

LA PROYECCIÓN EN EL PROCESO DE REPRESENTACIÓN Y EN LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Resumen

En este trabajo se aborda el estudio genérico de la aplicación del proceso de representación, tanto en los sistemas «clásicos» de representación, como en los algoritmos de representación por ordenador. Se pretende poner de manifiesto la similitud de los planteamientos, aparentemente diferentes, de la aplicación de la proyección en los sistemas de representación utilizados en Geometría Descriptiva y en los algoritmos de proyección utilizados en el proceso de visualización de información tridimensional en los Gráficos por Ordenador.

Estudiaremos los parámetros que permiten particularizar todas las formas posibles de representación, distinguiendo entre aquellos parámetros propios del proceso de proyección y los «parámetros de escena», relacionados con limitaciones físicas o ergonómicas del proceso de representación y con la consiguiente asimilación por parte del observador de la información representada.

1. Introducción

La doble operación de proyección-sección, no sólo es la base de los sistemas de representación utilizados en la Geometría Descriptiva (p.e. Enriques, 1897), sino también la de los algoritmos de representación utilizados en la disciplina de Gráficos por Ordenador (p.e. Stolfi, 1992), como parte del proceso más amplio de visualización.

A pesar de ello, no debe olvidarse que la gran diferencia existente entre ambos procesos radica en la posibilidad de restitución de la información representada. En efecto, en los sistemas de representación la única información disponible para lograr una restitución tridimensional es la propia información gráfica representada. Mientras que en la representación por ordenador, la información matemática que está en la base de datos es tridimensional, por lo que no es necesario que la representación contenga información suficiente para permitir la restitución.

Dicho de otro modo, una de las características básicas de los sistemas de representación es que deben permitir la restitución tridimensional de las formas geométricas en ellos representadas. Por contra, no es necesario que las representaciones por ordenador permitan tal restitución. La utilidad de las representaciones por ordenador es aportar una visualización de la información geométrica tridimensional almacenada en la base de datos. Información que puede ser consultada y manipulada *analíticamente*. Los sistemas de representación deben permitir, asimismo, tanto la visualización

como la manipulación *geométrica* de la información contenida en la propia representación.

Sin embargo, son las diferencias «aparentes» entre ambos procesos las que aquí nos ocupan. Tales diferencias se pueden resumir en el hecho de que los problemas de establecer el número mínimo de parámetros que definen cada caso particular de proyección se tratan habitualmente de diferente forma en ambas disciplinas.

Así, por ejemplo, recordemos que las dos formas clásicas de plantear la axonometría ortogonal se suelen denominar problema directo y problema inverso (p.e. Gomis, 1990). El problema directo es aquel en el que dados como datos los ángulos que forman entre sí las proyecciones de los tres ejes del sistema de coordenadas (XOY , XOZ , YOZ), se deducen los valores de los coeficientes axonométricos (e_x , e_y , e_z). En el problema inverso, tal como su nombre indica, los coeficientes son los datos que permiten obtener los ángulos entre las proyecciones de los ejes (figura 1).

Un «tercer problema» se plantea con el empleo del ordenador, y consiste en la determinación tanto de los ángulos (XOY , XOZ , YOZ), como de los coeficientes (e_x , e_y , e_z), conocida la dirección de proyección (D) respecto al sistema de coordenadas. Veremos que el problema tiene solución en el caso de proyección paralela ortogonal y que, en realidad, no se trata de un nuevo problema: se trata, simplemente, de una forma distinta de plantear el segundo problema de la axonometría ortogonal.

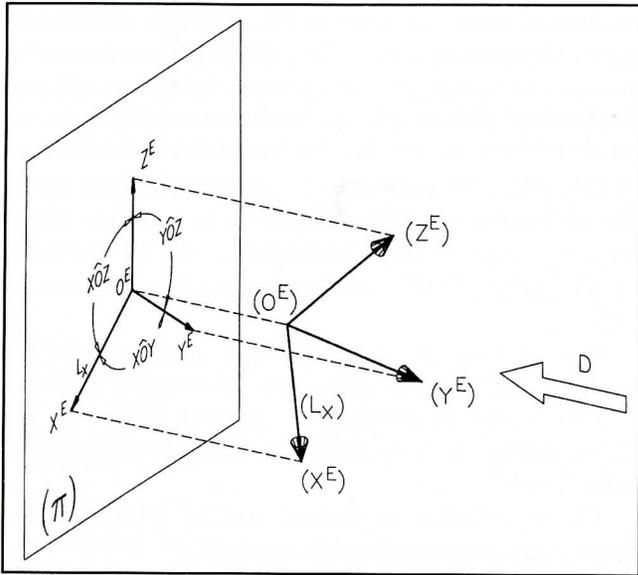


FIGURA 1.

Parámetros que definen la proyección paralela de un sistema de coordenadas.

Sin embargo, el aparente nuevo problema, sirve para poner de manifiesto que ninguno de estos problemas atañe sólo a los sistemas de representación axonométricos. Por el contrario, se trata de relaciones entre los parámetros de una determinada proyección de un sistema de coordenadas. De ahí que lo expuesto sea aplicable a cualquier representación, siempre que esté referida a un sistema de coordenadas. En particular, es importante destacar que en las vistas diédricas, o, lo que es lo mismo, en las representaciones «plane view» por ordenador (representaciones según una dirección paralela a un eje coordenado), si no se considera ningún «problema» de la proyección, es porque el sistema de coordenadas queda con una orientación totalmente fija respecto a la dirección de proyección. Es decir, que el problema de la proyección resulta trivial para las denominadas vistas «ortográficas» (extendiendo la definición de la Real Academia según la cual ortografía es la proyección ortogonal sobre un plano *vertical*).

En este trabajo vamos a discutir, en primer lugar, el número de parámetros independientes que existen en los diferentes casos particulares de proyecciones empleados en sistemas de representación y en representaciones por ordenador.

También, introduciremos aquellos parámetros «de escena» que, siendo ajenos al proceso de proyección, van, no obstante, asociados a su empleo en sistemas de representación y procesos de representación en general. Distinguiremos entre los parámetros de escena impuestos por limitaciones físicas y los que vienen dados por las necesidades ergonómicas del observador de la imagen.

Por último, vamos a desarrollar el problema de determinar todos los parámetros de la proyección paralela ortogonal, conocida la dirección de proyección respecto al sistema de coordenadas a proyectar. La deducción se va a hacer tanto planteando analíticamente las relaciones geométricas que se usan para resolver los problemas directo e inverso de la axonometría, como a partir de la formulación matricial del proceso de proyección utilizado en Gráficos por Ordenador.

2. Parámetros del proceso de representación

2.1. Parámetros de proyección

Para definir la proyección, en el caso más general, deben ser conocidos los siguientes parámetros independientes:

- El centro de proyección, cuya determinación implica tres grados de libertad (3 g.d.l.), y
- El plano de proyección, cuya determinación implica 5 g.d.l. (p.e. los 3 g.d.l. de un punto contenido en el plano y los 2 g.d.l. de la dirección normal al plano).

Es importante remarcar que los dos grados de libertad que fijan un vector dirección (tal como el vector normal al plano de proyección), corresponden a los ángulos ϕ y θ en coordenadas esféricas; ya que no es significativo el módulo de dicho vector. Así, aunque, por comodidad, en coordenadas cartesianas utilizaremos tres parámetros para fijar una dirección, sólo dos de ellos serán independientes. Es decir, que fijado un módulo arbitrario (p.e. la unidad), podríamos obtener una coordenada a partir de las otras dos ($x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}$).

