento}\}.$$

Cada termino en T($Velocidad$) está caracterizado por un conjunto difuso en el universo de discurso U=[0,200] km/h. La regla sintáctica (G) determina el orden de las palabras de los términos lingüísticos de Velocidad. Por ejemplo *no* y *muy* son modificadores que preceden al término primario *alta* y que sirven para distinguir un término lingüístico del otro. La regla semántica (M) asocia cada término lingüístico con su significado: alta es *alrededor* de 180 km/h, y baja es *alrededor* de 30 km/h, etc.

Capítulo 3

Números difusos

Introduciremos a continuación un caso particular de conjunto difuso llamado número difuso, que es una extensión del concepto de número real. Recordemos que $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

3.1. Definiciones básicas

A partir de ahora, nuestro universo es el conjunto de los números reales y consideramos conjuntos difusos reales, es decir, aquellos cuya función de pertenencia es de la forma:

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1].$$

Denotamos por $F(\mathbb{R})$ la familia de todos los conjuntos difusos de $\mathbb{R}$.

Los **conjuntos λ-cortes**, ya definidos anteriormente, los representaremos en este contexto por $[u]^\lambda$, es decir,

$$[u]^\lambda := \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\},$$

donde $u(x)$ es el grado de pertenencia.

El **soporte** de un conjunto difuso lo representaremos en este contexto por $[u]^0$, el cual definiremos como:

$$[u]^0 := \overline{\bigcup_{\lambda \in]0,1]} [u]^\lambda} = cl_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}.$$

Es decir, el soporte es la clausura de los puntos donde la función no toma el valor 0. Hay que tener en cuenta que no tomamos $[u]^0$ como $\{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq 0\}$ porque este último conjunto equivale a todo $\mathbb{R}$, es decir, $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Definimos el **conjunto de los números difusos**, $\mathbb{E}^1$, como el conjunto de elementos de $F(\mathbb{R})$ que satisfacen las siguientes propiedades ([3]):

1. u es *normal*, es decir, existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ donde $u(x_0) = 1$.

2. u es *convexa* (en el sentido difuso), es decir,

   $$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\}$$

   para cualquier $x, y \in$, $\lambda \in [0,1]$.

3. u es *semicontinua superiormente*, es decir, $[u]^\lambda$ es un conjunto cerrado para todo λ.
4. $[u]^0$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

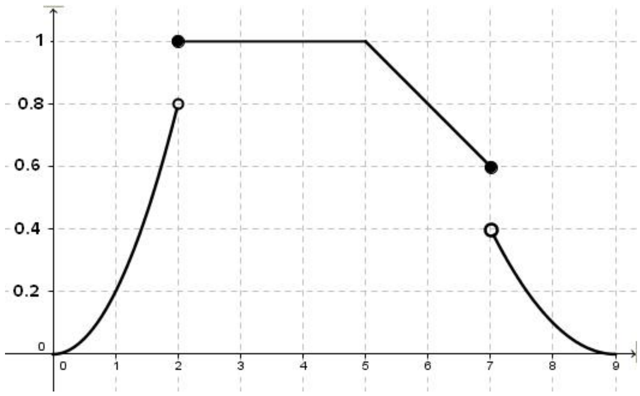

Figura 3.1: Ejemplo de número difuso

Por la condición de que la función de pertenencia sea semicontinua superiormente, podemos considerar los números reales $\mathbb{R}$ como un caso particular de los números difusos definiendo $\widetilde{r}$ como:

$$\widetilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & t = r \\ 0 & t \neq r \end{cases}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

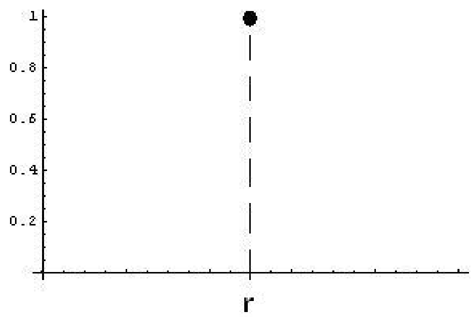

Figura 3.2: Ejemplo de número real, expresado de forma difusa

3.2. Aritmética difusa y propiedades

Es importante para las aplicaciones de los números difusos tener la posibilidad de realizar cálculos aritméticos. A continuación explicaremos las dos formas más importantes de hacerlo.

