Màster Universitari en Matemàtica Computacional

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES DE L'UJI

Una introducció topològica als nombres difusos

Tesi de Màster presentada per: Francisco P. Salvador

Directors:
Dr. Manuel Sanchis i Dr. Juan J. Font

Manuel Sanchis López, Catedràtic d'Universitat d'Anàlisi Matemàtica, i Juan José Font Ferrandis, Professor Titular d'Universitat d'Anàlisi Matemàtica, del Departament de Matemàtiques de la Universitat Jaume I de Castelló

CERTIFIQUEM: que la present memòria *Una introducció topològica als nombres difusos* ha estat realitzada sota la nostra direcció per Francisco Pascual Salvador Daròs, en el Departament de Matemàtiques de la Universitat Jaume I de Castelló, i constitueix la seua tesi de màster en el Màster Universitari en Matemàtica Computacional. I perquè així conste, presentem l'esmentada memòria, tot signant el certificat present.

Manuel Sanchis López   Juan José Font Ferrandis

Castelló, 21 d'octubre de 2013

Índex

Capítol 1

Introducció

La teoria dels nombres difusos és relativament recent i està basada en la teoria de conjunts difusos (*Fuzzy sets*) publicada en 1965 per L. A. Zadeh. El creixement de la teoria de conjunts difusos ha sigut molta, i la seua aplicació a la ciència i a la tècnica molt diversa fins al moment. Cal destacar, però, que L. A. Zadeh, en principi, va tindre el rebuig de part de la comunitat científica pel fet que volguera donar cabuda a la **imprecisió** en els treballs científics.

D'aquest rebuig es va fer ressò el Professor L. A. Zadeh al discurs de recepció del premi Honda rebut al Japó el 1989.

On primer va ser concient d'aquest rebuig va ser a la *Conferència de Computació* realitzada a Burdeus, França, l'any 1972 on el professor L. A. Zadeh va presentar el concepte de *variable lingüística*. El Professor R. E. Kalman va dir:

"voldria comentar la presentació del Professor L. A. Zadeh. La seua proposta cal que siga severament, feroçment, fins i tot brutalment criticada des d'un punt de vista tècnic.Ací està fora de lloc. Em queda una pregunta per fer-me: és que està el Professor L. A. Zadeh presentant idees importants o està sent indulgent amb la forma de pensar?"

D'altra banda un altre col·lega i company de L. A. Zadeh a la Universitat de Berkeley, el professor W. Kahan, al 1975 diu:

" la teoria difusa és errònia, errònia i perniciosa".

Fora d'aquestes mostres d'hostilitat, els treballs desenvolupats a la República China, Rússia i sobre tot pels enginyers del Japó, que per exemple, utilitzant lógica difusa per al sistema de control del tren suburbà de Sendai, en 1987, el feren un 10% més eficient energèticament que els conductors humans, encoratgaren el professor L.A. Zadeh a continuar la investigació en aquest camp.

Figura 1.0.1: Imatge del suburbà de Sendai

Com explica el professor Paulo F. Ribero, del Calvin College a [4], aquesta nova forma de programar els sistemes de control amb lògica difusa també va ser menyspreada pel professor Myron Tribus, al maig de 1988:

"Difusivitat és probabilitat disfressada. Puc dissenyar un sistema de control amb probabilitat i farà el mateix que amb lògica difusa."

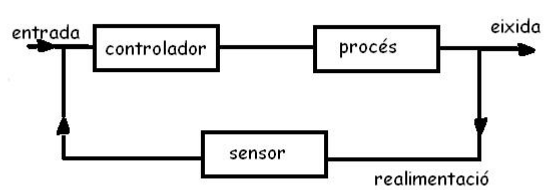

Figura 1.0.2: Esquema d'un sistema de control

La principal àrea d'aplicació de la lògica difusa a l'enginyeria és al camp dels sistemes de control.

Un sistema de control (com el que veem esquematitzat a la Figura 1.0.2) rep una informació d'entrada (input), a través d'uns sensors, i actua sobre un controlador (interruptor) que modifica el procés. Finalment una realimentació fa que arribem a l'estat desitjat.

Un exemple de sistema de control és un sistema de calefacció central d'una vivenda regulat per un programador (com el de la Figura 1.0.3).

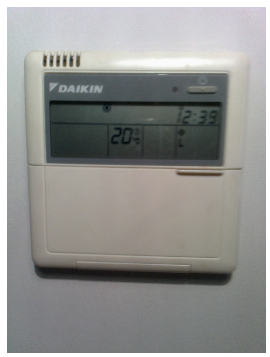

Figura 1.0.3: Programador d'un sistema de calefacció

La forma de programar aquest sistema de control és el *modus ponens*, tal com fem les persones a la vida real quan prenem una decisió:

IF P THEN Q.
P.
Per tant Q.

Aquesta forma de raonar és molt estricta: es dóna Q només si P. Però podria ser més permisiva. Q serà majoritàriament si P és majoritariament:

IF P THEN Q.
Majoritàriament P.
Per tant majoritàriament Q.

En aquest cas, P i Q són ara nombres difusos. El raonament anterior requereix de la definició d'unes regles. Aquestes regles són les *regles lingüístiques* on emprem conjunts difusos. La forma general d'aquestes és:

$$\text{“ IF } x \in A, \text{ THEN } y \in B\text{”},$$

on x i y són nombres difusos i A i B són conjunts difusos.

El rebuig cap a L. A. Zadeh per la teoria de la *lògica difusa*, opina el professor Ribero [4], era degut al poc desenvolupament de la teoria matemàtica que la sustentava, així que podriem concluir que cal desenvolupar més el camp de la difussivitat per tal que els enginyers ho puguen aprofitar.

D'altra banda Klir i Yuan, en [22], parlen de les característiques d'un *canvi de paradigma*, que com comenten, apareixen periòdicament al llarg de la història de la ciència. Aquest concepte va ser introduït per Thomas Kuhn al seu llibre *The Structure of Scientific Revolutions* (Univ. of Chicago Press, 1962); és definit com un conjunt de teories, estàndards, principis i mètodes que són considerats correctes per la comunitat científica dins d'un camp concret. Utilitzant aquest concepte, Kuhn caracteritza el desenvolupament científic com un procés al qual hi ha períodes de ciència *normal*, basats en paradigmes particulars, entrellaçats amb períodes de canvi de paradigma, que són nomenats per Kuhn com *revolucions científiques*.

Alguns dels més visibles canvis de paradigma estan associats als noms de Copernico (astronomia), Newton (mecànica), Lavoisier (química), Darwin (biologia), Maxwell (electromagnetisme), Einstein (mecànica) i Gödel (matemàtiques).

Tot i que els canvis de paradigma varien d'un a l'altre en abast, ritme i característiques, comparteixen tots ells unes característiques: cada canvi de paradigma ha estat iniciat per problemes emergents que eren difícil o impossible de tractar amb els paradigmes vigents (paradoxes, anomalíes, etc). Cada paradigma, quan ha sigut proposat, ha sigut inicialment rebutjat de diverses formes (ha sigut ignorat, ridiculitzat, atacat, etc.) per la majoria dels científics del camp afectat. Aquells que normalment donen suport al nou paradigma són o molt joves o molt nous en el camp, i conseqüentment, no molt influents. Com que el paradigma no està inicialment ben desenvolupat, la posició dels seus proponents és dèbil. El paradigma, eventualment, guanya terreny demostrant que és més profitós que el paradigma existent en el tractament de problemes que són reconeguts com difícils i acaba sent, generalment, acceptat.

El canvi de paradigma iniciat amb el concepte de conjunt difús i la idea matemàtica basada en conjunts difusos, que encara està desenvolupant-se, ha tingut característiques similars a altres canvis de paradigma de la història de la ciència.

Podem resumir que quan el nou paradigma va ser proposat per L. A. Zadeh [34], el procés usual de canvi de paradigma va començar. El concepte de conjunt difús, que implicava un nou paradigma, va ser inicialment ignorat, ridiculitzat o atacat per molts, mentre que només uns pocs, la majoria joves o poc influents, el van recolzar. Inicialment va trobar falta d'interés, escepticisme o fins i tot hostilitat durant els anys 60, va madurar significativament durant els 70 i durant els 80 va començar a demostrar una major utilitat.

La present memòria està dedicada a estudiar algunes de les propietats dels nombres difusos i fer-ne una utilització des d'el punt de vista topològic. La seua estructura és la següent. Al Capítol 2 veem l'evolució de la lògica des del segle IV abans de Crist fins a l'actualitat, introduïm la lògica difusa i fem un breu comentari sobre el naixement i evolució dels nombres difusos. El tercer capítol està dedicat als conceptes bàsics de conjunts difusos, introduïts per L. A. Zadeh al 1965, i desenvolupats per altres autors, on la idea més important és la convexitat. Al Capítol 4 ens centrem en els nombres difusos i demostrem el teorema de representació de Goetschel i Voxman, molt important pels capítols posteriors i resultat que marca una nova direcció de recerca. Al Capítol 5 caracteritzem els conjunts compactes del conjunt del nombres difusos amb la mètrica suprem. Al Capítol 6 parlem de la convergència de nivell i, amb exemples, la distingim de la convergència amb la mètrica suprem. A l'últim capítol comentarem algunes de les línies d'investigació futures.

Capítol 2

Evolució històrica

2.1 La lògica matemàtica

El primer sistema de lògica de predicats, encara que aquest nom siga molt posterior, es degut a Aristòtil al segle IV abans de Crist. Aristòtil tractava d'identificar les formes de raonament humà per tractar de crear criteris per discernir a les discussions filosòfiques.

La següent etapa comença al segle XVII quan Leibniz expressà el seu desig d'extendre l'aplicació de la lògica a les matemàtiques, tractant de formalitzar la lògica com un càlcul per manipular idees. Durant els 150 anys posteriors ni filòsofs ni matemàtics van prestar atenció a aquesta inquietud.

Va ser a meitat del segle XIX quan la lògica matemàtica es va constituir com a ciència amb els treballs de Boole i Frege.

L'anglés George Boole va publicar al 1854 el seu llibre *The Laws of Thought* (Les lleis del Pensament). En ell va desenvolupar un model algebraic de la lògica de proposicions.

L'alemany Gottlob Frege va publicar en 1879 el seu llibre *Grundgesetze der Arithmetik: Begriffsschiriftlich abgeleitet* (Fonaments d'Aritmètica: Conceptualment derivada) on va formalitzar la lògica de predicats, i va introduir el concepte de quantificador.

També a aquesta època cal incloure a Augustus De Morgan, que amb les lleis de dualitat de la conjunció i de la disjunció, va aportar una eina fonamental del càlcul lògic.

A les sentències de la lògica proposicional s'assigna un valor vertader (1) o fals (0), i les operacions de *complement, intersecció* i *unió* formen un àlgebra de Boole, amb les propietats resumides a la Taula 2.1.1, on A, B i C són subconjunts d'un conjunt X o elements del conjunt parts de X, $\mathcal{P}(X)$:

Involució	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotent	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Absorció	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Absorció per X i $\emptyset$	$A \cup X = X$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Identitat	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap X = A$
Llei de contradicció	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Llei del terç esclòs	$A \cup \overline{A} = X$
Lleis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Taula 2.1.1: Operacions fonamentals de conjunts

Els elements de les parts del conjunt X, $\mathcal{P}(X)$, poden ser ordenades per la inclusió de conjunts $\subseteq$. Aquest ordre, que és només parcial, forma un reticle on el suprem i l'ínfim de cada parell de subconjunts $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ve donat per $A \cup B$ i $A \cap B$, respectivament. Aquest reticle és distributiu i complementat (ja que qualsevol conjunt a $\mathcal{P}(X)$ té complement a $\mathcal{P}(X)$); s'anomena normalment *reticle de Boole* o *àlgebra de Boole*. La connexió entre les dues formulacions de reticle, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ i $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$, ve facilitada per la següent definició d'ordre parcial:

$$A \subseteq B \text{ si, i només si, } A \cup B = B \text{ per a qualssevol } A, B \in \mathcal{P}(X).$$

Per tant una àlgebra de Boole pot definir-se com un reticle (es a dir, un conjunt ordenat al qual cada parell d'elementes té extrem superior i extrem inferior) amb màxim 1 i mínim 0 i dotat de la complementació $\overline{A}$.

2.2 Les lògiques multivaluades de Lukasiewicz

Encara que hi ha molts intents durant el segle XIX de lògiques multivaluades (fins i tot Aristòtil va admetre al seu temps que al futur hi hauria més que vertader o fals), on s'aprecia un canvi per explicar situacions que no siguen només vertaderes o falses és amb les idees de Jan Lukasiewicz.

Lukasiewicz investigà la lògica polivalent al voltant dels anys 20 del segle XX. Al 1918 fa referència als seus treballs en la lliçó de comiat pronunciada a la Universitat de Varsovia. Lukasievicz va concebre la idea de recórrer a un sistema de lògica trivalent per resoldre el problema aristotèlic dels futurs contingents. L'afirmació *"Estaré a Varsovia al migdia del 21 de desembre del proper any"*, no pot ser ara ni vertadera ni falsa. Cal, per tant, un tercer valor distint de "1"o "0", aquest valor es pot designar per "$\frac{1}{2}$", representant "allò possible".

Tenim per tant un conjunt de tres elementes $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$. La funció monàdica més important estudiada per Lukasiewicz és la negació que queda definida com:

$$\neg x = 1 - x$$

que podem resumir a la taula següent:

x	$\neg x$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Aquesta definició de negació és distinta a altres anteriors on definien

$$\neg \tfrac{1}{2} = 0.$$

La lògica trivaluada va ser ampliada per Lukasiewicz a qualsevol quantitat de valors de veritat distribuïts de manera uniforme a l'interval $[0, 1]$. Si, per exemple, volem n valors, es tracta de: $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, 1\}$. Si volem infinits valors, agafem $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. La negació es defineix com a la lògica trivaluada:

$$\neg x = 1 - x,$$

i per la resta de connectius lògics introduïm l'operació $\oplus$ com

$$x \oplus y = \min\{1, x + y\}.$$

A partir d'aquestes operacions definim la constant 1, i les operacions $\odot$, $\rightarrow$ (implicació), $\vee$ (disjunció) i $\wedge$ (conjunció) com:

$$\boxed{\begin{array}{rl} 1 & = \neg 0 \\ x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y) & = max\{0, x + y - 1\} \\ x \rightarrow y = \neg x \oplus y & = min\{1, 1 - x + y\} \\ x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y) & = max\{x, y\} \\ x \wedge y = \neg(\neg x \odot y) \odot y) & = min\{x, y\} \end{array}}$$

Taula 2.2.1: Operacions a la lògica de Lukasiewicz

Com a generalització de l'àlgebra de Boole, en temps més recents (segons [28], en 1958 per Chang) es va introduir la noció de *MV-àlgebra*. Una MV-àlgebra és una estructura, que denotarem com $\mathbf{A}=\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$, on A és un conjunt no buït, $\oplus$ és una operació binària en A, $\neg$ és una operació d'un únic argument i 0 una constant, que cal que satisfacen les següents relacions:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,
2. $x \oplus y = y \oplus x$,
3. $x \oplus 0 = x$,
4. $\neg\neg x = x$,
5. $x \oplus \neg 0 = \neg 0$,
6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Tot subconjunt S de l'interval $[0, 1]$ on les funcions

$$x \mapsto 1 - x,$$
$$x, y \mapsto \min\{1, x + y\}$$

de S en S tinguen sentit i que continga el 0 és una MV-àlgebra amb les operacions

$$x \oplus y = \min\{1, x + y\},$$
$$\neg x = 1 - x$$

i amb la constant 0. Tota àlgebra booleana és una MV-àlgebra definint

$$x \oplus y = x \vee y,$$
$$\neg x = \overline{x}.$$

Com característica curiosa es pot dir que a les MV-àlgebres *sí* val el principi de la doble negació $\neg\neg x \to x$ però *no* el del terç esclós. Per exemple a una MV-àlgebra amb tres elementes tenim que

$$\tfrac{1}{2} \vee \neg\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \vee \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \neq 1.$$

2.3 Naixement de la lògica difusa

L'any 1965, el professor L. A. Zadeh introdueix amb l'article *"Fuzzy Sets"* les bases de la lògica difusa. En aquest treball defineix els conjunts difusos com una classe d'objectes amb un continu de graus de pertinença.

