UNIVERSITAT JAUME·I

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Las matemáticas en la composición musical. Una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria.

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESOR/A DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

ESPECIALIADAD MATEMÁTICAS CURSO

2015/2016

Autora: Mª Francisca Torrejón Marín Tutor:

Vicente J. Palmer Andreu

RESUMEN

La modalidad a la que pertenece este trabajo Fin de Máster titulado: "Las matemáticas en la composición musical. Una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria", es la *Modalidad 7: Otras aportaciones*. Se trata de un trabajo en el que se desarrollan las distintas técnicas matemáticas utilizadas en la composición de la música (mediante una clasificación establecida por la autora) y se realiza una propuesta didáctica basada en estas técnicas.

Se fusionan las materias de matemáticas y música, las cuales tienen muchos principios en común y en las que grandes matemáticos conocidos y creadores de teoremas que se utilizan hoy en día, también establecieron los principios básicos por los que se rige la música en general.

Son, por tanto, dos materias estrechamente relacionadas, y las cuales, hoy en día, también están íntimamente ligadas, ya que las composiciones musicales actuales tienen una base matemática en el interior de las mimas.

Los objetivos de este trabajo son dar a conocer las técnicas matemáticas utilizadas para componer música, desde la utilización de la geometría a través de los movimientos rígidos del plano hasta la utilización de técnicas probabilísticas, pasando por las sucesiones numéricas y, basándose en estas técnicas, realizar una propuesta didáctica en la que los alumnos y alumnas de secundaria compongan pequeñas piezas musicales utilizando estas técnicas matemáticas de composición. Esto ayudará a entender los conceptos matemáticos explicados con anterioridad que se basan en el currículo oficial de enseñanzas de secundaria.

Este TFM trata, por tanto, de aunar las matemáticas y la música, para que los estudiantes de secundaria entiendan mejor ciertos conceptos matemáticos, además de fomentar otros contenidos transversales actitudinales al llevar a cabo las propuestas didácticas que en este trabajo se proponen.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster desarrolla las distintas técnicas matemáticas utilizadas para componer música, mediante una clasificación basada en técnicas geométricas, en técnicas algoritmo-probabilísticas y en sucesiones numéricas.

El contenido principal de este trabajo es recopilar y clasificar las diferentes técnicas compositivas utilizadas a lo largo de la historia hasta nuestros días, que han utilizado (y utilizan) las matemáticas para componer obras musicales. Se ha realizado una clasificación desde el punto de vista personal de la autora, siendo ésta una clasificación dividida en 3 grandes bloques: las técnicas compositivas que se basan en conceptos geométricos, las que se basan el técnicas algoritmoprobabilísticas y las que utilizan sucesiones numéricas.

Cabe destacar que es una clasificación pura, en la que es obvio, que la mayoría de las composiciones combinan varias de ellas y que algunas de las técnicas pueden ser incluidas en dos o más apartados. Pero después de un minucioso estudio se han clasificado basándose en su primera interpretación, es decir, nos hemos basado en la primera aparición de las mismas y cómo son utilizadas matemáticamente en su forma más simple.

Además se proponen una serie de propuestas didácticas para llevar a cabo en el aula de secundaria en la que los alumnos y las alumnas puedean componer pequeñas piezas musicales utilizando alguna de las técnicas compositivas desarrolladas en este TFM, con el objetivo de ayudar a entender los conceptos matemáticos explicados.

2. NOCIONES BÁSICAS DE MÚSICA

Las técnicas compositivas que utilizan las matemáticas como fuente de creación e inspiración, no son una novedad de nuestros días, puesto que también han estado presentes en muchas de las composiciones del pasado.

La música más actual (S.XX) utiliza técnicas compositivas basadas en conceptos matemáticos de movimientos rígidos en el plano, como es el caso de la música serial o la música dodecafónica. La música serial se basa en la repetición musical por medio de una serie de patrones creados, donde se varían diferentes parámetros musicales como el ritmo, la dinámica, el timbre, etc. En cambio, en la música dodecafónica sólo se varía la altura de las notas, mediante la inversión, la retrogradación, etc. a partir de un patrón musical inicial creado por el compositor. Además, también encontramos la música fractal, la cual se basa en conceptos geométricos y se ayuda de programas informáticos para realizar las composiciones.

Pero también los compositores más "antiguos" como Mozart, Vivaldi, Haydn, y otros muchos ya utilizaban estas técnicas compositivas-matemáticas para componer sus obras, muchas de ellas grandes conocidas en nuestros días, como analizaremos en el presente trabajo.

Para poder comprender mejor este trabajo, será necesario conocer unas pequeñas nociones musicales (además de matemáticas), para que nos ayuden a entender mejor cada técnica compositiva y, poder así, acercarnos a los compositores y a las técnicas matemáticas que ellos utilizaron para componer sus obras.

* <u>Similitud del pentagrama con un eje de coordenadas</u>

El pentagrama es el lugar del espacio donde se escriben las notas musicales y los signos que sirven para interpretar la música. Está compuesto por 5 líneas y 4 espacios formados entre las líneas y las notas son escritas o bien a mitad de una línea, o bien es un espacio, situándose la nota entre las dos líneas que comprenden el espacio.

Se podría decir que es como si el pentagrama se situase en el primer cuadrante de un eje de coordenadas, y el eje "x" fuera el *tiempo* y el eje "y" el *tono o altura* de las notas (cuanto más arriba más agudo y cuanto más abajo más grave).

Cada nota se sitúa verticalmente en una posición que le da la cualidad del tono y además tienen que ser leídas o interpretas desplazándose por el eje "x" de izquierda a derecha. Cuando se tiene la necesidad de escribir las notas fuera del pentagrama, necesitamos disponer de las líneas adicionales. Las líneas adicionales son líneas cortas, proporcionales a la nota que acompañan e indican en lugar verticalmente hablando que se coloca la nota, bien sea por arriba o por debajo del pentagrama.

Así pues, la similitud del pentagrama con el primer cuadrante del eje de coordenadas quedaría de la siguiente forma:

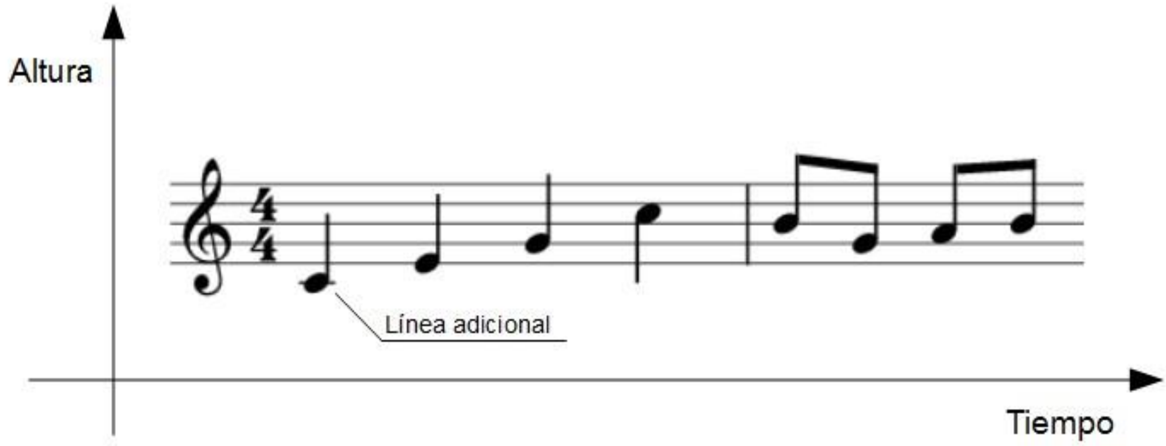


Imagen 1: Similitud del pentagrama con el eje de coordenadas

* <u>La clave</u>

La clave es el signo musical que se coloca al principio de cada pentagrama y sirve para indicar el nombre que le corresponde a cada nota, ya que las notas varían de nombre según estén escritas en una clave u otra. Las notas pueden ser colocadas en medio de las líneas o en los espacios, comprendidos éstos entre una línea superior y la inferior, y si se salen del pentagrama se utilizan las líneas adicionales. Hay varios tipos de claves musicales, como a continuación se enumeran, y cada una nombra a las notas de diferente forma y les da un tono diferente, aunque estén colocadas en el mismo lugar (verticalmente hablando).

Todas ellas tienen en común que la sucesión del nombre de las notas es la misma, es decir, DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI (y se repite). Por tanto, si colocásemos las notas de la escala de Do ordenadas de más grave a más aguda, detrás de cada nota siempre va la misma nota que le corresponde según la sucesión, independientemente de clave a la que pertenezcan.

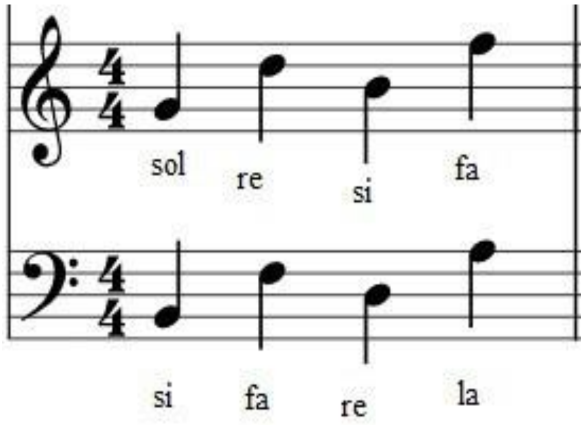


Imagen 2: Diferentes notas en la clave de Sol y en la clave de Fa

Existen 7 claves musicales: una clave de Sol, dos claves de Fa y cuatro claves de Do. Cada clave indica la nota "clave" (valga la redundancia) a partir de la cual se suceden todas las demás, tanto ascendente como descendentemente. La clave de Sol, la más conocida, sitúa su inicio del dibujo de la misma en la 2ª línea, y eso indica que la nota Sol se coloca en 2ª línea y a partir de ahí se suceden las demás. La clave de Fa en 4ª línea indica que la nota Fa se sitúa en 4ª línea, y la clave de Fa en 3ª línea que la nota Fa va en la 3ª línea, ya que el dibujo de la clave de Fa comienza en las citadas líneas. La clave de Do puede situarse en 1ª, 2ª, 3ª y 4ª línea y cada una indica que la nota Do se sitúa en 1ª, 2ª, 3ª o 4ª línea respectivamente.

La variedad de claves es muy útil para los diferentes instrumentos musicales, ya que existen instrumentos con el tono más grave que otros, y por lo tanto, necesitan leer e interpretar notas que llevan muchas líneas adicionales por debajo del pentagrama, lo que dificulta su lectura. Así pues, a través de la lectura en otras claves se facilita la tarea. Sirva como ejemplo que la nota Do situada con una línea adicional por debajo del pentagrama en clave de Sol, es la misma y tiene el mismo tono que la nota Do situada con una línea adicional por encima del pentagrama en clave de Fa.

Las claves musicales son:

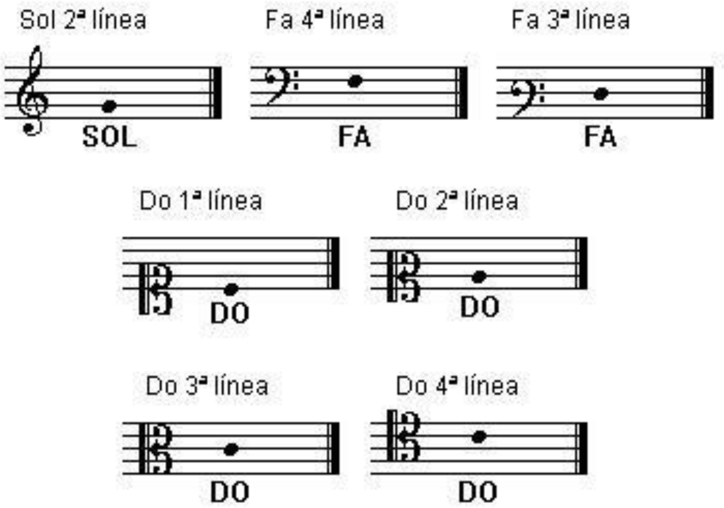


Imagen 3: Claves

* <u>La escala musical tiene tiene módulo 7 en la aritmética modular</u>

La escala musical se compone de 7 notas musicales:

Imagen 4: La escala musical

Según la aritmética modular nos encontramos en módulo 7, ya que contamos con 7 notas que se repiten infinitamente (o hasta que nuestro oído pueda percibirlas), de manera que cuando se acaba una sucesión de las notas de la escala le sigue otra sucesión idéntica, que comienza otra vez por la misma nota.

La octava en música es la distancia que comprende las 7 notas de la escala musical más la repetición de la primera. Se denomina octava porque está compuesta por 8 notas. Por ejemplo, la octava de Do a Do sería: DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO.

Y a la distancia que esta comprendida entre dos notas se denomina intervalo.

Además, podemos hacer "sumas" y "restas" de intervalos a las notas, o sea, que a las notas les podemos sumar o restar intervalos para obtener otras nuevas notas. Es decir, si a DO se sumamos una

5ª (un intervalo de quinta) obtenemos SOL. Y si a SOL le sumamos una 6ª obtenemos MI. Para ello hay que tener en cuenta que para sumar hay contar la primera nota también. Lo mismo ocurre con la resta de notas, si a SOL le restamos una 4ª obtenemos RE, y si a RE le restamos una 3ª obtenemos SI.