Es conocido que $[u]^\lambda$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}$, por lo tanto, es un intervalo cerrado y acotado para cualquier $\lambda \in [0,1]$ y podemos escribir $[u]^\lambda$ como:

$$[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)].$$

1. Extendiendo las operaciones aritméticas usuales en los números reales a los números difusos. Sean u y v dos números difusos:

   - Se define la suma $u+v$, como el número difuso p cuya función de pertenencia viene dada por:
   $$p(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \mid x + y = z\}.$$
   - Se define la resta $q = u - v$, como el número difuso q cuya función de pertenencia viene dada por:
   $$q(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \mid x - y = z\}.$$
   - Se define el producto $r = u \cdot v$, como el número difuso r cuya función de pertenencia viene dada por:
   $$r(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \mid x \cdot y = z\}.$$
   - Se define la división $s = u/v$, , asumiendo que el cero no pertenece al intervalo $[v]^0$ (o soporte), como el número difuso s cuya función de pertenencia viene dada por:
   $$s(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \mid x/y = z\}.$$

   Si denotamos por $\star$ cualquiera de las cuatro operaciones $(+, -, \cdot, /)$, entonces $p = u \star v$ se puede definir como:
   $$p(z) = \sup\{T(u(x), v(y)) \mid x \star y = z\},$$
   para una t-norma T. Recordemos que una t-norma es una aplicación T definida de $[0,1] \times 0,1]$ en $[0,1]$ que satisface las siguientes propiedades: (a) asociativa, (b) conmutativa, (c) $T(a,1) = a$ para todo $a \in [0,1]$ y (d) si $x \leq y$, $z \leq h$, entonces $T(x,z) \leq T(y,h)$. Las t-normas más usuales son:

   - **La t-norma de Lukasiewicz** definida como:
   $$T(x,y) := \max\{x + y - 1, 0\}, \qquad x, y \in [0,1].$$
   - **La t-norma producto** definida como:
   $$T(x,y) := x \cdot y, \qquad x, y \in [0,1].$$
   - **La t-norma mínimo** definida como:
   $$T(x,y) := \min\{x, y\}, \qquad x, y \in [0,1].$$

2. Otra forma de operar con números difusos utiliza la aritmética de intervalos. Si tenemos $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$ dos intervalos cerrados y acotados de números reales, entonces:

   - $[a,b] + [c,d] = [a + c, b + d]$
   - $[a,b] - [c,d] = [a - c, b - d]$
   - $[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$

- $[a,b]/[c,d] = [a,b] \cdot [1/d, 1/c]$, donde $d, c \neq 0$

Si u y v son dos números difusos, para $0 \leq \lambda \leq 1$, designamos sus λ-cortes por $[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ y $[v]^\lambda = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$. Entonces podemos definir la aritmética de los números difusos en términos de sus λ-cortes:

- Si $p = u + v$, entonces
$$[p]^\lambda = [u^-(\lambda) + v^-(\lambda), u^+(\lambda) + v^+(\lambda)],$$
para $0 \leq \lambda \leq 1$.
- Si $q = u - v$, entonces
$$[q]^\lambda = [u^-(\lambda) - v^-(\lambda), u^+(\lambda) - v^+(\lambda)],$$
para $0 \leq \lambda \leq 1$.
- Si $r = u \cdot v$, entonces
$$[r]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [v^-(\lambda), v^+(\lambda)],$$
para $0 \leq \lambda \leq 1$.
- Si $s = u/v$, entonces
$$[s]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [1/v^+(\lambda), 1/v^-(\lambda)],$$
para $0 \leq \lambda \leq 1$, asumiendo que el cero no pertenece a $[v]^0$.

Las propiedades de la aritmética de intervalos nos permiten concluir el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.2.1 *La suma de los números difusos y el producto de un número difuso por un número real positivo satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Conmutativa*:* $u + v = v + u$ *para todo* $u, v \in \mathbb{E}^1$*;*
2. Asociativa*:* $u + (v + w) = (u + v) + w$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{E}^1$*;*
3. Elemento neutro*:* $u + \widetilde{0} = u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$*;*
4. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda, \mu > 0$*;*
5. $0 \cdot u = 0$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$*;*
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *para todo* $u, v \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda > 0$*;*
7. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda, \mu > 0$.

DEFINICIÓN 3.2.2 *Recordemos que un cono convexo es un conjunto no vacío* $\mathcal{C}$ *tal que a cada par de elementos* K *y* L *de* $\mathcal{C}$ *le corresponde un elemento* $K + L$*, llamado suma de* K *y* L*, de forma que la adición es conmutativa y asociativa, y existe en* $\mathcal{C}$ *un único elemento 0, llamado vértice de* C*, tal que* $K + 0 = K$*, para cada* $K \in \mathcal{C}$*. Además,para cada par* λ *y* K*, donde* $\lambda \geq 0$ *es un número real no negativo y* $K \in \mathcal{C}$*, corresponde un elemento* λK*, llamado el producto de* λ *y* K*, de tal forma que la multiplicación es asociativa:* $\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$*;* $1 \cdot K = K$ *y* $0 \cdot K = 0$ *para cada* $K \in \mathcal{C}$*; y verifica la propiedad distributiva:* $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$, $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$*, para cada* $K, L \in \mathcal{C}$ *y* $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Como consecuencia de la *Proposición 3.2.1*, podemos concluir el siguiente resultado.

