UNIVERSITAT
JAUME•I

TRABAJO DE FINAL DE GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Alumna: Silvia Felip Aparisi

Tutora de TFG: Laura Peydró Pons

Área de Didáctica de la Matemática

Curso 2015-2016

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a aquellas pocas pero valiosas personas que de una forma directa o indirecta han hecho posible que yo realizara mi Trabajo de Fin de Grado (TFG) en maestra de Educación Primaria.

En primer lugar me gustaría agradecer a mi tutora del TFG, Laura Peydró Pons, profesora del departamento de Didáctica de la Matemática, por su paciencia y dedicación. Gracias por su ayuda y por el esfuerzo al intentar que mi trabajo quedara lo mejor posible, ya que al ser la primera vez que realizaba un trabajo de estas magnitudes he tenido un amplio repertorio de dudas que resolver.

También quiero agradecer a mis padres Rosalina y Vicente, a mi hermana Sonia y a mi novio Eric, quienes me han apoyado y animado no sólo en el transcurso de este trabajo, sino a lo largo de los cuatro años de mi formación universitaria.

Todos ellos han aportado su granito de arena para que este trabajo sea tal y como lo vemos ahora.

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra y la posibilidad de ser introducida en la enseñanza desde la escuela primaria es el tema en torno al cual se desarrolla este trabajo.

Las dificultades, obstáculos y errores por parte de los estudiantes, en los primeros contactos con esta disciplina, han sido y continúan siendo objeto de estudio en Didáctica de las Matemáticas, siendo una de las principales líneas de investigación considerar la enseñanza del álgebra en niveles educativos anteriores a la Educación Secundaria, tal y como se viene haciendo actualmente.

Introducir el álgebra en la Etapa de Educación Primaria, según algunos autores (Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato, 2014; Molina, 2009) podría favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico, evitando en parte, las dificultades encontradas.

En este sentido este trabajo trata de aportar información al respecto, con el fin de contribuir en el futuro a la formación matemática de los estudiantes desde los primeros niveles educativos.

Esta contribución teórica se complementará con la elaboración de unas actividades matemáticas para alumnos y alumnas de Educación Primaria, que tratarán de plasmar algunas de las ideas principales de estas investigaciones en la labor del maestro, diseñando actividades que posibiliten el desarrollo del pensamiento algebraico.

2. EL ÁLGEBRA: QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE

Hoy en día hay numerosos estudios sobre la posibilidad de introducir el álgebra en edades tempranas, pues los niños son capaces de desarrollarse más de lo que se les está exigiendo.

Los autores Díaz, Arsuaga y Riaño (2005), coinciden con la definición del álgebra como la rama matemática que estudia las operaciones algebraicas donde se combinan dos objetos llamados operandos para obtener un tercero, el resultado. Además para estos autores, el álgebra es uno de los pilares básicos sobre los que se construye la matemática, por lo que ven importante conocer sus principios fundamentales para el estudio de otras ramas matemáticas y sus aplicaciones:

> *"El álgebra es la rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de las operaciones algebraicas definidas en conjuntos arbitrarios, considerando operación algebraica a toda ley que asocia dos objetos matemáticos (operandos) con un tercer objeto (resultado)." (Díaz, Arsuaga y Riaño, 2005, p.7)*

Otros autores como Irwin y Fletcher (1979) al hablar del álgebra enfatizan la estrecha relación que mantiene con la aritmética:

> *"El Álgebra es efectivamente una continuación de la Aritmética, pues también trata de los números. El Álgebra es una rama ya antigua de las Matemáticas, que se ha ido desarrollando desde hace varios siglos. Su objeto es estudiar las propiedades de los números y manejar las combinaciones y relaciones numéricas." (Irwin y Fletcher, 1979, p.97)*

Según Gómez (1995) el álgebra contribuye a comprender ciertos procedimientos característicos de la actividad matemática, como generalizar o argumentar. Según este autor, el álgebra y la aritmética no son sistemas matemáticos aislados, puesto que, el álgebra generaliza a la aritmética y esta última, se apropia del lenguaje horizontal (igualdades y paréntesis) del álgebra.