Así pues, en música, es sinónimo subir una 5ª que bajar una 4ª, ya que se obtiene la misma nota musical con diferente tono o altura, es decir, la misma nota musical que se llama igual, aunque en otra octava.

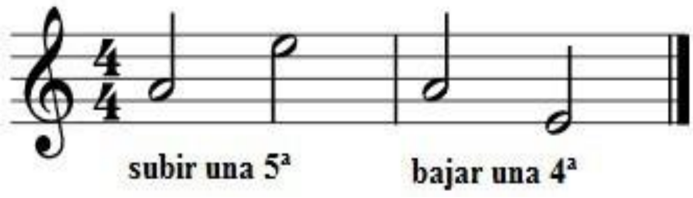


Imagen 5: Intervalo de 5ª y de 4ª

* <u>La duración</u>

La duración de los sonidos es otra cualidad que debemos conocer como noción básica de la música. Trasladado al campo de las matemáticas, es el tiempo que dura la interpretación de un sonido o silencio a lo largo del eje "x".

En el siguiente cuadro se enumeran las principales figuras musicales (hay más) y sus correspondientes silencios, con la duración que tiene cada uno de ellos.

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea
FIGURAS					
SILENCIOS					
DURACIÓN	4 pulsos	2 pulsos	1 pulso	$\frac{1}{2}$ pulso	$\frac{1}{4}$ pulso

Imagen 6: Duración de las notas musicales

Así pues, es muy importante conocer cual es la duración de cada figura para interpretar y comparar dos a más sonidos y por ejemplo, saber cuál es más largo o más corto.

También es interesante conocer la relación de duración que hay entre las figuras, siendo resultado de dividir entre 2 la duración de una figura para pasar a la duración de la figura inmediatamente inferior. Por ejemplo, una redonda dura 4 pulsos, y una blanca dura 2 pulsos, o lo que es lo mismo: 2 blancas es igual a una redonda. Y como resultado de aplicar este principio a todas las figuras que estamos trabajando, se obtendría que 1 redonda es igual a 2 blancas, que son iguales a 4 negras, que a su vez son iguales a 8 corcheas y que son iguales que a 16 semicorcheas.

El siguiente esquema muestra en forma de árbol esa relación de equivalencia entre las distintas figuras:

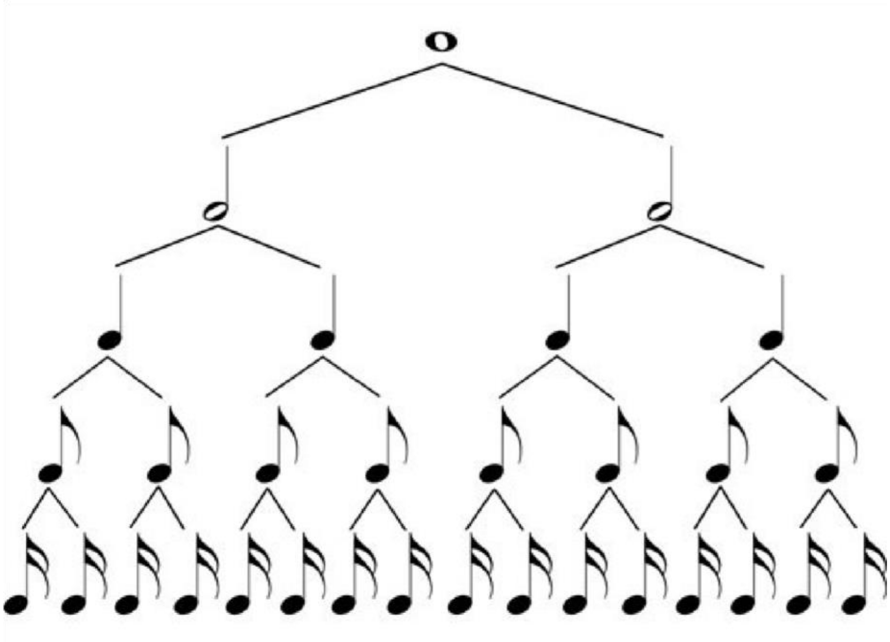


Imagen 7: Duración de las notas en forma de árbol

3. TÉCNICAS MATEMÁTICAS UTILIZADAS PARA COMPONER MÚSICA

3.1. TÉCNICAS GEOMÉTRICAS

3.1.1. MOVIMIENTOS RÍGIDOS EN EL PLANO

Los movimientos rígidos en el plano dan lugar a las transformaciones isométricas, que matemáticamente hablando, son transformaciones en el espacio que dan lugar a otras figuras semejantes a la inicial.

Hay tres tipos de transformaciones isométricas: la traslación, la simetría y la rotación, de las cuales vamos a analizar cual es la relación entre matemáticas y música, cómo se aplican a la música, y en concreto cómo se aplican a las composiciones musicales. Para cada una de ellas explicaremos, mediante una imagen, un ejemplo de composición musical en la que se aplica alguna transformación en alguna de las partes o en la totalidad de la obra, además de nombrar quien la compuso, para situarnos en la época, y realizar un comentario sobre lo que se aprecia en la imagen con relación a la técnica geométrica a la que pertenece.

3.1.1.A. TRASLACIÓN 3.1.1.A.1. TRASLACIÓN HORIZONTAL

Es el caso de las composiciones musicales con forma de canon. Un canon es una composición musical donde un mismo tema se repite por distintas voces o instrumentos separados por un lapso de tiempo.

Se trata, pues, de una repetición por traslación horizontal en el pentagrama, en la que una misma melodía o acompañamiento se desplaza por el eje x (entendido como el eje horizontal que forman las líneas de un pentagrama).

La peculiaridad de esta técnica es que da lugar a diferentes repeticiones de un mismo patrón, con la misma tonalidad y que se repite por varias voces distintas, que cada una interpreta el mismo patrón pero en distintos momentos, solapándose o no unas con otras según lo haya establecido el compositor aplicando el principio matemático de traslación horizontal.

<u>Ejemplo de composición aplicando la técnica de traslación horizontal</u>

Como ejemplo citaremos el *Canon en Re Mayor* del J. Pachelbel (1653-1706), una de las piezas conocidas en el barroco y muy popular aún en la actualidad. Dicho canon es interpretado por un cuarteto de cuerda tal y como refleja la imagen, donde cada instrumento interpreta su pentagrama correspondiente, empezando e interpretando la obra todos al mismo tiempo.

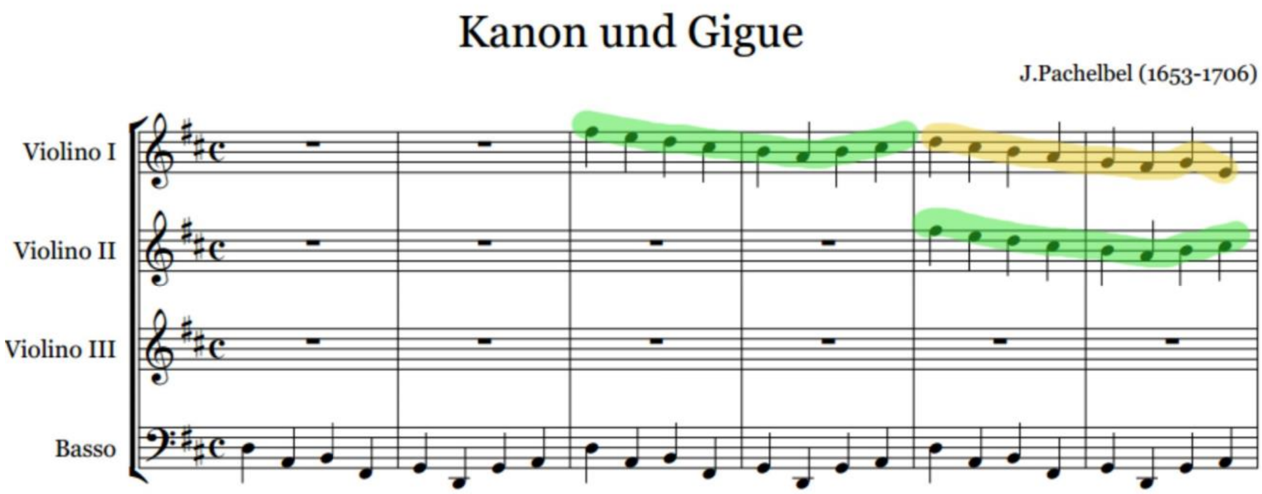


Imagen 8: Fragmento del "Canon" de Pachelbel

El canon de Pachelbel que aquí se presenta está interpretado por un cuarteto compuesto por tres violines y un bajo.

En el Canon se puede observar como la voz del violín 1º empieza tocando la conocida melodía del canon en el compás 3, una sucesión de negras descendentes que van desde el compás 3 al segundo pulso del compás 4, donde la melodía empieza a ascender. Si nos fijamos en el compás 3 y en el 4, observamos que se vuelve a repetir con las mismas notas en el compás 5 y 6, pero interpretadas por otras voz: el violín 2º, mientras que el violín primero sigue interpretando otras notas.

Esto significa que la melodía no ha cambiado de tono ya que son las mimas notas que se repiten con la misma altura (posición vertical en el pentagrama), pero desplazadas en el eje "x" dos compases después, y en este caso, interpretadas por otro instrumento como es el violín segundo, por eso se conoce como traslación horizontal.

3.1.1.A.2. TRASLACIÓN VERTICAL: TRANSPORTE

La traslación vertical se da cuando el acompañamiento de una melodía va escalonado, en lugar de con el tiempo, con el tono. Lo que se denomina en música se denomina transporte.

Esta técnica es de las más utilizadas ya que los diferentes instrumentos que componen una obra musical no están en la misma tonalidad, lo que se denominan instrumentos transpositores. Los instrumentos transpositores son instrumentos para los cuales la altura de la nota que suena no se corresponde con la altura de la nota que está escrita, ya que están en otra tonalidad. Es decir, una misma melodía creada por un compositor no se puede interpretar con la misma tonalidad por dos instrumentos que entre ellos no están en la misma tonalidad.

Así pues, la traslación vertical de un patrón musical se hace imprescindible a la hora de componer una pieza musical para varios instrumentos transpositores entre sí. El compositor puede crear el patrón para un único instrumento y después lo transporta verticalmente ascendente o descendentemente para que los demás instrumentos los puedan tocar y se escuche como si se tratase de un único patrón musical con el mismo tono.

Además, la transposición vertical también es utilizada para componer otras voces musicales. Es decir, partiendo de una voz principal, la cual se transporta verticalmente, se crean las demás voces con una misma estructura pero en distinto tono.

<u>Ejemplo de composición aplicando la técnica de traslación vertical</u>

En el ejemplo que veremos a continuación no se trata de instrumentos transpositores. Se trata más bien de una composición en la que el autor ha querido que no todos los instrumentos lleven la misma melodía en la misma tonalidad y ha decidido crear más voces.

La imagen muestra la particella del comienzo del *Concerto nº 1 en mi Mayor*, Op. 8, RV 269, más conocido "*La primavera*" del compositor A. Vivaldi (1678-1741). Está escrito para un quinteto de cuerda compuesto por 3 violines, de los cuales uno es el violín principal, otro es el violín primero y otro el violín segundo, una viola y un violonchelo.

Imagen 9: Fragmento de "La Primavera" de Vivaldi

Como se observa, el violín principal y el violín primero llevan la misma melodía, pero la del violín segundo es distinta a la de éstos. El compositor ha transportado la melodía mediante una traslación vertical de la melodía del violín principal y primero para el violín segundo, creando así una nueva melodía en otro tono, la cual es paralela a la melodía principal y se mueve paralelamente a ella: si la melodía principal asciende, la melodía del violín segundo asciende, y si la melodía principal desciende, la melodía del violín segundo también desciende, como se puede observar perfectamente a partir del cuarto tiempo del primer compás.

Además dichos movimientos de ascenso y descenso los realiza con el mismo intervalo, es decir, si nos fijamos entre el cuarto tiempo del compás primero y hasta el tercer tiempo del compás segundo (primera zona sombreada), observamos como la melodía del violín principal y primero va descendiendo por intervalos de segunda, partiendo de la nota Si. Esto mismo ocurre con la melodía del violín segundo, que parte de otra nota, la nota Sol y también realiza una descenso por intervalos de segunda. Se dice que la nota Sol del violín segundo, está transportada una tercera descendente desde la nota Si que lleva el violín principal y primero.

Analizando el último tiempo del compás segundo y compás tercero (segunda zona sombreada), vemos como la melodía del violín principal y primero, empiezan por la nota Si y siguen la siguiente secuencia: desciende una segunda, desciende una segunda, asciende una segunda, asciende una segunda, asciende una segunda, desciende una segunda, desciende una segunda y desciende una segunda. Y esta idéntica secuencia realiza la melodía del violín segundo, pero comenzando por la nota Sol.

3.1.1.B. SIMETRÍA 3.1.1.B.1. REFLEXIÓN SOBRE UN EJE VERTICAL

Esta técnica compositiva se llama musicalmente retrogradación. El acompañamiento y/o la melodía están invertidos de forma que se compone con las mismas notas de principio a fin que de fin al principio. Es decir, la pieza suena igual si se toca desde delante hacia atrás que si se hace desde atrás hacia delante, como un palíndromo musical.

Para ello es necesario establecer previamente dónde se sitúa el eje de simetría, en este caso vertical, el cual determina cuando las notas pasan a repetirse de forma que se crea el palíndromo musical. Si se trata que toda la composición es simétrica respecto a un eje vertical, el eje se debe de situar en el centro de la composición.