COROLARIO 3.2.3 $(\mathbb{E}^1, +, \cdot)$ *tiene estructura de cono convexo.*

3.3. Teorema de representación de Goetschel y Voxman

A continuación enunciamos el teorema de representación de Goetschel y Voxman, una herramienta muy importante dentro de la teoría de números difusos, pues nos permite hacer demostraciones en este campo utilizando solo propiedades intrínsecas, es decir, sin necesidad de utilizar estructuras externas como, por ejemplo, espacios de Banach, hiperespacios, etc.

TEOREMA 3.3.1 (Teorema de representación de Goetschel y Voxman [7].) *Si* $u \in \mathbb{E}^1$ *y* $[u]^\lambda := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$, *entonces el par de funciones* $u^-(\lambda)$ *y* $u^+(\lambda)$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. $u^-(\lambda)$ *es una función acotada, no decreciente y continua por la izquierda en el intervalo* $]0,1]$*;*
2. $u^+(\lambda)$ *es una función acotada, no creciente y continua por la izquierda definida en el intervalo* $]0,1]$*;*
3. $u^-(\lambda)$ *y* $u^+(\lambda)$ *son funciones continuas por la derecha en* $\lambda = 0$*;*
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Recíprocamente, si un par de funciones $\alpha(\lambda)$ *y* $\beta(\lambda)$ *satisfacen las condiciones anteriores* $(1)-(4)$, *entonces existe un único* $u \in \mathbb{E}^1$ *tal que* $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ *para cada* $\lambda \in [0,1]$.

EJEMPLO 3.3.2 Sea $u(x)$ un número difuso definido de la siguiente forma:

$$u(x)= \begin{cases} 0 & x \notin [0,1], \\ 1 & x \in [0,\frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

cuya gráfica es:

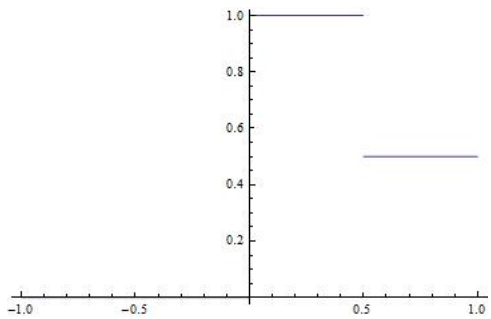

Figura 3.3: Función u(x)

A continuación consideremos algunos de sus $\lambda - cortes$ para algunos valores de λ:

$$\begin{aligned} [u]^{\frac{1}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{4}\} = [0,1], \\ [u]^{\frac{1}{5}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{5}\} = [0,1], \\ [u]^{\frac{1}{6}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{6}\} = [0,1], \\ [u]^{\frac{3}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{3}{4}\} = [0,\tfrac{1}{2}]. \end{aligned}$$

En general las funciones $u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ resultan ser de la siguiente forma:

$$u^-(\lambda) = 0,\ u^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in [0,\frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \lambda \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

3.4. La métrica supremo en $\mathbb{E}^1$

Vamos a considerar en $\mathbb{E}^1$ la siguiente métrica:

DEFINICIÓN 3.4.1 *Para $u, v \in \mathbb{E}^1$, definimos*

$$d_\infty(u,v) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u^-(\lambda) - v^-(\lambda) \mid, \mid u^+(\lambda) - v^+(\lambda) \mid\}.$$

Es rutinario comprobar que d_∞ es una métrica en $\mathbb{E}^1$ y se denomina *métrica supremo.* $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ es un espacio métrico completo y es fácil ver que $\mathbb{R}$, con la métrica euclídea usual, es un subespacio cerrado de $\mathbb{E}^1$ ([4]).