> *"El álgebra es una herramienta apta para comprender las generalizaciones, captar conexiones estructurales y argumentar en matemáticas."*(Gómez, 1995 p.61)

El interés por el álgebra en matemáticas proviene de la utilidad, tanto en el desarrollo del cálculo numérico, como en las demostraciones matemáticas, tal y como afirma Bourdon en su obra titulada "*Elementos del álgebra*" (Bourdon, 1849):

> *"El álgebra es una parte de las Matemáticas que por medio de ciertos signos abrevia y generaliza los raciocinios que se hacen al resolver las cuestiones relativas a los números. Hay dos especies principales de cuestiones: el teorema, que tiene por objeto demostrar la existencia de ciertas propiedades correspondientes a ciertos números conocidos y dados; y el problema, cuyo objeto es determinar ciertos números por el conocimiento de otros que tienen con los primeros, relaciones indicadas en el enunciado." (Bourdon, M. 1849, p.1)*

Actualmente, tal como nos indica Palarea (1998), el álgebra se considera una herramienta utilizada para aprender y explicar las interrelaciones entre los números y símbolos hasta llegar a generalizarlos.

> *"...]el acercamiento al "Álgebra" […] sirve como método de aprehender y de explicar interrelaciones, permite una manera de llegar a la generalidad por la vía de lo particular y descubrir los "modelos" que se presentan en lo cotidiano." (Palarea, 1998, p.6)*

Tal y como hemos visto, el álgebra es una rama de las matemáticas necesaria para la actividad matemática, concretamente para la simbolización de los cálculos numéricos.

3. EL ÁLGEBRA EN EL SISTEMA EDUCATIVO

El primer nivel educativo donde aparecen los primeros contenidos algebraicos es, el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.).

Según establece el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, un contenido en 1º de la E.S.O. es el siguiente: "Operaciones con expresiones algebraicas o simbólicas muy sencillas. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones sencillas." Es el primer contenido de la enseñanza obligatoria que aparece en el currículo y que contiene álgebra mediante ecuaciones.

Este trabajo centra su investigación en torno a la Educación Primaria. En este sentido tal y como nos indica el *Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana*, en 6º curso y dentro del bloque 2 (números), encontramos el siguiente contenido: *"Operaciones combinadas con paréntesis de números naturales de no mas de tres operaciones."* Estas son las únicas nociones que a nuestro parecer, se podrían relacionar con el álgebra en la Educación Primaria, sin hacer referencia explícita a ella.

Estas nociones son insuficientes para muchos de los alumnos cuando se introduce el álgebra en la E.S.O. Se presupone que están preparados para utilizar cierto nivel algebraico. Dado que el alumnado no tiene una base sólida algebraica, que implica un pensamiento algebraico, y desde la cual desarrollar los contenidos del área de las matemáticas, el álgebra se enseña precipitadamente lo que provoca una serie de dificultades, que desembocan en obstáculos y terminan provocando errores. Estos errores muestran que en algún momento del proceso enseñanza-aprendizaje de un alumno, tiene dificultades.

4. DIFICULTADES ASOCIADAS A LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Es un hecho que los resultados de los aprendices de álgebra son poco satisfactorios. Esto ha llevado investigadores a realizar numerosos estudios al respecto. Entre ellos destacamos la investigación llevada a cabo por Palarea.

La investigación llevada a cabo por Palarea (1998) analiza las dificultades que presentan los alumnos cuando empiezan a aprender álgebra, los obstáculos que encuentran y los errores que ellos conllevan, es decir, las dificultades y los obstáculos son visibles en el momento en que se producen errores.

4.1. Dificultades

A partir del estudio detallado llevado a cabo en su tesis, la autora afirma en general, que las dificultades que se van a exponer a continuación, no se pueden evitar, pues forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático.

Los profesores son los que han de hacer explicitas estas dificultades, ya que de quedar implícitas sería muy costoso incluir un nuevo conocimiento. Por ello los profesores han de conocerlas para poder reflexionar sobre ellas y poder dar posibles soluciones a estas dificultades.