La proyección también puede presentarse como una transformación **T**, que a cada punto del espacio tridimensional le haga corresponder un punto del plano de proyección (figura 2):

$$(x^p, y^p) \stackrel{T}{\leftarrow} (X^E, Y^E, Z^E) \quad (1)$$

Dicha transformación se puede expresar en forma analítica por medio del siguiente sistema de dos ecuaciones definido por ocho parámetros (p.e. Paukowsch, 1988):

$$\begin{aligned} x^p &= X^E a + Y^E b + Z^E c + d \\ y^p &= X^E e + Y^E f + Z^E g + h \end{aligned} \quad (2)$$

Los ocho parámetros independientes deben fijarse por medio de otras tantas condiciones. Por ejemplo, se pueden dar las coordenadas sobre el

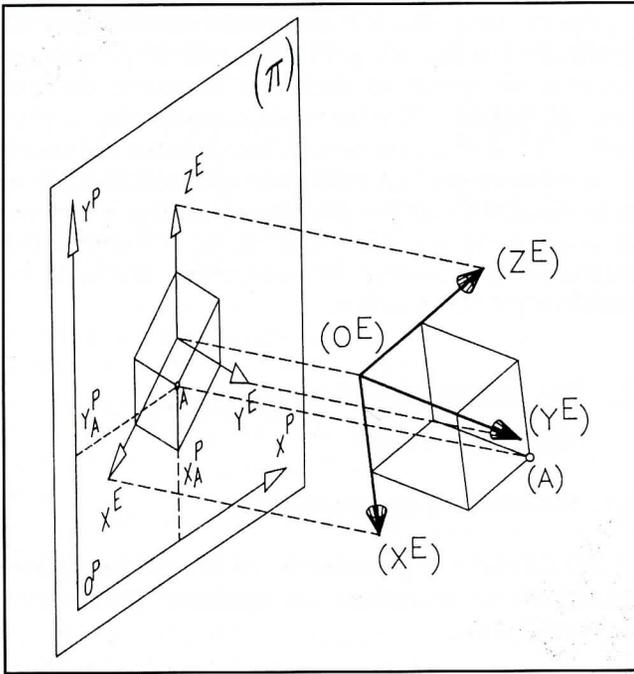


FIGURA 2.
Sistema de referencia del plano de proyección.

plano de proyección de cuatro puntos (tales como el origen del sistema tridimensional y los tres puntos distantes la unidad sobre cada uno de los tres ejes). Una variante interesante de este planteamiento (Sellarés, 1988; Dewey, 1988), consiste en estudiar como casos particulares de esta formulación las proyecciones empleadas en los sistemas de representación habituales.

En el caso particular de que la proyección sea paralela, el centro de proyección se convierte en una dirección de proyección (con sólo 2 g.d.l., dado que de nuevo el módulo del vector dirección no es significativo), y la posición del plano de proyección deja de ser significativa; ya que todos los planos de la misma familia de planos paralelos dan secciones iguales con el haz proyectante. Por tanto, la elección del plano de proyección sólo implica 2 g.d.l.

Esto significa que, para definir una axonometría oblicua, sólo son necesarios cuatro parámetros independientes. Tal como cabía esperar a partir del enunciado del Teorema de Polhke. En dicho teorema se concluye que siempre se puede encontrar una proyección axonométrica oblicua cuyo resultado sean las proyecciones de tres ejes coordenados, formando ángulos arbitrarios ($X\hat{O}Y$, $X\hat{O}Z$, $Y\hat{O}Z$), y graduados según escalas axonométricas también arbitrarias (E_x , E_y , E_z). Pero estos seis parámetros mantienen dos dependencias que los dejan reducidos a cuatro parámetros independientes: por una parte, los ángulos están ligados por la condición obvia de que su suma es 360° . Por otra parte,

cualquier terna de valores (K_x , K_y , K_z) respectivamente proporcionales a (E_x , E_y , E_z), determinan la misma axonometría, por ejemplo la que se obtiene dividiendo dichas escalas por una cualquiera de ellas: (E_x/E_z , E_y/E_z , 1). En definitiva, dos únicas escalas (E_x^z , E_y^z) referidas a una tercera, que siempre podremos considerar igual a la unidad, determinan, junto a dos cualesquiera de los ángulos ($X\hat{O}Y$, $X\hat{O}Z$, $Y\hat{O}Z$), una determinada axonometría oblicua.

Por último, si exigimos que una proyección paralela sea también ortogonal, la normal al plano y la dirección de proyección deberán coincidir. En consecuencia, la proyección paralela ortogonal sólo tiene 2 g.d.l.

De lo anterior se deduce que al proyectar un sistema de coordenadas ortogonal (X^E , Y^E , Z^E) sobre un plano de proyección (π), las proyecciones de los tres ejes graduados quedarán definidas por un total de:

- 8 g.d.l. en el caso de proyección perspectiva;
- 4 g.d.l. en el caso de proyección paralela oblicua, y
- 2 g.d.l. en el caso de proyección paralela ortogonal.

2.2. Parámetros de escena

El uso de la proyección en los sistemas de representación queda aparentemente resuelto definiendo tantos parámetros como sean necesarios para fijar los g.d.l. indicados arriba. No obstante, cuando implementamos o utilizamos un proceso de representación por ordenador, se hacen patentes un conjunto de *parámetros de escena* de dicha representación que se fijan de forma inconsciente cuando la representación es manual.

En primer lugar, existen dos condicionamientos *físicos* que imponen nuevos parámetros que completan la definición de una representación:

- Lo que se representa en la pantalla de un ordenador (o en el formato de papel sobre el que se dibuja a mano) es necesariamente una porción del plano de proyección (a la que denominamos *ventana de observación*).
- Lo que se proyecta no es todo el espacio sino un subconjunto, o *región visible*, del mismo.

Obviamente, existe una relación, basada en un criterio de economía, que liga a la región visible con la ventana de observación y los parámetros de la proyección: es la que exige que toda la región visible se proyecte encajando exactamente en el interior de la ventana de observación, de forma que

no se desaproveche parte de la ventana de observación, ni quede oculta parte de la región visible.

En segundo lugar, existen condicionamientos *ergonómicos*, que además, no son independientes de los físicos. En este sentido, el marco rectangular de los cuadros es una de las muchas convenciones arbitrarias que aceptamos, porque una forma rectangular es una modalidad práctica de cortar papel, tensar un lienzo, o ayudar a imaginar una pantalla como una ventana a través de la cual se mira. Consecuentemente, cuando la ventana de observación adquiere forma rectangular, ésta, junto con el centro de proyección imponen una forma piramidal a la región visible. Si la proyección es paralela, la región visible pasa a tener forma prismática (figura 3).

Abundando en los condicionamientos *ergonómicos*, la orientación de la imagen respecto a la ventana de observación viene condicionada porque, a su vez, la observación de dicha ventana se basa en el hecho de que el hombre (construido sobre un esquema simétrico según un plano medio

vertical), cuando explora e interpreta el espacio tiene tendencia a atribuir a su constitución orgánica un papel preponderante. En suma, se constituye a sí mismo en sistema de referencia: lo alto y lo bajo, la derecha y la izquierda, la parte anterior y la parte posterior (se sobreentiende que con respecto al yo del explorador). En particular, la horizontal y la vertical están ligadas a la condición humana, al peso, a la búsqueda constante de equilibrio (Barre, 1985).