TEOREMA 3.4.2 *La métrica d_∞ satisface las siguientes propiedades:*

1. *$d_\infty(\sum_{i=1}^m u_i, \sum_{i=1}^m v_i) \leq \sum_{i=1}^m d_\infty(u_i, v_i)$ donde u_i, v_i son números difusos y $i = 1, ..., m$.*
2. *$d_\infty(ku, kv) = kd_\infty(u,v)$ donde u y v son números difusos cualesquiera y $k > 0$.*

Demostración. Vamos a ver que se cumple la primera propiedad. Dados $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{E}^1$, resulta que

$$d_\infty(u_1+u_2, v_1+v_2) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u_1^-(\lambda)+u_2^-(\lambda)-v_1^-(\lambda)-v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda)+u_2^+(\lambda)-v_1^+(\lambda)-v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Como

$$\mid u_1^-(\lambda) + u_2^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid \leq \mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid + \mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid$$

y

$$\mid u_1^+(\lambda) + u_2^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid \leq \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid + \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid,$$

tenemos que

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u_1^-(\lambda) + u_2^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda) + u_2^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\} \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid + \mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid + \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Por otra parte,

$$d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid\}+$$
$$+ \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Por comodidad vamos a renombrar algunas cosas:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid + \mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid,\\
\alpha_2 &:= \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid + \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid,\\
\alpha_3 &:= \max\{\mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid\},\\
\alpha_4 &:= \max\{\mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\}.
\end{aligned}$$

Entonces si α_1 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, ..., 4$, y éste se alcanza cuando $| u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) |$ y $| u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) |$ alcanzan sus valores máximos, entonces $\alpha_1 \leq \alpha_3 + \alpha_4$. El mismo razonamiento es válido si α_2 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, ..., 4$.

Así podemos concluir que

$$d_\infty(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leq d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2).$$

Por lo tanto, el resultado es cierto para $m = 2$. El resultado para un m arbitrario se deduce del resultado anterior y del hecho de que la suma de dos números difusos es un número difuso.

Ahora vamos a demostrar la segunda propiedad. Por la definición, tenemos que

$$d_\infty(ku, kv) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{| ku^-(\lambda) - kv^-(\lambda) |, | ku^+(\lambda) - kv^+(\lambda) |\} =$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{| k || u^-(\lambda) - v^-(\lambda) |, | k || u^+(\lambda) - v^+(\lambda) |\}.$$

Como k es un número positivo, podemos omitir el valor absoluto y obtenemos

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{k | u^-(\lambda) - v^-(\lambda) |, k | u^+(\lambda) - v^+(\lambda) |\} = kd_\infty(u, v).$$

□

PROPOSICIÓN 3.4.3 *Sea* $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ *el espacio métrico de los números difusos. Entonces:*

1. $d_\infty(ku, \mu u) =| k - \mu | d_\infty(u, 0)$,
2. $d_\infty(ku, \mu v) \leq| k - \mu | d_\infty(u, 0) + \mu d_\infty(u, v)$,

para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $k \geq 0$ *y* $\mu \geq 0$.

Demostración. Para demostrar la primera propiedad, supondremos que $\mu < k$.

Primero reescribimos ku y μu como $ku = \mu u + (k - \mu)u$ y $\mu u = \mu u + (k - \mu)0$. Esto es posible por las propiedades que definen una métrica.

Por el *Teorema 3.4.2* de la métrica supremo, d_∞, en $\mathbb{E}^1$ tenemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq d_\infty(\mu u, \mu u) + d_\infty((k - \mu)u, (k - \mu)0) =| k - \mu | d_\infty(u, 0).$$

Para demostrar la segunda propiedad, utilizaremos la desigualdad triangular:

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq d_\infty(ku, \mu u) + d_\infty(\mu u, \mu v).$$

Por (1), sabemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq| k - \mu | d_\infty(u, 0).$$

Además, del apartado (2) del *Teorema 3.4.2*, podemos escribir

$$d_\infty(\mu u, \mu v) = \mu d_\infty(u, v).$$

A partir de las desigualdades anteriores obtenemos la segunda propiedad:

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq| k - \mu | d_\infty(u, 0) + \mu d_\infty(u, v).$$

□

Denotaremos por $C(K,\mathbb{E}^1)$ el espacio de las funciones continuas definidas entre un espacio compacto K y el espacio métrico de los números difusos, dotado de la métrica

$$D(f,g) = \sup_{t\in K} d_\infty(f(t),g(t)).$$

PROPOSICIÓN 3.4.4 *Sea $\phi \in C(K,\mathbb{R}^+)$, es decir, una función continua que toma valores en los números reales positivos, y $f \in C(K,\mathbb{E}^1)$. Entonces la función $k \mapsto \phi(k)f(k)$, $k \in K$, pertenece a $C(K,\mathbb{E}^1)$.*

Demostración. Veamos primero que la función producto, $\phi(k)f(k)$, está bien definida; en efecto, como $\mathbb{E}^1$ es un cono, $\phi(k)\cdot F(k) \in \mathbb{E}^1$ porque $\phi(k) > 0$ y $F(k) \in \mathbb{E}^1$ para todo $k \in K$.