Palarea clasifica las dificultades en diferentes perspectivas según en qué elementos haga énfasis. Quedarían clasificadas de la siguiente manera:

- Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del Álgebra tanto por los conceptos matemáticos como por su naturaleza abstracta.

Respecto a su naturaleza abstracta, la autora observa que hay alumnos que muy pronto se desentienden del álgebra por no verle ningún significado real y que además este desentendimiento les lleva a un rechazo total hacia el área de matemáticas:

> *"Sabemos que para muchos alumnos, el Álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las Matemáticas. Para estos alumnos lo que les pedimos hacer en Álgebra no tiene un significado real subyacente." (Palarea, 1998, p.6)*

Dichas dificultades se diferencian en dos niveles: el nivel semántico y el nivel sintáctico. En el primero de ellos se les da los signos junto con un significado claro y preciso. En el segundo caso, las dificultades sintácticas, no se les hace referencia directa a ningún significado y operan mediante reglas.

- Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento en álgebra, propios de la naturaleza lógica del álgebra y de la ruptura de los modos del pensamiento algebraico que puede llegar a desencadenar una serie de dificultades:

> *"Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico." (Palarea, 1998, p.74)*

- Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del álgebra. Hace referencia a la institución escolar, el currículo y los métodos de enseñanza-aprendizaje.

- Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Hace referencia a los estadios generales del desarrollo intelectual. Cada estadio se asocia a un modo de razonamiento característico y representa unas tareas específicas de álgebra.

- Las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales. Los alumnos sienten tensión y miedo hacia ella. Algunos aspectos que influyen son: "*la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas." (Palarea, 1998, p.75)*

<u>4.2. Obstáculos</u>

Según Palarea (1998), uno de los problemas del proceso enseñanza-aprendizaje del álgebra son los obstáculos. Los define como un conocimiento adquirido positivamente que en cierto contexto produce respuestas eficaces y adecuadas, pero al salir de ese contexto, puede llegar a producir respuestas inadecuadas o incorrectas. Al haber mostrado eficacia en su anterior dominio, el rechazo del anterior y la consolidación del nuevo saber puede ser tardío.

> *"Podemos señalar que un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento. Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto, genera respuestas inadecuadas, incluso, incorrectas; el dominio resulta falso. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber." (Palarea, 1998, p.75)*

Tall (1989) en su trabajo *"Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm"* llama a estos problemas obstáculos cognitivos. Entre ellos diferencia dos tipos:

- Obstáculos basados en la secuencia de un tema. Hay conceptos que tienen cierta complejidad por lo que hay que familiarizarse con ellos para adquirir un buen conocimiento. Un ejemplo en el caso del álgebra sería aprender primero a resolver una ecuación abstracta y luego a partir de una situación problemática saber aplicar dicha ecuación para encontrar el valor de la incógnita que nos de la solución. Es un proceso.

- Obstáculos basados sobre casos simples. No hay que dejar que se aburran en la monotonía de la resolución de casos simples y pasar paulatinamente a casos más complejos. Un ejemplo en el álgebra sería realizar seis ecuaciones simples y cuatro complejas en lugar de ocho simples y dos complejas.

4.3. Errores

Investigaciones realizadas recientemente han mostrado la importancia de centrar la atención tanto en las respuestas correctas de los estudiantes, así como en los errores que cometen. Según Palarea (1998), probablemente sea necesario enseñar menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, para luego presentarles situaciones matemáticas con las que puedan seguir pensando y reajustar sus ideas.

Según la autora también es importante que el profesor conozca los errores básicos en álgebra pues son una fuente de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esto les permite buscar formas de ayudar a los alumnos a corregir dichos errores y conocer las posibles causas de las dificultades de estos aprendices de álgebra.