El espacio euclidiano, referenciado a través de un sistema de coordenadas cartesianas, se articula sobre tres planos. La orientación del observador asigna a cada uno de ellos un papel distinto. En consecuencia, se sobreentiende que existe un plano *horizontal* (respecto al que se definen alturas), y dos planos *verticales* (perpendiculares uno respecto del otro) en los que se inscriben las longitudes y las anchuras.

Por lo tanto, resulta importante definir una orientación del espacio, cuya proyección deba ser «vertical» respecto al observador. Para lo cual,

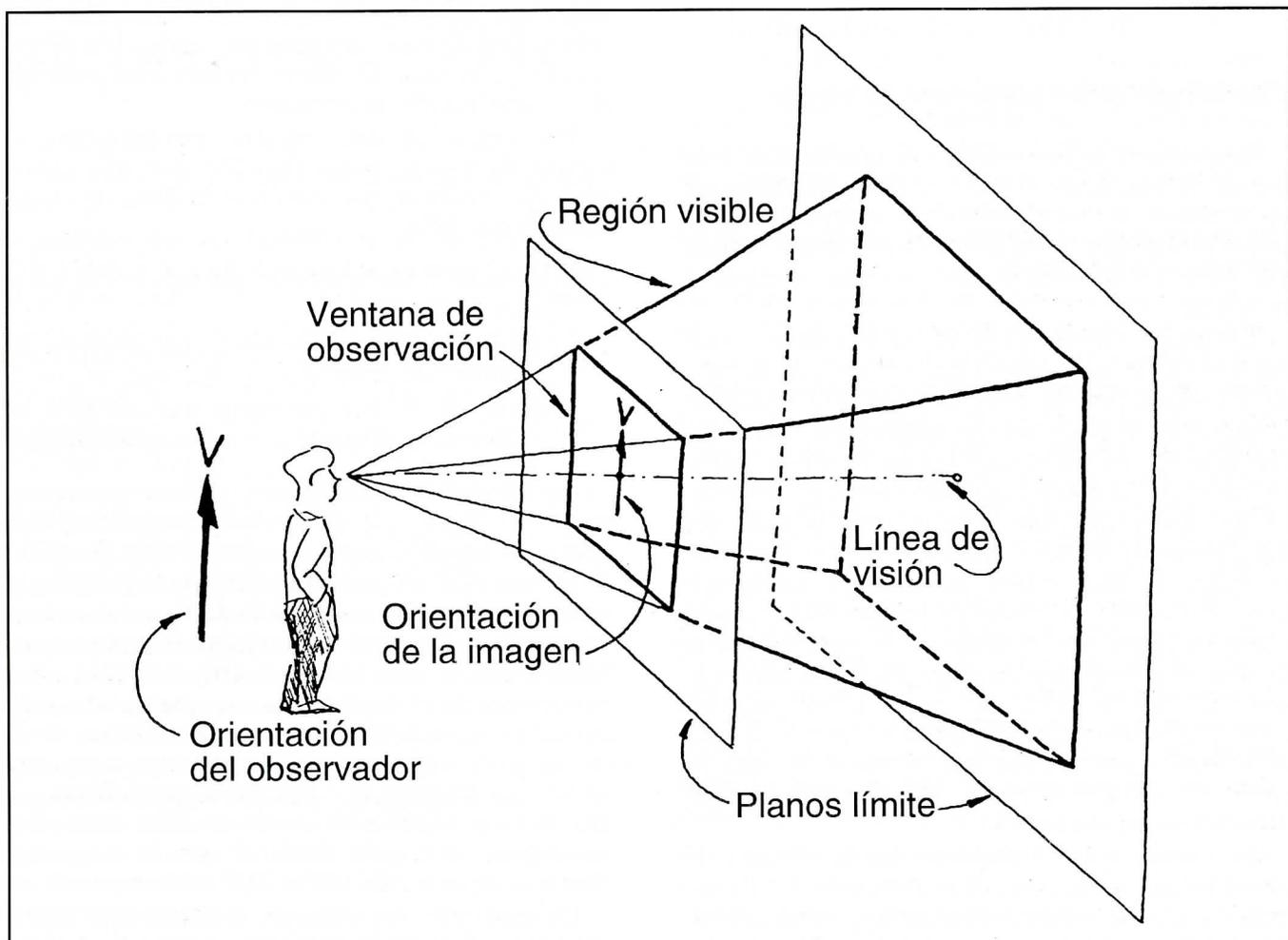


FIGURA 3.
Parámetros de escena.

dicha proyección debe quedar paralela a los lados de la ventana de observación que asumimos verticales en el momento de orientarnos para mirar a dicha ventana.

Por último, debe remarcar que es perfectamente concebible y realizable una representación completa del campo visual. Respetando, no obstante, la salvedad de que el proceso de proyección presenta un plano de desvanecimiento (plano que, siendo paralelo al de proyección, contiene al centro de proyección, y resulta ser el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya proyección es un punto impropio). Sin embargo, el campo visual en su integridad es interpretado como algo situado delante del observador (no sucede lo mismo con el campo auditivo). Por tanto, aunque es perfectamente correcto proyectar simultáneamente sobre el mismo plano figuras contenidas en las dos regiones separadas por el plano de desvanecimiento, esto no se hace; dado que la imagen generada no se correspondería con la percepción «normal» del observador (al proyectarse con sentidos de orientación opuestos los objetos contenidos en cada una de las dos regiones del espacio).

2.3. Rangos de los parámetros de escena

Respecto a la orientación, la convención más común es considerar al eje Z vertical. No obstante, los sistemas de visualización más completos incluyen la posibilidad de definir la dirección del espacio que debe considerarse como referencia vertical al proyectar.

La región visible (ya limitada al campo visual delantero), no suele tener una profundidad ilimitada. Existen diferentes convenciones para limitar su longitud. La más simple, que además permite acentuar el efecto de ventana, es limitar la región visible al tronco de pirámide cuya base menor es la ventana de observación (así se evita visualizar objetos supuestamente situados *delante* de la ventana). Por su parte, la base mayor se sitúa en un «plano límite» (paralelo al plano de proyección y a una distancia fijada por el usuario), o, incluso, puede llevarse al infinito. Sin embargo, la convención más usual es definir tanto un plano límite anterior como uno posterior, con la única restricción de que el volumen que definan sea positivo (lo que se consigue situando el plano posterior más alejado del vértice que el anterior).

En cuanto a las dimensiones de la ventana de observación, la proporción pictórica de 3:2 (largo frente a alto) se ajusta bien al campo visual global del par de ojos humanos, por lo que también es una convención generalmente aceptada (Wright, 1985). Aunque no debemos olvidar que la relación

$1:\sqrt{2}$ es la base de los formatos estandarizados en papel para representaciones de Ingeniería. Y tampoco podemos olvidar las limitaciones de espacio en una pantalla de ordenador, sobre la que se deben acomodar diferentes visualizaciones, además de los menús y otras áreas destinadas a la interacción.

Otro aspecto que influye en la relación entre el punto de vista y la ventana de observación es el campo de visión; que es aquella parte del entorno que un observador puede divisar. Usualmente tal campo se mide en términos de ángulos subtendidos desde el/los ojos. El centro del campo de visión se conoce como *línea de visión* (y corresponde con el «rayo central» de la descripción de perspectiva de Alberti).