También puede darse el caso de que el acompañamiento es la propia melodía marcha atrás. Es decir, que una vez se crea la melodía, las notas por las que empieza el acompañamiento son las notas finales de la melodía. Es como si la melodía interpretara un patrón musical de principio a fin, y el acompañamiento lo hiciera a la vez, y desde el fin hasta el principio. A esta forma musical se le denomina musicalmente canon "de cangrejo".

Ejemplo de composición aplicando la técnica de reflexión sobre un eje vertical

La pieza que a continuación les presentamos es el *Menuetto al Rovescio* perteneciente a la Sonata para piano nº 26 en La mayor, compuesta por J. Haydn (1732-1809). Está compuesta para ser interpretada por un piano, en la que el primer pentagrama corresponde a la melodía y el segundo al acompañamiento.

Imagen 10: Fragmento del "Minueto al Rovescio" de Hydn

Como se observa en la imagen, la composición consta de dos frases, la primera que corresponde al primer pentagrama y la segunda frase al segundo pentagrama.

La peculiaridad de esta composición es que, si nos fijamos por ejemplo en la melodía, vemos que la primera frase interpretada de la forma normal que va desde izquierda a derecha, es la misma que si interpretamos la segunda frase pero al revés, es decir de derecha a izquierda. Y lo mismo ocurre si lo hacemos con el acompañamiento.

Esto sucede porque entre la primera frase y la segunda frase, que corresponde con el cambio de primer pentagrama al segundo pentagrama, se sitúa el eje de simetría vertical (sombrado en la imagen de color verde). Dicho eje de reflexión vertical "refleja" lo mismo en la primera frase y en la segunda, tanto en la voz de la melodía como en la del acompañamiento.

3.1.1.B.2. REFLEXIÓN SOBRE UN EJE HORIZONTAL

Consiste en cambiar la dirección de los intervalos fijando previamente un eje de reflexión horizontal, por ejemplo entre dos pentagramas, y cambiar los intervalos ascendentes por descendentes y los descendentes por ascendentes.

Los intervalos mantienen su número de orden, es decir, mantienen la misma distancia entre dos notas, y lo que cambia en la dirección ascendente por descendente o viceversa.

Ejemplo de composición aplicando la técnica de reflexión sobre un eje horizontal

La composición que a continuación se muestra mediante la imagen es de autoría propia y ella se puede ver un ejemplo de composición melódica a una voz, en la que se ha utilizado para componerla la técnica de reflexión sobre un eje horizontal.

Imagen 11: Fragmento de composición propia

El primer pentagrama corresponde a la voz original, que consta de dos compases, mientras que el segundo pentagrama corresponde con los compases que han sido creados mediante una reflexión sobre un eje horizontal, que en este caso, está colocado en medio de los dos pentagramas. Dicho eje horizontal refleja la melodía del primer pentagrama en el segundo.

Como vemos en el compás 1 del primer pentagrama, la melodía comienza con un ascenso de intervalo de tercera a partir de la nota Do. Esto mismo sucede con el primer compás del segundo pentagrama, pero con la excepción que el intervalo de tercera a partir de la nota Do es descendente. Como podemos seguir observando, cada vez que la melodía del primer pentagrama realiza un cambio de intervalo, la melodía del segundo pentagrama lo realiza igual, con el mismo número de intervalo pero son la dirección contraria, es decir, cuando la melodía del primer pentagrama asciende, la del segundo desciende, y cuando la melodía del primer pentagrama desciende, la del segundo pentagrama asciende.

3.1.1.C. ROTACIÓN

Geométricamente hablando, las rotaciones de elementos del plano pueden realizarse con cualquier ángulo, siendo un ángulo positivo si la rotación es en sentido antihorario y con un ángulo negativo si la rotación es horaria.

En música son sólo las rotaciones de 180º las que tienen sentido analizar, pues las rotaciones de otros ángulos diferentes a 180º no tienen sentido puesto que la música no se puede escribir a 90º en el pentagrama, por ejemplo. Es decir, una vez escrito un patrón musical, se puede interpretar así o girándolo 180º para que siga teniendo sentido su escritura en el pentagrama.

Por ejemplo, hay obras musicales en las que que pueden interpretar leyéndolas como se hace comúnmente, es decir, empezando por arriba a la izquierda y avanzando hacia la derecha, y a la vez, que un segundo intérprete la interprete colocado a 180º grados respecto al primer intérprete y también la lea según sea su izquierda y parte de arriba.

Así pues, lo que se consigue es que la obra sea interpretada a la vez por dos (o más) intérpretes que están leyendo la misma partitura colocado uno frente al otro, es decir, colocados según un giro de 180º de uno sobre el otro. (Nótese que las rotaciones de 180º se pueden considerar simetrías centrales respecto de un punto).

<u>Ejemplo de composición aplicando la técnica de rotación</u>

La pieza que vamos a analizar fue compuesta por W. A. Mozart (1756-1791), cuyo título es *Der Spiegel Due*t. Se trata de una composición para dos violinistas, los cuales se colocan enfrentados ante un partitura que sitúan en medio de ambos, la cual se puede ver a continuación en una imagen. Cada uno de los intérpretes lee la partitura como cuando lo hace naturalmente, es decir, empezando por arriba a la izquierda y terminado por debajo a la derecha. Es decir, de "su" izquierda hacia "su" derecha.

Así pues, el cuando un violinista esté interpretando el compás primero de la obra, el otro estará interpretando el último para éste, que naturalmente, será el primero para el segundo violinista.

La dificultad de esta obra reside en que los dos violinistas pueden estar interpretando la misma partitura, pero leyéndola del revés, y lo que suena es una melodía prácticamente al unísono en la que no se diferencian los dos violinistas, aunque cada uno esté leyendo la misma partitura pero en sentido inverso.

<u>*En este lado se coloca el primer violín*</u>

Imagen 12: Composición "El espejo" de Mozart

En este lado se coloca el segundo violín

3.1.2. COMPOSICIÓN UTILIZANDO FRACTALES

Los fractales han sido incluidos en el presente apartado, el de técnicas geométricas de la composición musical, ya que se pueden construir gráficamente dando lugar a espacios geométricos especiales y con una serie de características comunes a ellos, mediante los cuales se obtiene música, tal y como a continuación se detalla.

Las nociones matemáticas y musical que presentamos en esta sección se basan en el artículo de Pérez J.A. (2000) [1].

Vamos a ver varios ejemplos de música fractal, ya que cada autor/compositor utiliza los fractales según su criterio e inspiración, dando lugar no sólo a una única técnica definida para componer música fractal, sino a todo un abanico de posibilidades que dependen del criterio que tenga el compositor.

Para comenzar veremos y comentaremos algunos ejemplos de fractales y lo que significan matemáticamente hablando, para posteriormente poder comprender mejor como se utilizan al componer música.

3.1.2.1 EJEMPLOS DE FRACTALES

1. FRACTALES

El término fractal describe un objeto cuya estructura básica, fragmentada o regular, se repite a diferentes escalas.. El objeto se expresa como el límite de un proceso geométrico iterativo, el cual puede provocar en cada iteración una ruptura de la suavidad, que lleva a la ausencia de diferenciabilidad en el objeto límite.

Esta característica de ausencia de diferenciabilidad con el objeto límite se debe a que los fractales se caracterizan por tener dos propiedades: la autosemejanza y la autorreferencia. La autosemejanza se refiere a que el objeto fractal presenta la misma forma aunque se varíe la escala y se aproxime o se aleje, es decir, el objeto fractal presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación que lo miremos. La autorreferencia se refiere más bien a la forma de construcción del fractal y determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo, y se necesita recurrir a él para poder ir generando el fractal.

Es curioso que no fue hasta los años 70 cuando se comenzó a vislumbrar las aplicaciones de los fractales, gracias a una gran parte de la aportación a Mandelbrot, al cual se le debe su vital aportación al renacimiento de la geometría fractal y su visión de la potencia de los fractales para modelizar la realidad.

2. LA NATURALEZA NO ES FRACTAL

La naturaleza no es fractal, pero si que es verdad que podemos decir que existe un modelo fractal que se aproxima bastante al objeto de la naturaleza estudiado, como pueda ser, por ejemplo, la red capilar del sistema venoso. Gracias a estas aproximaciones la ciencia avanza aunque probablemente las cosas no comprendan es su esencia estos modelos matemáticos.

Los fractales abren la puerta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo, y a su vez, la pautas de generación de los fractales son sencillas en comparación con la naturaleza. Es posible que los comportamientos de la naturaleza respondan a mecanismos de gran sencillez basados en geometría fractal, la cual es relativamente joven y cuyos progresos pueden resultar de utilidad para el estudio de la realidad.

3. CONJUNTO DE CANTOR

El conjunto de Cantor es un ejemplo de fractal. Para construirlo se parte de un intervalo unidad [0,1]. Dicho intervalo se divide en tres partes iguales, y de esas partes se consideran (para la construcción del conjunto) los intervalos comprendidos en la primera parte (primer tercio) y tercera parte (tercer tercio), cada uno de longitud 1/3. Se toma entonces la unión de estos dos intervalos.

Dicho proceso se repite sobre los nuevos conjuntos obtenidos, es decir, cada uno de esos intervalos se vuelve a dividir en tres partes de igual longitud y se consideran la primera y la tercera parte. Así pues, del intervalo unidad inicial, ya tendríamos cuatro partes de longitud 1/9 cada una. Este proceso se sigue sucediendo con límite infinito. El conjunto de Cantor se define como la unión de las infinitas subdivisiones seleccionadas.

Las propiedades asombrosas de este conjunto son abundantes. El conjunto no es vacio, ya que para cada intervalo o parte, siempre se puede seguir dividiendo en tres, y el conjunto de Cantor es cerrado, ya que es una unión de infinitos intervalos. Además, es infinitamente poroso ya que no hay dos intervalos que se toquen, porque de cada intervalo obtenido siempre se vuelve a dividir en tres partes iguales, y de esas partes se vuelven a considerar únicamente la primera y la tercera.

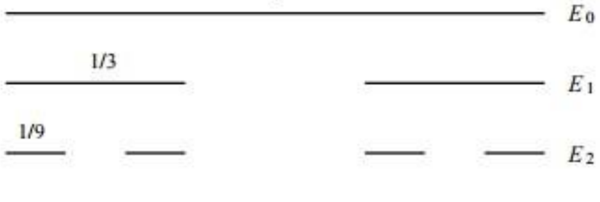


Imagen 13: El conjunto de Cantor [1]

4. CURVA DE KOCH

Para generar la curva de Koch se parte del segmento unidad [0,1] y se divide en tres partes iguales sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con dicha parte formarían un triángulo equilátero. Y con cada uno de los cuatro segmentos que así quedan determinados se repite la operación anteriormente descrita, de forma iterativa.

En el límite, dados dos puntos cualesquiera de la curva de Koch, la distancia entre estos dos puntos, medida sobre la curva de Koch, es siempre infinita. De hecho, la longitud de cualquier tramo de la curva es infinita porque el número de subdivisiones que dan lugar a la curva sigue una iteración infinita. Es decir, porque siempre cada tramo, puede dividirse en tres y realizar el proceso anteriormente citado, y por tanto, la longitud no sería finita.

Imagen 14: Proceso de construcción de la curva de Koch [1]

5. TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Este fractal se genera a partir de un triángulo equilátero relleno de lado l del que se extrae (y se vacía) el subtriángulo cuyos vértices son los tres puntos medios de los lados del triángulo. Y este proceso se repite con los tres nuevos triángulos de lado l/2. Si se continua de esta manera, a cada triángulo obtenido se le extrae el subtriángulo que hay en él determinado por los tres puntos medios de los lados del triángulo, y así sucesivamente de manera que el triángulo se va vaciando y va quedándose como una esponja.

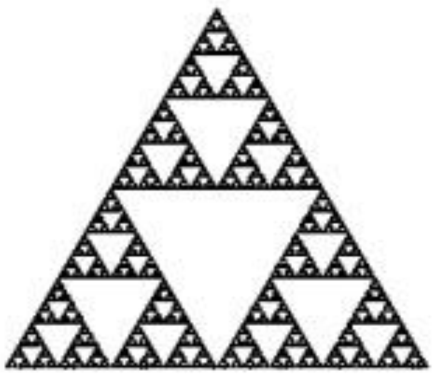


Imagen 15: Triángulo de Sierpinski [1]

6. CONJUNTO DE JULIA Y CONJUNTO DE MANDELBROT

Los resultados más espectaculares de fractales se dan cuando se itera un sistema dinámico (sistema que avanza en el tiempo y proviene de un sistema en que una cantidad o solución final se puede obtener a partir de alguna situación anterior) de variable compleja.

Definición:

Sea C elconjunto delosnúmeroscomplejos

Sea $f: C \rightarrow C$*.Dado* $z \in C$ *,* $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *esla sucesiónde iterados por f del puntoz*

Definición del conjunto de Julia:

El conjunto de Julia del polinomio de variable compleja $f_c(z)=z^2+c$ se define como la frontera del conjunto de puntos cuya sucesión de iterados por el polinomio $\{f_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ escapa al infinito.

Definición del conjunto de Julia relleno:

En conjunto de Julia relleno está formado por los puntos z que están dentro de esta frontera. Esto es, si denotamos como F_c al conjunto de Julia relleno, entonces:

$$F_c = \{z \in C, \{f_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ converge}\}$$

Para dibujar dicho conjunto, se representan los valores de z *tales que* $\{f_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *converge* mediante un pixel asociado, que van dando lugar a diferentes conjuntos de Julia. Algunos de los conjuntos de Julia parecen estar formados por una única pieza, mientras que otros parecen estar fragmentados o disconexos. Esta clasificación no es arbitraria y su estudio dio lugar a los conjuntos de Mandelbrot.