Según el grupo de Álgebra del proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) llevado a cabo en Reino Unido entre 1980 y 1983, observaron que los errores en el álgebra son debidos a: la naturaleza y significado de los símbolos y las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y el uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos". Los tres primeros provienen de la transición de la aritmética al álgebra mientras que el cuarto y último se debe a las falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Retomando las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento en álgebra comentadas en el punto 4.1. los modos del pensamiento algebraico que provocan rupturas convirtiéndose en dificultades, cuando el alumnado tiene que cambiar el modo de pensar sobre un mismo conocimiento matemático, que ya creían consolidado, puede llevarles a problemas y a quedar estancado en cierta parte del proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra. Como se verá a medida que nos vayamos adentrando en el siguiente apartado, en la matemática escolar, encontramos niveles de algebrización en los que dependiendo de la manera en que el sujeto resuelve una tarea, puede decirse que se encuentra en un nivel u otro.

5. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

Introducir el álgebra en la escuela no es impartir un «curso de álgebra» sino considerar el desarrollo del razonamiento algebraico desde los niveles de educación infantil hasta el bachillerato. Así nos lo indican Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014) en su estudio e investigación llevada a cabo. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo tan necesarios para el pensamiento algebraico (sobre todo en ecuaciones, variables y funciones).

Según Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005), el razonamiento algebraico implica:

- Desarrollar un pensamiento relacional (relaciones numéricas entre una o varias expresiones).
- Transformar expresiones matemáticas (sin limitarse solo a calcular la respuesta correcta).
- Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (tanto operaciones como propiedades).

Tal y como sugieren Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014), para llevar a cabo el desarrollo del pensamiento y razonamiento algebraico, es necesario tener en cuenta algunos aspectos en la formación de maestro. Esta debe incluir la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos. Las características del razonamiento algebraico (sencillas de adquirir por niños) que deben conocer los maestros en formación o futuros docentes son:

1. Los patrones que aparecen de forma natural en las matemáticas.
2. El uso de símbolos que permite expresar más eficazmente las generalizaciones.
3. Las variables son símbolos.
4. Las funciones asocian los elementos de un conjunto con los de otro.

Sin embargo, según Godino y Font (2003) la escuela tiene una concepción tradicional y limitada del álgebra escolar denominada «aritmética generalizada», pues supone que el álgebra es una rama matemática donde se manipulan letras que representan números no especificados. Las características del álgebra fáciles de apreciar (superficiales) son:

- El uso de símbolos (como letras, cuya función es ser elemento variable).
- La expresión de relaciones entre objetos (ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de reglas de transformación).

En el proceso de algebrización de los estudiantes en la actividad matemática escolar, según Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014), encontramos diferentes niveles de algebrización. Dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, el sujeto puede ser clasificado en un nivel u otro.

Estos niveles se enmarcan entre un nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel (actividad algebraica). Hay dos niveles de algebrización primarios (protoalgebraicos).

- Ausencia de razonamiento algebraico (Nivel 0)

  Cuando se limita a realizar lo que pide el enunciado sin pensar (a prueba y error).

  Ejemplo: "Realiza estas sumas y compara los resultados:"

  a) 24386+6035; 6035+24386

  b) 24386+6035+715; 6035+715+24386

  Cuando nos piden que sumemos dos o mas elementos. Hay dos operaciones que nos piden la misma suma pero con los números cambiados de orden (propiedad conmutativa). Si el alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales, no se produce ningún razonamiento algebraico.

- Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

  Cuando piensa sobre lo que le pide el enunciado del ejercicio, reconoce y utiliza las propiedades matemáticas pero no usa símbolos para referirse a un número variable.

  Ejemplo: (el mismo utilizado para el nivel anterior)

  Si el sujeto piensa: 24386+6035 es 30421 (calculado en el primer apartado), entonces para calcular el resultado del apartado segundo, 24386+6035+715 es suficiente añadir 715 al resultado 30421 (del apartado anterior).

  Al obtener los resultados de esta manera, se habla de un nivel 1 de algebrización.

- Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

  Cuando se utilizan variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referirse al valor que se quiere calcular.

  Ejemplo: "Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después de usarla cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente, se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?”

La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación: $2(2n-4)-4=0$; $4n-8-4=0$; $4n-12=0$; $n=3$

Si el sujeto la plantea y la realiza para resolver el problema, se afirma que se halla en el nivel 2 de algebrización.

– Nivel consolidado de algebrización (nivel 3)

Cuando se generan objetos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos. Se realizan transformaciones conservando siempre la equivalencia.