Los estudios de ergonomía de la visión coinciden en apuntar que el ojo sólo es suficientemente sensible para enfocar con precisión en una zona de aproximadamente 1° alrededor de la línea de visión. Rodeando a esta zona central, se extiende una zona de desenfoque, que abarca hasta 20° de desviación respecto a la línea de visión, en la que los objetos se ven progresivamente más borrosos. Una tercera área se extiende hasta una desviación de 35° respecto a la línea de visión. En esta área exterior, el ojo sólo percibe movimiento.

Por tanto, en una primera aproximación, el campo de visión queda definido por tres conos cuyo eje común de revolución es la línea de visión (Grandjean, 1988):

- a) cono de 2° de apertura, que encierra al volumen enfocado;
- b) cono de 40° de apertura, que encierra al volumen de desenfoque progresivo, y
- c) cono de 70° de apertura, que encierra al volumen en el que el ojo capta movimientos.

En estudios más detallados, se tiene en cuenta, en primer lugar, que en la visión intervienen dos ojos y, en segundo lugar, que los campos de visión de ambos ojos no presentan simetría respecto a la línea de visión. En el mapa de la figura 4 se han representado los campos de visión de ambos ojos, remarcando el área común o área de visión estereoscópica. En el mapa se observa que, si bien cada ojo cubre hasta 170° en horizontal y 150° en vertical, la visión estereoscópica se restringe a un área de 120° en horizontal y 140° en vertical. Para que una ventana rectangular quede en dicha zona estereoscópica, el ángulo desde el que la misma es abarcada debe ser de 100° a 110° en horizontal.

De momento, sin embargo, el criterio que limita el tamaño de una imagen que se pretende abarcar de un solo «golpe de vista», sigue siendo el ángulo de 40° del cono de desenfoque progresivo (más

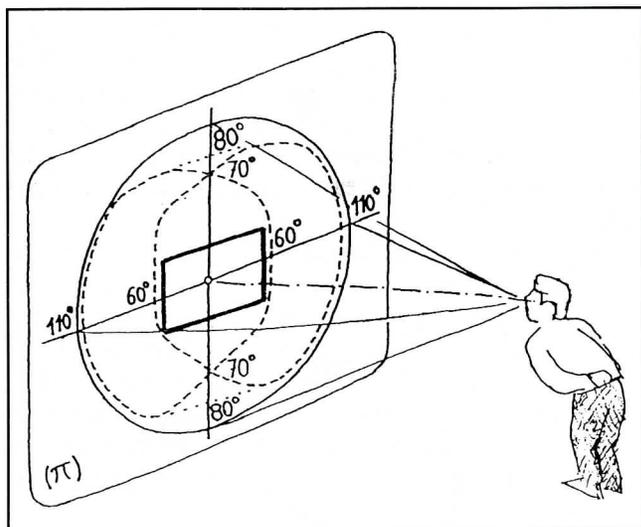


FIGURA 4.
Campo de visión.

restrictivo que el cono de visión estereoscópica). No obstante, encontramos un criterio mucho más restrictivo al tener en cuenta que la proyección perspectiva asigna al dibujante un punto de observación concreto, pero además exige al espectador que se ubique en ese mismo punto para mirar el dibujo. Entonces, aceptando como referencia la distancia mínima para leer paneles de control (que es de 500 mm, según Pheasant, 1987), resulta que un observador situado a dicha distancia de una pantalla de 200 mm de altura, la observa según un ángulo aproximado de 20°.

Un tercer criterio, aún más restrictivo, nos llevaría a limitar el ángulo de observación a los 15° a que se reduce el campo de movimiento del ojo sin fatiga de los músculos del mismo (Pheasant, 1987). La utilización de este criterio se justifica porque el movimiento del ojo es el que permite explorar todo el dibujo (orientando la línea de visión), lo cual es necesario cuando se visualiza una figura con gran cantidad de pequeños detalles.

Además de todos los criterios anteriores, existe una limitación en el ángulo observado que es ajena a las anteriores consideraciones, pero también tiene connotaciones ergonómicas. Se trata del límite de aceptación de la perspectiva rectilínea. Según tratadistas de la perspectiva curvilínea, hasta un ángulo de 40° es aceptable considerar que las rectas se proyectan como tales (Barre, 1985). Por lo tanto, no se debe superar tal límite si se busca que la proyección no sea sólo una transformación desde el espacio al plano, sino una forma de simular la realidad circundante ante los ojos humanos (representación «realista»).

Abundando en el criterio de que la representación sea realista, el objetivo sería que el observador vea una imagen lo más cercana posible a lo que

vería si estuviera observando directamente el objeto representado. Entonces, dado que cualquier ángulo que se fije conlleva fijar indirectamente la posición teórica del observador, y dado que la distancia desde la que se suelen observar los objetos reales depende de su tamaño, el rango por defecto puede ser de 40° a 60° para objetos pequeños (que se suponen observados a corta distancia), de 5° a 10° para grandes objetos y de 1° a 2° para escenas de proporciones arquitectónicas.

En definitiva, lo más frecuente es tomar un ángulo de apertura por defecto (según el criterio de representación realista), y dejarle al observador la posibilidad de modificarlo. No se debe olvidar, sin embargo, que, en el caso de que sea importante no deformar la representación (caso habitual al representar geometrías), una vez fijado un ángulo (p.e. el vertical), éste, junto con la relación de las dimensiones de la ventana, condiciona el otro ángulo.

3. Determinación de una proyección paralela ortogonal a partir de la dirección de proyección

En aquellos sistemas informáticos que permiten modificar interactivamente la representación, la dirección de proyección suele determinarse a partir de la posición en el espacio de dos puntos: la cámara (o punto de vista) y el motivo (o punto de mira). La cámara se corresponde exactamente con el centro de proyección, mientras que el motivo selecciona la región del espacio a la que se le aplica el proceso de proyección (define junto con la cámara el eje del prisma/pirámide de la región visible). Además, dichos parámetros se suelen mantener cuando la representación corresponde a una proyección paralela. En tales ocasiones, la posición concreta de ambos puntos deja de tener sentido y sólo se considera la dirección que entre ambos definen (aunque, ciertamente, en muchos sistemas, la posición del motivo se usa también para referir los planos de corte que limitan la región visible).

Tal como hemos visto arriba, para determinar una proyección paralela y ortogonal, sólo es necesario fijar 2 g.d.l. Por ello, sabemos que debe ser posible determinar una proyección paralela ortogonal conociendo únicamente la dirección de proyección. Es decir, partiendo de las coordenadas de la cámara y el motivo:

$$\begin{aligned} C &= (X_C^E, Y_C^E, Z_C^E) \\ M &= (X_M^E, Y_M^E, Z_M^E) \end{aligned} \quad (3)$$

Tal es el problema cuya resolución vamos a desarrollar a continuación, tanto por vía geométri-

ca (la tradicional en el tratamiento de los sistemas de representación), como por vía analítica (la usual en las formulaciones de gráficos por ordenador).