Com ell diu, al mon real hi ha classes d'objectes que no tenen ben definit el criteri de pertinença. Per exemple, el conjunt dels animals clarament inclou a gossos, cavalls, gats, etc. Estan definits clarament els seus membres i s'exclouen objectes com pedres, fluids o plantes. Encara que objectes com estrella de mar o bactèria tenen un estatus ambigu respecte a la classificació animal.

Així també la classe "hòmens alts" no constitueix un conjunt amb el sentit matemàtic usual. Aquestes "classes" imprecisament definides, com ell diu, tenen un paper important en el pensament humà, particularment en els dominis de reconeixement de formes, comunicació o informació.

Amb la finalitat d'ampliar el concepte de *conjunt ordinari* o *conjunt* on els seus elements només poden ser membres (valor 1) o no pertanyer (valor 0), els *conjuts difusos* són definits com una col·lecció d'objectes amb pertinença amb valors entre 0 (completa exclusió) fins a 1 (completa pertinença). La funció de pertinença expresa el grau amb que cada objecte és *compatible* amb la propietat de la col·lecció. La definició formal emprada per L. A. Zadeh és:

Definició 2.3.1. Siga X un espai de punts (objectes), amb un element genèric de X denotat per x.
Un *conjunt difús* $A \subseteq X$ está caracteritzat per una *funció característica* $f_A(x)$ que associa a cada punt $x \in X$ un nombre real a l'interval $[0, 1]$, amb el valor de $f_A(x)$ representant el *grau de pertinença* de x al conjunt A.

Així, per a un conjunt en el sentit ordinari la funció característica es redueix a :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Clarament, el conjunt buit, $\emptyset$, té una funció característica $\emptyset(x) \equiv 0$ per a tots els elements $x \in X$.

Com exemple, considerem el concepte de temperatura *alta* en un context de temperatures distribuïdes a l'interval $[0, 50]$ en $°C$. Clarament $0°C$ no l'entenem com una temperatura alta i li podem assignar un valor nul amb l'afirmació "temperatura *alta*". En canvi temperatures de $30°C$ o superiors ja poden considerar-se *altes*. Així podem assignar 1 com a grau de pertinença a les temperatures al rang $[30, 50]$. Un grau parcial de pertinença per a la resta de valors el podem veure a la figura 2.3.1:

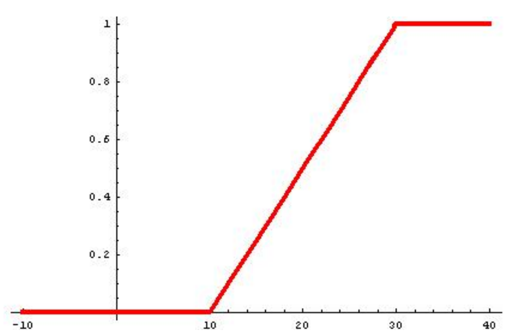

Figura 2.3.1: Funció de pertinença

Al seu article original, L. A. Zadeh incideix que la funció característica té cert paregut amb les funcions de probabilitat quan X és un conjunt numerable (o amb les funcions de densitat de probabilitat quan X és continu), però ja adverteix que són de natura diferent, tal com explicarem a la secció 2.5.

2.4 T-normes

L'any 1942 K. Menger al seu treball *"Statistical metrics"* defineix les t-normes. A [10], els professors D. Dubois, W. Ostasiewicz i H. Prade diuen que tal vegada ha tingut un reconeixement major al merescut dins del desenvolupament de la teoria difusa. Comenten que K. Menger, al 1951, només va suggerir la necessitat de desenvolupar una teoria en la que la relació de pertinença d'un element a un conjunt fóra reemplaçada per la probabilitat d'un element de pertanyer a un conjunt. Per tal raó va definir la noció de "ensemble flou"(l'article original és en francés), concepte que ell mateix va traduir a l'anglés per *hazy set* o conjunt emboirat.

La contribució feta amb les t-normes i t-conormes per generalitzar la clàssica desigualtat triangular, basant-se en la unió ($\cup$) i la intersecció ($\cap$) de conjunts, permet emprar les t-normes per realitzar l'arimètica dels nombres difusos, com veurem més endavant.

A continuació ens fixem en les propietats de la unió i la intersecció i definim les t-normes i les t-conormes.

Quan tenim dos subconjunts difusos A, B de X, la seua *intersecció* i *unió* es poden definir punt a punt, utilitzant les funcions $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ i $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ següents:

$$(A \cap_T B)(a) := T(f_A(a), f_B(a)), \text{ per a tot } a \in X.$$
$$(A \cup_S B)(a) := S(f_A(a), f_B(a)), \text{ per a tot } a \in X.$$

Les propietats de les operacions $\cap_T$ i $\cup_S$ expresades separadament en termes de les funcions T i S, on incluïm però no escribim per a tot x, y, $z \in [0,1]$, són les següents:

Identitat:

T1. $T(x,1) = x \qquad (A \cap X = A),$
S1. $S(x,0) = x \qquad (A \cup \emptyset = A).$

Commutativa:

T2. $T(x,y) = T(y,x) \qquad (A \cap B = B \cap A),$
S2. $S(x,y) = S(y,x) \qquad (A \cup B = B \cup A).$

Associativa:

$$\begin{array}{ll} \textbf{T3.}\ T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z) & (A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C), \\ \textbf{S3.}\ S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z) & (A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C). \end{array}$$

Monotonia: per a tot $x, y, u, v \in [0,1], x \le u, y \le v$,

$$\begin{array}{l} \textbf{T4.}\ T(x,y) \le T(u,v), \\ \textbf{S4.}\ S(x,y) \le S(u,v). \end{array}$$

Cal resaltar que l'única diferència entre les propietats de T i S ve donada per la propietat primera (identitat). A partir de les propietats anteriors podem introduir els següents conceptes.

Definició 2.4.1. Una funció $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ s'anomena *norma triangular* (una *t-norma* per abreujar) si, i només si, satisfà les condicions T1-T4.
Una funció $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ s'anomena *conorma triangular* (una *t-conorma* per abreujar) si, i només si, satisfà les condicions S1-S4.

Com conseqüència de les propietats anteriors tenim que:

$$T(0,x) = 0,\ S(1,x) = 1 \qquad \text{per a tot } x \in [0,1].$$

També tenim que per a qualsevol t-norma T o per a qualsevol t-conorma S $(x, y \in [0,1])$:

$$T(x,y) \le \min(x,y), \qquad S(x,y) \ge \max(x,y).$$

Definició 2.4.2. Una funció no creixent $n : [0,1] \to [0,1]$ que satisfà les condicions

$$n(0) = 1,\ n(1) = 0$$

s'anomena *negació*.

Definició 2.4.3. Una negació, n, s'anomena *estricta* si la funció que la defineix és estrictament decreixent i contínua. S'anomena *forta* si a més és una involució, és a dir, $n(n(x)) = x$ per a tot $x \in [0,1]$.

Com podem comprovar, per a cada t-norma T i una negació forta N, l'operació S definida per

$$S(x, y) := N(T(N(x), N(y))), \qquad x, y \in [0, 1] \tag{2.4.1}$$

és una t-conorma. Addicionalment podem veure que

$$T(x, y) := N(S(N(x), N(y))) \ (x, y \in [0, 1]).$$

Aleshores S s'anomena la *t-conorma N-dual* de T, i T la *t-norma N-dual* de S. En el cas que la negació siga $N(x) := 1 - x$ per a $x \in [0, 1]$ (negació estàndard) es parla simplement de t-conorma dual, respectivament t-norma dual. La igualtat 2.4.1 expresa les lleis de De Morgan en el cas difús.

Veem exemples de t-normes i t-conormes:

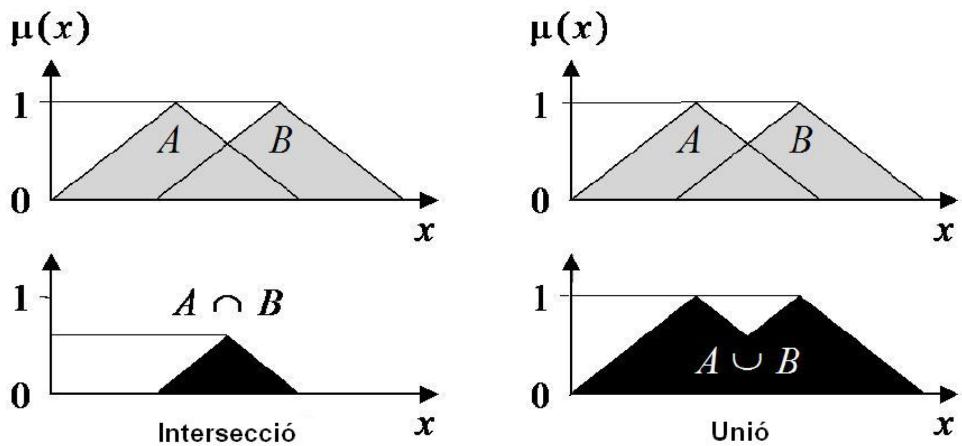

Figura 2.4.1: Intersecció i unió difuses

- **El mínim i el màxim.** En l'article clàssic de L. A. Zadeh [34] són les proposades com els models a utilitzar per definir la intersecció i la unió dels conjunts difusos ($x, y \in [0, 1]$).

  La *unió* de dos conjunts difusos A i B de X, amb respectives funcions de pertinença $x(a)$, $a \in A$ i $y(b)$, $b \in B$, és el conjunt difús C, escrit com $C = A \cup B$, la funció de pertinença del qual és:

$$z(c) = \max\{x(c), y(c)\}, \text{ per a tot } c \in X.$$

La *intersecció* de dos conjunts difusos A i B de X, amb respectives funcions de pertinença $x(a)$, $a \in A$ i $y(b)$, $b \in B$, és el conjunt difús C, escrit com $C = A \cap B$, la funció de pertinença del qual és:

$$z(c) = \min\{x(c), y(c)\}, \text{ per a tot } c \in X.$$

Podem veure la representació gràfica a la Figura 2.4.1.

Tal com ja hem comentat, 'min' és la major t-norma i 'max' és la menor t-conorma.

- **El producte i la suma probabilística.** Un altre exemple ve donat per la t-norma producte $\prod$ i la seua dual t-conorma, $\prod'$, anomenada suma probabilística:

$$\prod(x, y) := xy, \qquad \prod{}'(x, y) := x + y - xy, \qquad (x, y \in [0, 1]).$$

- **La t-norma i t-conorma de Lukasiewicz**. La t-norma W (introduïda per Lukasiewicz en 1931) i la t-conorma dual W' están definides com:

$$W(x, y) := \max\{x + y - 1, 0\}, \quad W'(x, y) := \min\{x + y, 1\},$$

$(x, y \in [0, 1])$, normalment anomenades *intersecció audaç* i *suma fitada*, respectivament.

- **El mínim i màxim nilpotents.** Una nova t-norma i t-conorma van ser definides per Perny (Perny, 1992), que van ser independentment redescobertes per Fodor (Fodor, 1995), anomenades *mínim nilpotent* i *màxim nilpotent*, respectivament. Estan definides per les següents fórmules:

$$\min{}_0(x, y) := \begin{cases} \min(x, y) & si\ \ x + y > 1 \\ 0 & \text{en un altre cas,} \end{cases}$$

essent la seua t-conorma associada:

$$\max_1(x,y) := \begin{cases} \max(x,y) & si \;\; x+y<1 \\ 1 & \text{en un altre cas,} \end{cases}$$

$x, y \in [0,1]$.

- **El producte i suma dràstics.** La t-norma Z, anomenada producte dràstic, i la t-conorma Z', anomenada suma dràstica, es defineixen com:

$$Z(x,y) := \begin{cases} \min(x,y) & si \;\; \max(x,y)=1 \\ 0 & \text{en un altre cas,} \end{cases}$$

i

$$Z'(x,y) := \begin{cases} \max(x,y) & si \;\; \min(x,y)=0 \\ 1 & \text{en un altre cas,} \end{cases}$$

$x, y \in [0,1]$.

Són anomenades la t-norma "més dèbil" i la t-conorma "més forta" perquè satisfan les següents desigualtats per a qualsevol t-norma T i per a qualsevol t-conorma S:

$$Z \leq T \leq \min, \qquad \max \leq S \leq Z'$$

2.5 Probabilitat i conjunts difusos

Tal com diuen Dubois, Nguyen i Prade a [9], un dels assumptes més controvertits de la modelització de la incertesa i a les ciències de la informació és la relació entre la teoria de la probabilitat i els conjunts difusos. Una de les raons de la controvèrsia és que els conjunts difusos s'apliquen en el camp de la modelització de la incertesa, creant així una dicotomia entre les aproximacions difusa i probabilística. De vegades el debat ha estat aspre a causa de la reclamació dels defensors dels conjunts difusos que "la probabilitat tracta amb incertesa objectiva, mentre que els conjunts difusos tracten amb incertesa subjectiva" o encara més "la probabilitat és un cas especial de conjunts difusos". La primera afirmació només mostra que la teoria difusa ignora l'escola Bayesiana de probabilitat subjectiva. La segona afirmació és falsa. Al darrere de cada teoria hi ha un naixement diferent per explicar la incertesa en diferents camps: els conjunts difusos estan darrere de les tasques de raonament i la probabilitat bayesiana de la presa de decisions. Pot ser les controvèrsies entre les dues acabarien si els científics protagonistes s'esforçaren en construir un llenguatge comú per compartir el fons científic.

Hi ha certs malentesos entre conjunts difusos i probabilitat. La crítica rebuda pels conjunts difusos no és altra cosa que un malentés, una falsificació o una concepció errònia de la teoria de la probabilitat. Aquesta crítica perdura, tot i que amb menor mesura. Exemples d'aquestos textos crítics, provinents de la teoria de la probabilitat, són Stallings (1977), Laviolette i Seaman (1994) o Laviolette et al. (1995). La teoria de conjunts difusos ha patit el destí de les noves teories quan no tenen encara sòlids fonaments. Les crítiques venen de camps ben fonamentats que no recorden els patiments dels seus primers temps.

Vegem la diferència entre funció de pertinença i la probabilitat: el problema de quantificar la pertinença parcial és diferent del de modelitzar la imprecisió o predicats que vénen amb graus. La pertinença parcial és bàsicament deguda a informació incompleta o conflictiva. Si no tenim una informació completa o precisa de l'estat del món, no podem respondre amb certesa a totes les preguntes sobre aquest món. Aquest problema n'és només un dels de la pertinença parcial, amb la terminologia difusa.

La modelització de la imprecisió és un problema de representació que, de vegades, s'anomena imprecisió lèxica dels termes lingüístics. Tracta de capturar el fet que baix certs predicats hi ha una gradació, o certa noció d'intensitat en la seua pertinença per quantificar una situació donada. En aquest context, les funcions de pertinença són només perfils de preferència induïts per hàbits lingüístics.

A nivell formal, la situació relativa dels conjunts difusos i la probabilitat és clara. Després de L. A. Zadeh (1965) un conjunt difús F a un univers U ve identificat per una funció de pertinença $\mathrm{F}(\cdot)\colon \mathrm{U} \to [0,1]$ on $\mathrm{F}(u)$ és el grau de pertinença de *l'element* u de F. Per simplificar ens fixarem només a universos finits. En canvi, una mesura de probabilitat P és una funció $2^{\mathrm{U}} \to [0,1]$ que assigna un nombre $\mathrm{P(A)}$ a cada *subconjunt* de U, i satisfà els axiomes de Kolmogorov (al cas finit):

- P(U) = 1.
- P(∅) = 0.
- Si $A \cap B = \emptyset$, P(A ∪ B) = P(A) + P(B).