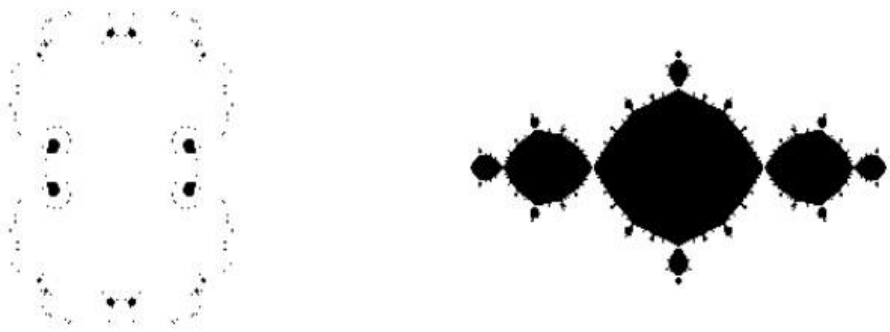


Imagen 16: Conjunto de Julia. El de la izquierda es disconexo. El de la derecha, conexo.[1]

Los puntos negros son los valores $z \in C$ *, tales que* $\{f_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *converge*

Julia probó que la órbita de z=0, es decir $\{f^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ *con* $f(z)=z^2+c$, $c \in C$ juega un papel importante para saber si el conjunto de Julia relleno es conexo o no lo es. Si esta órbita escapa al infinito, el conjunto aparece fragmentado como polvo fractal, y si no tiende a infinito, el conjunto de Julia en conexo.

Teorema 1 (Julia):

$\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ *Si converge, entonces* F_c *es conexo*

Por otra parte, la órbita de z=0 $\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ diverge a infinito si en algún momento uno de sus puntos tiene módulo igual o superior a 2. Es decir:

Teorema 2 (Julia):

$\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge si existe* $n_0 \in N$ *tal que* $|f_c^{n_0}(0)| \geq 2$

Corolario:

Si para todo $n \in N$ $|f_c^n(0)| < 2$, *entonces* $\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ *converge, es decir* F_c *es conexo*

Mandelbrot representó en un plano todos los valores de c que producían conjuntos de Julia conexos, consiguiendo la primera representación del conjunto que lleva su nombre: el conjunto de

Mandelbrot. Dicho conjunto queda definido geometricamente por muchas cardioides (curvas que se asemejan al dibujo de un corazón) repartidas por el plano, las cuales están todas unidas a la cardioide principal por medio de filamentos cargados de nuevas cardioides, que hacen que se ramifiquen siguiendo unas pautas y hagan un conjunto conexo.

Definición:

El conjunto de Mandelbrot se define como el conjunto de los valores de la constante compleja c para los cuales F_c es conexo

$$M=\{c \in C / F_c \, es \, conexo\}$$

Nota:

Una condición suficiente para pertenecer al conjunto de Mandelbrot es la siguiente:

Si $c \notin M$ *,entonces* F_c *noesconexo*

Si F_c *noesconexo ,entocesexisten*$_0 \in N$ *tal que* $|f_c^{n_0}(0)| > 2$

Por tanto, si para todo $n \in N$,$|f_c^n(0)| < 2$,*entocesc*$\in M$

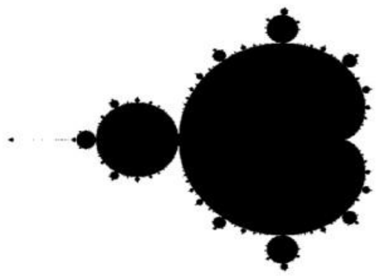


Imagen 17: Conjunto de Mandelbrot [1]

3.1.2.2 COMPOSICIÓN DE MÚSICA CON FRACTALES

El principio fundamental de la música fractal reside en la proyección del comportamiento dinámico o la estructura de un fractal sobre un espacio musical mediante técnicas que a continuación veremos.

Con el resultado final surgen varias dudas respecto al valor musical que tienen dichas composiciones tal cual son creadas. Para ello hay que tener en cuenta que el espectro auditivo del ser humano es limitado y tiene sólo un rango de frecuencias audibles, y que además las composiciones tienen que ser, en la medida de lo posible, agradables al ser humano. Ya no se trata de componer utilizando patrones a los que el ser humano esté más acostumbrado y por ello le pueda agradar más, sino de componer una pieza más o menos agradable para ser escuchada.

Además, también hay que tener en cuenta que no toda la información disponible en un fractal puede ser utilizada, ya que ésto producirían composiciones largas y complicadas.

Así pues, tal y como afirma García, M. y Ríos, R. (2003), el principio fundamental de la música fractal reside en la proyección del comportamiento dinámico o la estructura de un fractal sobre un espacio musical. El músico fractal es ahora el que se apropia de las matemáticas como fuente de inspiración para su obra, buscando trasladar al plano musical una serie de rasgos propios de los conjuntos fractales [2].

Es por tanto que el compositor juega un papel importante a la hora de escoger un fractal adecuado, en un intervalo concreto y hacer que la música resultante con ayuda de un programa informático sea agradable al oído humano.

TÉCNICAS COMPOSITIVAS

Una de las técnicas para pasar un fractal a música se basa en el espacio de fases. El espacio de fases es el plano complejo $C=R^2$ cuyo sistema de referencia canónico formados por los ejes perpendiculares que pasan por el origen representan la posición de una partícula (eje de abcisas) y su velocidad (eje de ordenadas).

Así pues, en ese espacio de coordenadas se dibuja el conjunto de Julia relleno F_c asociado a $f_c(z)=z^2+c$

Se toma un punto z del plano complejo y se itera sobre él el polinomio $f_c(z)=z^2+c$. Esta iteración produce secuencias de puntos complejos a los que se le aplicará una determinada transformación que los convierte en notas musicales. Para cada punto, se toma el valor de su coordenada x (posición) como el tono, y el valor de su coordenada y (velocidad) como la duración. Como resultado se obtienen que a cada punto originado le corresponde una nota con un tono y una duración determinada.

Esta misma técnica se puede aplicar a otros objetos fractales como el conjunto de Cantor, la curva de Koch o el el conjunto de Mandelbrot.

Para ayudar a los compositores que componen música fractal, podemos encontrar diversos programas y aplicaciones informáticas que generan por ellos mismos una secuencia de sonidos basados en estructuras fractales. Dichos sonidos son tratados y trabajados por el compositor, quien es el que decide hasta dónde llegar. Además también decide cómo combinarlos y adaptarlos entre sí para que las composiciones sean audibles por el ser humano y sean del agrado de lo que el compositor quiere transmitir con su música.

Uno de los compositores a destacar es Phil Thompson el cual comenzó a componer música fractal como un hobby hasta que en 1998 una composición suya (*Organized Chaos*) se emitió por la radio ya atrajo a una gran cantidad de oyentes. Todas sus composiciones se basan en el conjunto de Mandelbrot y él considera su trabajo como un descubrimiento mágico al encontrar una bella imagen fractal y descubrir que sus fórmula esconde una bonita pieza musical.

El programa informático que Thompson emplea para realizar sus composiciones se llama “Gingerbread”, el cual permite crear música a cualquiera, sin necesidad de tener conocimientos de matemáticas o de música, permitiendo componer todo tipo de composiciones.

La base del programa “Gingerbread” es el conjunto de Mandelbrot. En la pantalla del ordenador se muestran 16 imágenes del conjunto y cada una de ellas está asociada con un canal de sucesión de notas. En general las áreas del conjunto de Mandelbrot con más detalles son las que producen mejores melodías. Los puntos del interior de la cardioide suelen llegar a un límite definido y la música se estabiliza y se hace monótona. Las zonas más alejadas de la cardioide divergen rápidamente a infinito y hacen que el programa sólo genere unas pocas notas antes de volver a repetirlas. Cuando el módulo del punto de la trayectoria es superior a 2 la trayectoria y la melodía comenzarán de nuevo desde el punto incial.

Es por ello, que son las zonas cercanas a la frontera del conjunto de Mandelbrot las más ricas en producir diversas melodías, porque en estos puntos z, la divergencia o covergencia de

$\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ es más lenta.

3.2. TÉCNICAS ALGORITMO-PROBABILÍSTICAS

La composición mediante algoritmos es la que toma como base un conjunto ordenado de operaciones que permiten crear un patrón musical. Los modelos matemáticos utilizados están basados en ecuaciones matemáticas y eventos al azar. Se trata de modelos estocásticos que generan métodos no deterministas, donde el compositor controla parcialmente la composición ponderando las posibilidades de los eventos aleatorios.

3.2.1. MÉTODO DE LOS DADOS DE MOZART

En la composición algorítmo-probabilística especial relevancia tienen el método de los dados de Mozart (1756-1791) y es que Mozart, uno de los mejores músicos de la historia, utilizó y aplicó, en su época, esta técnica con tan sólo la ayuda del azar de dos dados.

Syroyid, B. (2012). *Es interesante ver a Mozart desde los dos enfoques: como genio de la perfección tonal y las melodías, y como un compositor con afán de azar. Aunque no sean cualidades absolutamente incompatibles, sí que son un tanto antagónicas. Sin embargo, he ahí la genialidad del compositor en estar en el balance entre la perfección y el riesgo. Este azar está relacionado con la forma de concebir su música, que venía por inspiración.*[3].

Así pues, Mozart quería crear una composición para piano, en forma de vals con dos partes diferenciadas y de 16 compases (8 compases cada parte), pero su ingenio le llevo a componer no una pieza, sino todo un generador de valses al que poder recurrir para crear gran cantidad de los citados valses con ayuda de dos dados.

Primero compuso 176 melodías diferentes de duración un único compás y después creó dos tablas, una para cada parte del vals, que le servían de guía para codificar las melodías. En cada casilla de las tablas hay un número escrito que se corresponde con cada uno de los 176 compases que Mozart compuso.

Cada tabla se compone de 8 columnas y 11 filas. Cada columna se corresponde con el número de compás del vals (primero, segundo, tercero...) y se numera con números correspondientes a los ochos compases de cada parte del vals, y cada fila se corresponde con el número obtenido como la suma del número de los dos dados y se numera con número del 2 al 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Imagen 18: Tablas utilizadas por Mozart.[3]

La primera tabla es la que se utiliza para componer los 8 compases de la primera parte de la composición. Mientras que la segunda tabla hace referencia a los 8 compases de la segunda parte de la composición.

Tal y como queda explicado en el artículo de Rodríguez Y., Rocha P. y Carolina M. (2013). [4], para seleccionar la casilla que contendrá el número del primer compás, se selecciona la columna primera y se lanzan los dados y se anota la suma del resultado para seleccionar la fila que contenga el número de la suma de los dados. Para seleccionar la casilla que contendrá el número del segundo compás, se selecciona la columna segunda y se lanzan los dados y se anota la suma del resultado para seleccionar la fila que contenga el número de la suma de los dados Y así sucesivamente con los demás compases y las dos partes del vals.

Mediante este método y con estas tablas que creó Mozart se pueden componer una gran cantidad de composiciones musicales sin apenas tener nociones de composición musical, y con tan sólo la creación de los 176 compases necesarios para el juego y la ayuda de dos dados.

3.2.2. MÚSICA DODECAFÓNICA

La música dodecafónica es relativamente moderna ya que es una técnica de composición surgida en el siglo XX. Es una pequeña utilización de la música serial (que a continuación veremos) en la que se utiliza dicho principio serial a las 12 notas de la escala cromática.

El compositor parte de una serie de notas creadas por él con un orden determinado en el que el único principio es que se deben interpretar todas las notas de las 12 citadas, sin poder repetirse una hasta hasta que se hayan tocado las otras 11 y, por tanto se impide que haya cualquier coherencia tonal. Esta serie se denomina serie original y será la base de toda la composición musical.

Para crear más patrones melódicos que poder utilizar en la composición y partiendo de la serie original, se transmuta la serie original a su retrogrado escribiendo las notas de la serie original pero en sentido inverso. Posteriormente se realiza la inversión de la serie original, aplicando los principios musicales de invertir la dirección de los intervalos: ascendente por descendente y descendente por ascendente. Y, por último se realiza el retrógrado de la inversión, es decir, la inversión tocada en orden contrario

Con todos estos patrones melódicos el compositor puede crear muchas combinaciones entre ellos y crear diferentes piezas musicales. Y si a ésto le añadimos que además cualquier serie puede ser trasportada y transponerse a cualquier intervalo, obtenemos no sólo 4 series, sino 48 (cada serie se puede trasportar a cualquiera de los 12 grados de la escala cromática). Aunque ya depende de cada compositor el utilizarlas todas o no.

Con esta técnica de composición se elimina la estructura jerárquica de la composición más tradicional, la cual utilizada una base armónica mediante la que se establecía la nota tónica y a partir de ella se creaban las demás. También se elimina la posibilidad de que algunas notas aparecieran más que otras, ya que en esta técnica de composición no se puede repetir una nota si previamente no se ha pasado por todas las demás. Así pues, se elimina cualquier estructura prefijada a seguir porque lo que define la estructura de la pieza musical y es la base de la composición musical es la serie original.