3.1. Resolución geométrica

A partir de las coordenadas de cámara y motivo (3), se obtienen los cosenos directores de la dirección que marcan de forma inmediata:

$$l = (X_C^E - X_M^E) / |D|$$

$$D = (l, m, n) / m = (Y_C^E - Y_M^E) / |D| \quad (4)$$

$$n = (Z_C^E - Z_M^E) / |D|$$

Siendo:

$$|D| = \sqrt{(X_C^E - X_M^E)^2 + (Y_C^E - Y_M^E)^2 + (Z_C^E - Z_M^E)^2} \quad (5)$$

Como la proyección es ortogonal (perpendicular al plano de proyección), se cumple que (figura 5):

$$l = \cos \phi_1 = \cos (\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$m = \cos \phi_2 = \cos (\pi/2 - \beta) = \sin \beta \quad (6)$$

$$n = \cos \phi_3 = \cos (\pi/2 - \gamma) = \sin \gamma$$

Por tanto:

$$e_x = \cos (\text{arc sen } l) = (\cos 2\phi_1) / (2 \cos \phi_1)$$

$$e_y = \cos (\text{arc sen } m) = (\cos 2\phi_2) / (2 \cos \phi_2) \quad (7)$$

$$e_z = \cos (\text{arc sen } n) = (\cos 2\phi_3) / (2 \cos \phi_3)$$

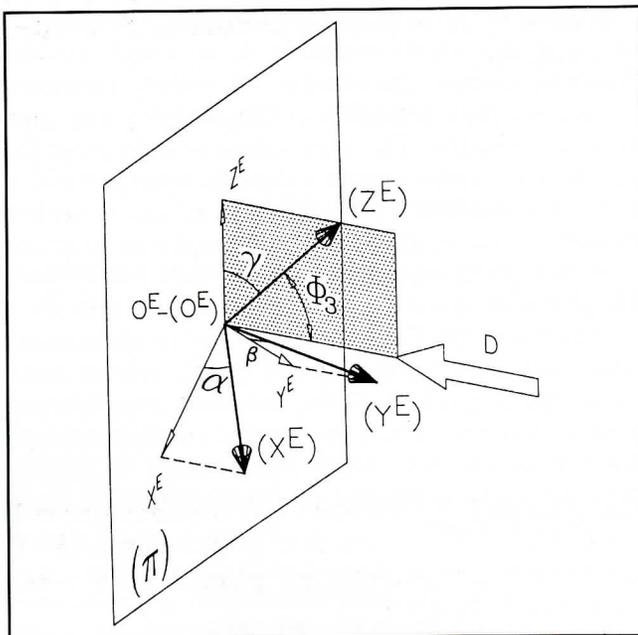


FIGURA 5.

Relación de la dirección de proyección con los coeficientes axonómicos

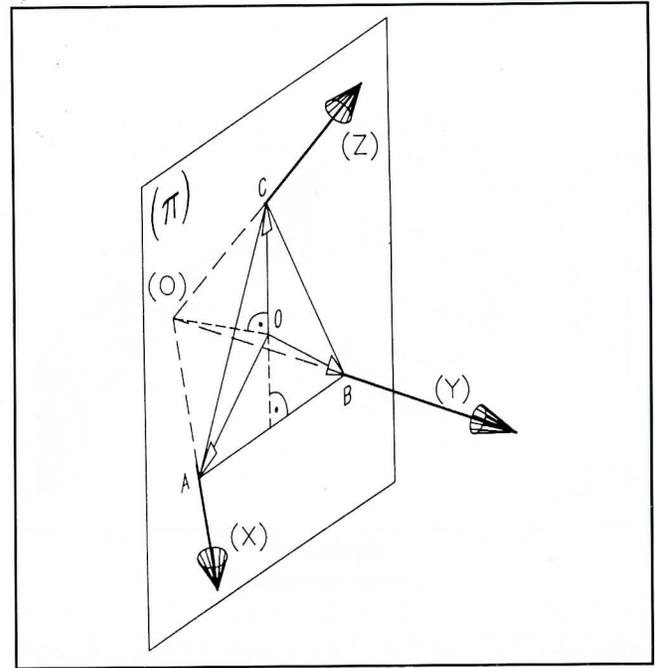


FIGURA 6.

Triángulo de trazas.

En definitiva, conocer los ángulos ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , es conocer los ángulos α, β, γ . Lo que, a su vez, equivale a conocer e_x, e_y , y e_z . Luego, el segundo problema de la axonometría es un caso particular del problema de determinar los parámetros de la proyección conocida la dirección de proyección. Esto es así dado que la conversión de los datos de la dirección de proyección en los coeficientes axonómicos es inmediata. Basta despejar los cosenos directores en (4), introducirlos en (6) para obtener los ángulos, y calcular con ellos los coeficientes axonómicos, según (7).

A continuación veremos cómo se puede formular lo que constituye la segunda parte de la determinación de la proyección: el cálculo de los ángulos entre los ejes proyectados ($X\hat{O}Y, X\hat{O}Z, Y\hat{O}Z$). Dicho cálculo constituye el segundo problema de la axonometría, cuya resolución geométrica parte del triángulo de trazas (de vértices A, B y C), que se obtiene al cortar con el plano de proyección cada uno de los planos coordenados (figura 6) (p.e. Gil, 1983).

Del hecho de que los ejes del sistema sean ortogonales entre sí, y que la dirección de proyección sea ortogonal al plano de proyección, se deduce que las proyecciones de los ejes resultan perpendiculares a las proyecciones de los lados del triángulo de trazas con los que se cruzan (figura 7).

Por otra parte, el triángulo órtico de cualquier triángulo dado, cumple la propiedad de que las alturas del mismo son bisectrices de su triángulo órtico (figura 7).

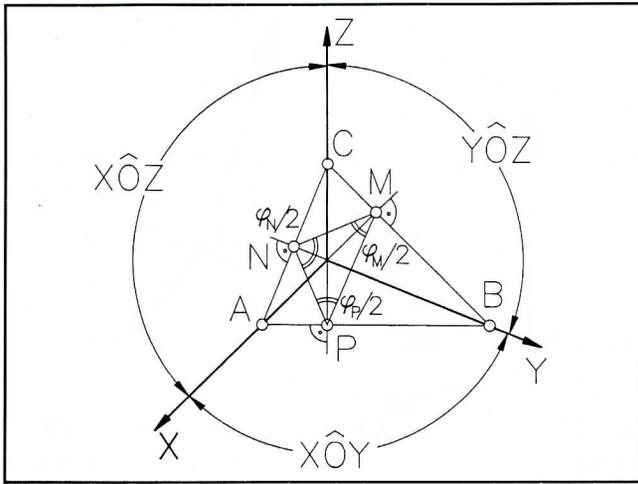


FIGURA 7.
Ejes, triángulo de trazas y triángulo órtico.

A partir de todos estos datos, el teorema de Schlömilch-Waisbach nos da la clave para la resolución del problema, al concluir que «los lados del triángulo órtico del triángulo de trazas son proporcionales a los cuadrados de los coeficientes axonométricos».

Es decir:

$$e_x^2/NP = e_y^2/MP = e_z^2/MN = 1/s \quad (8)$$

Siendo:

$$s = (NP + MP + MN)/2 \quad (9)$$

Si adoptamos $s = 1$, los lados de un triángulo órtico de la axonometría son:

$$\begin{aligned} NP &= e_x^2 \\ MP &= e_y^2 \\ MN &= e_z^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Si ahora denominamos $(\varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ a los ángulos del triángulo órtico, cuyos vértices son M, N y P respectivamente, las fórmulas de Briggs (Puig, 1948) permiten despejar los mencionados ángulos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{(1 - e_y^2)(1 - e_z^2)}{(1 - e_x^2)}} \right) \\ \varphi_N &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{(1 - e_x^2)(1 - e_z^2)}{(1 - e_y^2)}} \right) \\ \varphi_P &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{(1 - e_x^2)(1 - e_y^2)}{(1 - e_z^2)}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Luego conocemos los ángulos del triángulo órtico del de trazas, y sabemos que sus bisectrices son las proyecciones de los ejes (figura 7). En definitiva:

$$\begin{aligned} X\hat{O}Y &= \pi - \frac{\varphi_M + \varphi_N}{2} \\ X\hat{O}Z &= \pi - \frac{\varphi_M + \varphi_P}{2} \\ Y\hat{O}Z &= \pi - \frac{\varphi_N + \varphi_P}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Es decir que, una vez determinados los coeficientes axonométricos en (7), deberemos resolver el sistema (10). Conocidos así los lados del triángulo órtico, podemos obtener sus ángulos en (11), que sustituidos en (12) nos darán los ángulos buscados; con lo que queda resuelto el problema inverso de la axonometría.