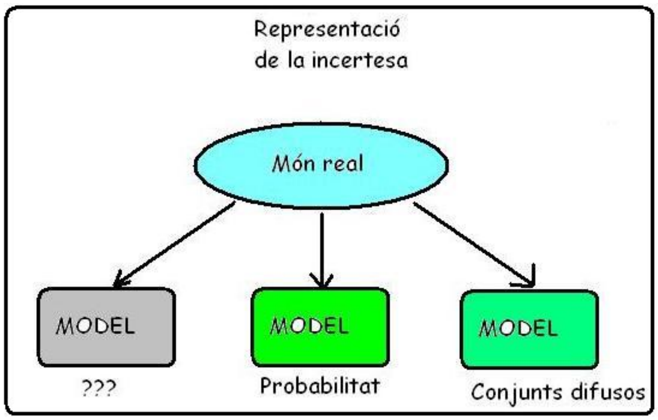

Figura 2.5.1: Representació de la incertesa

La probabilitat atany a *l'aparició* d'esdeveniments *ben definits* (sent considerats com conjunts). Per exemple, la probabilitat de traure aleatòriament una bola roja d'una urna que conté 5 roges i 7 blanques és $\frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}$, assumint que cada bola té probabilitat $\frac{1}{12}$ de ser triada. Les probabilitats cal que siguen avaluades o estimades, basades en una repetició o en cert tipus d'experiment portat a terme en un medi estacionari. Aleshores, per fer les probabilitats significatives, cal proposar una forma de determinar-les. Els enginyers empren el mètode de determinar la probabilitat com un límit de freqüències i determinen el valor amb un nombre finit d'experiments. Així la probabilitat de l'esdeveniment A és estimada amb:

$$\mathrm{p(A)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

on n_A és el nombre d'experiments on l'esdeveniment A ha ocorregut front un total de n experiments realitzats en la sèrie.

D'altra banda, els conjuts difusos tracten amb la *gradualitat* de conceptes i describeixen les seues fites.

Per fer la diferència encara més clara, considerem un experiment amb resultat possible A. Només abans de realitzar-lo podem parlar de probabilitat de A, P(A). Una vegada realitzat l'experiment, la part probabilística desapareix. El resultat és, sense ambigüitat, conegut: A ha ocorregut o no. En canvi, si A és un conjunt difús; després de l'experiment la idea continua sent válida.

En canvi Dubois, Nguyen i Prade a [9] sí que donen la raó a Laviolette i Seaman (1994) quan qüestionen la idea, que de vegades apareix als articles de conjunts difusos, que aquestos últims generalitzen la probabilitat. Especialment el fet que una funció de densitat de probabilitat pot ser obtesa per una adequada normalització de la funció de pertinença. La funció de probabilitat opera sobre conjunts, i té per domini una àlgebra de Boole, mentre que el domini de la funció de pertinença no pot mai ser una àlgebra de Boole.

2.6 Naixement i evolució dels nombres difusos

Els nombres difusos modelitzen quantitats imprecises que tendeixen a apareixer quan es treballa amb sistemes complexos. Podem trobar exemples per modelitzar quantitats aproximades (nombres) a expressions com: *aproximadament cinc*, *per baix de 100*, *baixa temperatura*, etc.

El càlcul de quantitats difuses es basa a l'àrea d'anàlisi d'intervals (Moore, 1966) que defineix les regles per la propagació d'errors (descrites per intervals) en els processos de càlcul. Bàsicament usat pels físics, el tòpic d'interval matemàtic ha esdevingut encara més important amb l'utilització dels ordinadors.

La idea que les quantitats difuses podien ser aritmèticament combinades d'acord amb les lleis de la teoria de conjunts difusos es deguda a L. A. Zadeh (1975a). Després d'ell, diversos investigadors van treballar de forma independent per desenvolupar-la (així Dubois i Prade (1979, 1980) o Kaufmann i Gupta (1988)).

L'aritmètica dels nombres difusos ha estat desenvolupada seguint dues vies: els α-talls o el principi d'extensió, com veurem a l'Apartat 4.2. La primera aprofita la relació dels nombres difusos i els intervals, així com l'aritmètica dels intervals ja desenvolupada en la teoria d'errors. La segona utilitza la t-norma *min*.

Capítol 3

Conceptes bàsics de conjunts difusos

Tal com ja hem dit al capítol anterior, L. A. Zadeh (1965), al seu famós article [34] defineix un conjunt difús com un continu de graus de pertinença. La condició de continuïtat es canviarà a posteriori per la de semicontinuïtat superior per definir els nombres difusos de forma que generalitzen els nombres reals.

3.1 Definicions i primeres propietats

A aquesta secció, a partir de la definició de conjunt difús donada per L. A. Zadeh en 1965, introduïm conceptes bàsics i terminologia sobre conjunts difusos.

Definició 3.1.1. Un *conjunt difús* és caracteritzat per una funció de pertinença d'elements d'un conjunt X a l'interval unitat $[0, 1]$, això és:

$$A : X \longrightarrow [0, 1].$$

Així, un conjunt difús està representat per un conjunt ordenat de parelles formades per un element genèric $x \in X$ i el seu grau de pertinença:

$$A = \{(x/A(x)) \mid x \in X\}.$$

Clarament, un conjunt difús és la generalització del concepte de conjunt, els elements del qual només poden pendre els dos valors $\{0, 1\}$, tal com hem vist a la Secció 2.3.

Els conjunts difusos poden estar definits per a universos finits o infinits, emprant diferents notacions. Si l'univers X és finit amb cardinalitat n, aleshores el conjunt difús ve donat en forma de vector n-dimensional, on apareixen només els elements de X amb funció de pertinença no zero. Per exemple, si $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, aleshores el conjunt difús $A = \{(x_i/a_i) \,|\, x_i \in X\}$, on $a_i = A(x_i)$, $i = 1, ..., n$, ve denotat per (Zadeh 1965; Kandel 1986)

$$A = x_1/a_1 + x_2/a_2 + ... + x_n/a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i/a_i.$$

A aquesta notació, la suma no s'ha de confondre amb la suma algebraica estàndard; el propòsit del signe de sumatori és indicar el conjunt de parelles ordenades.

Quan l'univers X és continu, s'empra la següent expressió per representar un conjunt difús:

$$A(x) = \int_X x/a,$$

on $a = A(x)$ i el símbol integral cal que siga interpretat com el símbol de sumatori d'abans.

Definició 3.1.2. Anomenarem $F(X)$ la familia de tots els conjunts difusos sobre X.

Definició 3.1.3. Els talls de nivell o α-talls, A^α, d'un conjunt difús A són els conjunts

$$A^\alpha = \{x \in X \,|\, A(x) \geq \alpha\}, \text{ on } 1 \geq \alpha > 0.$$

Una propietat important dels conjunts difusos definits sobre $\mathbb{R}$ és la seua convexitat. Per fer la generalització de convexitat, consistent amb la definició clàssica de convexitat, cal que tots els α-talls, $\alpha \in (0, 1]$, siguen conjunts convexos en el sentit clàssic (el 0-tall està exclòs perquè equival a tot $\mathbb{R}$).

Definició 3.1.4. Un conjunt difús $u \in F(\mathbb{R})$ és *convex* si, i només si, tots el conjunts

$$[u]^\alpha := \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \alpha\},$$

denominats talls de nivell o α-talls, són convexos per qualsevol α a l'interval $(0, 1]$.
Quan $\alpha = 0$, definim,

$$[u]^0 := \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [u]^\alpha} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}.$$

que també serà convex si ho són tots els α-talls, perquè la clausura ho conserva.

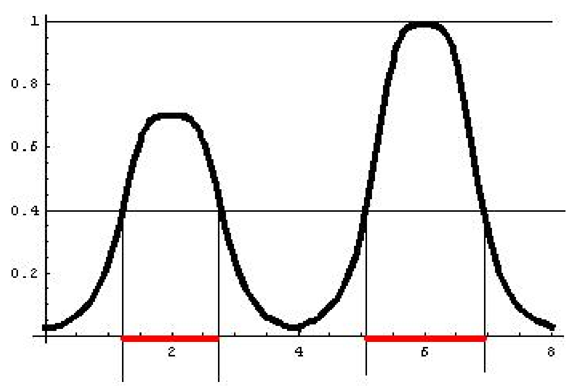

Figura 3.1.1: Conjunt difús no convex a $\mathbb{R}$

Resaltar que els conjunts convexos en $\mathbb{R}$ són els intervals.

Per evitar confusió, cal adonar-se'n que la definició de convexitat difusa no significa que la funció de pertinença del conjunt difús siga una funció convexa. A la Figura 3.1.1 hi ha un exemple de conjunt difús no convex.

Una caracterització alternativa i més eficient de convexitat la veem al teorema següent.

Teorema 3.1.5. *Un conjunt difús u a $\mathbb{R}$ és convex si, i només si,*

$$u(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \geq \min[u(x_1), u(x_2)]$$

per a qualsevol $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *i per a qualsevol* $\mu \in [0,1]$*, on* min *denota l'operador mínim.*

Demostració. (i) Assumim que u és convex i agafem $\lambda = u(x_1) \leq u(x_2)$. Aleshores, $x_1, x_2 \in [u]^\lambda$ i a més, $\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in [u]^\lambda$ per a qualsevol $\mu \in [0,1]$ per la convexitat de u. Conseqüentment,

$$u(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \geq \lambda = u(x_1) = \min[u(x_1), u(x_2)].$$

(ii) Assumim que u satisfà $u(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \geq \min[u(x_1), u(x_2)]$. Cal que provem que per a qualsevol $\lambda \in (0,1]$, $[u]^\lambda$ és convex.
Tenim que per a qualsevol $x_1, x_2 \in [u]^\lambda$ (és a dir $u(x_1) \geq \lambda, u(x_2) \geq \lambda$), i per a qualsevol $\mu \in [0,1]$

$$u(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \geq \min[u(x_1), u(x_2)] \geq \min(\lambda, \lambda) = \lambda;$$

és a dir, $\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in [u]^\lambda$. Així doncs, $[u]^\lambda$ és convex per qualsevol $\lambda \in (0,1]$. Concluïm que u és convex. ∎

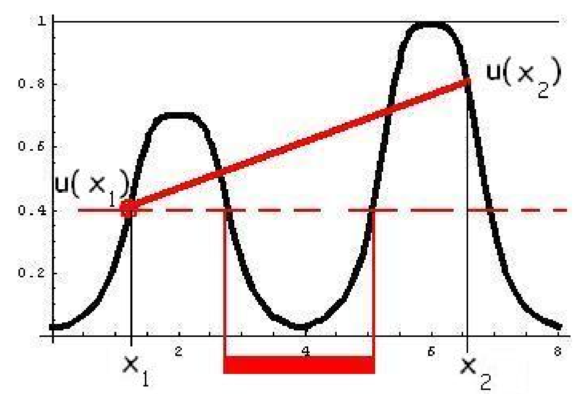

Figura 3.1.2: Caracterització de conjunt difús no convex a $\mathbb{R}$

A la Figura 3.1.2 veem gràficament l'explicació d'aquesta caracterització de convexitat. A la zona central, resaltada en traç gros, no és compleix el teorema, per tant no és un conjunt difús convex.

El concepte de α-tall té un importància capital en la relació entre conjunts i conjunts difusos. En primer lloc vegem algunes propietats dels α-talls.

3.2 Propietats bàsiques dels α-talls

Anem a veure uns resultats que ens serviran més endavant.

Teorema 3.2.1. *Siguen $u, v \in F(\mathbb{R})$, dos conjunts difusos en $\mathbb{R}$. Aleshores es complixen les següents propietats per a qualsevol $\lambda, \mu \in [0,1]$:*

(i) $\lambda \le \mu$ *implica que* $[u]^\lambda \supseteq [u]^\mu$*;*

(ii) $[u \cap v]^\lambda = [u]^\lambda \cap [v]^\lambda$*;*

(iii) $[u \cup v]^\lambda = [u]^\lambda \cup [v]^\lambda$*.*

Demostració. (i) Si $x \in [u]^\mu$, aleshores $u(x) \ge \mu$. Com que $\mu \ge \lambda$, tenim que $u(x) \ge \mu \ge \lambda$. Per tant, $x \in [u]^\lambda$ i podem concloure que $[u]^\lambda \supseteq [u]^\mu$.

(ii) Per a qualsevol $x \in [u \cap v]^\lambda$, tenim que $(u \cap v)(x) \ge \lambda$ i, per tant, $\min[u(x), v(x)] \ge \lambda$. Això significa que $u(x) \ge \lambda$ i $v(x) \ge \lambda$. Açò implica que $x \in [u]^\lambda \cap [v]^\lambda$ i, conseqüentment, $[u \cap v]^\lambda \subseteq [u]^\lambda \cap [v]^\lambda$. D'altra banda, per a qualsevol $x \in [u]^\lambda \cap [v]^\lambda$, tenim que $x \in [u]^\lambda$ i $x \in [v]^\lambda$; és a dir $u(x) \ge \lambda$ i $v(x) \ge \lambda$; per tant, $\min[u(x), v(x)] \ge \lambda$, el que significa que $(u \cap v)(x) \ge \lambda$. Açò implica que $x \in [(u \cap v)]^\lambda$ i, conseqüentment, $[u]^\lambda \cap [v]^\lambda \subseteq [u \cap v]^\lambda$. Concloem que $[u \cap v]^\lambda = [u]^\lambda \cap [v]^\lambda$.

(iii) Per a qualsevol $x \in [u \cup v]^\lambda$, tenim que $\max[u(x), v(x)] \ge \lambda$ i, per tant, $u(x) \ge \lambda$ o $v(x) \ge \lambda$. Això implica que $x \in [u]^\lambda \cup [v]^\lambda$.
En sentit contrari, per a qualsevol $x \in [u]^\lambda \cup [v]^\lambda$, tenim que $x \in [u]^\lambda$ o $x \in [v]^\lambda$. Açò vol dir que $u(x) \ge \lambda$ o $v(x) \ge \lambda$. Per tant, $\max[u(x), v(x)] \ge \lambda$, que significa que $(u \cup v)(x) \ge \lambda$. Açò implica que $x \in [u \cup v]^\lambda$, i conseqüentement, $[u]^\lambda \cup [v]^\lambda \subseteq [u \cup v]^\lambda$. Hem provat doncs que $[u \cup v]^\lambda = [u]^\lambda \cup [v]^\lambda$. ■

Examinem ara les conseqüencies del teorema anterior. La propietat (i) significa que la successió de conjunts $\{[u]^\lambda \mid \lambda \in [0,1]\}$ dels α-talls és sempre *monótona decreixent* respecte a λ; conseqüentment, és una *família d'intervals encaixats*.

També de l'apartat (i) del Teorema 3.2.1 podem concloure la propietat següent:

Proposició 3.2.2. *Els talls de nivell (α-talls) d'un conjunt difús A són continus superiorment: donada una successió no decreixent $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$ amb límit α, aleshores*

$$A^{\alpha} = \lim_{n \to \infty} \bigcap_{i=1}^{n} A^{\alpha_i}. \tag{3.2.1}$$

Aquesta propietat ens permet passar de la representació amb talls de nivell a la funció de pertinença. La funció de pertinença pot ser generada a partir dels talls de nivell com:

$$A(x) = \sup\{\alpha \,|\, x \in A^{\alpha}\}.$$

A l'inversa, si tenim una familia d'intervals encaixats $\{A^{\alpha} \,|\, 1 \geq \alpha > 0\}$, amb $A^0 = X$ i que satisfà l'apartat (i) del Teorema 3.2.1 i l'equació (3.2.1) de la proposició anterior, aleshores hi ha un únic conjunt difús F els talls de nivells del qual són $F^{\alpha} = A^{\alpha}$ per a cada $\alpha \in [0, 1]$. Aquesta propietat es coneix con el teorema de representació de Negoita i Ralescu [25, 26].

3.3 Representació de conjunts difusos

Com hem vist al final de la secció anterior, una propietat fonamental dels α-talls és la seua capacitat de representar els conjunts difusos. Anem a incidir en aquest aspecte en aquesta secció. Aquestes representacions ens permeten extendre diverses propietats i operacions dels conjunts ordinaris a la seua contrapartida difusa.