Ejemplo: “Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?”

Si es T el número de taburetes y S el número de sillas. El total entre ambos deben sumar 6, entonces, $T+S=6$. Por otro lado, hay un total de 20 patas: $3T+4S=20$. Como de $T+S=6$, se obtiene que $T=6-S$; por tanto, $3(6-S)+4S=20$, de donde $18+S=20$. Finalmente $S=2$. Si $S=2$, entonces $T=4$. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

Al ser capaz de deducir una formula a partir del enunciado, utilizar dos incógnitas, una equivalencia y operar con ello, se afirma que el sujeto se encuentra en un nivel 3 de algebrización.

Los mismos autores que exponen la anterior clasificación de niveles de algebrización Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014), realizaron un estudio para conocer el nivel de una muestra de 140 estudiantes del grado de magisterio, pues para desarrollarlos en alumnos, es importante que el maestro o profesor esté situado en uno de los niveles más altos. Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Tabla 1.
Frecuencias (y porcentajes) de respuestas al problema según niveles de RAE (n = 140)

Niveles de algebrización	*Correctas*	*%*	*Incorrectas*	*%*	*Total*	*%*
0	64	63,4	24	61,5	88	62,9
1	25	24,8	10	25,6	35	25,0
2	0	0	1	2.56	1	0,7
3	12	11,8	4	10,3	16	11,4
Total	101	100	39	100	140	100,0

Como se observa en la tabla, solo 16 alumnos realizaron la prueba utilizando un nivel 3 de algebrización, de los cuales solo hallaron la respuesta correcta 12 de ellos. Hay un alumno con nivel 2 de algebrización, pero no consigue dar con la respuesta correcta. Del resto (123 alumnos de un total de 140) se hallan 88 (más de la mitad de los participantes) con un nivel nulo de álgebra (24 de ellos con respuestas incorrectas). Por último hay 35 alumnos en un nivel 1 (10 de ellos con respuestas erróneas).

Según los autores, la distinción de niveles de razonamiento algebraico descritos pueden ser útiles en la formación matemática de maestros de Educación Primaria. Los ejemplos vistos permiten un desarrollo del sentido algebraico en los futuros maestros que les permite aumentar progresivamente el nivel de algebrización. Así pues, el futuro docente debería tener la capacidad de:

- Usar símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas.

Estas son las capacidades que debería tener el docente para desarrollar el sentido algebraico en los alumnos realizando actividades planificadas de forma que vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

De todo lo visto anteriormente en este trabajo, podemos deducir que las dificultades encontradas en niveles de secundaria, tienen su origen en la Educación Primaria, dado que se les exige desarrollar directamente el nivel 2 de algebrización cuando empiezan primero de la E.S.O., sin la garantía de haber adquirido a lo largo de la Etapa Primaria los niveles anteriores.

En la Educación Primaria, los niveles 0 y 1 de algebrización, no están contemplados a nivel curricular. Puesto que los cambios curriculares son a muy largo plazo y difíciles de conseguir, a pesar de las sugerencias de los expertos, se debería poder actuar sin que hubiera un cambio inmediato en el currículo. El maestro puede tener la capacidad de desarrollar en el alumnado estos niveles bajos de algebrización apoyándose por ejemplo en contenidos de aritmética o geometría, trabajándola desde otra perspectiva diferente a la que están acostumbrados.

6. EL ÁLGEBRA EN LA ETAPA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El álgebra, a pesar de no ser uno de los contenidos específicos de la Educación Primaria, sí es una problemática reconocida en didáctica de las matemáticas. Como se ha comentado anteriormente, recientes investigaciones han intentado comprobar si sería posible introducir el álgebra en edades tempranas, más en concreto en la etapa Primaria. No son muchos los modelos propuestos para la enseñanza del álgebra. Entre ellos destacaremos el conocido como "Early-Algebra", fruto de las investigaciones relacionadas con la llamada pre-álgebra.

Según Molina (2009), "*la pre-álgebra persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas." (Molina, 2009, p.136)*

Al hablar de Early-Algebra se amplían estos objetivos y se considera que las dificultades en el aprendizaje del álgebra son debidas al modo de introducirla y trabajarla.