Ahora vamos a ver que la función producto es continua. Sea $s,t \in K$. Por la *Proposición 3.4.3 (2)* tenemos que

$$d_\infty(\phi(t)\cdot F(t),\phi(s)\cdot F(s)) \leq\mid \phi(t)-\phi(s)\mid d_\infty(F(t),0)+\phi(s)d_\infty(F(t),F(s)).$$

Puesto que ϕ es continua, es suficiente ver que la expresión $d_\infty(F(t),0)+\phi(s)d_\infty(F(t),F(s))$ está acotada; pero esta propiedad se deduce del resultado clásico que dice que todas las funciones definidas entre un espacio compacto y un espacio métrico son funciones acotadas. Por lo tanto, queda demostrada la proposición. $\square$

Capítulo 4

Teorema de Stone-Weierstrass

Comenzaremos este capítulo introduciendo un concepto esencial para obtener el teorema principal.

DEFINICIÓN 4.0.5 *Sea W un subconjunto no vacío de $C(K, \mathbb{E}^1)$. Diremos que una función $\phi \in C(K, [0,1])$ es **multiplicador de** W si $F, G \in W$ implica que $\phi F + (1-\phi)G \in W$.*

PROPOSICIÓN 4.0.6 *Sea W un subconjunto no vacío de $C(K, \mathbb{E}^1)$ y $\phi \in C(K, [0,1])$ un multiplicador de W. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si ϕ es un multiplicador de W, entonces $1-\phi$ también lo es.*
2. *Si ϕ, φ son multiplicadores de W, entonces $\phi \cdot \varphi$ también lo es.*
3. *Si ϕ pertenece a la clausura uniforme de los multiplicadores de W, entonces $1-\phi$ también pertenece.*
4. *Si ϕ, φ pertenecen a la clausura uniforme de los multiplicadores de W, entonces $\phi \cdot \varphi$ también pertenece.*

Demostración. Está claro que si ϕ es un multiplicador de W, entonces $1-\phi$ es un multiplicador de W.

Suponemos ahora que ϕ y φ son multiplicadores de W. La identidad

$$1 - \phi \cdot \varphi = (1-\phi) + \phi(1-\varphi)$$

implica que, para cada par $F, G \in W$,

$$(\phi \cdot \varphi)F + (1 - \phi \cdot \varphi)G = \phi[\varphi F + (1-\varphi)G] + (1-\phi)G,$$

y, por lo tanto, $\phi \cdot \varphi$ es un multiplicador de W.

A continuación demostraremos la propiedad (3). Si ϕ pertenece a la clausura uniforme de los multiplicadores de W, entonces existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de multiplicadores de W que converge uniformemente a ϕ. En consecuencia, $1-\phi_n$ converge uniformemente a $1-\phi$. Por (1), $1-\phi$ pertenece a la clausura uniforme de los multiplicadores de W, lo que completa la prueba.

La propiedad (4) se demuestra de forma similar.

□

DEFINICIÓN 4.0.7 *Diremos que $W \subset C(K,[0,1])$ separa los puntos de K si dados $s, t \in K$, existe $\phi \in W$ tal que $\phi(s) \neq \phi(t)$.*

Enunciaremos a continuación dos lemas que utilizaremos en las siguientes demostraciones:

LEMA 4.0.8 *[11, lema 1] Sea $0 < a < b < 1$ y $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Existe un polinomio $p(x) = (1-x^m)^n$, tal que:*

1. *$p(x) > 1 - \delta$ para todo $0 \leq x \leq a$*
2. *$p(x) < \delta$ para todo $b \leq x \leq 1$*

LEMA 4.0.9 *[11, lema 2] El máximo de una familia finita de multiplicadores está en la clausura uniforme de los multiplicadores.*

LEMA 4.0.10 *Sea $W \subset C(K, \mathbb{E}^1)$. Si el conjunto $M \subset C(K,[0,1])$ de los multiplicadores de W separa los puntos de K, entonces, dado un $x \in K$ y un entorno N de x, existe un entorno U de x tal que para todo $0 < \delta < \frac{1}{2}$, hay un $\varphi \in M$ tal que:*

1. *$\varphi(t) > 1 - \delta$, para todo $t \in U$;*
2. *$\varphi(t) < \delta$, para todo $t \notin N$.*

Demostración. Sea H el complemento de N. Para cada $t \in H$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad por ser multiplicadores y por separar puntos, que hay un $\varphi_t \in M$ tal que $\varphi_t(t) < \varphi_t(x)$.