Schönberg fue unos de los compositores que introdujo esta técnica de composición en su obra *Fünf Klavierstücke*, op. 23. Donde, explica y ejemplifica sus Sistema de composición de 12 notas (1921). Además, como compositores que han utilizado esta técnica encontramos (que han sido discípulos de Schönberg) a Alban Berg y a Anton Webern, el cual es más radical con el método dodecafónico ya que todos los elementos formales de algunas de sus obras derivan enteramente del dodecafonismo.

También podemos encontrar alguna variante de esta técnica, como la composición con menos de 12 notas, como realiza Stravinsky en su *Cantata*, o con más de 12 notas, naturalmente repitiendo alguna nota en la serie, como compone Olivier Messiaen en su *Quatour pour la fin du temps* o Luciano Berio con *Nones*.

En la imagen que se muestra a continuación se puede observar como primero, el compositor crea la serie original (O) y después le aplica las técnicas vistas anteriormente para crear las demás series:

retrógrada (R), inversa (I) y retrógrada inversa (RI), y empezar a componer su composición utilizando estas series.

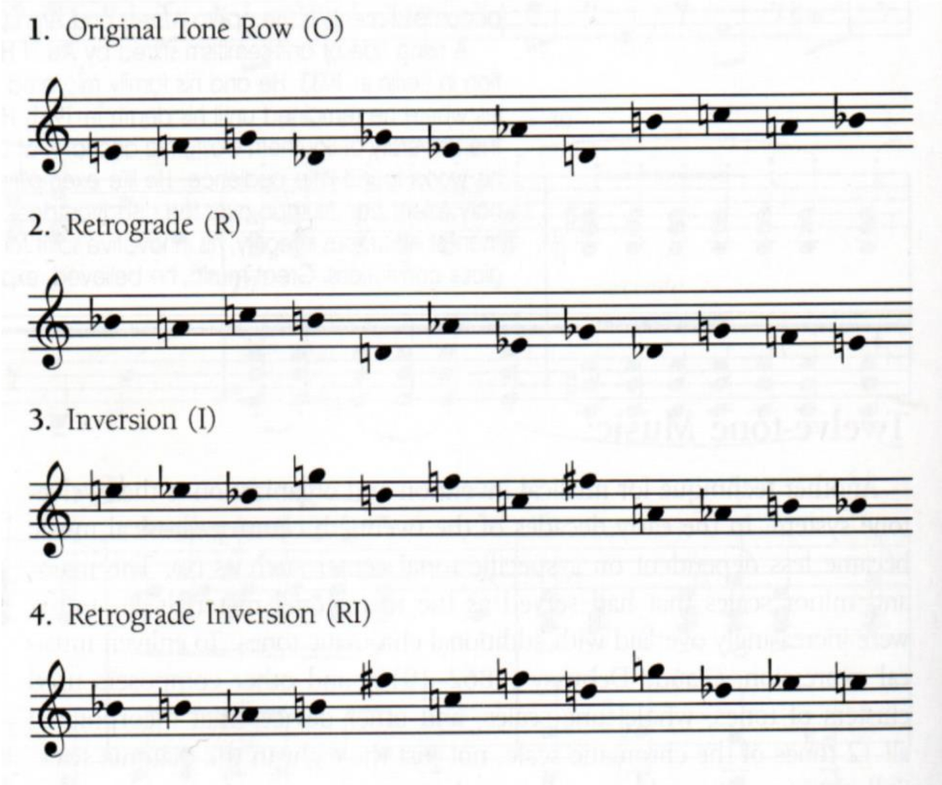


Imagen 19: Ejemplos de series utilizadas en la música dodecafónica

3.2.3. MÚSICA SERIAL

La música serial tiene los orígenes en el dodecafonismo, basándose en éste y ampliando las posibilidades de composición que éste ofrece.

Como ya hemos visto, el dodecafonismo tan sólo se centra en la altura de las notas, creando una serie original con las 12 notas de la escala cromática y hace variaciones sobre ella. Pues el serialismo va un paso más allá y aplica en principio serial a otros parámetros musicales como son el ritmo, el timbre, la dinámica, la duración... Es decir, por ejemplo, a cada una de esas 12 notas se les añade una duración determinada, con una intensidad determinada y con un timbre característico de algún instrumento en concreto.

Mediante esta técnica hay una ruptura tajante con el método se composición tradicional, ya que al emplear el principio serial a todos los elementos de una composición musical rompe con las normas establecidas, y todos los elementos de las obras musicales siguen estrictamente el principio serial, lo que se conoce como "serialismo integral".

Algunos compositores tienen obras aplicando el principio serial sólo a la altura y el ritmo, como es el caso de Berg, *Suite Lírica*, tercer movimientos; Webern, *Variaciones para orquesta*, op. 30; Stravinsky, *Movimientos para piano y orquesta*, mientras que en otras se abarca más patrones musical a los que se les ha aplicado el principio del dodecafonismo como Messiaen con *Quatre études de rhythme* o Pierre Boulez con *Estructuras 1.*

A continuación se muestra una imagen donde se puede apreciar que al ritmo y a la dinámica también se les ha aplicado una serie, la cual, el compositor debe de seguir para componer la composición musical.

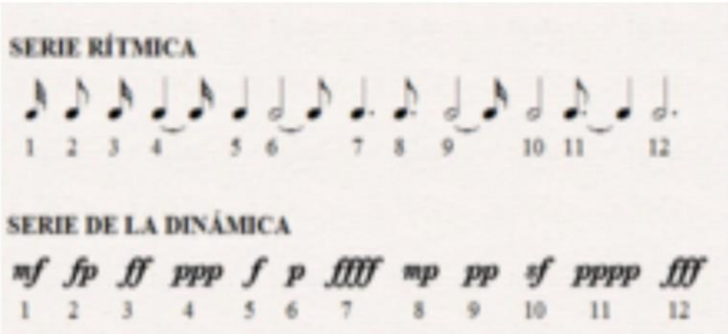


Imagen 20: Serie rítmica y serie de la dinámica

3.3. SUCESIONES NUMÉRICAS

En este apartado se analizará una técnica de composición musical basada en sucesiones numéricas. Es decir, composiciones en las que su estructura está basada en la utilización de una sucesión numérica, según el criterio del compositor.

SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci es un recurso utilizado en la composición de piezas musicales, el cual se puede aplicar en diferentes formas.

La sucesión empieza así: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 …. Se construye a partir del número 1 repetido dos veces, y partir de ahí, para crear el siguiente número de la sucesión, se suman los dos números anteriores.

La sucesión de Fibonacci se puede utilizar para componer de muchas formas distintas, todas ellas bajo el punto de vista del autor. Su utilización va desde la aplicación de la sucesión en el número de compases, creando composiciones musicales con un determinado número de compases incluido en la serie de Fibonacci; el hacer coincidir alguna parte importante de la composición en algún compás numerado con algún número de la sucesión; aplicar al ritmo repitiendo tantas veces la duración de la nota como los números de la serie o también creando una composición musical en dos partes, de manera que la duración de cada una de ellas guarden entre sí la proporción áurea. Es decir, que la duración total de la composición sea a la parte más larga, como la duración de la parte más larga sea a la más pequeña.

Béla Bartók (1881-1945) fue uno de los autores que utilizó la sucesión de Fibonacci en una de sus obras: e*l primer movimiento para cuerdas, percusión y celesta*, compuesto en 4 partes, en el que el primer tiempo es una fuga donde vamos a analizar la aparición de la sucesión de Fibonacci.

Tal y como se analiza y describe en el artículo de Ibaibarriaga, I. [5] todo este movimiento viene generado y controlado por la sucesión de Fibonacci, ya que consta de 89 compases, donde los 55 primeros crean tensión que hallan su punto culminante en el compás 56 para concluir 34 compases después.

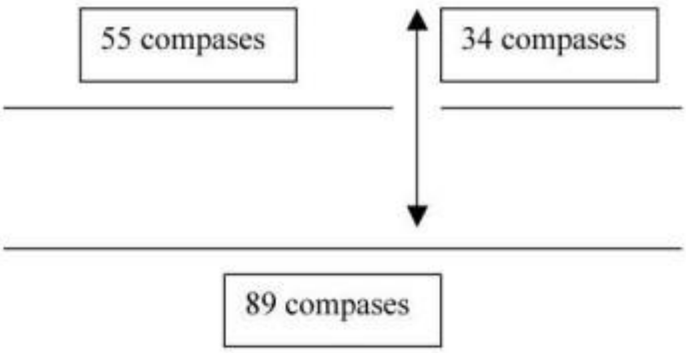


Imagen 21: Estructura de la fuga [5]

También se puede observar que la curva de intensidades viene controlada por el uso de las sordinas: las cuerdas colocan las sordinas en 1; tocan sin sordinas después del 34 y durante los 21 + 13 compases que siguen y vuelven a tocar con las sordinas puestas los últimos 21 compases. En total, con sordina, tocan los 34 primeros compases más los 21 finales igual a 55 y, sin sordinas, tocan 21 + 13 centrales. Todos ellos números de la sucesión de Fibonacci que se podría representar así:

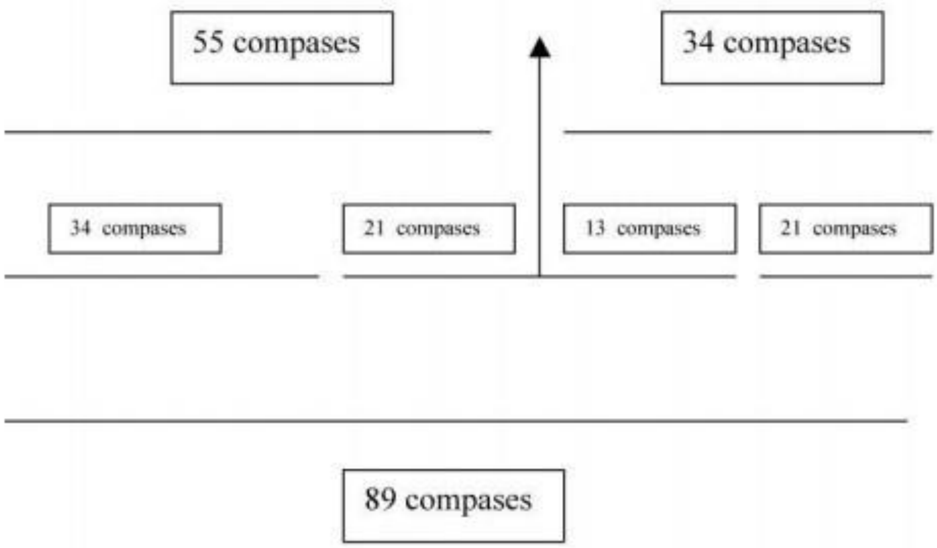


Imagen 22: Estructura de los compases que se utilizan sordinas y los que no [5]

Además, si analizamos la citada fuga de Béla Bartók, se obtienen otras peculiaridades referentes a la sucesión de Fibonacci, como son coincidencias armónicas, de intervalos, de progresiones temáticas... todas ellas utilizando la citada serie, pero que su análisis sobrepasa los objetivos del presente TFM.

SUCESIONES NUMÉRICAS BASADAS EN LA ARQUITECTURA

Hay casos de aplicación de las proporciones espaciales a una arquitectura sonora, como el de Guillaume Dufay que compuso su motete *Nuper rosarum flores* para la consagración de la Catedral Santa Maria dei Fiore en Florencia. El motete tiene 4 partes y para ello se inspiró en las proporciones del templo para crear la obra con relación proporcional de 6:4:2:3 entre cada una de las 4 partes, al igual que la relación proporcional que tienen la nave, el transepto, el ábside y la cúpula de la catedral entre sí. Es un caso de aplicación de proporciones espaciales a una arquitectura sonora. [6]. Nommick, Y. (2011).

SUCESIÓN DE MORSE-THUE

También se pueden crear composiciones musicales de forma sencilla, en los que una melodía es a partir de una secuencia de número enteros positivos e ir a asignando a cada uno una determinada nota musical, por ejemplo DO para el 1, RE para el 2..., como vemos en el artículo de Pérez J.A. (2000) [1].

A partir de esta idea, encontramos la sucesión de Morse-Thue que se basa en calcular la suma de los dígitos de cada número de la sucesión 1, 2, 3, 4, 5... cuando estos números se representan en binario. Es decir, el 1 se representa como 1, el 2 como 10, el 3 como 11, el 4 como 100, el 5 como 101... A continuación se sumas los 1 y 0 correspondientes a cada número de la serie binaria, obteniéndose una sucesión conocida como la sucesión de Morse-Thue: 1, 1, 2, 1, 2...

La citada sucesión da como resultado una melodía que proviene de hacer corresponder cada número con una nota (comenzando con do para el valor 1), como se muestra en la siguiente imagen:

Imagen 23: Sucesión de Morse-Thue [1]

4. PROPUESTAS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN EL AULA

En este apartado se pretende que los estudiantes de secundaria aprendan y pongan en práctica los conceptos matemáticos explicados, mediante la construcción de unas composiciones musicales sencillas utilizando las técnicas geométricas, las algoritmo-probabilísticas y las sucesiones numéricas.

Se han creado unas propuestas didácticas para llevar a cabo con alumnos y alumnas de secundaria en las que se analicen las distintas técnicas de composición y el concepto matemático en el que se basa cada técnica, para así, poder crear pequeñas composiciones musicales a partir de lo aprendido.

Las 3 propuestas didácticas son flexibles y se adaptan a cualquier nivel de la enseñanza secundaria. Se han establecido unas pautas concretas para ser puestas en práctica en un curso determinado de secundaria, dependiendo del currículo oficial de la asignatura de matemáticas en secundaria, pero se pueden adaptar a otros niveles.