Per explicar la representació de conjunts difusos mitjançant conjunts ordinaris, comencem amb la il·lustració d'un exemple. Considerem el conjunt difús

$$u = x_1/0.2 + x_2/0.4 + x_3/0.6 + x_4/0.8 + x_5/1$$

Anem a mostrar com es pot representar pels seus α-talls.
El conjunt difús u està associat a només cinc α-talls distints, que estan definits per les següents funcions característiques:

$$
\begin{aligned}
[u]^{0.2} &= x_1/1 + x_2/1 + x_3/1 + x_4/1 + x_5/1, \\
[u]^{0.4} &= x_1/0 + x_2/1 + x_3/1 + x_4/1 + x_5/1, \\
[u]^{0.6} &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/1 + x_4/1 + x_5/1, \\
[u]^{0.8} &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/0 + x_4/1 + x_5/1, \\
[u]^{1} &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/0 + x_4/0 + x_5/1.
\end{aligned}
$$

Ara convertim cadascun dels α-talls al nou conjunt difús, u_λ, definit per a cada $x \in X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ com:

$$
u_\lambda(x) = \lambda \cdot [u]^\lambda(x). \tag{3.3.1}
$$

Obtenim

$$
\begin{aligned}
u_{0.2} &= x_1/0.2 + x_2/0.2 + x_3/0.2 + x_4/0.2 + x_5/0.2, \\
u_{0.4} &= x_1/0 + x_2/0.4 + x_3/0.4 + x_4/0.4 + x_5/0.4, \\
u_{0.6} &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/0.6 + x_4/0.6 + x_5/0.6, \\
u_{0.8} &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/0 + x_4/0.8 + x_5/0.8, \\
u_1 &= x_1/0 + x_2/0 + x_3/0 + x_4/0 + x_5/1.
\end{aligned}
$$

Ara ja és fàcil veure que, amb la unió difusa estàndard d'aquestos cinc conjunts difusos, obtenim el conjut difús original. Això és,

$$
u = u_{0.2} \cup u_{0.4} \cup u_{0.6} \cup u_{0.8} \cup u_1.
$$

Anem a concretar les idees anteriors en el següent resultat.

Teorema 3.3.1. ***(Teorema de descomposició).*** *Per a cada conjunt difús $u \in F(X)$,*

$$
u = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} u_\lambda, \tag{3.3.2}
$$

on u_λ està definit com a (3.3.1) i $\bigcup$ denota la unió difusa.

Demostració. Per a cada $x \in X$, siga $\mu = u(x)$. Aleshores,

$$
\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} u_\lambda \right)(x) = \sup_{\lambda \in [0,1]} u_\lambda(x) = \max[\sup_{\lambda \in [0,\mu]} u_\lambda(x), \sup_{\lambda \in]\mu,1]} u_\lambda(x)].
$$

Per a cada $\lambda \in]\mu, 1]$, tenim que $u(x) = \mu < \lambda$ i, per tant, $u_\lambda(x) = 0$. Per altra banda, per a cada $\lambda \in [0, \mu]$, tenim $u(x) = \mu \geq \lambda$, que ens porta a $u_\lambda(x) = \lambda$. Així doncs,

$$\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} u_\lambda \right)(x) = \sup_{\lambda \in [0,\mu]} \lambda = \mu = u(x).$$

Com que el mateix argument és vàlid per qualsevol $x \in X$, arribem a la validesa de (3.3.2). ■

Per il·lustrar l'aplicació d'aquest teorema, considerem el conjunt difús u amb la següent funció de pertinença amb forma triangular:

$$u(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \\ 3 - x, & x \in [2, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

Per a cada $\lambda \in [0, 1]$, el λ-tall de u és un interval tancat

$$u^\lambda = [\lambda + 1, 3 - \lambda],$$

i el conjunt difús especial u_λ utilitzat en (3.3.2) ve definit per la seua funció de pertinença

$$u_\lambda = \begin{cases} \lambda, & x \in [\lambda + 1, 3 - \lambda] \\ 0, & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Exemples de conjunts u^λ i u_λ per a tres valor diferents de λ es veuen a la Figura 3.3.1. D'acord amb el primer teorema de descomposició, u s'obté agafant la unió difusa dels conjunts u_λ per tots els $\lambda \in [0, 1]$.

3.3.1 Principi d'extensió per a conjunts difusos

Diem que una funció en el sentit clàssic

$$f : X \longrightarrow Y$$

és extesa al camp difús quan els conjunts X i Y són conjunts difusos. Això vol dir que la funció, la qual conserva el simbol f, té la forma

$$f : F(X) \longrightarrow F(Y).$$

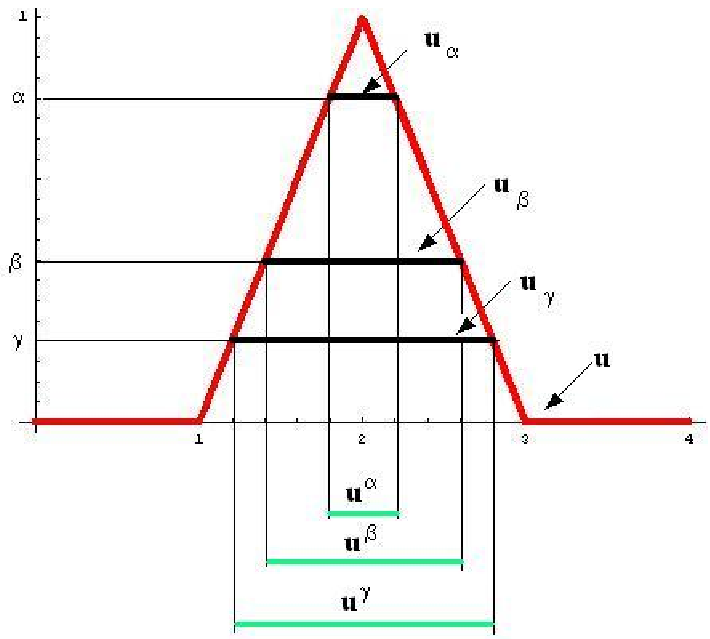

Figura 3.3.1: Il·lustració del teorema de descomposició

Un mètode per difusivitzar les funcions ordinàries s'anomena *principi d'extensió*. Abans d'introduir el principi, anem a veure un cas especial, en el qual les funcions són exteses al conjunt de les parts d'un conjunt, $\mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{P}(Y)$. Aquest cas està establert en la teoria de conjunts.

Donada una funció ordinària de X a Y, la seua versió extesa a una funció de $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(Y)$, per qualsevol $A \in \mathcal{P}(X)$, ve definida com

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

La versió extesa de la inversa de f, denotada com f^{-1}, és una funció de $\mathcal{P}(Y)$ a $\mathcal{P}(X)$. Per a qualsevol $B \in \mathcal{P}(Y)$, està definida com

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

Expressant els conjunts $f(A)$ i $f^{-1}(B)$ amb les seues funcions carateístiques (vistes com un cas especial de les funcions de pertinença), obtenim

$$[f(A)](y) = \sup\{A(x) \mid y = f(x)\}, \tag{3.3.3}$$

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x)). \tag{3.3.4}$$

Com exemple simple d'il·lustració del significat d'aquestes equacions, siga $X = \{a, b, c\}$ i $Y = \{1, 2\}$, i considerem la funció

$$f :\equiv \begin{cases} a \to 1 \\ b \to 1 \\ c \to 2 \end{cases}$$

Aleshores aplicant (3.3.3) i (3.3.4) a aquesta funció, obtenim la extensió de f com es veu a la Figura (3.3.2.a) i la extensió de f^{-1} com es veu a la Figura (3.3.2.b), respectivament.

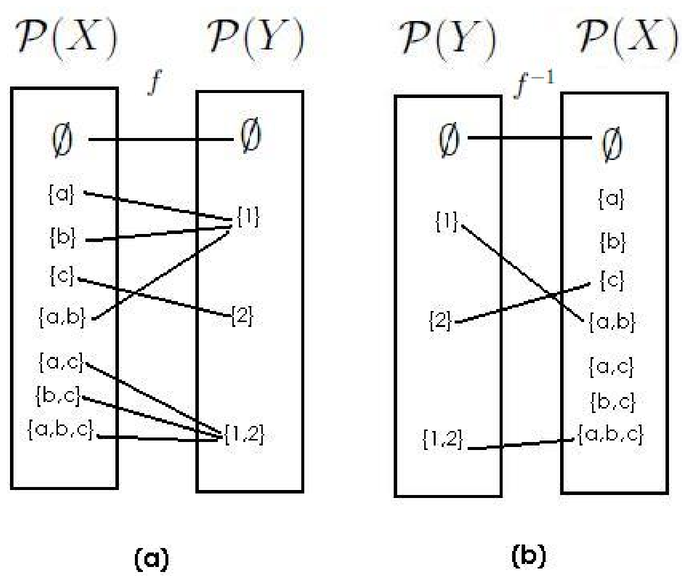

Figura 3.3.2: Exemple d'extensió d'una funció a les parts d'un conjunt $\mathcal{P}(X)$

Si permetem ara que els conjunts A i B a (3.3.3) i (3.3.4) siguen conjunts difusos i reemplacem les funcions característiques a aquestes equacions per funcions de pertinença, arribem al següent principi d'extensió mitjançant el qual les funcions ordinàries poden ser difusivitzades.

Definició 3.3.2. (Principi d'extensió): Tota funció $f : X \longrightarrow Y$ induix dues funcions,

$$f : F(X) \longrightarrow F(Y),$$
$$f^{-1} : F(Y) \longrightarrow F(X),$$

que estan definides com

$$[f(A)](y) = \sup\{A(x) \,|\, y = f(x), x \in X\}, \qquad (3.3.5)$$

per a tots els $A \in F(X)$ i

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x)). \qquad (3.3.6)$$

per a tots els $B \in F(Y)$.

Aquest principi l'aplicarem al següent capítol per definir l'aritmètica dels nombres difusos.

Capítol 4

Nombre difús

Definirem a continuació un cas particular de conjunt difús, anomenat nombre difús. Recordem que $\mathbb{R}$ denota el conjunt dels nombres reals i $\mathbb{N}$ el conjunt dels nombres naturals. Com que volem que els nombres difusos siguen una generalització dels nombres reals, a la funció de pertinença només li exigirem la semicontinuïtat superior.

4.1 Definicions bàsiques

Un conjunt difús l'hem definit en termes d'una funció de pertinença que assigna a cada punt d'un univers el grau de pertinença al conjunt difús. Aquesta funció de pertinença és

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

Denotem per $F(\mathbb{R})$ la familia de tots els conjunts difusos de $\mathbb{R}$.

Recordem la definició dels conjunts α-tall com

$$[u]^\alpha := \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \alpha\}.$$

El *suport*, $[u]^0$, d'un conjunt difús està definit com

$$[u]^0 := \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [u]^\alpha} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}.$$

Cal tindre en compte que no agafem $[u]^0$ com $\{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq 0\}$ perquè aquest últim conjunt equival a tot $\mathbb{R}$, és a dir, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$.

El nombres difusos són una restricció dels conjunts difusos amb propòsits pràctics i teòrics.

Definim el conjunt dels nombres difusos, $\mathbb{E}^1$, com el conjunt d'elements de $F(\mathbb{R})$ que satisfan les següents propietats:

(1) u és normal, és a dir, existeix almenys un $x_0 \in \mathbb{R}$ on $u(x_0) = 1$;

(2) u és convexa (en el sentit difús), és a dir, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, per a qualsevol $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$;

(3) u és semicontínua superiorment, és a dir, $[u]^\alpha$ és un conjunt tancat per a tot α;

(4) $[u]^0$ és un subconjunt compacte de $\mathbb{R}$.

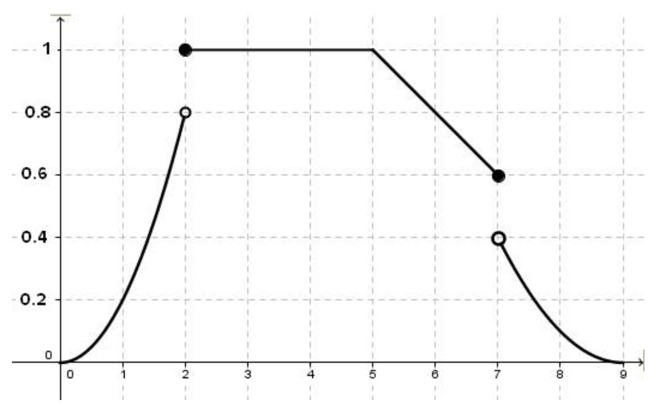

Figura 4.1.1: Exemple de nombre difús

Cada membre $u \in \mathbb{E}^1$ s'anomena nombre difús i $\mathbb{E}^1$ s'anomena l'espai dels nombres difusos.

Amb la condició que la funció de pertinença siga semicontínua superiorment, podem considerar els nombres reals $\mathbb{R}$ com un cas particular dels nombres difusos definint $\widetilde{r}$ com

$$\widetilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & t = r \\ 0 & t \neq r \end{cases}$$

per a tot $r \in \mathbb{R}$.

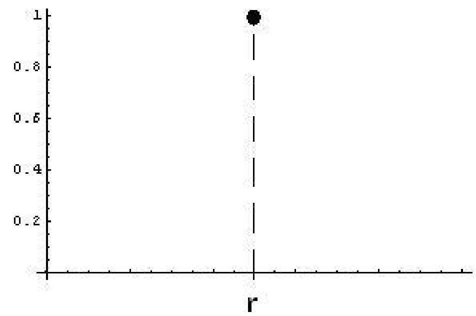

Figura 4.1.2: Exemple de nombre real, expressat de forma difusa

4.2 Aritmètica difusa i propietats

És important per a les aplicacions dels nombres difusos tindre la possibilitat de realitzar càlculs aritmètics. A continuació expliquem les dues formes més importants de fer-ho.

Proposició 4.2.1. *$[u]^\alpha$ és un subconjunt compacte de $\mathbb{R}$.*

Demostració. Com a conseqüència de la condició (3) de la definició, $[u]^\alpha$ són conjunts tancats per a tot α.
D'altra banda, pel Teorema 3.2.1(i), $[u]^\alpha \subseteq [u]^0$. Com $[u]^0$ és compacte, és fitat, i per tant també és fitat $[u]^\alpha$. Com $[u]^\alpha$ és tancat i fitat a $\mathbb{R}$, és compacte. ■

Com a conseqüència de la propietat anterior i que són connexes, tal com hem vist a la Secció 3.1 per ser convexos en el sentit difús, els α-talls $[u]^\alpha$, són intervals tancats i fitats per qualsevol $\alpha \in [0,1]$. En conseqüència escrivim $[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$.

Utilitzant el resultat anterior veem ara les dues formes més usuals de fer aritmètica amb nombres difusos:

(i) Emprant el *principi d'extensió*: siguen u i v dos nombres difusos.

- Per a la suma $p = u + v$, la funció de pertinença ve donada com:

$$p(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \mid x + y = z\}.$$

- Per a la resta $q = u - v$, la funció de pertinença es defineix com:

$$q(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \,|\, x - y = z\}.$$

- Per al producte $r = u \cdot v$, la funció de pertinença és:

$$r(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \,|\, x \cdot y = z\}.$$

- Finalment per a la divisió $s = u/v$, assumint que el zero no pertany a l'interval $[v]^0$ (o suport), tenim:

$$s(z) = \sup\{\min(u(x), v(y)) \,|\, x/y = z\}.$$

Cal tindre en compte que a les definicions anteriors hem utilitzat com t-norma $T = T_m = min$. Altres t-normes poden ser utilitzades. Si denotem per $\star$ qualsevol de les quatre operacions (+, −, ·, /), aleshores $p = u \star v$ es pot definir com:

$$p(z) = \sup\{T(u(x), v(y)) \,|\, x \star y = z\},$$

per a una t-norma T.

(ii) Una altra forma de fer aritmètica difusa és utilitzant la aritmètica d'intervals.
Si tenim $I = [a, b]$ i $J = [c, d]$ dos intervals tancats i fitats de nombres reals, aleshores:

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- $[a, b] - [c, d] = [a - c, b - d]$
- $[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
- $[a, b]/[c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c]$

Si u i v són dos nombres difusos, per a $0 \leq \alpha \leq 1$, tenim que els α-talls són $[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ i $[v]^\alpha = [v^-(\alpha), v^+(\alpha)]$. Aleshores podem definir l'aritmètica dels nombres difusos en termes dels seus α-talls:

- Si $p = u + v$, aleshores $[p]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$, amb

$$[p]^\alpha = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)],$$

per a $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Si $q = u - v$, aleshores:

$$[q]^\alpha = [u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)],$$

per a $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Si $r = u \cdot v$, utilitzant l'aritmètica d'intervals, aleshores:

$$[r]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)] \cdot [v^-(\alpha), v^+(\alpha)],$$

per a $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Si $s = u/v$, utilitzant l'aritmètica d'intervals, aleshores:

$$[s]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)] \cdot [1/v^+(\alpha), 1/v^-(\alpha)],$$

per a $0 \leq \alpha \leq 1$, assumint que el zero no pertany a $[v]^0$.