Elegimos dos números reales a y b tales que: $\varphi_t(t) < a < b < \varphi_t(x)$.

Entonces tomando $\delta = \frac{1}{4}$ en el *Lema 4.0.8*, tenemos un polinomio $p_t(x) = (1 - x^m)^n$ tal que $p_t(x) < \frac{1}{4}$ para $b \leq x \leq 1$, y $p_t(x) > \frac{3}{4}$ para $0 \leq x \leq a$.

Por lo tanto, $p_t(\varphi_t(x)) < \frac{1}{4}$ y $p_t(\varphi_t(t)) < \frac{3}{4}$.

Sea $U(t) = \{s \in K : p_t(\varphi_t(s)) > \frac{3}{4}\}$. Entonces $U(t)$ es un entorno abierto de t pues, siendo la composición de funciones continuas una función continua, la antiimagen por $p_t(\varphi_t(s))$ de $]\frac{3}{4}, +\infty[$ es un abierto.

Como H es el complemento de un abierto N, es cerrado dentro de un compacto K, y por tanto es compacto; es decir, existen $t_1, ..., t_m \in K$ tales que: $K \subset U(t_1) \cup U(t_2) \cup ... \cup U(t_m)$.

Para cada $i = 1, ..., m$ definimos $\varphi_i(s) = p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s))$ para todo $s \in K$.

Veamos que $\varphi_i \in M$, para todo $i = 1, ..., m$, es decir, veamos que φ_i es un multiplicador. De hecho, se tiene que $p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s)) = (1 - [\varphi_{t_i}(s)]^m)^n$ y puesto que $\varphi_{t_i}(s)$ es un multiplicador, las propiedades (1) y (2) de la *Proposición 4.0.6* implican que $p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s))$ también lo es.

Sea $\psi(s) = max(\varphi_1(s), ..., \varphi_m(s))$, $s \in K$. Por el *Lema 4.0.9* podemos decir que la función ψ pertenece a la clausura uniforme de M.

Fijémonos en que $\psi(x) < \frac{1}{4}$ y $\psi(t) > \frac{3}{4}$, para todo $t \in H$ por las propiedades de p. Definimos $U = \{s \in S; \psi(s) < \frac{1}{4}\}$. Claramente, U es un entorno abierto de x en S pues $U = \psi^{-1}(]-\infty, \frac{1}{4}[)$.

Afirmamos que U está contenido en N. En efecto, si $t \notin N$, entonces $t \notin H$ y, por lo tanto, $\psi(t) > \frac{3}{4}$, es decir, si t no está en N, no puede estar en U.

Tomemos un δ que satisface $0 < \delta < \frac{1}{2}$ y sea p el polinomio definido por el *Lema 4.0.8*, aplicado a $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ y $\delta/2$. Definimos $\eta = p(\psi(s))$, para $s \in S$.

Por las propiedades (3) y (4) de la *Proposición 4.0.6*, la función η también pertenece a la clausura uniforme.

Si $t \in U$, entonces $\eta(t) > 1 - \delta/2$ por el *Lema 4.0.8*.

Si $t \notin N$, entonces $t \in H$ y $\eta(t) < \delta/2$.

Por estar η en la clausura uniforme, dado $\frac{\delta}{2}$, existe $\varphi \in M$ tal que $\| \varphi - \eta \|_\infty < \delta/2$, es decir, $\| \varphi - \eta \|_\infty = \sup_{t \in K} | \varphi(t) - \eta(t) |$.

Hemos encontrado un φ que satisface nuestras propiedades (1) y (2), lo que completa la prueba. $\square$

Con toda la información de que disponemos ya podemos enunciar y demostrar el teorema de Stone-Weierstrass:

TEOREMA 4.0.11 ***(Stone-Weierstrass)*** *Sea W un subconjunto no vacío de $C(K, \mathbb{E}^1)$. Sea $M \subset C(K, [0,1])$ el conjunto de multiplicadores de W. Si asumimos que M separa puntos, entonces para cada $F \in C(K, \mathbb{E}^1)$ y cada $\varepsilon > 0$, son equivalentes:*

1. *Existe $G \in W$ tal que $D(F, G) < \varepsilon$;*
2. *para cada $x \in K$, existe $G_x \in W$ tal que $d_\infty(F(x), G_x(x)) < \varepsilon$.*

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Obvio pues para cada $x \in K$, podemos tomar G_x que sería G.

(2)$\Longrightarrow$(1) Asumimos que (2) es cierto: para cada $x \in K$, hay algún $G_x \in W$ tal que $d_\infty(F(x), G_x(x)) < \varepsilon(x) < \varepsilon$.