3.2. Resolución analítica

La resolución analítica del proceso de proyección parte de plantearlo como una transformación entre dos sistemas de coordenadas:

- Sistema de coordenadas dado (X^E, Y^E, Z^E) .
- Sistema del plano de proyección (x^P, y^P) .

Se define también un sistema de coordenadas auxiliar para formular la transformación con más comodidad:

- Sistema del motivo (X^M, Y^M, Z^M) .

A partir de estos tres sistemas (figura 8), la transformación de proyección dada en (1) se puede descomponer en:

$$(X^M, Y^M, Z^M) \xleftarrow{T_1} (X^E, Y^E, Z^E) \quad (13)$$

$$(x^P, y^P) \xleftarrow{T_2} (X^M, Y^M, Z^M) \quad (14)$$

La ventaja de esta descomposición estriba en que si la proyección es paralela y ortogonal, T_2 se reduce a las identidades:

$$\begin{aligned} x_A^P &= X_A^M \\ y_A^P &= Y_A^M \end{aligned} \quad (15)$$

descartando la coordenada Z_A^M ; mientras que si la proyección fuera perspectiva, la transformación T_2 tendría una formulación que se deduce de la observación de la figura 9:

$$x_A^P = \frac{DPC}{[Z_C^M - Z_A^M]} X_A^M$$

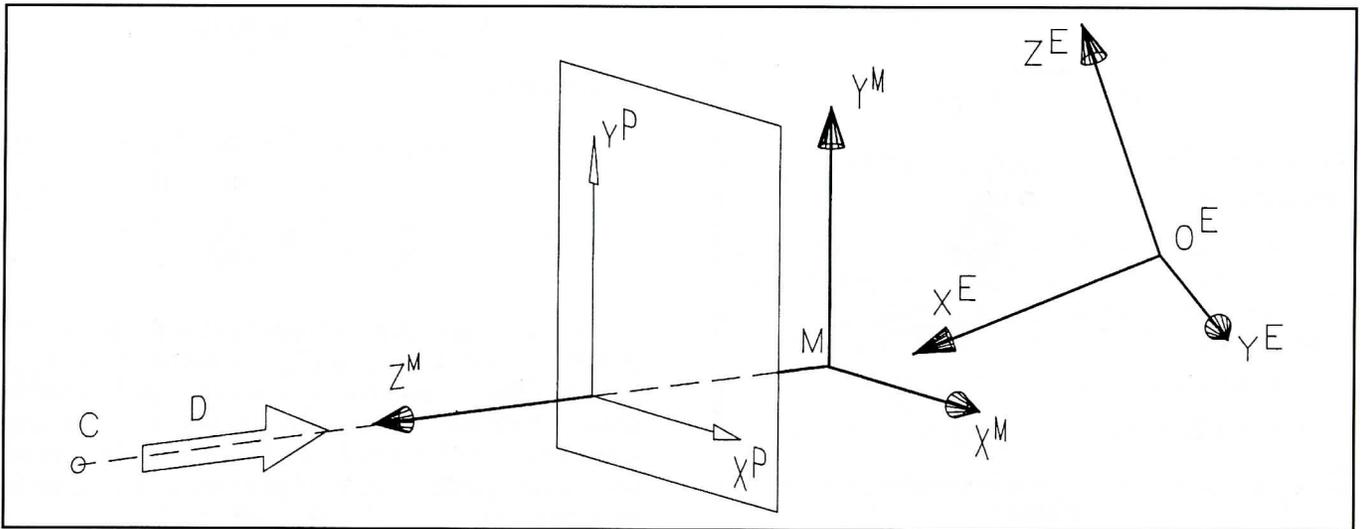


FIGURA 8.
Sistemas de coordenadas.

$$y_A^P = \frac{DPC}{[Z_C^M - Z_A^M]} Y_A^M \quad (16)$$

Siendo:

$$Z_C^M = |D| \quad (17)$$

Tal como $|D|$ se ha definido en (15).

Es decir, que la proyección perspectiva precisa de la asignación del parámetro DPC (distancia al plano del cuadro, desde la cámara), para quedar

definida. O, lo que es lo mismo, deben explicitarse los parámetros de escena relacionados con el ángulo de visión, para que la proyección pueda formularse.

Por su parte, la transformación T_1 del sistema de referencia original al sistema del motivo, es independiente de que la proyección sea perspectiva o paralela, y se puede expresar con notación matricial de la siguiente forma:

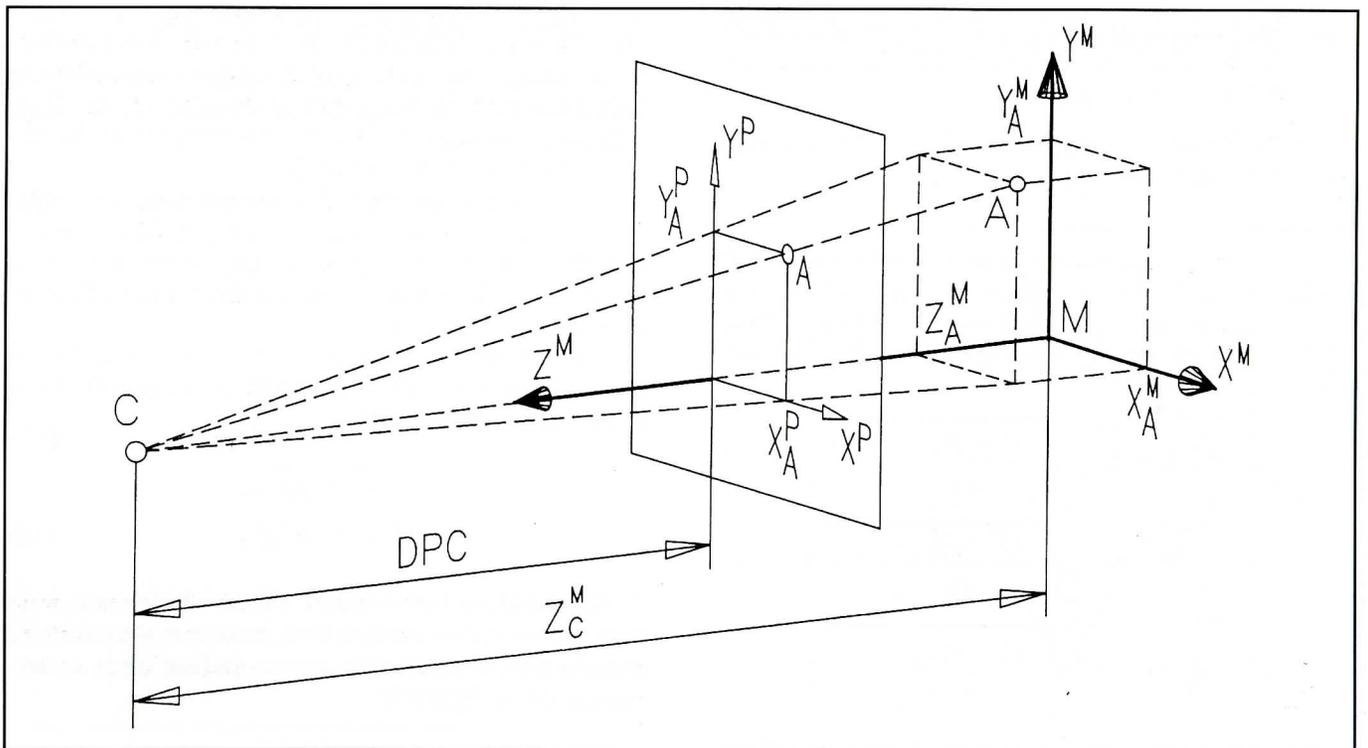


FIGURA 9.
Transformación del sistema del motivo al del plano de proyección.