Les propietats de l'aritmètica d'intervals ens permeten concloure els següents resultats.

Proposició 4.2.2. *Donats u, v i w nombres difusos, es complixen per a la suma les següents propietats :*

- Commutativa*: $u + v = v + u$.*
- Associativa*: $u + (v + w) = (u + v) + w$*
- Element neutre*: $u + \widetilde{0} = u$*

Per tant $(\mathbb{E}^1, +)$ *forma una estructura de monoide commutatiu.*

Proposició 4.2.3. *Donats u, v i w nombres difusos, es complixen per al producte les següents propietats :*

- Commutativa*: $u \cdot v = v \cdot u$.*
- Associativa*: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$*
- Element neutre*: $u \cdot \widetilde{1} = u$*

Per tant $(\mathbb{E}^1, \cdot)$ *forma una estructura de monoide commutatiu.*

4.3 Teorema de representació de Goetschel i Voxman

A continuació donem el teorema de representació de Goetschel i Voxman, una eina molt important dins de la teoria de nombres difusos, doncs permet fer demostracions en aquest camp utilitzant només propietats intrínseques, sense necessitat d'emprar estructures externes com, per exemple, espais de Banach, hiperespais, etc.

Teorema 4.3.1. ***(Teorema de representació)***. *(Goetschel i Voxman [19]). Si* $u \in \mathbb{E}^1$ *i* $[u]^\lambda := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$, *aleshores el parell de funcions* $u^-(\lambda)$ *i* $u^+(\lambda)$ *tenen les següentes propietats:*

(1) $u^-(\lambda)$ *és una funció fitada, no decreixent i contínua per l'esquerra a l'interval* $]0,1]$*;*

(2) $u^+(\lambda)$ *és una funció fitada, no creixent i contínua per l'esquerra definida a l'interval* $]0,1]$*;*

(3) $u^-(\lambda)$ *i* $u^+(\lambda)$ *són funcions contínues per la dreta a* $\lambda = 0$*;*

(4) $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Reciprocament, si un parell de funcions $\alpha(\lambda)$ *i* $\beta(\lambda)$ *satisfàn les condicions anteriors* $(1)-(4)$, *aleshores existeix un únic* $u \in \mathbb{E}^1$ *tal què* $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ *per a cada* $\lambda \in [0,1]$.

Demostració. En primer lloc recordar que a la Proposició 4.2.1 ja hem demostrat que cada λ-tall és un interval fitat i tancat i, per tant, podem ficar-lo com un interval de $\mathbb{R}$, $[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$.
Podem definir per qualsevol $\lambda \in [0,1]$,

$$u^-(\lambda) := \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\},\ u^+(\lambda) := \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}.$$

Així que $u^-(\lambda)$ és una funció fitada per què $u^-(\lambda) \in [u]^0$, que és un conjunt compacte.
Igualment $u^+(\lambda)$ és una funció fitada per què $u^+(\lambda) \in [u]^0$, que és un conjunt compacte.

Per veure que és no decreixent, considerem els següents casos:

- Si $\lambda_1 > \lambda_2$, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_2\} \supseteq \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_1\}$, aleshores

$$\min\{x \in \mathbb{R}|u(x) \geq \lambda_2\} \leq \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_1\},$$
$$u^-(\lambda_2) \leq u^-(\lambda_1).$$

  Això vol dir que $u^-(\lambda)$ és no decreixent.

- Igualment, si $\lambda_1 > \lambda_2$,

$$\max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_2\} \geq \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_1\},$$
$$u^+(\lambda_2) \geq u^+(\lambda_1),$$

  que vol dir que $u^+(\lambda)$ és no creixent.

Vegem que $u^-(\lambda)$ és contínua per l'esquerra. Ho fem per reducció a l'absurd. Suposem que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0^-} u^-(\lambda) \neq u^-(\lambda_0),\ \lambda_0 \in]0,1].$$

Aleshores,

$$u^-(\lambda) = \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\} < \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_0\} = u^-(\lambda_0).$$

Això vol dir que hi ha un punt, x_1, tal que,

$$x_\lambda = u^-(\lambda) < x_1 < u^-(\lambda_0) = x_{\lambda_0}.$$

Com que $u(x)$ és convexa en el sentit difús

$$u(x_1) \geq \min\{u(x_\lambda), u(x_{\lambda_0})\} \geq \min\{\lambda, \lambda_0\}.$$

Si $u(x_1) \geq \lambda_0$, aleshores $x_1 \geq x_{\lambda_0}$ per ser aquest últim el mínim del conjunt $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_0\}$, que és contradictori amb $x_1 < x_{\lambda_0}$.
Per altra banda, $u(x_1) \geq \lambda$, per a tot $\lambda \in [0, \lambda_0[$, d'on $u(x_1) \geq \lambda_0$ que és una contradicció. Conseqüentment $u^-(\lambda)$ és continua per l'esquerra.

Vegem que $u^+(\lambda)$ és contínua per l'esquerra. Igual que abans, ho fem per reducció a l'absurd. Suposem que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0^-} u^+(\lambda) \neq u^+(\lambda_0),\ \lambda_0 \in]0,1].$$

Aleshores,

$$u^+(\lambda) = \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\} > \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_0\} = u^+(\lambda_0).$$

Això vol dir que hi ha un punt, x_1, tal que,

$$x_\lambda = u^+(\lambda) > x_1 > u^+(\lambda_0) = x_{\lambda_0}.$$

Com que $u(x)$ és convexa en el sentit difús

$$u(x_1) \geq \min\{u(x_\lambda), u(x_{\lambda_0})\} = \min\{\lambda, \lambda_0\}.$$

Si $u(x_1) \geq \lambda_0$, aleshores $x_1 \leq x_{\lambda_0}$ per ser aquest últim el màxim del conjunt $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda_0\}$. Contradictori amb $x_1 > x_{\lambda_0}$.
Per altra banda $u(x_1) \geq \lambda$, per a tot $\lambda \in [0, \lambda_0[$, d'on $u(x_1) \geq \lambda_0$ que és com abans una contradicció. Conseqüentment $u^+(\lambda)$ és continua per l'esquerra.

Per veure que $u^-(\lambda)$ és contínua per la dreta a $\lambda = 0$, ho fem per reducció a l'absurd, i suposem que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} u^-(\lambda) \neq u^-(0),$$

és a dir,

$$x_0 = u^-(0) = \min \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}} < \inf_{\lambda \in]0,1]} \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}.$$

Per tant, per a tot $\lambda \in (0, 1]$, hi ha un punt, diem x_1, entre x_0 i $x_\lambda = \min\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}$,

$$x_0 < x_1 < x_\lambda.$$

Si és així, anem a demostrar que $x_0 \notin \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}}$.
Agafem la bola centrada en x_0 i radi $r = \frac{x_1 - x_0}{2}$. Aleshores

$$B(x_0, r) \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\} = \emptyset,$$

perquè si hi haguera un x_2 en aquesta intersecció, tindriem que $u(x_2) > 0$. Conseqüentment hi ha $\lambda > 0$, tal que $u(x_2) \geq \lambda > 0$; per tant $x_2 \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}$. Aleshores $x_2 \geq x_\lambda > x_1$, el que és una contradicció. Concloem que $u^-(\lambda)$ és continua per la dreta a $\lambda = 0$.

Per veure que $u^+(\lambda)$ és contínua per la dreta a $\lambda = 0$, igual que abans ho fem per reducció a l'absurd, i suposem que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} u^+(\lambda) \neq u^+(0).$$

És a dir,

$$x_0 = u^+(0) = \max \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}} > \sup_{\lambda \in]0,1]} \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}.$$

Per tant, per a tot $\lambda \in (0,1]$, hi ha un punt, diem x_1, entre x_0 i $x_\lambda = \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}$,

$$x_0 > x_1 > x_\lambda.$$

Si és així, anem a demostrar que $x_0 \notin \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}}$.
Agafem la bola centrada en x_0 i radi $r = \frac{x_0 - x_1}{2}$. Aleshores

$$B(x_0, r) \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\} = \emptyset$$

perquè si hi haguera un x_2 en aquesta intersecció, tindriem que $u(x_2) > 0$. Conseqüentment hi ha $\lambda > 0$ tal que $u(x_2) \geq \lambda > 0$; per tant $x_2 \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geq \lambda\}$. Aleshores $x_2 \leq x_\lambda < x_1$, el que és una contradicció. Concloem que $u^+(\lambda)$ és contínua per la dreta a $\lambda = 0$.

Per finalitzar la primera part de la demostració del teorema cal que comprovem que $u^-(1) \leq u^+(1)$, però açò és cert per definició de u^- i u^+.

Per demostrar el recíproc, definim

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [\alpha(0), \beta(0)], \\ \sup\{\lambda \in [0,1] : x \in [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]\} & \text{si } x \in [\alpha(0), \beta(0)]. \end{cases}$$

De la definició de $u(x)$ tenim que $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$.

En primer lloc provem que és normal, és a dir, hi ha $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x_0) = 1$.

Com que, $\alpha(1) \leq \beta(1)$, el conjunt $[\alpha(1), \beta(1)]$ és no buit. Hi ha pert tant un punt $x_0 \in [\alpha(1), \beta(1)]$. Tenim que $u(x_0) = 1$ per la definició de $u(x)$.

En segon lloc anem a veure que u és convexa en el sentit difús.

Si suposem que hi ha un x_2 de forma que $x_1 < x_2 < x_3$ però $u(x_2) < \min\{u(x_1), u(x_3)\}$, aleshores existeix λ tal que $x_1, x_3 \in [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ però $x_2 \notin [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$, el que és una contradicció, doncs u és convexa en el sentit difús.

Anem a demostrar ara que $[u]^0$ és compacte. Definim

$$A := [\lim_{\lambda \to 0^+} \alpha(\lambda), \lim_{\lambda \to 0^+} \beta(\lambda)] = [\alpha(0), \beta(0)].$$

Sabem que aquest interval existeix i és compacte per ser tancat i fitat a $\mathbb{R}$. Cal que comprovem que $A = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$.

Com $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\} = \{x \in [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)] : \text{per algun } \lambda \in (0,1]\} \subseteq [\lim_{\lambda \to 0^+} \alpha(\lambda), \lim_{\lambda \to 0^+} \beta(\lambda)]$, podem dir que $\overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}} \subseteq [\alpha(0), \beta(0)]$.

D'altra banda $[\alpha(0), \beta(0)] \cap \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\} \neq \emptyset$, per a tot $\lambda \in (0,1]$ per la definició de $u(x)$, així que $[\alpha(0), \beta(0)] \subseteq \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$. Podem concloure que $A = [u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$.

Anem a veure ara que u és semicontínua superiorment.

La funció $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ és semicontínua superiorment si, i només si, $[u]^\lambda$ és tancat, per a tot $\lambda \in [0,1]$. Però per definició de $u(x)$, $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ per a tot $\lambda \in [0,1]$, d'on el resultat.

Finalment anem a veure que u és l'únic nombre difús que verifica que els seus λ-talls són $[\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$, per a tot $\lambda \in [0,1]$.

Si $v \in \mathbb{E}^1$ i $u \not\equiv v$, aleshores existeix $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x_0) \neq v(x_0)$. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $u(x_0) > v(x_0)$. Agafem ara λ_0 tal que $u(x_0) > \lambda_0 > v(x_0)$. Aleshores $[u]^{\lambda_0} \neq [v]^{\lambda_0}$ perquè $x_0 \in [u]^{\lambda_0}$ però $x_0 \notin [v]^{\lambda_0}$, és a dir, $[v]^\lambda \neq [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$. Açò completa la prova.

$\blacksquare$

4.4 Mètriques a $\mathbb{E}^1$

Els nombres difusos són els conjunts difusos més emprats en les aplicacions. A partir d'ara necessitarem calcular la distància entre dos elements u i $v \in \mathbb{E}^1$.

Sabem com calcular la distància entre dos nombres reals x, y. La distància és $d(x,y) = |x - y|$, on, com és usual, $|z|$ denota el valor absolut de $z \in \mathbb{R}$.

Definició 4.4.1. Un **espai mètric** és una parella (X, d) on X és un conjunt no buit i d una funció de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ (a la que anomenarem mètrica de l'espai) que satisfà les quatre propietats següents:

(1) $d(x, y) \geq 0$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) = 0$ si, i només si, $x = y$;

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Les tres primeres propietats d'una mètrica les podem explicar com: (1) la distància és no negativa; (2) la distància és simètrica; i (3) la distància és zero només quan $x = y$. La quarta propietat, anomenada *desigualtat triangular*, diu que és més *curt* anar directament a un punt y des d'un altre x, en lloc de anar primer a un punt intermedi z.

Recordem que, donat una espai mètric (X, d), si A, B són dos subconjunts de X no buits, tancats i fitats, definim $h(A, B) := \sup\{d(x, B) \mid x \in A\}$, on $d(x, B) := \min\{d(x, y) \mid x \in B\}$. La funció

$$d_H(A, B) = \max[h(A, B), h(B, A)]$$

s'anomena **distància o mètrica de Hausdorff**. En el cas particular que els subconjunts siguen dos λ-talls, $A = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ i $B = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$, la distància de Hausdorff equival a:

$$d_H(A, B) := \max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}, \tag{4.4.1}$$

La mètrica de Hausdorff s'utilitza per a definir la següent distància en $\mathbb{E}^1$.

Definició 4.4.2. Donats $u, v \in \mathbb{E}^1$, definim la **mètrica suprem** com:

$$d_\infty(u, v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}, \tag{4.4.2}$$

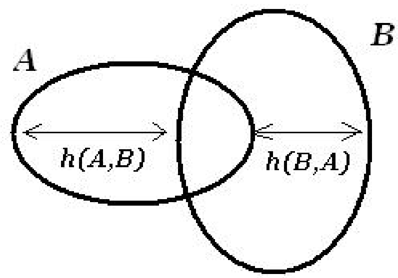

Figura 4.4.1: Mètrica de Hausdorff

Cal tindre en compte que $\max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}$ és la distància de Hausdorff entre els λ-nivells $[u]^\lambda$ i $[v]^\lambda$ en l'hiperespai de tots els subconjunts compactes no buits dels reals.

A continuació presentem un exemple de com calcular la distància d_∞ entre dos nombres difusos u i v amb funció de pertinença contínua.

Donats $u, v \in \mathbb{E}^1$, amb funció de pertinença contínua, considerem els conjunts $[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$, $[v]^\alpha = [v^-(\alpha), v^+(\alpha)]$, quan $0 \leq \alpha \leq 1$. Si definim $L(\alpha) = |u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|$ i $R(\alpha) = |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|$, com que $L(\alpha)$ i $R(\alpha)$ són contínues podem emprar max en lloc de sup. Aleshores d_∞ pot expressar-se com

$$d_\infty(u, v) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\max\{L(\alpha), R(\alpha)\}\}. \tag{4.4.3}$$

Per exemple, si considerem els nombres difusos u i v represenats a la Figura 4.4.2, obtenim $u^-(\alpha) = 1 + \alpha$, $u^+(\alpha) = 4 - 2\alpha$, $v^-(\alpha) = 1 + 2\alpha$, $v^+(\alpha) = 4 - \alpha$. Aleshores $L(\alpha) = \alpha$, $R(\alpha) = \alpha$ i $\max\{L(\alpha), R(\alpha)\} = \alpha$, d'on

$$d_\infty(u, v) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha\} = 1.$$

Encara que no seran tractats en aquest treball, és interessant resaltar que podem considerar en $\mathbb{E}^1$ altres tipus de mètriques. Com un exemple considerem, donats u, v de $\mathbb{E}^1$, amb funció de pertinença contínua, la mètrica d definida mitjançant la funció

$$d(u,v) = \int_a^b |u(x) - v(x)| dx, \qquad (4.4.4)$$

on $[a, b]$ és un interval que conté el suport de u i v.