Entonces definimos $N(x) = \{t \in K; d_\infty(F(t), G(t)) < \varepsilon(x)\}$, que es un entorno abierto de x.

Elijamos un entorno abierto $U(x)$ que satisfaga las propiedades del *Lema 4.0.10*.

Fijamos $x_1 \in K$ arbitrario, y sea S el complemento de $N(x_1)$ en K. Entonces S es compacto al ser un subconjunto cerrado del compacto K.

Por compacidad de S, hay un conjunto finito $\{x_2, \ldots, x_m\} \subset S$ tal que $S \subset U(x_2) \cup \ldots \cup U(x_m)$.

Elegimos $0 < \delta < \frac{1}{2}$ suficientemente pequeño tal que $\delta Q m < \varepsilon - \varepsilon'$, donde

$$\varepsilon' = \max\{\varepsilon(x_i); 1 \leq i \leq m\},$$

$$Q = \text{máx}\{D(F, G_{x_i}); 1 \leq i \leq m\}.$$

Por el *Lema 4.0.10*, existen $\phi_2, \cdots, \phi_m \in M$ tales que para todo $i = 2, \ldots, m$:

1. $\phi(x) > 1 - \delta$, para todo $x \in U(x_i)$; (1)
2. $0 \leq \phi(t) < \delta, \quad si \;\; t \notin N(x_i)$. (2)

Definimos

$$\begin{aligned}
\psi_2 &:= \phi_2, \\
\psi_3 &:= (1 - \phi_2)\phi_3, \\
&\vdots \\
\psi_m &:= (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_{m-1})\phi_m.
\end{aligned}$$

Obviamente $\psi_i \in M$ para todo $i = 2, \ldots, m$.

Ahora vamos a comprobar que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j = 1 - (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_j),$$

$j = 2, \ldots, m$.

Haremos la prueba por inducción. El primer paso de la inducción se deduce de las siguientes igualdades:

$$\psi_2 + \psi_3 = 1 - (1 - \phi_2) \cdot (1 - \phi_3);$$

$$\phi_2 + (1 - \phi_2)\phi_3 = 1 - (1 - \phi_3 - \phi_2 + \phi_2\phi_3);$$

$$\phi_2 + \phi_3 - \phi_2\phi_3 = 1 - 1 + \phi_3 + \phi_2 - \phi_2\phi_3.$$

Ahora supondremos que es cierto para j, es decir, que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j = 1 - (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_j),$$

$j = 2, \ldots, m$ y probaremos la igualdad para $j + 1$. Se tiene que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_j)(1 - \phi_{j+1});$$

$$\begin{aligned}
&\phi_2 + \ldots + (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_{j-1})\phi_j + (1 - \phi_2)(1 - \phi_3) \cdots (1 - \phi_j)\phi_{j+1} = \\
&= 1 - (1 - \phi_3 - \phi_2 + \phi_2\phi_3) \cdots (1 - \phi_{j+1} - \phi_j + \phi_j\phi_{j+1});
\end{aligned}$$

$$\phi_2 + \phi_3 - \phi_2\phi_3 + \cdots + \phi_{j+1} + \phi_j - \phi_j\phi_{j+1} = 1 - 1 + \phi_3 + \phi_2 - \phi_2\phi_3 + \cdots + \phi_{j+1} + \phi_j - \phi_j\phi_{j+1}.$$

Esto completa el proceso de inducción.

Ahora definamos: $\psi_1 := (1 - \phi_2) \cdots (1 - \phi_m)$. Entonces $\psi_1 \in M$ y $\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_m = 1$.

Vamos a ver que $\psi_i(t) < \delta$ para todo $t \notin N(x_i), i = 1, \ldots, m.$ (3)

En efecto, si $i \geq 2$, $\psi_i(t) \leq \phi_i(t)$ por como los hemos definido. Entonces, por (2) se cumple (3).

En el caso en que $i = 1$, se tiene que $t \notin N(x_1)$. Entonces $t \in S$ por ser su complementario.