Además, se necesita la implicación no sólo del departamento de matemáticas, sino del de música, para entre los dos poder llevar a cabo las citadas propuestas.

Todas ellas, están pensadas y organizadas en 4 sesiones, pero se podrían organizar como un seminario de ambas materias (matemáticas y música), donde la primera sesión serían contenidos matemáticos, para pasar posteriormente a combinarlos con la música para ponerlos en práctica y entenderlos mejor.

Ejemplos concretos de cada propuesta, el la que se utilizan las TIC's (en particular el programa y editor de partituras libre "noteflight") pueden encontrarse en el Anexo del presente Trabajo Fin de Máster.

La última sesión podría caber dentro de un formato de audición final de curso, donde los alumnos y alumnas de secundaria puedan interpretar las composiciones musicales que han creado a partir de nociones matemáticas.

Se trata, por tanto, de una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria, para que aprendan los conceptos matemáticos establecidos en el currículo oficial mediante la utilización de la música, y en concreto de las composiciones musicales.

4.1. Actividad nº1 "Técnicas geométricas".

DESTINATARIOS

Esta actividad está orientada para los alumnos de 3º de la ESO que cursen la asignatura de "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" o la de "Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas", puesto que en el currículo regulado por el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, está establecido como contenido perteneciente al "Bloque 3: geometría" de ambas especialidades. Dicho contenido figura como: "Traslaciones, giros y simetrías en el plano".

OBJETIVOS

- Descubrir las técnicas geométricas referentes a los movimientos rígidos en el plano, como son: la traslación, la simetría y la rotación.
- Saber aplicar y diferenciar cada técnica geométrica referente a los movimientos rígidos en el plano.
- Aplicar los movimientos rígidos del plano en una composición musical.

CONTENIDOS / ÁMBITOS DE ACTUACIÓN

- Conceptuales: conocimiento de los movimientos rígidos en el plano.
- Procedimentales: crear unas nuevas composiciones musicales basadas en diferentes técnicas geométricas de movimientos rígidos en el plano.
- Actitudinales: respeto y empatía.

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Competencia matemática-musical.
- Competencia social

METODOLOGÍA

Técnicas de partición activa.

MATERIALES Y RECURSOS

- Recursos humanos: El profesor o profesora y los propios alumnos y alumnas de la clase.
- Recursos materiales: Papel pautado, bolígrafo y los instrumentos del aula de música.

TEMPORALIZACIÓN

- 4 sesiones de 50 min. cada una, divididas en una sesión más teórica, dos sesiones prácticas de desarrollo de la actividad y una sesión de exposición de la composición creada. Esta última sesión podría coordinase con el departamento de música para poder utilizar los instrumentos y que pueda servir de evaluación conjunta de ambas materias.

ESPACIOS

- Aula ordinaria.
- Aula de música.

DESARROLLO

El desarrollo de la actividad será:

Sesión 1

- La primera sesión se dedicará a que los alumnos conozcan las 3 técnicas geométricas de movimientos rígidos en el plano establecidas en la clasificación (véase los ejemplos del apartado *3.1.1 Movimientos rígidos en el plano* del presente trabajo).

Sesión 2 y 3

- Una vez conocidas e interiorizadas las técnicas geométricas de movimientos rígidos en el plano, se le pedirá a cada alumno que se invente una línea melódica.
- A esa línea melódica se le aplicará una transformación geométrica.

- El profesor o profesora tratará de que más o menos, haya una repartición equitativa de técnicas y estén todas presentes en los trabajos de los alumnos.
- Cada alumno deberá inventar por los menos 8 compases de línea melódica, o si es necesario, tendrá que crear más voces para poder aplicar bien alguna de las técnicas geométricas que existen, y les tendrá que aplicar la técnica dedicida.
- Una vez finalizado el proceso de creación de la composición y aplicada la transformación geométrica, el alumno describirá la técnica que ha utilizado y redactará una explicación de los pasos que ha seguido (matemáticamente hablando).

Sesión 4

- Para finalizar todos los alumnos deberán interpretar sus obras con alguno de los instrumentos trabajados en las clases de música, como pueden ser las flautas de pico, los xilófonos... si algún alumno necesita la interpretación de más de una voz pedirá ayuda a alguno de sus compañeros.
- Esta última sesión se podría coordinar con el Departamento de Música para poder utilizar los instrumentos y para realizar una actividad conjunta de las dos asignaturas, tanto de matemáticas como de música, por ejemplo en alguna audición en algún día señalado, o acto de fin de curso.

EVALUACIÓN

- Observación del profesor o profesora en las opiniones y actitudes de cada alumno mientras realiza la composición.
- Evaluación de las técnicas de interpretación de la composición y de la explicación de cómo la ha realizado.

Actividad nº2 “Técnicas algoritmo-probabilísticas”.

DESTINATARIOS

Esta actividad está orientada para los alumnos de 1º y 2º de la ESO que cursen la asignatura de “Matemáticas”, puesto que en el currículo regulado por el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, está establecido como contenido perteneciente al “Bloque 5: estadística y probabilidad”.

Dicho contenido figura como: "Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos".

OBJETIVOS

- Aprender el concepto de probabilidad de Laplace.
- Descubrir y conocer las técnicas algoritmo-probabilísticas, en concreto del método de dados de Mozart.
- Aproximarse a la composición realizada por Mozart mediante la utilización de los dados.
- Aplicar la probabilidad al método de dados de Mozart.
- Aprender a trabajar en equipo.

CONTENIDOS / ÁMBITOS DE ACTUACIÓN

- Conceptuales: conocimiento del juego de dados de Mozart.
- Procedimentales: crear una composición grupal aplicando el método de dados de Mozart.
- Actitudinales: respeto, colaboración y empatía.

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Competencia matemática-musical.
- Competencia social

METODOLOGÍA

Técnicas de partición activa mediante grupos cooperativos.

MATERIALES Y RECURSOS

- Recursos humanos: El profesor o profesora y los propios alumnos y alumnas de la clase.
- Recursos materiales: Papel pautado, bolígrafo, dados, las tablas del método de los dados de Mozart y los instrumentos del aula de música.

TEMPORALIZACIÓN

- 4 sesiones de 50 min. cada una, divididas en una sesión más teórica y de composición de los compases necesarios para realizar la actividad del juego de dados de Mozart, dos sesiones para seguir con la composición de compases y de realización de una composición mediante la técnica del juego de dados de Mozart, y por último una sesión de exposición de la composición creada. Esta última sesión podría coordinase con el departamento de música para poder utilizar los instrumentos y que pueda servir de evaluación conjunta de ambas materias.

ESPACIOS

- Aula ordinaria.
- Aula de música.

DESARROLLO

El desarrollo de la actividad será:

<u>Sesión 1</u>

- Explicación de la técnicas compositiva del método de dados de Mozart (véase apartado 3.2.1. *Método de los dados de Mozart* del presente trabajo).
- Una vez que los alumnos conozcan el método de dados de Mozart el profesor los dividirá en grupos cooperativos de tres personas cada uno.
- Cada grupo tendrá que componer 176 compases diferentes entre sí. Estos compases son necesarios para realizar el método de dados de Mozart. No tienen por qué tener coherencia tonal ni tener la misma armonía. Ésto se debe a que los alumnos de secundaria con lo que trabajamos, presuntamente, no tienen conocimientos previos de armonía ni de composición.

<u>Sesión 2 y 3</u>

- Seguir con la composición de compases y, una vez acabados, aplicando el método de dados de Mozart, ir lanzando el dado y apuntando cada vez el compás obtenido, para así realizar una composición de 16 compases (8 más 8). Además, a los grupo que les diera tiempo podrían realizar 16 compases más.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Imagen 24: Tablas del método de dados de Mozart [3]

- Una vez la composición ya esté realizada, los alumnos realizarán el cálculo de probabilidades en la que compararán que casillas de la cuadrícula son más fáciles de obtener. Dicho de otro modo, que suma de números de dados es más probable que salga, y por tanto, qué compases son los más probables de obtener.

<u>Sesión 4</u>

- Para finalizar todos los alumnos deberán interpretar sus obras con alguno de los instrumentos trabajados en las clases de música, como pueden ser las flautas de pico, los xilófonos... si algún alumno necesita la interpretación de más de una voz pedirá ayuda a alguno de sus compañeros.
- Esta última sesión se podría coordinar con el Departamento de Música para poder utilizar los instrumentos y para realizar una actividad conjuntas de las dos asignaturas, tanto de matemáticas como de música, por ejemplo en alguna audición en algún día señalado, o acto de fin de curso.

EVALUACIÓN

- Observación del profesor/profesora en las opiniones y actitudes de los alumnos.
- Evaluación de las técnicas de expresión de los diferentes grupos.

- Evaluación de las técnicas de interpretación de la composición y de la explicación de cómo la ha realizado cada grupo.

Actividad nº3 "Sucesiones numéricas".

DESTINATARIOS

Esta actividad está orientada para los alumnos de 3º de la ESO que cursen la asignatura de "Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas", puesto que en el currículo regulado por el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato,* está establecido como contenido perteneciente al "Bloque 2: números y álgebra". Dicho contenido figura como: "Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas".

OBJETIVOS

- Aprender el concepto de sucesión.
- Conocer la sucesión de Fibonacci.
- Desarrollar la creatividad aplicando la sucesión de Fibonacci a una composición musical.
- Aprender a trabajar en equipo.

CONTENIDOS / ÁMBITOS DE ACTUACIÓN

- Conceptuales: conocimiento de la sucesión de Fibonacci.
- Procedimentales: crear una composición involucrando a la sucesión de Fibonacci.
- Actitudinales: respeto, colaboración y empatía.

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Competencia matemática-musical.
- Competencia social

METODOLOGÍA

Técnicas de partición activa mediante grupos cooperativos.

MATERIALES Y RECURSOS

- Recursos humanos: El profesor o profesora y los propios alumnos y alumnas de la clase.
- Recursos materiales: Papel pautado, bolígrafo y los instrumentos del aula de música.

TEMPORALIZACIÓN

- 4 sesiones de 50 min. cada una, divididas en una sesión más teórica en la que se expliquen los conceptos de sucesiones, entre las que se encuentran las aritméticas y geométricas, y el caso particular de la sucesión de Fibonacci, y dos sesiones para realizar por parejas la composición musical que involucre a la sucesión de Fibonacci, desarrollando la imaginación de los alumnos y alumnas, para pensar cómo poder utilizarla y por último una sesión de exposición de la composición creada. Esta última sesión podría coordinase con el departamento de música para poder utilizar los instrumentos y que pueda servir de evaluación conjunta de ambas materias.

ESPACIOS

- Aula ordinaria.
- Aula de música.

DESARROLLO

El desarrollo de la actividad será:

Sesión 1

- Se explicarán todos los conceptos del currículum referentes a las sucesiones, en línea general las sucesiones aritméticas y geométricas y en particular de la sucesión de Fibonacci. Se ejemplificará mediante la composición citada en este trabajo (véase apartado 3.3 sucesiones numéricas).

Sesión 2 y 3

- Se separará a los alumnos en parejas de manera que tengan que ponerse de acuerdo en cómo realizar la composición de manera que utilicen la sucesión de Fibonacci.
- Primero tendrán que pensar qué forma va a tener la composición musical para poder elegir cómo utilizar la citada sucesión.
- Después tendrán que componer los compases que necesiten basándose en la sucesión, y con técnicas compositivas que saben según su nivel musical. No hace falta que la obra tenga coherencia tonal o una armonía establecida.
- Habrá que tener en cuenta que la sucesión se puede utilizar de varias formas, desde la melodía o el número de compases, hasta la parte rítmica de la composición.

- Para finalizar, cada pareja deberá escribir todos los pasos que ha realizado para componer su obra (matemáticamente hablando) y así poder explicar a sus compañeros cómo ha utilizado la sucesión de Fibonacci.

Sesión 4

- Todos los alumnos deberán interpretar sus obras con alguno de los instrumentos trabajados en las clases de música, como pueden ser las flautas de pico, los xilófonos... si algún alumno necesita la interpretación de más de una voz pedirá ayuda a alguno de sus compañeros.
- Esta última sesión se podría coordinar con el Departamento de Música para poder utilizar los instrumentos y para realizar una actividad conjuntas de las dos asignaturas, tanto de matemáticas como de música, por ejemplo en alguna audición en algún día señalado, o acto de fin de curso.

EVALUACIÓN

- Observación del profesor/profesora en las opiniones y actitudes de los alumnos.
- Evaluación de cómo trabajan las parejas.
- Evaluación de las técnicas de interpretación de la composición y de la explicación de cómo la ha realizado cada pareja.

5. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL

Mediante el presente Trabajo Fin de Máster he conseguido aunar dos de las materias que más me llenan personalmente: las matemáticas y la música. He establecido una clasificación personal basada en las diferentes técnicas matemáticas que se han utilizado y se utilizan para componer música, con la finalidad de realizar una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria, donde consigan aprender diferentes conceptos matemáticos a través de la música.

Hay muchas clasificaciones que se podría realizar, pero la que en este trabajo se expone se basa en una clasificación de diferentes técnicas, basadas en patrones geométricos, como son los movimientos rígidos en el plano y las composiciones utilizando fractales; las técnicas algoritmoprobabilísticas, como el método de dados de Mozart, la música dodecafónica y la música serial; y la técnicas compositivas basadas en sucesiones numéricas.