> *"La Early-Algebra tiene unos objetivos más amplios [...] y considera que las dificultades que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del álgebra son debidas principalmente al modo en que las matemáticas elementales son introducidas y trabajadas." (Molina, 2009, p.136)*

La característica fundamental estriba en el cuestionar que la enseñanza del álgebra comience en la Educación Secundaria (Carraher y Schliemann, 2007).

Por lo tanto, definiríamos la Early-Algebra como el término que se usa para ponerle nombre a la propuesta didáctica, dentro del currículo ordinario, de introducir el pensamiento algebraico durante las primeras etapas educativas, más concretamente en la Etapa Primaria. Se entiende por pensamiento algebraico (Chambers, 1994) el que propicia la construcción y representación del modelo de regularidad, aquello que posteriormente les permitirá razonar, proyectar y conjeturar.

> *"[...]el pensamiento algebraico, que "da cuerpo a la construcción y a la representación del modelo de regularidad, permite razonar, proyectar y conjeturar" (Chambers, 1994) (Citado por Palarea, 1998, p.6)*

Así pues podríamos afirmar que la problemática asociada a la enseñanza del álgebra, se extiende a la Educación Primaria.

7. EJEMPLIFICACIÓN DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DISEÑADAS PARA EL AULA DE PRIMARIA

Con los siguientes ejemplos se pretende mostrar en este trabajo cómo es posible resolver ejercicios o problemas en la etapa de Educación Primaria, generalmente propuestos en Educación Secundaria para ser resueltos a nivel 2 de algebrización.

A continuación se presentan tres situaciones problemáticas. La primera de ellas se refiere a un problema real, contextualizado en compras de productos por lotes, mientras que los otros dos se refieren a contextos matemáticos (cálculo numérico y geometría). Todo ellos son resueltos según los diferentes niveles de algebrización (nivel 0, nivel 1 y nivel 2).

7.1. Resolución de una situación problemática

Carlos y Ana han ido a comprarse ropa a una tienda local. Carlos se ha gastado 80 euros en dos camisetas y un pantalón, mientras que Ana, ha gastado 70 euros en una camiseta y dos pantalones. ¿Cuánto vale una camiseta? Y un pantalón?

Nivel 0: El estudiante utiliza la prueba y error.

10 + 10 + 50 = 70   y   50 + 50 + 10 = 110 → No

15 + 15 + 40 = 70   y   40 + 40 + 15 = 95 → No

20 + 20 + 30 = 70   y   30 + 30 + 20 = 80 → Si

Se inventa el precio de la camiseta y el pantalón varias veces hasta que al final acierta. Puede tardar mas o menos en encontrar la respuesta correcta..

Nivel 1: El estudiante razona primero.

Si cambiamos una camiseta por un pantalón, la diferencia del precio son 10 euros. Cuando piensa que los precios de la camiseta y el pantalón tienen poca diferencia de precio, posiblemente no haga los dos primeros intentos del nivel 0, pues hay una diferencia de precios de 35 a 40 euros entre una camiseta y un pantalón. Ahora utilizaría precios en los que haya 10 euros de diferencia entre un producto y otro: 10 y 20 o 20 y 30.

Nivel 2: Resolución mediante un sistema de ecuaciones.

El planteamiento del problema utiliza la simbolización de los valores desconocidos, en este caso, el precio del pantalón y la camiseta, P y C, respectivamente.

2C + P= 80

C+ 2P= 70

7.2. Resolución de un ejercicio de cálculo numérico

El enunciado del ejercicio sería el siguiente: ¿Cuánto hay que sumarle a estos números para que sean iguales a 98?

a) 58 b) 72 c) 82 d) 68

Nivel 0: El estudiante utiliza el conteo.

Los alumnos con nivel 0 de algebrización, seguramente se limitaran a contar con los dedos desde el número que les damos en los apartados, hasta que el número sea igual que el que les pedimos en el enunciado (98).

No establece relaciones entre números y cuenta de forma sistemática en los cuatro apartados. Contara desde 58 hasta 98 y obtendrá que hay que sumar 40 al número inicial para llegar a 98. Y así en los otros tres restantes.