Por lo tanto, $t \in U(x_j)$ para algún $j = 2, \ldots, m$. Por (1), $1 - \phi_j(t) < \delta$ y por tanto:

$$\psi_i(t) = (1 - \phi_j(t)) \prod_{i \neq j} (1 - \phi_i(t)) < \delta.$$

Sea

$$G := \psi_1 G_1 + \psi_2 G_2 + \ldots + \psi_m G_m,$$

donde $G_i = G_{x_i}$ $i = 1, \ldots, m$. Sustituyendo las ψ_m observamos que

$$G = \phi_2 G_2 + (1 - \phi_2)[\phi_3 G_3 + (1 - \phi_3)[\phi_4 G_4 + \cdots + (1 - \phi_{m-1})[\phi_m G_m + (1 - \phi_m) G_1] \cdots]].$$

Por tanto, $G \in W$, puesto que satisface la *Definición 4.0.5*. Por el *Teorema 3.4.2* se tiene que para cada $x \in K$ tenemos

$$d_\infty(F(x), G(x)) = d_\infty(\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) F(x), \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) G_i(x)) \leq \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) d_\infty(F(x), G_i(x)). \quad (4)$$

Sea $I = \{1 \leq i \leq m; x \in N(x_i)\}$ y $J = \{1 \leq i \leq m; x \notin N(x_i)\}$. Entonces, para todo $i \in I$ tenemos que

$$\psi_i(x) d_\infty(F(x), G_i(x)) \leq \psi_i(x) \varepsilon' \qquad (5)$$

y, para todo $i \in J$, tenemos por (3),

$$\psi_i(x) d_\infty(F(x), G_i(x)) \leq \delta Q. \qquad (6)$$

De (5) y (6) deducimos

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) d_\infty(F(x), G_i(x)) \leq \sum_{i \in I} \psi_i(x) \varepsilon' + \sum_{i \in J} \delta Q \leq \varepsilon' + \delta Q m < \varepsilon. \qquad (7)$$

De (4) y (7) obtenemos $d_\infty(F(x), G(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in K$ lo que implica que $D(F, G) < \varepsilon$.
□

Capítulo 5

Líneas de investigación futuras

El Análisis Difuso ha recibido (y sigue recibiendo) mucha atención en la literatura matemática en los últimos años. Los conceptos básicos sobre los que se sustenta toda la teoría son los números difusos y la funciones difusas (funciones que toman valores en el espacio de los números difusos). Así pues, nuestra investigación futura se centrará en el estudio de las propiedades topológicas del espacio de los números difusos y su posterior aplicación al contexto de las funciones difusas. Concretamente, estaremos interesados en los siguientes problemas:

- Estudiar las propiedades del espacio de las funciones difusas cuando se le dota de distintas topologías ([2]).
- Obtener resultados de aproximación tipo Stone-Weierstrass y compararlos con los resultados similares para redes neuronales difusas que aparecen en la literatura ([6], [8], [5], [1]).
- Obtener teoremas tipo Arzela-Ascoli en el espacio de funciones difusas. Cabe destacar que los resultados publicados hasta ahora en este campo se basan en caracterizaciones incorrectas y por tanto no son válidos ([4]).
- Obtener teoremas tipo Banach-Stone sobre isometrías en el espacio de funciones difusas. Puesto que la estructura de los números difusos es diferente a la de los números reales, se necesitarán nuevas técnicas para obtener información de las isometrías definidas entre este tipo de espacios ([13], ([14]).

Bibliografía

[1] J. Buckley y Y. Hayasi, *Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions?* Fuzzy Sets and Systems 61 (1994), no. 1, 43–51.

[2] P. Diamond y P. Kloeden, *Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis*. Fundamentals of fuzzy sets, 583641, Handb. Fuzzy Sets Ser., 7, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2000.

[3] D. Dubois y H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science, 9 (1978), 613–626.

[4] Jin-Xuan Fang y Qiong-Yu Xue, *Some properties of the space of fuzzy-valued continuous functions on a compact set*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 1620–1631.

[5] T. Feuring y W. Lippe, *The fuzzy neural network approximation lemma*, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999), no.2, 227–236.

[6] S.G. Gal, *Fuzzy variant of the Stone-Weierstrass approximation theorem*, Mathematica 37(60) (1995), no.1-2, 103–108.

[7] R. Goetschel y W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986), 31–42.

[8] H. Huang y C. Wu, *Approximation of fuzzy functions by regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011), 60–79.

[9] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 301–317.

[10] P. Liu, *Universal approximations of continuous fuzzy-valued functions by multi-layer regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001), 313–320.

[11] João B. Prolla, *On the Weierstrass-Stone Theorem*, Journal of aproximation theory, 78 (1994), 299–313.

[12] H. Román-Flores y Y. Chalco-Cano, *Some chaotic properties of Zadeh's extensions*, Chaos, Solitons and Fractals, 35 (2008), 452–459.

[13] E. Popa, *Morphisms of H-cones* , An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat 29 (1983), no 2, 53–62.

[14] E. Popa, *Morphisms of H-cones II*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat 29 (1983), no 1, 3–12.

[15] Hao Ying, *Fuzzy Control and modeling: Analytical foundations and applications*, IEEE Press Series on Biological Engineering, 2000.

Índice de figuras