Todas ellas han sido utilizadas partiendo de cómo son utilizadas matemáticamente en su forma más simple, basándose en la primera aparición de las mismas y sin estar combinadas entre sí. De cada una de ellas, se explica en qué consisten y se cita uno a varios ejemplos que nos ayudan a entender mejor el proceso compositivo.

Se realiza una aproximación didáctica con tres propuestas didácticas para estudiantes de secundaria, mediante las cuales se consiguen que los alumnos y las alumnas aprenden, trabajen y entiendas las matemáticas a través de la música.

Es, por tanto, que este trabajo me ha resultado muy enriquecedor para tener más claro todavía la relación que existe de la música con las matemáticas, y poder recurrir a ambas materias para explicar en mi día a día como docente algunos conceptos matemáticos, que seguro que los estudiantes aprenderán mejor con unas metodologías más flexibles y dinámicas, en las que las matemáticas se apliquen a otros ámbitos del aprendizaje.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Pérez J.A. (2000). *Música fractal: el sonido del caos.* Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos de la Universidad de alicante

[2] García, M. y Ríos, R. (2003). Entre las matemáticas y la música. Mètode 37. Recuperado el 27 de junio de 2016 de http://metode.cat/es/Revistas/Monografics/Fons-i-forma/Entre-lesmatematiques-i-la-musica

[3] Syroyid, B. (2012). *El sigilo aleatorio en Mozart*. Archivo del Conservatorio Superior de Música de Málaga.

[4] Rodríguez Y., Rocha P. y Carolina M. (2013). *El juego de dados de Mozart: Un recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

[5] Ibaibarriaga, I. *Música y Matemáticas. De Schoenberg a Xenakis.* KURAIA, Grupo de Música Contemporánea de Bilbao

[6] Nommick, Y. (2011). *Matemática Musical.* Ciclo de miércoles. Fundación Juan March.

■ **Partituras/particellas utilizadas:**

- *Canon* de J. Pachelbel.
- *La Primavera*, de las Cuatro Estaciones, de A. Vivaldi.
- *Minueto al Rovescio* de J. Haydn.
- *El Espejo* de W. A. Mozart.
- *Chavicos* (pasodoble) de autoría propia.
- Resto de composiciones de autoría propia.

Webgrafía de imágenes no incluidas en la bibliografía:

- Imagen 3 Claves musicales. Recuperada el 27 de junio de 2016.
- Imagen 6 Duración de las notas musicales. Recuperado el 27 de junio de 2016.
- Imagen 7 Duración de las notas en forma de árbol. Recuperado el 27 de junio de 2016.
- Imagen 19 Ejemplos de series utilizadas en la música dodecafónica. Recuperado el 27 de junio de 2016.
- Imagen 20 Serie rítmica y serie de la dinámica. Recuperado el 27 de junio de 2016.

7. ANEXOS

A continuación se ejemplifica mediante unas composiciones creadas por la autora, cada una de las actividades que conforman las propuestas pedagógicas que contiene este Trabajo Fin de Máster.

El objetivo, es tener claro a dónde queremos que los alumnos lleguen, con la finalidad que los estudiantes de secundaria, a los que va dirigido, aprendan matemáticas con ayuda de la música.

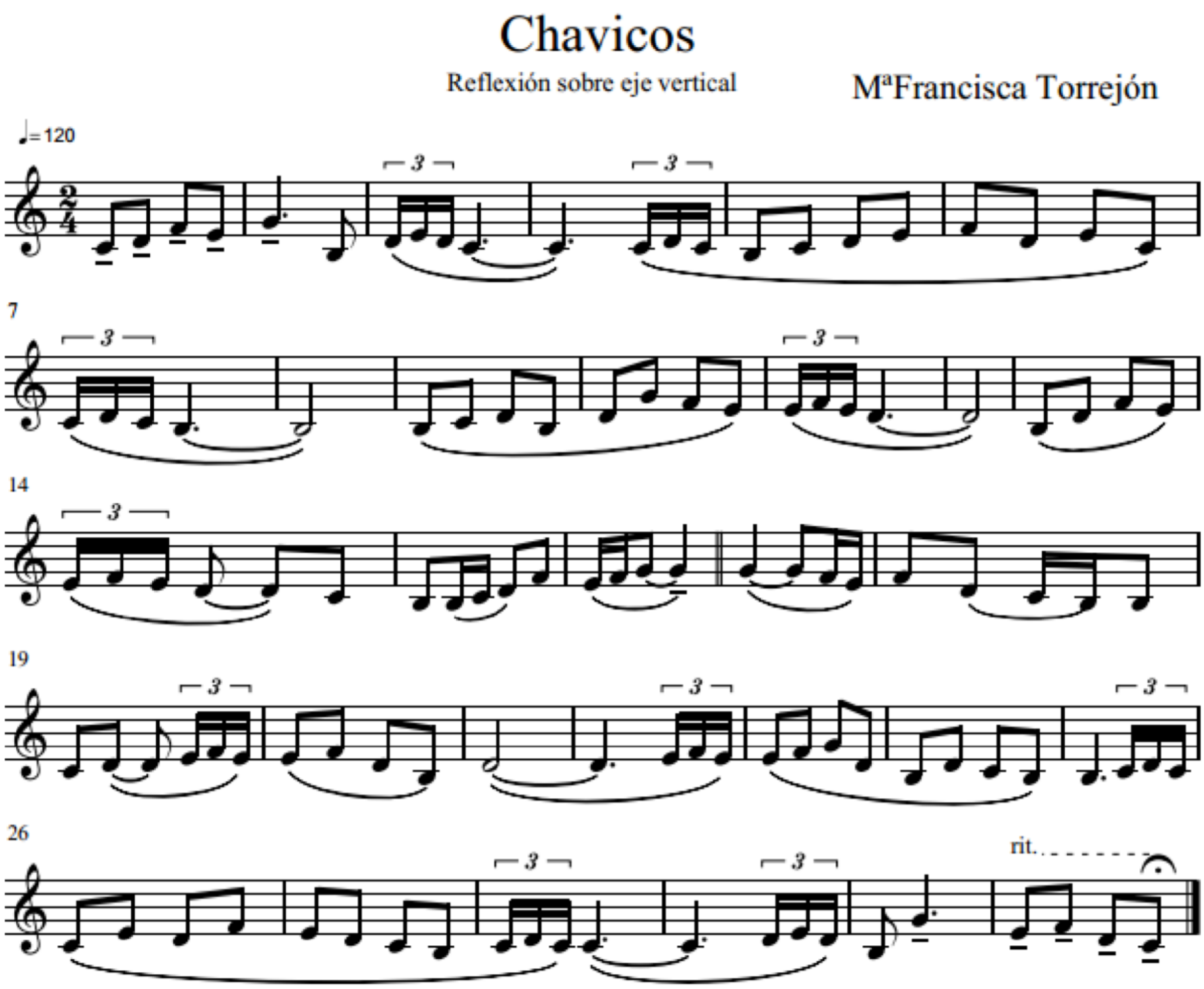
Son actividades productivas para los alumnos y alumnas de secundaria, que trabajan de una forma diferentes los conceptos matemáticos a la vez que aprenden nociones de música y otras materias transversales, además de fomentar el compañerismo, el trabajo cooperativo y el desarrollo de la habilidad social de alumnos adolescente.

Todas las actividades han sido compuestas a través del programa y editor de partituras “noteflight”, de formato libre, al cual pueden tener acceso todos los alumnos, si tienen a disposición un aula de informática en el Centro, o de diferentes ordenadores para ser utilizados por ellos, para que compongan las partituras mediante ese programa, ya que además de poder componerlas pueden también escucharlas a la vez que las van creando.

Actividad nº1 “Técnicas geométricas”.

La técnica geométrica aplicada ha sido la “reflexión mediante un eje vertical”. La autora lo ha aplicado a una composición propia que compuso como regalo para su abuelo: un pasodoble titulado “Chavicos”.

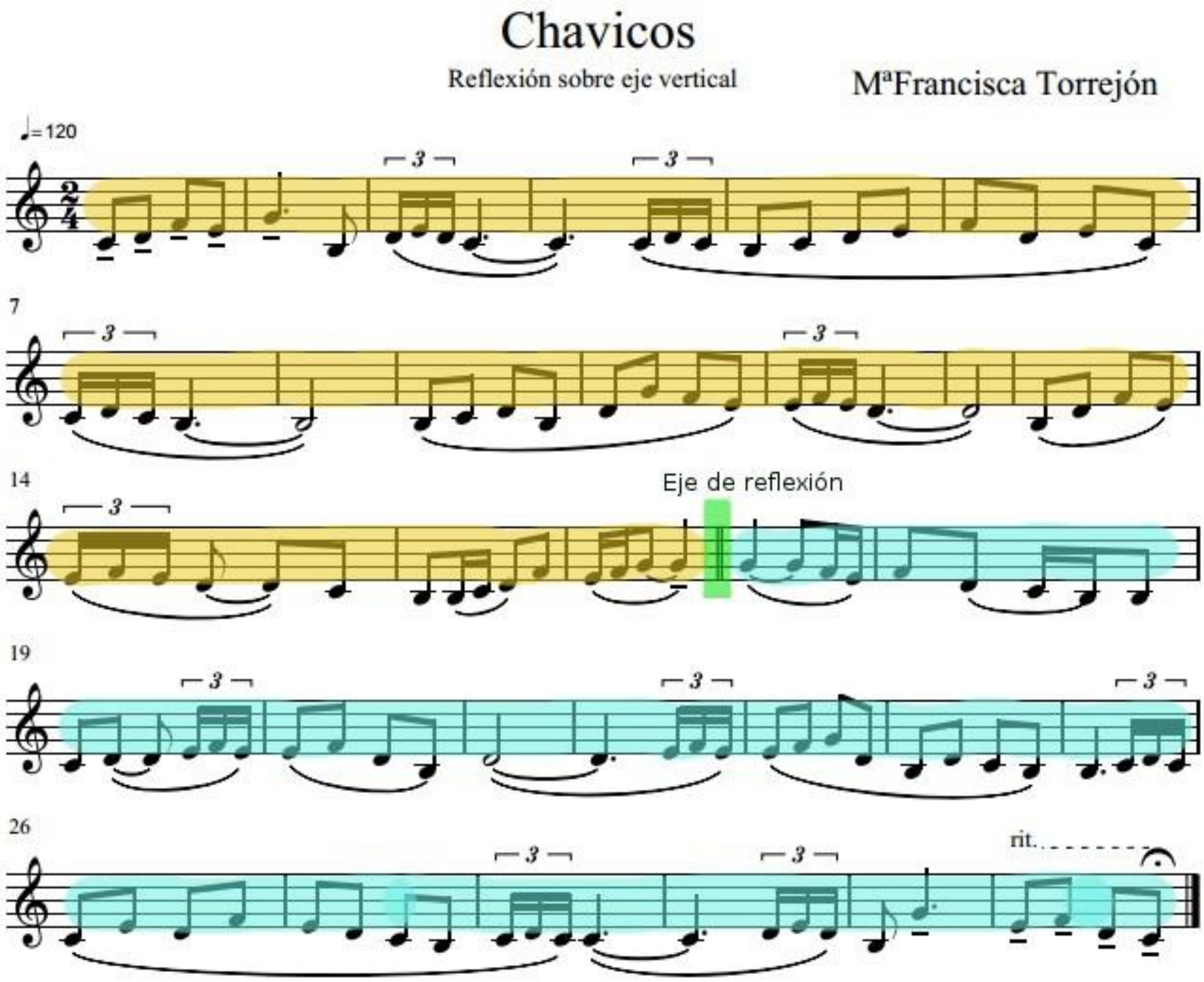
Los 16 compases iniciales que componen el “trío” del pasodoble han sido reflejados mediante un eje vertical situado entre el compás 16 y el 17. Como se observa, a partir del compás 17 hasta el final, son las mismas notas que desde el compás 16 al principio. Como resultado de la aplicación de la citada técnica se ha obtenido:



A continuación, se puede observar la misma composición, pero destacando en colores las diferentes partes:

- Del compás 1 a 16, y de color anaranjado se encuentra la melodía original. Es decir, la melodía que los alumnos deben pensar primeramente.
- Entre el compás 16 y 17 se encuentra el eje de reflexión verticalmente.

- Del compás 17 al final, y de color azulado, podemos ver la melodía reflejada verticalmente.



Actividad nº2 "Técnicas algoritmo-probabilísticas".

Esta actividad ha sido realizada mediante la técnica compositiva del método de dados de Mozart.

Para realizar la misma, la autora ha comenzado por la composición de los 176 compases que se necesitan, tal y como se ha comentado, para poder utilizar las tablas que Mozart creó, para su método de los dados.

Para componer los compases no se ha tenido en cuenta ninguna norma de armonía ni de coherencia tonal, simplemente se han compuesto 176 compases con el compás 3 / 4.