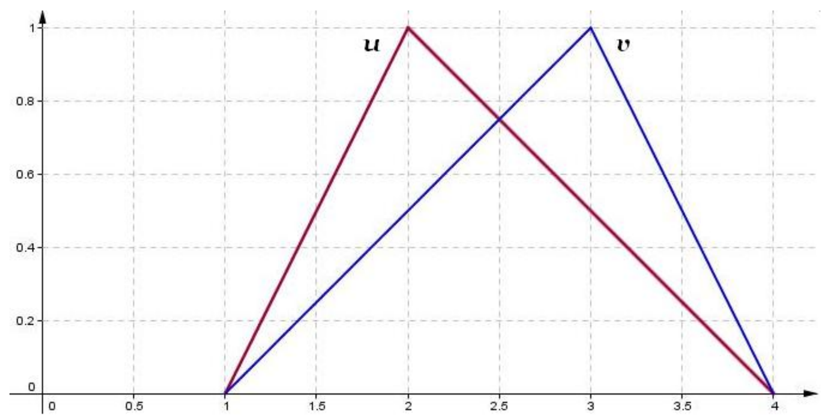

Figura 4.4.2: Dos nombres difusos amb funció de pertinença contínua

Apliquem ara la mètrica definida a (4.4.4) als nombres u i v anteriors. Per a calcular la distància, en primer lloc determinem que

$$|u(x) - v(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ -x + \frac{5}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ x - \frac{5}{2} & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \leq 3, \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Aleshores, quan integrem, obtenim

$$d(u,v) = \int_1^4 |u(x) - v(x)| dx = \frac{3}{4}.$$

Definició 4.4.3. Siga (X, d) un espai mètric. Una successió $\{x_n\}$ es diu **successió de Cauchy** si per a tot $\epsilon > 0$, existeix un $N(\epsilon)$ tal que, si $n, m \geq N(\varepsilon)$, aleshores $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Cal tindre en compte que la noció de successió de Cauchy depèn de la mètrica utilitzada. Recordem que un espai mètric (X, d) s'anomena complet si tota successió de Cauchy convergeix, es a dir, existeix un element de l'espai que és el límit de la succesió.

La importància dels espais complets radica en què, a ells, és molt més fàcil demostrar que una succesió té límit: només cal demostrar que la succesió és de Cauchy.

Per provar el teorema de completitud (Teorema 4.4.10), cal que recordem la definició i dos teoremes de convergència uniforme.

Definició 4.4.4. Siga X un espai topològic i $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions reals definides en X. Direm que la successió $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **convergeix uniformement** en X a la funció real f si, i només si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ aleshores $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per a cada $x \in X$. Escriurem açò en símbols com $f = \lim f_n$ o bé $f_n \to f$.

La convergència uniforme és interessant perquè la funció límit conserva propietats importants que satisfan les funcions de la successió, com ara la continuïtat. També és important resaltar que, amb la mètrica d_∞, $u_n \to u$ és equivalent a que $u_n^- \to u^-$ i $u_n^+ \to u^+$ uniformement.

Teorema 4.4.5. *Siga $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions reals definides a l'espai topològic X. Existeix una funció real f tal que $f_n \to f$ uniformement en X si, i només si, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy.*

Demostració. Suposem que $f_n \to f$ uniformement en X. Aleshores, donat $\varepsilon > 0$, podem trobar un N tal que $n > N$ i $m > N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ i $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ per a tot $x \in X$. Per tant, $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ per qualsevol $x \in X$.

Recíprocament, suposem que es satisfà la condició de Cauchy. Aleshores, per a cada $x \in X$, la successió $\{f_n(x)\}$ és convergent perquè $\mathbb{R}$ amb la topologia induïda per la mètrica usual és complet. Definim $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in X$, límit que existeix per ser $\mathbb{R}$ complet. Tenim que provar que $f_n \to f$ uniformement en X. Donat $\varepsilon > 0$, podem triar N tal que $n > N$ implica $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/2$ per a cada $k = 1, 2, ...$ i per a cada $x \in X$. Aleshores, $\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Així, si $n > N$, tenim que

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per a cada $x \in X$. Això prova que $f_n \to f$ uniformement en X. ■

Teorema 4.4.6. *Si una successió* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funcions reals contínues per l'esquerra, definides a l'espai topològic* $]0,1]$, *convergeix uniformement a una funció real,* f, *aleshores la funció límit,* f, *també és contínua per l'esquerra en* $]0,1]$.

Demostració. Cal que provem que per qualsevol $x_0 \in]0,1]$ i qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que $|f(x_0) - f(x')| < \varepsilon$ per qualsevol $x' \in]x_0 - \delta, x_0]$. Per la hipótesi de convergència uniforme, agafem un k tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ per a cada } x \in]0,1] \text{ i } n \geq k.$$

Com que f_k és contínua per l'esquerra, existeix un $\delta > 0$ tal que $x' \in]x_0 - \delta, x_0]$ implica

$$|f_k(x') - f_k(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Anem a veure que aquest interval satisfà la condició buscada. Si agafem $x' \in]x_0 - \delta, x_0]$ tenim

$$|f(x_0) - f(x')| \leq |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x')| + |f_k(x') - f(x')| < \\ \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

■

Emprant un argument similar podem demostrar el teorema següent:

Teorema 4.4.7. *Si una successió* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funcions reals contínues per la dreta, definides a l'espai topològic* $[0,1[$, *convergeix uniformement a una funció real,* f, *aleshores la funció límit,* f, *també és contínua per la dreta en* $[0,1[$.

Unint els dos teoremes anteriors podem concloure:

Corol·lari 4.4.8. *Si una successió* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funcions reals contínues definides a l'espai topològic* $[0,1]$, *convergeix uniformement a una funció real,* f, *aleshores la funció límit,* f, *també és contínua en* $[0,1]$.

Proposició 4.4.9. *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una successió de funcions reals fitades (no necessàriament contínues) sobre* $[a,b]$ *que convergeix uniformement a* f *sobre* $[a,b]$, *aleshores* f *és fitada sobre* $[a,b]$.

Demostració. Com que $f_n(x) \to f(x)$ convergeix uniformement sobre $[a, b]$, donat $\varepsilon > 0$, existeix un N tal que $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n_0 > N$.
A més, com les funcions f_n estan fitades, $|f_{n_0}(x)| \leq M_0$ si $x \in [a, b]$.
Aplicant la desigualtat triangular, $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < \varepsilon + M_0$ si $x \in [a, b]$. Podem concloure que $f(x)$ és fitada sobre $[a, b]$. ■

Teorema 4.4.10. *(Goetschel i Voxman [19], Diamond i Kloeden [6]). L'espai mètric ($\mathbb{E}^1$, d_∞) és un espai mètric complet.*

Demostració. Siga $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in \mathbb{E}^1$, una successió de Cauchy, és a dir, donat $\varepsilon > 0$, existeix n_0 tal que si $n, m \geq n_0$, aleshores

$$d_\infty(u_n, u_m) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|u_n^-(\lambda) - u_m^-(\lambda)|, |u_n^+(\lambda) - u_m^+(\lambda)|\} < \varepsilon.$$

Com donat un $\varepsilon > 0$, la afirmació val per qualsevol λ, les funcions $\{u_n^-(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{u_n^+(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ són de Cauchy per a tot λ, i com $\mathbb{R}$ és complet, convergeixen uniformement.

Siguen $u^-(\lambda)$ i $u^+(\lambda)$, respectivament, els límits uniformes de les successions anteriors. Cal provar ara que les funcions $u^-(\lambda)$ i $u^+(\lambda)$ defineixen un nombre difús, és a dir, compleixen les quatre propietats del teorema de representació de Goetschel i Voxman.

Com que $u_n^+ \to u^+$ i $u_n^- \to u^-$ convergeixen uniformement sobre $[0, 1]$, aplicant els resultats anteriors, u^+ i u^- conserven la continuïtat (per l'esquerra i per la dreta) i la fitació.

Falta demostrar que la convergència uniforme conserva el no decreixement. Ho fem demostrant un resultat més general que ens diu que la convergència puntual ho conserva, és a dir, si $x > y$, com que $u_n^-(x) \geq u_n^-(y)$ on $x, y \in [0, 1]$, hem de provar que $u^-(x) \geq u^-(y)$. Suposem que no és així, és a dir, existeixen $x > y$ tal que $u^-(x) < u^-(y)$. Aleshores siga $\varepsilon := u^-(y) - u^-(x)$. Donat aquest $\varepsilon > 0$, existeix N tal que si $n > N$, per tant

$$|u_n^-(x) - u^-(x)| < \varepsilon/3,$$
$$|u_n^-(y) - u^-(y)| < \varepsilon/3,$$
$$u_n^-(x) - u_n^-(y) \geq 0, \text{ per ser no decreixent.}$$

Per tant, com $u_n^-(x)-u_n^-(y) = u_n^-(x)-u_n^-(y)+u^-(y)-u^-(y)+u^-(x)-u^-(x) = (u_n^-(x) - u^-(x)) + (-u_n^-(y) + u^-(y)) + (-u^-(y) + u^-(x)) < \frac{\pm\varepsilon}{3} + \frac{\pm\varepsilon}{3} - \epsilon < -\varepsilon/3 < 0$, obtenim una contradicció. Concloem que el límit puntual, i per tant l'uniforme, conserva el no decreixement.

De forma anàloga podem concloure que la continuïtat uniforme conserva el no creixement.

Finalment veem que com $u_n^-(1) \leq u_n^+(1)$, aleshores $u^-(1) \leq u^+(1)$. Aquesta afirmació s'obté de forma directa al tindre per hipòtesi que $u_n^-(1) \leq u_n^+(1)$, i els límits mantenen la desigualtat.

Amb totes aquestes comprovacions, hem demostrat que les funcions u^-, u^+ defineixen un nombre difús i concloem que $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ és un espai mètric complet. ■

Capítol 5

Subconjunts compactes de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$

En el marc d'una teoria topològica, un coneixement apropiat i una caracterització útil dels conjunts compactes és necessària, no només per desenvolupar la teoria, sinó també des del punt de vista de les aplicacions. *Compacte* és equivalent en qualsevol espai mètric a *compacte per successions*, és a dir, en el nostre cas, $M \subset (\mathbb{E}^1, d_\infty)$ és compacte si qualsevol successió $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en M té una subsuccessió convergent a un punt de M amb la mètrica d_∞. En el cas de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$, aquest problema ha estat estudiat per diversos autors i mitjançant diverses tècniques, Diamond i Kloeden ([5]) han obtés una caracterització emprant els espais de Banach i la noció de *equicontinuïtat per l'esquerra* (encara que aquest resultat de Diamond-Kloeden no és correcte). Després, Fang i Xue varen presentar a [14] una nova caracterització dels subconjunts compactes de l'espai $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. Desafortunadament, la caracterització de Fang-Xue tampoc és correcta com comentarem més endavant.

5.1 Primers resultats sobre compacitat

Fang i Xue ([14]) presenten una versió més dèbil del teorema de Diamond-Kloeden ([6, Proposició 8.2.1]) caracteritzant els subconjunts compactes de l'espai $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ com veem a continuació:

Teorema 5.1.1. *Un subconjunt M de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ és compacte si, i només si, es satisfan les tres condicions següents:*

(i) El suport de M és uniformement fitat, és a dir, hi ha una constant $L > 0$ tal que $|u^+(0)| \leq L$ and $|u^-(0)| \leq L$ per a tot $u \in M$;

(ii) M és un subconjunt tancat de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$;

(iii) $\{u^+ : u \in M\}$ i $\{u^- : u \in M\}$ són equicontínues per l'esquerra, és a dir, per a cada $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|u^+(\lambda') - u^+(\lambda)| < \epsilon$ (respectivament $|u^-(\lambda') - u^-(\lambda)| < \epsilon$) per a qualsevol $u \in M$ quan λ, $\lambda' \in]0, 1]$ amb $\lambda' \in]\lambda - \delta, \lambda]$.

Una lectura amb cura de la noció de equicontinuïtat per l'esquerra utilitzada per Fang i Xue ens mostra que les funcions $\{u^+ : u \in M\}$ i $\{u^- : u \in M\}$ cal que siguen contínues. Així, si triem un nombre difús (u^+, u^-) on, per exemple, la funció u^+ és no contínua, aleshores el conjunt format per un únic element, $\{(u^+, u^-)\}$, és un conjunt compacte que no satisfà el Teorema 5.1.1 (iii) (utilitzant la definició de *equicontinuïtat per l'esquerra* donada a [5, p.72], el mateix argument bàsic val pel teorema de Diamond-Kloeden).
Tal com mostra el següent exemple, cal notar que no és suficient considerar la equicontinuïtat per l'esquerra en el sentit clàssic per a obtindre una versió correcta del teorema de Fang-Xue. Recordem que una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funcions reals definides en $]0, 1]$ s'anomena *equicontínua per la esquerra* en el punt $\lambda_0 \in]0, 1]$ si, per a tot $\epsilon > 0$ i per a tot $i \in I$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_0)| < \epsilon$ quan $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$. La familia $\{f_i\}_{i\in I}$ s'anomena *equicontínua per l'esquerra* quan és equicontínua per l'esquerra en cada punt de $]0, 1]$.

Exemple 5.1.2. Considerem la successió de nombres difusos $M = \{(u_n^+, u_n^-)\}$ on

$$u_n^+(\lambda)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } \lambda \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } \lambda \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

i $u_n^-(\lambda) \equiv 0$ per a tots els $n > 0$. Es fàcil veure que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ és equicontínua per l'esquerra. A més, cada subsuccesió de $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix puntualment a la funció $u(\lambda) = 1$ si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ i $u(\lambda) = 0$ si $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$. Com aquesta convergència no és uniforme, perquè la funció límit no és contínua, la successió M és un subconjunt tancat no compacte de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$.

5.2 Caracterització de subconjunts compactes

L'exemple previ ens mostra que és necessari considerar una condició addicional si volem obtindre una versió correcta del Teorema 5.1.1. Cal notar que les funcions u^+ i u^- poden no ser contínues per la dreta, i, per tant, no podem considerar la equicontinuïtat per la dreta com la propietat desitjada. Aquesta és la raó per introduir el següent concepte.

Donada una funció $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, denotem per $f(\lambda_0+)$ el límit de f quan λ s'apropa a λ_0 per la dreta (límit lateral per la dreta).

Definició 5.2.1. Siga $\{f_i\}_{i\in I}$ una família de funcions reals definides a l'interval $[0,1]$. Donat $\lambda_0 \in [0,1[$ tal que $f_i(\lambda_0+)$ existeix per a tot $i \in I$, la família $\{f_i\}_{i\in I}$ s'anomena *quasi-equicontínua per la dreta* a λ_0 si, per cada $\varepsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ tal que $|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_0+)| < \varepsilon$ per tot $i \in I$ quan $\lambda \in]\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.

Cal notar que, quan treballem amb funcions contínues per la dreta, les nocions de quasi-equicontínua per la dreta i equicontínua per la dreta coincideixen. Si la família $\{f_i\}_{i\in I}$ és quasi-equicontínua per la dreta a λ per a tot $\lambda \in [0,1)$, aleshores diem que $\{f_i\}_{i\in I}$ és *quasi-equicontínua per la dreta* a $[0,1)$.

Proposició 5.2.2. *Siga $\lambda_0 \in [0,1[$ i siga $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions reals definides en $[0,1]$ que són quasi-equicontínues per la dreta a λ_0. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixen puntualment a la funció f i $f(\lambda_0+)$ existeix, aleshores $\{f_n(\lambda_0+)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix a $f(\lambda_0+)$.*

Demostració. Siga $\varepsilon > 0$. Per hipótesi, $f(\lambda_0+)$ existeix i com $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és quasi-equicontínua per la dreta a λ_0, sabem que $f_n(\lambda_0+)$ també existeix. Podem doncs triar $\lambda \in [0,1[$ tal que

$$|f_n(\lambda) - f_n(\lambda_0+)| < \varepsilon \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}$$

i

$$|f(\lambda) - f(\lambda_0+)| < \varepsilon.$$

A més, com que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix puntualment a f en $[0,1[$, hi ha un $n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_0(\lambda)$, tenim

$$|f_n(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon.$$

Aleshores, si $n \geq n_0(\lambda)$, obtenim

$$|f_n(\lambda_0+) - f(\lambda_0+)| \leq |f_n(\lambda_0+) - f_n(\lambda)| + |f_n(\lambda) - f(\lambda)| + |f(\lambda) - f(\lambda_0+)| < 3\varepsilon$$

que completa la prova. ■

Nota 5.2.3. La noció de quasi-equicontínuïtat per la dreta (i els resultats previs) tenen la seua contrapartida per *l'esquerra*. No anem a insistir en aquest punt perquè les nostres funcions u^+ i u^- són sempre contínues per l'esquerra sobre $]0,1]$ (veure Teorema 4.3.1).