Nivel 1: El estudiante razona primero.

Una vez obtenido el resultado del 72. De 72 a 82 hay 1 decena o 10 unidades de diferencia, por lo que al número que hay que sumar a 72, que es 26, le quitamos una decena, dando como resultado 16. Si a 82 le sumamos 16 obtenemos el número del enunciado, el 98.

b) 98 – 82 = 98 - (72 – 10) = 98 – 72 – 10 = 26 – 10 = 16

El estudiante es capaz de reconocer las 10 unidades de diferencia.

Nivel 2: Resolución mediante una ecuación de primer grado.

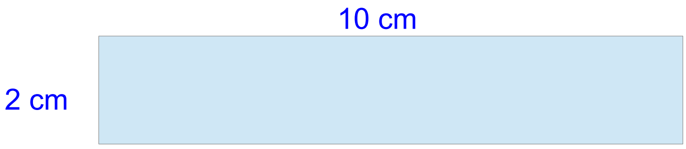
b) 72 + X = 98

7.3. Resolución de geometría

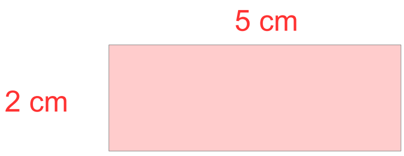
No es lo mismo el nivel de algebrización que el nivel del pensamiento geométrico. En función del objetivo de la actividad se puede trabajar la geometría de una forma o de otra. En nuestro caso trataremos de presentar la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico en un contexto geométrico.

1- ¿Cuánto mide el área de estos dos rectángulos?

a)



b)



<u>Nivel 0:</u> El estudiante aplica fórmulas.

Se limita a aplicar la fórmula (base por altura) en cada apartado. No establece ningún tipo de relación entre las dos figuras.

<u>Nivel 1:</u> El estudiante reflexiona.

Se da cuenta que la base de la primera figura es el doble de grande que la base de la segunda. Primero calculan el área de la primera figura y luego aprovechan las relaciones numéricas para obtener el área de la segunda. Si el área de la figura grande mide 20 cm^2, la pequeña es la mitad, es decir, 10 cm^2.

<u>Nivel 2:</u> Resolución mediante una ecuación de primer grado.

Cuando en el segundo apartado utiliza la siguiente ecuación creada por él mismo a partir del enunciado. Sustituye los símbolos por valores que conoce y luego opera con ellos hasta obtener el resultado.

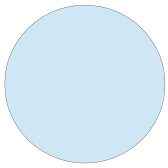
$$\frac{b}{2}\cdot a$$

Si por él mismo no llega a realizar la ecuación y la resuelve mediante uno de los niveles anteriores (no es lo que se busca que haga), se pueden modificar los datos dados. Podría darle el mismo enunciado y los mismos datos excluyendo cuánto mide la base del segundo apartado. De este modo se propiciaría a realizar la ecuación anterior para poder resolver la ecuación.

Dado que en el ejemplo anterior no se puede comprobar que hayan usado el pensamiento algebraico, ya que fácilmente pueden haber usado su pensamiento geométrico, se expone el siguiente ejemplo en el que no se aprecia a simple vista que una figura tenga el doble de dimensión que la otra, para incitar a establecer las relaciones numéricas.

2- ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de estos círculos si r = 4?

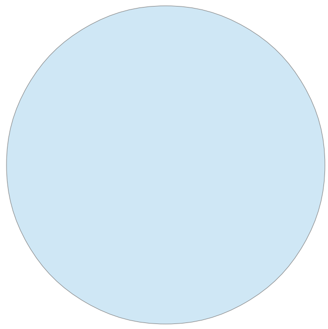
r = 2



$2 \cdot \pi \cdot r$

$2 \cdot \pi \cdot 2 = 12'56$

r = 4



<u>Nivel 0:</u> El estudiante aplica la fórmula.

Observa como se ha aplicado la fórmula y realiza la misma acción pero sustituyendo el radio por el número de 4 en lugar de 2.

$$2 \cdot \pi \cdot 4 = 25'12$$

<u>Nivel 1:</u> El estudiante reflexiona.