Así pues, los 176 compases creados ha sido los siguientes:


Compases dados Mozart
Mª Francisca Torrejón
♩=120
8
15
21
28
35
42
48


61
3
68
75
82
89
96
3
102
109

Una vez se ha compuesto todos y cada uno de los compases anteriormente citados, se lanzan los dados. Se lanzan de dos en dos, y se anotan y suman las puntuaciones de cada tirada de dos dados. A continuación, está señalado para cada columna (que equivale a cada compás de los 16 en total) la suma de las puntuaciones de los dados obtenida:

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

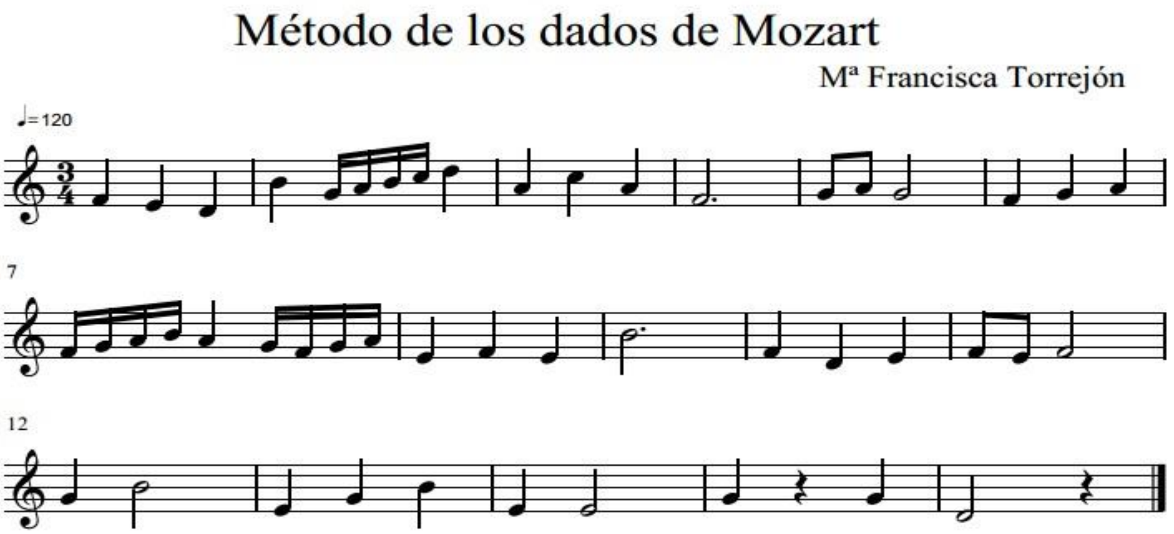
	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

De forma, que la los compases obtenidos han sido (por orden):

69 – 17 – 113 – 53 – 153 – 133 – 110 – 107 / 25 – 88 – 150 – 56 – 144 – 160 – 149 – 151.

Para finalizar, se buscan esos números de compases en los compuestos previamente y se escribe la composición obtenida.

En este caso, la composición obtenida aplicando las tablas del método de los dados de Mozart es la siguiente:



Además mediante esta técnica compositiva, los alumnos de 1º y 2º de la ESO (que es principalmente va dirigida esta actividad), pueden comenzar a familiarizarse con los conceptos de probabilidad y poder aplicar de una manera vivencial la Regla de Laplace, la cual está fijada como contenido en el currículo.

Así pues, realizaremos un tabla en la que la primera columna muestra los posibles resultados que pueden salir al lanzar el primer dado, y la primera fila muestra los posibles resultados que pueden salir al lanzar el segundo dado. En las casillas interiores se han sumado los resultados del primer dado más el segundo dado para obtener la puntuación de la suma de ambos dados.

Como se puede observar el número que proviene de la suma de los dados con menos probabilidades de salir es el 2 y el 12, ya que el 2 sólo se puede obtener de la suma de 1+1, y el 12 de la suma de 6+6.

Por otro lado, el número que es más probable que salga es el 7, que tal y como se muestra en la tabla puede provenir de las siguientes sumas: 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5 y 1+6.

Es, por tanto, que el espacio muestral está compuesto por las 36 combinaciones de los dos dados que pueden tener lugar.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aplicando la regla de Laplace se obtienen los siguientes resultados:

Regla de Laplace: P(A) = casos favorables / casos posibles

Prob. (2) = 1/36

Prob. (3) = 2/36

Prob. (4) = 3/36

Prob. (5) = 4/36

Prob. (6) = 5/36

Prob. (7) = 6/36

Prob. (8) = 5/36

Prob. (9) = 4/36

Prob. (10) = 3/36

Prob. (11) = 2/36

Prob. (12) = 1/36

Con todo ello, los alumnos entenderán los conceptos probabilísticos a trabajar en esta etapa de secundaria según el currículum de una manera más práctica y vivencial, que les permita profundizar más en la materia y además intercambiar ideas y opiniones con los compañeros comparando los diferentes resultados obtenidos por cada uno.

Actividad nº3 "Sucesiones numéricas".

Para realizar esta actividad didáctica se ha elegido la sucesión de Fibonacci como ejemplo de sucesión numérica para utilizarla como técnica compositiva.

La sucesión de Fibonacci es una sucesión infinita de números naturales, la cual comienza así:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610....

Como ya hemos comentado, en esta técnica compositiva tiene una gran importancia el criterio del autor o autora, y de cómo él o ella traslada la idea de la sucesión a la partitura.

En este caso se ha decidido trabajar con los números comprendidos de la sucesión de Fibonacci entre el 1 y 8. Y se ha intentado dar coherencia a toda la obra relacionando éstos números y haciendo la estructura principal de la obra esté basada en la sucesión de Fibonacci.

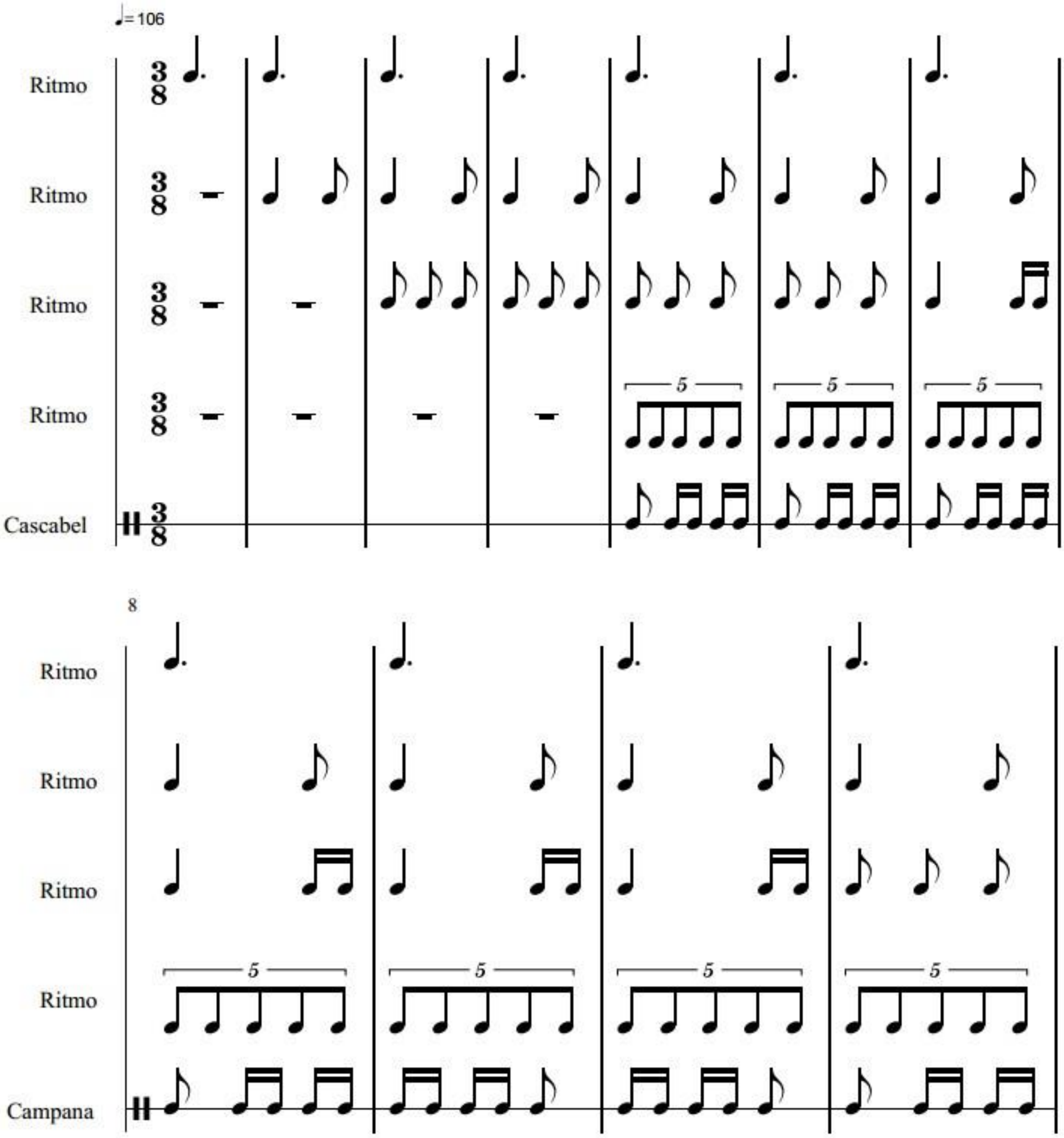
Así pues, a continuación se procederá a nombrar cada una de las partes de la composición y a relacionarlas con la citada sucesión, según el criterio de la compositora:

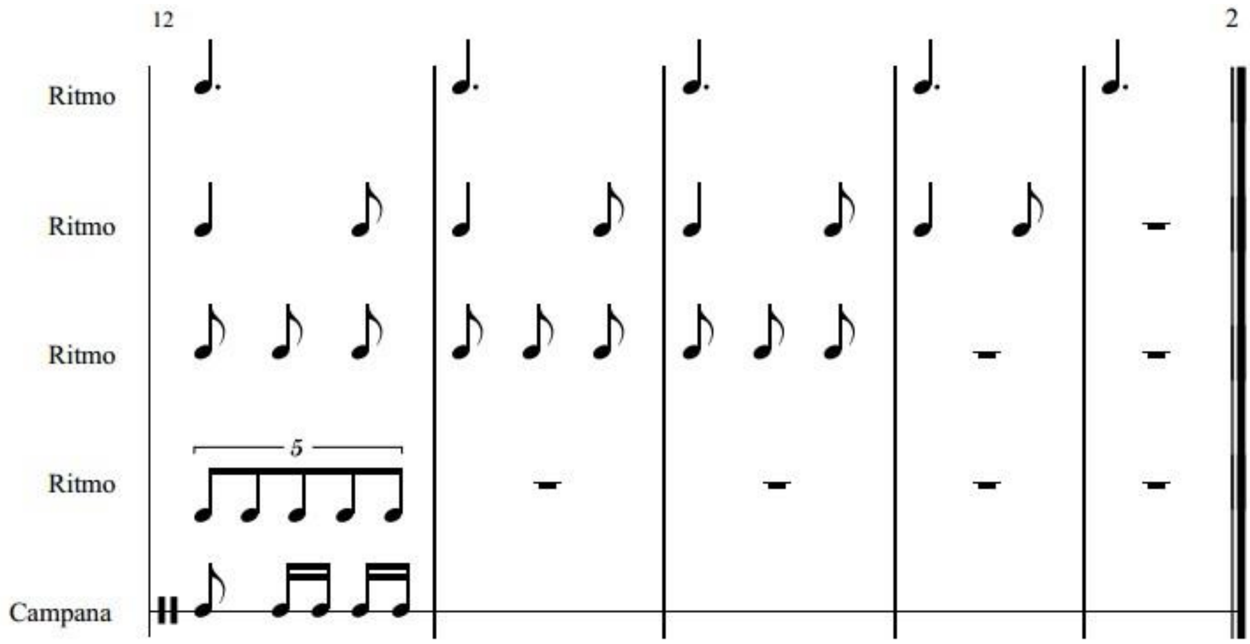
- El compás de la obra es 3/8. Está realizado con dos números de la sucesión pensando en que se obtuviera un resultado musical más o menos coherente. El 3 del numerador índica que en cada compás "entran" tres figuras musicales, y el 8 indica que esas figuras son corcheas. Es decir, en cada compás entran 3 corcheas.
- La estructura a seguir se ha dividido en dos partes de 8 compases cada una.
- El número de instrumentos que interviene en la composición está relacionado con la sucesión: en el primer compás sólo hay un instrumento; en el segundo compás hay 2 instrumentos; en el tercer y cuarto compás hay tres instrumentos; y en el quinto, sexto, séptimo y octavo hay 5 instrumentos. Con esto se completaría los 8 primeros compases.
- Para la realización de los 8 siguientes compases se ha procedido a realizar la misma técnica en cuanto al número de instrumentos, pero en sentido descendente, es decir, que cada vez haya un menor número de instrumentos tocando. Así pues: en el compás noveno, décimo, decimoprimero y decimosegundo hay 5 instrumentos; en el compás decimotercero y decimocuarto hay 3 instrumentos; en el decimoquinto hay 2 instrumentos; y en el último compás se queda solamente un instrumento sonando.
- Además, en cada intervención de los 5 instrumentos llevan un número en concreto de figuras en cada compás incluidos en la serie de Fibonacci. Es decir, el primer instrumento lleva una figura de negra con puntillo en cada compás; el segundo lleva 2 figuras, que son una negra y una corchea; el tercero lleva 3 figuras que corresponden a tres corcheas; y el cuarto y quinto, que entran a la vez, llevan 5 figuras en cada compás, que se corresponden con un quintillo de corcheas para una voz y de 4 semicorcheas y una corchea para la otra voz.

La partitura obtenida como ejemplo de la actividad didáctica, basada en la sucesión de Fibonacci, ha sido:

Sucesión de Fibonacci

Mª Francisca Torrejón




12
2
Ritmo
Ritmo
Ritmo
Ritmo
5
Campana