$$\begin{pmatrix} X^M \\ Y^M \\ Z^M \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \end{pmatrix} \quad (18)$$

En donde, la matriz de transformación \mathbf{T}_1 puede obtenerse por combinación de:

- Rotación \mathbf{T}_{11} del sistema de referencia original, hasta que el nuevo eje Z coincida con la dirección de observación D .
- Traslación \mathbf{T}_{12} del nuevo sistema hasta que su origen coincida con el motivo.

Por lo que respecta a la transformación \mathbf{T}_{11} , tal como se ve en la figura 10, se trata de una rotación de ángulo θ alrededor del eje e (recta que pasa por O y es perpendicular al plano definido por Z^E y D). Se puede descomponer en:

- Rotación \mathbf{R}_1 de eje Z^E y ángulo ϕ . Siendo

$$\phi = \arccos \left(\frac{X_C^E - X_M^E}{\sqrt{(X_C^E - X_M^E)^2 + (Y_C^E - Y_M^E)^2}} \right)$$

- Rotación \mathbf{R}_2 de eje Y^1 y ángulo θ . Siendo Y^1 el eje resultante de aplicar al eje OY^E la rotación anterior, y siendo:

$$\theta = \arccos \left(\frac{Z_C^E - Z_M^E}{\sqrt{(X_C^E - X_M^E)^2 + (Y_C^E - Y_M^E)^2 + (Z_C^E - Z_M^E)^2}} \right)$$

- Rotación \mathbf{R}_3 de eje Z^2 y ángulo $-\phi$ (en donde Z^2 se obtiene al aplicar a OY^E las dos rotaciones anteriores).

En definitiva, la transformación del sistema dado al del motivo es:

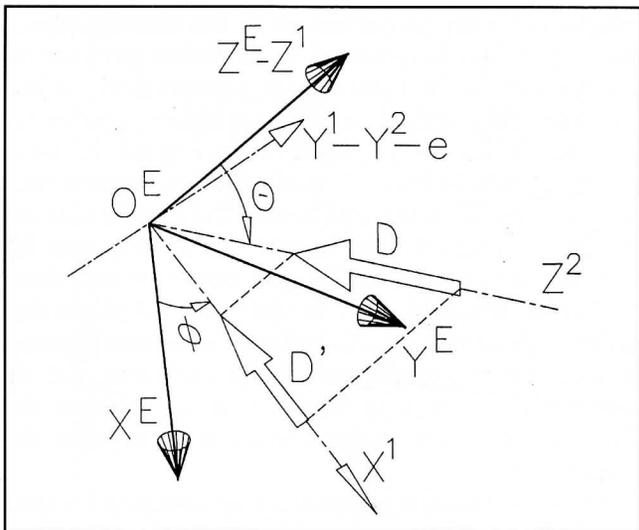


FIGURA 10.
Rotación al sistema del motivo.

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (21)$$

En donde:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -X_M^E & -Y_M^E & -Z_M^E & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Nótese que en las anteriores matrices de transformación, los únicos parámetros son los ángulos ϕ y θ . Los cuales, a su vez, dependen únicamente de las coordenadas de la cámara y el motivo dadas en (3). Por tanto, podemos concluir que la obtención de las coordenadas de la proyección paralela ortogonal de un punto, que resultan de aplicarle sucesivamente la transformación (21) y la (15), depende únicamente de las coordenadas de la cámara y el motivo dadas en (3).

Por lo que respecta a la obtención de los coeficientes y los ángulos para las proyecciones de los ejes del sistema de coordenadas, basta tomar el origen de dicho sistema y un punto sobre cada uno de los ejes del mismo.

$$\begin{aligned} O^E &= (0, 0, 0) \\ A^E &= (x_A^E, 0, 0) \\ B^E &= (0, y_B^E, 0) \\ C^E &= (0, 0, z_C^E) \end{aligned} \quad (26)$$

Aplicando a estos cuatro puntos la transformación (18), seguida de la transformación (15), obtendremos las coordenadas de las proyecciones de los mismos:

$$\begin{aligned} O^P &= (x_O^P, y_O^P) \\ A^P &= (x_A^P, y_A^P) \end{aligned} \quad (27)$$

$$B^P = (x_B^P, y_B^P)$$

$$C^P = (x_C^P, y_C^P)$$

Entonces, las escalas axonométricas de la proyección realizada vienen dadas por:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{d_{OA}}{D_{OA}} \\ E_y &= \frac{d_{OB}}{D_{OB}} \\ E_z &= \frac{d_{OC}}{D_{OC}} \end{aligned} \quad (28)$$

Siendo D_{Oi} la distancia desde la proyección del origen hasta la proyección del punto i (sea A , B ó C):

$$d_{oi} = \sqrt{(x_i^P - x_O^P)^2 + (y_i^P - y_O^P)^2} \quad (29)$$

y siendo, D_{Oi} la distancia desde el origen hasta el punto i , en el espacio:

$$D_{Oi} = \sqrt{(x_i^E)^2 + (y_i^E)^2 + (z_i^E)^2} \quad (30)$$

Se observa que tomando los puntos A , B y C a una distancia unidad del origen, las expresiones (28) se simplifican; quedando de la forma:

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{(x_A^P - x_O^P)^2 + (y_A^P - y_O^P)^2} \\ E_y &= \sqrt{(x_B^P - x_O^P)^2 + (y_B^P - y_O^P)^2} \\ E_z &= \sqrt{(x_C^P - x_O^P)^2 + (y_C^P - y_O^P)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

Para completar la definición de la proyección se determinan los ángulos relativos entre las proyecciones de los ejes, a partir de las proyecciones de los puntos O , A , B y C . De la figura 11 se deduce la expresión:

$$X\hat{O}Y = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (32)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg \left(\frac{x_O^P - x_A^P}{y_O^P - y_A^P} \right) \\ \varphi_2 &= \arctg \left(\frac{x_B^P - x_O^P}{y_B^P - y_O^P} \right) \end{aligned}$$

De forma análoga se obtienen expresiones similares para los otros dos ángulos. Pero, dadas las dependencias de signos de la expresión (32), resultaría menos problemática la formulación computacional de dichos ángulos como parte de las coordenadas polares de los puntos A y B , respecto del sistema que