El següent resultat ens serà útil per provar una caracterització dels subconjunts compactes de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$.

Teorema 5.2.4. *([18]) Qualsevol successió fitada de funcions de variable real monótones en* $[0,1]$ *conté una subsuccessió puntualment convergent.*

Cal notar que la condició (i) del següent teorema, Teorema 5.2.5, és equivalent a ser fitat en l'espai mètric $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$, és a dir, és equivalent al fet que hi ha una $L > 0$ tal que $d_\infty(0, u) \leq L$ per a tot $u \in M$. Amb aquesta precisió i el resultat del teorema anterior ja podem provar el següent resultat:

Teorema 5.2.5. *([16, Teorema 3.3]) Un subconjunt tancat M de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ és compacte si, i només si, satisfà les següents propietats:*

(i) El suport de M és uniformement fitat, és a dir, hi ha una constant $L > 0$ tal que $|u^+(0)| \leq L$ i $|u^-(0)| \leq L$ per a tot els $u \in M$.

(ii) $\{u^+ : u \in M\}$ i $\{u^- : u \in M\}$ són equicontínues per l'esquerra en $]0,1]$ *i quasi-equicontínues per la dreta en* $[0,1[$.

Demostració. Suficiència. Assumim que M satisfà les condicions (i)-(ii). Com que compacitat i compacitat per successions són equivalents en un espai mètric, només cal que provem que qualsevol successió en M té un subsuccessió convergent.

Per fer-ho, donada una successió $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, cal veure que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenen una subsuccessió que convergeix uniformement a u^+ i u^-, i que u^+ i u^- defineixen un nombre difús. Primer treballem amb $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$. En aquest cas, la condició (i) implica que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ està fitada. Per tant, pel Teorema 5.2.4, podem assumir que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix a una funció real, diguem u^+, sobre $[0,1]$. Per la Proposició 4.4.9 u^+ és fitada.

Anem ara a comprovar que u^+ és contínua per l'esquerra sobre $]0,1]$. Com que M és equicontinu per l'esquerra, donat $\varepsilon > 0$ i $\lambda' \in]0,1]$, hi ha $\delta > 0$ tal que $|u_n^+(\lambda) - u_n^+(\lambda'-)| < \varepsilon$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i per a tot $\lambda \in]\lambda' - \delta, \lambda']$. La equicontinuïtat per l'esquerra de u^+ es segueix del fet que les funcions $u_n^+, n \in \mathbb{N}$, són contínues per l'esquerra a λ' i per això $u_n^+(\lambda) \to u^+(\lambda)$ per a tot $\lambda \in]0,1]$.
Seguidament anem a provar que $u_n^+ \to u^+$ uniformement en $[0,1]$. Si assumim, contràriament al que volem provar, que la convergència és no uniforme, aleshores podem triar un $\varepsilon > 0$, una successió infinita de nombres naturals $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ i una successió $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que

$$|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_{n_k})| \geq 3\varepsilon.$$

Anem a suposar, sense pèrdua de generalitat, que la successió $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix al nombre $\lambda_0 \in [0,1]$. Considerem dos casos.

<u>Cas 1.</u> Hi ha una subsuccessió de $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ els elements de la qual són menors que λ_0. Per simplificar-ho, continuem denotant aquesta subsuccessió per $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ara, com u^+ és contínua per l'esquerra a λ_0 i $\{u_{n_k}^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió equicontínua per l'esquerra a λ_0 que convergeix puntualment a u^+, podem triar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u_{n_k}^+(\lambda_0)| < \varepsilon,\ |u_{n_k}^+(\lambda_0) - u^+(\lambda_0)| < \varepsilon,\ |u^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_0)| < \varepsilon,$$

per a tot $k \geq k_0$. Així,

$$|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_{n_k})| < 3\varepsilon,$$

quan $k \geq k_0$, que contradiu la nostra assumpció.

<u>Cas 2.</u> Hi ha una subsuccessió de $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ els elements de la qual són majors que λ_0. Com abans, per simplificar la notació, denotem de nou aquesta subsuccessió per $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. En primer lloc notem que u^+ és no creixent; en efecte, és el límit puntual d'un subsuccessió de funcions no creixents (veure la prova del Teorema 4.4.10). Per tant, $u^+(\lambda+)$ existeix per a tot $\lambda \in [0,1]$.

Ara, la definició de $u^+(\lambda_0+)$ i el fet que λ_0 i $\{u_{n_k}^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió quasi-equicontínua per la dreta a λ_0 ens diu que podem triar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u_{n_k}^+(\lambda_0+)| < \varepsilon,\ |u^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_0+)| < \varepsilon,$$

per a tot $k \geq k_0$. Més encara, per la Proposició 5.2.2, podem triar k_0 satisfent la condició addicional

$$|u_{n_k}^+(\lambda_0) - u^+(\lambda_0)| < \varepsilon,$$

per a tot $k \geq k_0$. Per tant

$$|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_{n_k})| < 3\varepsilon$$

quan $k \geq k_0$, que és una contradicció.

Hem demostrat que $u_n^+ \to u^+$ uniformement en $[0,1]$ i, conseqüentment, podem dir que u^+ és contínua per la dreta a $\lambda = 0$ degut a que és el límit uniforme d'una successió de funcions que són contínues per la dreta a $\lambda = 0$.

De la mateixa manera, podem provar que la successió $\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una subsuccessió que convergeix uniformement en $[0,1]$ a una funció no decreixent, diguem u^-, que és fitada, contínua per la dreta a $\lambda = 0$ i contínua per l'esquerra sobre $]0,1]$. Cal notar que, per construcció, $u^-(1) \leq u^+(1)$ i, conseqüentment, la parella (u^-, u^+) defineix un nobre difús. Així, la successió $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una subsuccessió convergent, el que prova que M és compacte per successions.

<u>Necessitat</u>. Cada subconjunt compacte d'un espai mètric és fitat, per tant M verifica la condició (i).
Suposem ara que M no és quasi-equicontinu per la dreta al punt $\lambda_0 \in [0,1[$. Aleshores, podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que hi ha un $\varepsilon > 0$, una successió decreixent $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent per la dreta a λ_0 i una successió $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que

$$\left|u_n^+(\lambda_n) - u_n^+(\lambda_0+)\right| \geq 3\varepsilon \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}. \tag{5.2.1}$$

Com M és compacte, hi ha una subsuccessió $\{u_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ convergent uniformement a una funció u. Aleshores, tenint en compte la Proposició 5.2.2, existeix un $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $r \geq r_0$,

$$\begin{gathered} |u_{n_r}^+(\lambda_{n_r}) - u_{n_r}^+(\lambda_0+)| \leq \\ |u_{n_r}^+(\lambda_{n_r}) - u^+(\lambda_{n_r})| + |u^+(\lambda_{n_r}) - u^+(\lambda_0+)| + |u^+(\lambda_0+) - u_{n_r}^+(\lambda_0+)| \\ < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{gathered}$$

una contradicció amb 5.2.1. Així $\{u^+ : u \in M\}$ és quasi-equicontínua per la dreta. De forma similar podem provar que $\{u^- : u \in M\}$ és quasi-equicontínua per la dreta sobre $[0,1[$.

Per altra banda, com $\{u_n(\lambda+)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix a $u(\lambda+)$ quan $u_n \to u$ uniformement, un argument semblant a l'anterior ens mostra que $\{u^+ : u \in M\}$ i $\{u^- : u \in M\}$ són equicontínues per l'esquerra sobre $]0,1]$. Açò completa la prova.

$\blacksquare$

És interessant mencionar que ni la equicontinuïtat per l'esquerra ni la quasi-equicontinuïtat per la dreta són suficients per caracteritzar els subconjunts compactes de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. En efecte, és fàcil veure que l'Exemple 5.1.2 ens proporciona un conjunt tancat no compacte M amb $\{u^+ : u \in M\}$ equicontínua per l'esquerra però no quasi-equicontínua per la dreta. El següent exemple canvia els papers de *equicontinuïtat per l'esquerra* i *quasi-equicontinuïtat per la dreta.*

Exemple 5.2.6. Siga $M = \{(u_n^+, u_n^-)\}$ una successió de nombres difusos definits com

$$u_n^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } \lambda \in]\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

i $u_n^-(\lambda) \equiv 0$ per a tot $n \geq 3$.
Demostrem en primer lloc que $\{u_n^+\}$ és quasi-equicontínua per la dreta.
Considerem diverses posibilitats:

- Si $\lambda_0 \in [0, \frac{1}{6}[$, donat $\varepsilon > 0$, agafant $\delta = \frac{1/6-\lambda_0}{2}$, tenim que $|u_n^+(\lambda) - u_n^+(\lambda_0)| = 0 < \varepsilon$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.

- Si $\lambda_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, donat $\varepsilon > 0$, agafant $\delta = \frac{1-\lambda_0}{2}$, tenim que $|u_n^+(\lambda) - u_n^+(\lambda_0)| = 0 < \varepsilon$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.

- Si $\lambda_0 \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}[$ hi ha dues possibilitats:

  - Si hi ha un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_0 \in]\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}[$, donat $\varepsilon > 0$, agafant $\delta = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}) - \lambda_0}{2}$, tenim que $|u_n^+(\lambda) - u_n^+(\lambda_0)| = 0 < \varepsilon$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.
  - Si hi ha un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$, cal emprar la definició de $u_n^+(\lambda_0+)$ i, donat $\varepsilon > 0$, agafant $\delta = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}) - \lambda_0}{2}$, tenim que $|u_n^+(\lambda) - u_n^+(\lambda_0+)| = 0 < \varepsilon$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.

A més, cada subsuccessió $\{u_n^+\}$ convergeix puntualment a la funció $u(\lambda) = 1$ si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ i a $u(\lambda) = \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$. Com que aquesta convergència és no uniforme, perquè la funció límit no és contínua, la successió M és un conjunt tancat no compacte de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. Anem a veure que M no és equicontínua per l'esquerra. Considerem el punt $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ i agafem $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Donat $\delta > 0$, triem $n_0 \geq 3$ tal que $\left(\frac{1}{2} - \delta\right) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_0}\right)$. Aleshores, si $\lambda \in \left]\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} - \frac{1}{n_0}\right[$, tenim $\left|u_m^+(\lambda) - u_m^+(\frac{1}{2})\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon$ per a tot $m > n_0$. Així, M no és equicontínua per l'esquerra a $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

Com que l'operador clausura conserva la condició (ii) en el teorema anterior, tenim

Corol·lari 5.2.7. *Un subconjunt M de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ és relativament compacte si, i només si, satisfà les següents propietats:*

(i) El suport de M és uniformement fitat, és a dir, hi ha una constant $L > 0$ tal que $|u^+(0)| \leq L$ i $|u^-(0)| \leq L$ per a tot $u \in M$.

(ii) $\{u^+ : u \in M\}$ and $\{u^- : u \in M\}$ són equicontínues sobre $]0, 1]$ i quasi-equicontínues per la dreta sobre $[0, 1[$.

Com conclusió d'aquest capítol dir que una direcció important d'estudi dels nombres difusos és la de les seues propietats mètriques i topològiques. D'entre aquestes propietats, la compacitat és de les més importants. Hem utilitzat el teorema de representació de Goetschel-Voxman per donar una caracterització dels subconjunts compactes de l'espai de nombres difusos dotats de la mètrica suprem que corregeix la donada en [14]. En el context dels nombres difusos, aquest resultat donat a [16] forma part d'una direcció interesant de recerca en anàlisi difús degut a la indubtable importància del teorema de representació de Goetschel i Voxman.

Capítol 6

La topologia de la convergència de nivell a $\mathbb{E}^1$

A aquest capítol es fa un estudi d'algunes propietats induïdes per un tipus de convergència en l'espai del nombres difusos, l'anomenada convergència de nivell. Denotem per τ_ℓ la topologia associada a aquest tipus de convergència.

En la primera secció provem en primer lloc que el conjunt dels elements $u \in \mathbb{E}^1$ amb u^- i u^+ contínues és dens en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ i també estudiem els conjunts compactes de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. En la segona secció, donem una descripció de la compleció $(\widehat{\mathbb{E}^1}, \widehat{\mathcal{U}})$ de $\mathbb{E}^1$ amb la uniformitat puntual $\mathcal{U}$ i mostrem que la topologia subjacent és separable.

6.1 Definicions i primers resultats

Definició 6.1.1. Direm que una xarxa $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ *convergeix en nivell* a $u \in \mathbb{E}^1$ si $\lim_k d([u_k]^\lambda, [u]^\lambda) = 0$ per a cada $\lambda \in [0,1]$, on d és la mètrica de Hausdorff a l'hiperespai dels subconjunts compactes no buits dels reals.

Una conseqüència immediata de la definició és la següent caracterització de la convergència de nivell.

Proposició 6.1.2. *La xarxa $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ convergeix en nivell a $u \in \mathbb{E}^1$ si, i només si, $\lim_k u_k^+(\lambda) = u^+(\lambda)$ i $\lim_k u_k^-(\lambda) = u^-(\lambda)$ per tot $\lambda \in [0,1]$.*

Resaltar que la xarxa $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ d_∞-convergeix a $u \in \mathbb{E}^1$ si, i només si, $\{u_k^+\}_{k\in D}$ convergeix uniformement a u^+ i $\{u_k^-\}_{k\in D}$ convergeix uniformement a u^-. Així, la d_∞-convergència implica la τ_ℓ-convergència. La inversa no és certa (veure Exemple 6.1.3). En [13], Fang i Huang han descrit la topologia τ_ℓ associada amb la convergència de nivell en $\mathbb{E}^1$, demostrant que $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ és un espai topològic de Hausdorff primer numerable.

Exemple 6.1.3. Siga

$$u_n^-(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \frac{1}{2})^{1/n} & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

i $u_n^+(\lambda) = 1$ per a tot $\lambda \in [0,1]$;

$$u_0^-(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

i $u_0^+(\lambda) = 1$ per a tot $\lambda \in [0,1]$.

Es comprova fàcilment per a tot $n \in \mathbb{N}$ que $u_n^+(\lambda), u_n^-(\lambda)$ i $u_0^+(\lambda), u_0^-(\lambda)$ satisfan les condicions (1)-(4) del teorema de representació de Goetschel-Voxman; per tant existeixen nombres difusos $u_n \in \mathbb{E}^1$ i un nombre difús $u_0 \in \mathbb{E}^1$ tal que $[u_n]^\lambda = [u_n^-(\lambda), u_n^+(\lambda)]$ i $[u_0]^\lambda = [u_0^-(\lambda), u_0^+(\lambda)]$ per a tot $\lambda \in [0,1]$. És clar que $\{u_n^+(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{u_n^-(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixen a $u_0^+(\lambda)$ i $u_0^-(\lambda)$ respectivament, per qualsevol $\lambda \in [0,1]$ quan $n \to \infty$, és a dir, convergeixen per a la topologia τ_l. No obstant això,

$$d_\infty(u_n, u_0) = \sup_{\lambda \in]\frac{1}{2},1]}\{1 - (\lambda - \tfrac{1}{2})^{1/n}\} = 1$$

per a qualsevol nombre natural fixat n, la qual cosa implica que no hi ha convergència en la topologia induïda per la mètrica d_∞.

Mitjançant el teorema de representació de Goetschel-Voxman, podem considerar $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ com un subespai de l'espai producte $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ (que pot ser identificat amb $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{[0,1]}$ de forma canònica). De fet, la correspondència $u \in \mathbb{E}^1 \overset{i}{\hookrightarrow} (u^-, u^+)$ defineix un homeomorfisme de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ en un subespai de $(\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}, \tau_p)$, on τ_p denota la topologia puntual. Així, els conjunts oberts bàsics en τ_ℓ venen donats per

$$\begin{gathered} U(u, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon) := \\ \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1\leq i\leq n}\{|v^+(\lambda_i) - u^+(\lambda_i)|, |v^-(\lambda_i) - u^-(\lambda_i)|\} < \epsilon\}, \\ \text{per a } \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset [0,1],\ u \in \mathbb{E}^1 \text{ i } \epsilon > 0. \end{gathered}$$

Anem a descriure un subconjunt dens de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ que serà utilitzat posteriorment. Considerem el subconjunt $\mathbb{C}^1$ de $\mathbb{E}^1$ definit com

$$\mathbb{C}^1 := \{u \in \mathbb{E} \mid u^- \text{ i } u^+ \text{ són funcions contínues}\}.$$

Teorema 6.1.4. $\mathbb{C}^1$ *és dens en* $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$.