A partir del resultado dado en el primer círculo, obtiene el resultado que pide el enunciado sin aplicar ninguna fórmula. Piensa que el radio que se le pide calcular, es el doble del ya calculado. Simplemente realiza la siguiente operación:

$$12'56 \cdot 2 = 25'12$$

<u>Nivel 2:</u> Resolución mediante una ecuación de primer grado.

Para resolver el problema utilizando este nivel de algebrización, se podría modificar el enunciado para propiciar a realizar una ecuación para resolverlo: Si la longitud de una circunferencia de radio “r” mide 12'56 cm. ¿Cuánto mide una circunferencia de radio el doble?

Si, $12'56 = 2 \cdot \pi \cdot r$, entonces el doble será: $2 \cdot 12'56 = 2 \cdot \pi \cdot r$

Calculando la solución de esta forma se puede hablar de un nivel 2 de algebrización.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo trata como tema central de investigación una rama de las matemáticas no abordada en el currículo de la Educación Primaria de manera explícita; el álgebra, a pesar de introducir elementos como el paréntesis que forman parte de esta disciplina.

Se diferencian dos partes. En la primera parte, se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica que nos ha aportado los siguientes resultados:

- El álgebra es necesaria para la actividad matemática, según afirman autores como Díaz, Arsuaga y Riaño (2005).

- El álgebra se introduce como nos dice el currículo a partir de 1º de la E.S.O. en la mayoría de los casos de forma precipitada. Según Palarea esta introducción puede producir en los alumnos una serie de dificultades, obstáculos y errores. Así pues:

  - El profesor debe hacer explícitas las dificultades para poder darles solución.

  - Los obstáculos al haber sido un contenido eficaz en anteriores contextos puede dificultarles la introducción del nuevo saber, haciendo que el proceso del aprendiz de álgebra sea más largo y costoso.

  - Es importante centrar la atención en los errores para que el alumnado pueda rectificar el conocimiento que le ha hecho cometer el error y pueda seguir progresando.

- Según Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014) existen niveles de algebrización, del nivel 0 al nivel 3, siendo el nivel 0 una ausencia total del razonamiento algebraico y el nivel 3 una actividad algebraica consolidada.

- La formación del docente es importante, este debe tener un nivel algebraico consolidado para poder desarrollar los niveles de algebrización en el alumnado. Una prueba realizada a una clase del Grado en Magisterio de Primaria, concluye que solo el 8,6% del alumnado la resuelve mediante el nivel 3 y es capaz de encontrar la respuesta correcta.

En la segunda parte se han propuesto unos problemas resueltos con el fin de mostrar diferentes niveles de resolución algebraica. Ello nos ha permitido concluir lo siguiente:

– Es posible resolver ejercicios o problemas, propuestos generalmente para ser resueltos mediante un nivel 2 de algebrización, utilizando los niveles 0 y 1.

– Los niveles 0 y 1 tienen una baja dificultad y podrían trabajarse en la Educación Primaria a partir de las indicaciones y enfoque del docente, y de los contenidos ya integrados en esta.

9. BIBLIOGRAFÍA

Bourdon, M. (1849), *Elementos de álgebra.* Madrid, España. Librería de Ángel Calleja.

Carpenter, Th. P., L. Levi, M. L. Franke yJ. K. Zeringue (2005). Algebra inelementary school: Developing relational thinking. ZDM, 37(1), pp. 53-59.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705).

Chambers, D. L. (1994). *The Right Algebra for All.* Educational Leadership, 51 (6), 85-86.

Díaz, J.M., Arsuaga, E. y Riaño, J. (2005), *Introducción al Álgebra.* España. Gesbiblio S.L.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Godino, J. D. Aké, L. P. Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32* (1), 199-219.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *Suma, 20*, 61-68.

Irwin, C. y Fletcher, S. (1979), *Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonnometría y Regla de cálculo.*Barcelona, España. Editorial Reverté S.A.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria.* PNA, 3(3), 135-156.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna. San Cristobal de La Laguna.

DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.