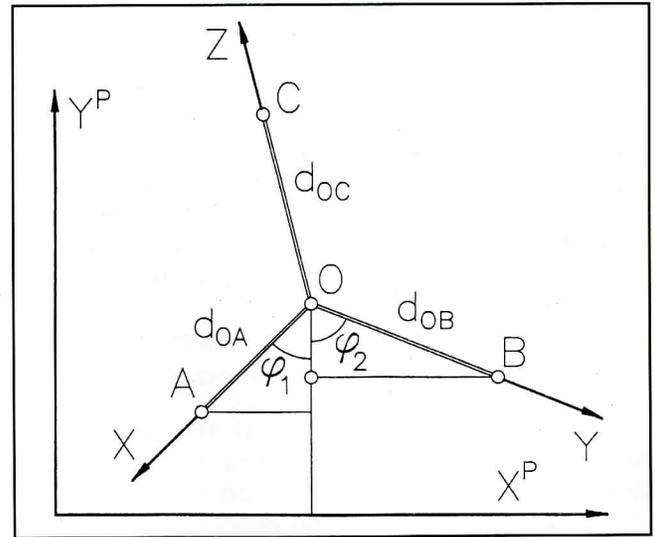


FIGURA 11.
Determinación de los ángulos relativos entre las proyecciones de los ejes.

resulta de transformar el sistema de pantalla hasta hacer coincidir su origen con la proyección de O y su eje y^P con la proyección de Z^E .

3.3. Comparación

Tanto en la resolución geométrica como en la analítica, hemos comprobado que se puede determinar completamente una proyección paralela ortogonal, conociendo únicamente la dirección de proyección. O, lo que es lo mismo, la posición de la cámara y el motivo. Es decir, que basta conocer dos parámetros independientes para determinar completamente la proyección.

También cabe destacar que lo que se ha obtenido, en ambas formulaciones, es una orientación *relativa* entre las proyecciones de los tres ejes (quedando por fijar la orientación de dichas proyecciones respecto a la ventana de observación, o los márgenes del papel). Es decir, que siguen quedando por fijar todos los parámetros de escena. Si bien ello no es una limitación, dado que los parámetros de escena resultan ser totalmente independientes de los de proyección. No ocurre lo mismo con la proyección perspectiva. Ya que, como hemos visto en (16), es necesario fijar la distancia del plano del cuadro a la cámara (o cualquiera de los parámetros de escena relacionados con dicha distancia, p.e. el ángulo de visión y el tamaño de la ventana de observación), para poder formular el proceso de proyección.

En la resolución geométrica se comprueba que en (12) lo que hemos obtenido son los ángulos que los ejes forman entre sí. En la resolución matricial, esta limitación queda enmascarada porque la

orientación de la ventana está ligada a la orientación del sistema del plano de proyección (x^P, y^P), y éste, a su vez, mantiene la misma orientación que el sistema del motivo (X^M, Y^M, Z^M). Pero debe notarse que la orientación del sistema del motivo sólo está parcialmente fijada; dado que la única condición que hemos impuesto es que el eje Z^M coincida con la dirección de visión.

En definitiva, la orientación es un g.d.l. (o parámetro de escena) que se fija inconscientemente cuando la representación es manual (manteniendo el eje Z «vertical»), pero debe ser fijado explícitamente (normalmente manteniendo dicho criterio), cuando la generación de la imagen se automatiza.

4. Conclusión

Hemos estudiado el problema de la representación considerando, en primer lugar, el número de parámetros independientes (o grados de libertad) que permiten determinar unívocamente una proyección, llegando a la conclusión de que son:

- a) 8 g.d.l. en el caso de proyección perspectiva;
- b) 4 g.d.l. en el caso de proyección paralela oblicua, y
- c) 2 g.d.l. en el caso de proyección paralela ortogonal.

También hemos analizado los parámetros de escena, concluyendo que éstos se añaden a los propios de la proyección, para definir un proceso de representación que resulte automatizable y sea acorde con el criterio (intuitivo o aprendido) del observador. No obstante, cabe distinguir entre aquellos parámetros que tienen un rango de variación y aquellos otros que tienen un único valor geométrico o ergonómicamente válido.

Los principales parámetros de escena son los necesarios para:

- Definir la orientación del espacio observado respecto a la ventana de observación, de forma que la orientación inconsciente del observador de la proyección frente a la ventana conserve la orientación de los objetos representados.
- Definir una ventana de observación rectangular (habitualmente con relación 3:2). Debe destacarse que para que esta ventana sea observada con un ángulo dado, la posición de la cámara y las dimensiones de la ventana deben estar relacionadas.
- Limitar la región visible a un tronco de pirámide con vértice en el centro de proyección, base menor coincidente con la ventana de observación (o un plano límite delantero),

y base mayor sobre un plano límite trasero (que puede ser impropio).

Por último, hemos resuelto el problema de la determinación, tanto de los ángulos ($X\hat{O}Y, X\hat{O}Z, Y\hat{O}Z$) como de los coeficientes (e_x, e_y, e_z), conocida la dirección de proyección (D) respecto al sistema de coordenadas, comprobando que el planteamiento clásico y el planteamiento «algorítmico», conducen a la misma solución, tal como era de esperar, dado que son dos maneras de formular el mismo problema.

Pero, además, la resolución del problema ha servido para poner de manifiesto que los parámetros de escena son independientes de los de proyección en el caso de proyecciones paralelas (no así en el de proyecciones perspectivas), pero también deben fijarse para definir una representación, aunque muchos de ellos se sigan fijando de un modo inconsciente (si la elaboración de la representación es manual), o predefinido por el programador (cuando la elaboración se automatiza).

5. Referencias

- BARRE A. y FLOCON A.: *La perspectiva curvilinea. Del espacio visual a la imagen construida*. Ed. Paidós. Barcelona, 1985.
- COMPANY P.: *Herramientas gráficas para el diseño*. Ciclo de Conferencias/Curso Ingeniería, Diseño y Fabricación Asistidos por Computador. Universidad de Murcia, Cartagena, Mayo 1992.
- DEWEY B. R.: *Computer Graphics for Engineers*. Ed. Harper&Row. 1988.
- ENRIQUES F.: *Lezioni di geometria proiettiva*. Ed. Nicola Zanichelli. Bologna 1897.
- FOLEY J. D., VAN DAM A., FEINER S. K., HUGHES J. F. y PHILLIPS R. L.: *Introduction to Computer Graphics*. Ed. Addison Wesley. 1993.
- GIL M. A.: *Nociones fundamentales de perspectiva cilíndrica*. Ed. del autor, Valencia. 1983.
- GOMIS J. M.: *Dibujo Técnico I. (1ª parte)*. Ed. Univ. Politécnica, Valencia. 1990.
- GRANDJEAN E.: *Fitting the Task to the Man*. De. Taylor & Francis, Londres, 1988 (4ª edición).
- PAUKOWITSCH P.: «Fundamental Ideas for Computer-Supported Descriptive Geometry». *Computer & Graphics*, Vol. 12, nº 1, pp. 3-14. 1988.
- PHEASANT S.: *Ergonomics, Standards and Guidelines for Designers*. Ed. B.S.I., Londres, 1987.
- PUIG ADAM P.: *Curso de geometría métrica*. Ed. Euler, decimotercera edición, Madrid, 1986.
- SELLARES J. A.: *Fundamentos de los Gráficos con Ordenador*. Ed. Edunsa, Barcelona. 1988.
- STOLFI J.: *Oriented Projective Geometry*. Ed. Academic Press, San Diego. 1991.
- WRIGHT L.: *Tratado de Perspectiva*. Ed. Stylos, Barcelona. 1985.