Demostració. Donat un conjunt obert bàsic $U(u, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon)$ en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ amb $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$, considerem $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^1$ on u_1 està definida com

$$u_1(\lambda) := \begin{cases} u^-(0) & \text{si } \lambda = 0, \\ u^-(\lambda_i) & \text{si } \lambda = \lambda_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \\ u^-(1) & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

i linealment entre els valors intermedis, i u_2 està definida com

$$u_2(\lambda) := \begin{cases} u^+(0) & \text{si } \lambda = 0, \\ u^+(\lambda_i) & \text{si } \lambda = \lambda_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \\ u^+(1) & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

i linealment entre els valors intermedis. De la definició de u_1 i u_2 es dedueix que $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^1$ i que $(u_1, u_2) \in U(u, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon)$. Així, $\mathbb{C}^1$ és dens en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. ■

Per [27, Teorema 6.1], sabem que la topologia de la convergència puntual i la topologia de convergència uniforme coincideixen al conjunt de totes les funcions contínues, monotones, defines sobre l'interval unitat. Tenint en compte aquest fet i les propietats (i) i (ii) del Teorema 4.3.1, és clar que $\tau_{d_\infty}|_{\mathbb{C}^1} = \tau_\ell|_{\mathbb{C}^1}$ on, tal com és usual, τ_{d_∞} és la topologia induïda per la mètrica d_∞.

Hi ha diverses caracteritzacions de subconjunts compactes d'un espai de funcions $\mathcal{F}$ depenent de la topologia que emprem. Per exemple, si tractem amb la topologia de la convergència uniforme, τ_u, en certs espais de funcions contínues, el Teorema de Ascoli-Arzela afirma que $K \subset (\mathcal{F}, \tau_u)$ és compacte si, i només si, K és fitat puntualment, tancat i equicontinu. Tractant amb la topologia de la convergència puntual, τ_p, en espais de funcions no necessàriament contínues, és conegut que $K \subset (\mathcal{F}, \tau_p)$ és compacte si, i només si, K és tancat i fitat puntualment. Per tant, està clar que els subconjunts tancats i puntualment fitats $A \subset \mathcal{F}$ satisfent $\tau_p = \tau_u$ són també equicontinus.

Recordem que diem que el suport de $A \subset \mathbb{E}^1$ és *uniformement fitat* si hi ha una constant $C > 0$ tal que $\max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\} \leq C$ per a tot $u \in A$.

Com és habitual en aquest context, diem que un subconjunt A de $\mathbb{E}^1$ és *puntualment tancat* si A és un subconjunt tancat de l'espai producte $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ (o equivalentment, de l'espai producte $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{[0,1]}$).

Teorema 6.1.5. *Un subconjunt K de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ és compacte si, i només si, K és puntualment tancat i el suport de K és uniformement fitat.*

Demostració. Suposem que K és un subconjunt compacte de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. Aleshores K és compacte en $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$, és a dir, K és puntualment tancat i puntualment fitat la qual cosa implica que K és puntualment tancat i el suport de K és uniformement fitat. De forma inversa, si $K \subset \mathbb{E}^1$ i el suport de K és uniformement fitat, K és puntualment fitat. Per tant, si K és també puntualment tancat, K és un subconjunt compacte de $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$. Com la compacitat és una propietat topològica absoluta, K és un subconjunt compacte de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. ■

Anem a considerar un exemple, degut a Kaleva i Seikkala [20], de successió de Cauchy per a la uniformitat de la convergència puntual que no convergeix en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$.

Exemple 6.1.6. Siga, per a $n = 1, 2, ...$

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ o } t > 2, \\ \sqrt[n]{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t & \text{si } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Aleshores $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{E}^1$ i $[u_n]^\lambda = [\lambda^n, 2 - \lambda]$. Com que

$$\lim_{m,n\to\infty} d([u_m]^\lambda, [u_n]^\lambda) = |\lambda^m - \lambda^n| = 0$$

per a qualsevol $\lambda \in [0,1]$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ és una successió de Cauchy en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. Però

$$\lim_{n\to\infty} u_n^-(\lambda) = u^-(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \lambda < 1, \\ 1 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^+(\lambda) = u^+(\lambda) = \begin{cases} 2-\lambda & \text{si } 0 \le \lambda < 1, \\ 1 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

u^- i u^+ no corresponen a un nombre difús perquè u^- no és contínua per l'esquerra a $\lambda = 1$.

Exemple 6.1.7. Hi ha exemples de subconjunts $\tau_\ell-$tancats i amb suport fitat uniformement de $\mathbb{E}^1$ que no són $\tau_\ell-$compactes. Considerem una successió de Cauchy amb suport uniformement fitat $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ que no convergeix (veure Exemple 6.1.6). Com $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ és primer numerable, $K = \{u_n\}_{n=1}^\infty$ és un conjunt uniformement fitat i τ_ℓ-tancat en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ però no és compacte.

Cal notar també que hi ha subconjunts compactes $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ que no ho són a $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$.

Exemple 6.1.8. Siga $\{(u_n^-, v_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successió en $\mathbb{E}^1$ definida com

$$u_n^-(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{per a } \lambda \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{per a } \lambda > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

i linealment entre els valors intermedis, i $u_n^+ \equiv 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Està clar que la successió $\{(u_n^-, v_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ_ℓ-convergeix a $(u^-, 0)$ amb $u^-(\lambda) = 1$ si $\lambda \le \frac{1}{2}$ i $u^-(\lambda) = \frac{1}{2}$ if $\lambda > \frac{1}{2}$. Aleshores $K = \{(u_n^-, v_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{(u^-, 0)\}$ és un subconjut compacte de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. Com que la convergència a u^- no és uniforme perquè la funció límit no és contínua, K no és d_∞ compacte.

6.2 Propietats topològiques i uniformes a $\mathbb{E}^1$

Recordem que un espai topològic és un espai separable si té un subconjunt dens numerable. Aquesta idea generalitza la relació que hi ha entre els nombres racionals, $\mathbb{Q}$, i els nombres reals, $\mathbb{R}$, on el conjunt dels racionals és dens en els reals i a més té un cardinal igual al dels nombres naturals.

Veem a continuació algunes propietats de $\mathbb{E}^1$ en aquest context.

Teorema 6.2.1. $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ *és separable.*

Demostració. Denotarem per CMI (respectivament, CMD) al conjunt de totes les funcions contínues monòtones, no decreixents (respectivament, el conjunt de totes les funcions contínues monòtones, no creixents) definides en $[0, 1]$. És conegut que l'espai $C([0, 1])$ de totes les funcions reals contínues sobre $[0,1]$ dotat amb la topologia de la convergència uniforme és separable pel clàssic teorema de Stone-Weierstrass. La separabilitat és una propietat hereditària en el espais mètrics, per tant els espais CMI i CMD equipats amb la τ_u-topologia són espais separables. Com la topologia de la convergència uniforme i la convergència puntual coincideixen sobre $CMI \times CMD$, l'espai producte $(CMI \times CMD, \tau_p)$ és un espai mètric separable i, conseqüentment, l'espai $\mathbb{C}^1$ és separable. El resultat es segueix ara del Teorema 6.1.4. ■

La correspondència $u \in \mathbb{E}^1 \xhookrightarrow{i} (u^-, u^+)$ és un isomorfisme uniforme quan considerem la estructura natural uniforme $\mathcal{U}$ sobre $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ i la estructura puntualment uniforme $\mathcal{V}$ sobre $(\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}, \tau_p)$ que té com a base els conjunts $U(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \varepsilon)$ $(n \geq 1, \varepsilon > 0)$ de la forma

$$\big\{((f,g),(h,t)) \in (\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}) \times (\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}) \,:\, |f(\lambda_i) - h(\lambda_i)| < \varepsilon,\\ |g(\lambda_i) - t(\lambda_i)| < \varepsilon,\, i = 1, 2, \dots, n\big\}$$

amb $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$, per a tot $n \geq 1$. A partir d'ara, lliurement identificarem, sense menció explícita, la uniformitat $\mathcal{U}$ amb la restricció de la uniformitat $\mathcal{V}$ a $i(\mathbb{E}^1)$. Ja hem vist a l'Exemple 6.1.6 que aquest espai uniforme, $(\mathbb{E}^1, \mathcal{U})$, no és complet.

El pròxim resultat presentat a ([17]), descriu la compleció $(\widehat{\mathbb{E}^1}, \widehat{\mathcal{U}})$ de $(\mathbb{E}^1, \mathcal{U})$. Notar que una conseqüència del teorema previ és el següent

Corol·lari 6.2.2. *L'espai topològic subjacent a* $(\widehat{\mathbb{E}^1}, \widehat{\mathcal{U}})$ *és separable.*

Teorema 6.2.3. *La compleció* $(\widehat{\mathbb{E}^1}, \widehat{\mathcal{U}})$ *de l'espai uniforme* $(\mathbb{E}^1, \mathcal{U})$ *és el subespai de* $(\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{V})$ *els elements del qual* (u, v) *verifiquen les següents propietats:*

(i) u *és una funció no creixent sobre* $[0,1]$.

(ii) v *és una funció no decreixent sobre* $[0,1]$.

(iii) $u(1) \leq v(1)$.

Demostració. L'espai uniforme $(\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{V})$ és un producte d'espais uniformes complets, i és, doncs, complet. Per tant $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}} \mathbb{E}^1$ és un espai uniforme complet contenint $\mathbb{E}^1$ com a subconjunt dens. Per [12, Teorema 8.3.12], podem identificar $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}} \mathbb{E}^1$ amb la compleció de $(\mathbb{E}^1, \mathcal{U})$.

Passem a la descripció de $\text{cl}_{\mathbb{R}^{[0,1]}\times\mathbb{R}^{[0,1]}}\mathbb{E}^1$. En primer lloc notar que si $(u,v)\in \text{cl}_{\mathbb{R}^{[0,1]}\times\mathbb{R}^{[0,1]}}\mathbb{E}^1$, aleshores u és no creixent i v és no decreixent ja que el límit puntual d'una xarxa de funcions no creixents (respectivament, no decreixents) és una funció no creixent (respectivament, no decreixent). Més encara, com que cada $(u^-,u^+)\in\mathbb{E}^1$ verifica $u^-(1)\leq u^+(1)$, la condició (iii) és una conseqüència de la definició de límit d'una xarxa. Així, cada element en $\text{cl}_{\mathbb{R}^{[0,1]}\times\mathbb{R}^{[0,1]}}\mathbb{E}^1$ verifica les condicions (i)–(iii). La implicació inversa es segueix emprant un argument similar a l'utilitzat en el Teorema 6.1.4. ■

Corol·lari 6.2.4. *La uniformitat induïda per la mètrica d_∞ i la uniformitat $\mathcal{U}$ induixen la mateixa topologia sobre el conjunt $\mathbb{C}^1$, però la primera uniformitat és més fina que la segona.*

Tal com hem vist adés, la topologia τ_{d_∞} induïda per la mètrica d_∞ i la topologia de nivell τ_ℓ coincideixen en $\mathbb{C}^1$. La qüestió de caracteritzar els subconjunts de $\mathbb{E}^1$ on les topologies τ_∞ i τ_ℓ coincidixen sembla que no ha rebut molta atenció en la literatura. Agafem prestat de [16] les tècniques necessàries per obtindre una caracterització dels subconjunts $A\subset\mathbb{E}^1$ que verifiquen la igualtat $\tau_{d_\infty}|_A=\tau_p|_A$. Cal recordar que una funció f entre dos espais primer numerables X i Y és contínua si, i només si, $f(\lim_n x_n)=\lim_n f(x_n)$ per a cada successió $\{x_n\}$ a l'espai X. Recordem que per a cada $u\in\mathbb{E}^1$ i $\lambda\in[0,1[$, denotarem per $u(\lambda+)$ el límit de $u(t)$ quan $t\to\lambda+$. En primer lloc necessitem el següent resultat:

Lema 6.2.5. *Si $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ és una successió $\tau_\ell-$convergent, aleshores per a tot $\varepsilon>0$ i $\lambda_0\in\,]0,1]$, existeix $\delta>0$ tal que $u_n^-(\lambda_0)-u_n^-(\lambda)<\varepsilon$ i $u_n^+(\lambda)-u_n^+(\lambda_0)<\varepsilon$ per a tot $n\in\mathbb{N}$ i $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0]$.*

Demostració. La prova per a $\{u^+\}_{n=1}^\infty$ segueix la mateixa línia que el cas de $\{u^-\}_{n=1}^\infty$; per tant, només demostrarem el lema per a la successió $\{u^-\}_{n=1}^\infty$. Siga $u=(u^-,u^+)$ el límit puntual de $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. Com que u^- és contínua per l'esquerra sobre $(0,1]$ i tenint en compte que u^- és no decreixent, existeix $\delta>0$ tal que $0\leq u^-(\lambda)-u^-(\lambda_0)<\varepsilon$ per a tot $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0]$.
Ara triem n_0 tal que, per a cada $n\geq n_0$, siga $|u_n^-(\lambda_0-\delta)-u^-(\lambda_0-\delta)|<\varepsilon$ i $|u_n^-(\lambda_0)-u^-(\lambda_0)|<\varepsilon$. Aleshores, per a tot $n\geq n_0$ i tot $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0]$, obtenim

$$0\leq u_n^-(\lambda_0)-u_n^-(\lambda)\leq u_n^-(\lambda_0)-u_n^-(\lambda_0-\delta)\leq$$
$$|u_n^-(\lambda_0)-u^-(\lambda_0)|+|u^-(\lambda_0)-u^-(\lambda_0-\delta)|+|u^-(\lambda_0-\delta)-u_n^-(\lambda_0-\delta)|\leq 3\varepsilon.$$

La prova és completa invocant el fet que u_n^- és contínua per l'esquerra a λ_0 per a cada $n < n_0$. ■

Teorema 6.2.6. *Per a un subconjunt A de $\mathbb{E}^1$, les següents condicions són equivalents:*

(i) $\tau_{d_\infty}|_A = \tau_\ell|_A$.

(ii) *Per a cada successió $\{u_n\}_{n=1}^\infty = \{(u_n^-, u_n^+)\}_{n\geq 1} \subset A$ que convergeix en nivell a un element (u^-, u^+) en A, tenim* $\lim_n u_n^-(\lambda+) = u^-(\lambda+)$ *i* $\lim_n u_n^+(\lambda+) = u^+(\lambda+)$ *per a tot* $\lambda \in [0, 1[$.

(iii) *Cada successsió $\tau_\ell-$convergent $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ és equicontínua per la dreta.*

Demostració. (i)$\Rightarrow$(ii) ve donat per la definició de convergència uniforme. L'implicació (ii)$\Rightarrow$(iii) es segueix amb un argument similiar a l'utilitzat en Lema 6.2.5. Per veure (iii)$\Rightarrow$(i) necessitem provar que la funció identitat de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ en $(\mathbb{E}^1, \tau_u)$ és contínua, això és, si $\{(u_n^-, u_n^+)\}_{n\geq 1}$ convergeix a (u^-, u^+) en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$, aleshores $\{(u_n^-, u_n^+)\}_{n\geq 1}$ d_∞-convergeix a (u^-, u^+). Si assumim que $\{(u_n^-, u_n^+)\}_{n\geq 1}$ no d_∞-convergeix a (u^-, u^+), aleshores podem pensar que $\{u_n^-\}_{n\geq 1}$ no convergeix uniformement a u^-. Baix aquesta circumstància, podem trobar $\varepsilon > 0$, una successió infinita de nombres naturals $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ i una successió $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ tal que $|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_{n_k})| \geq 3\varepsilon$. Podem dir, sense pèrdua de generalitat, que la successió $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix a $\lambda_0 \in]0, 1]$. Notem que $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ té infinits elements differents perquè $\{u_n^-\}_{n=1}^\infty$ convergeix puntualment a u^-. Suposem ara que hi ha una subsuccessió infinita de $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ els elements de la qual són més grans que λ_0. Per simplicitat, denotarem aquesta subsuccessió de nou com $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. La nostra hipòtesi i el fet que u^- i els elements de $\{u_n^-\}_{n=1}^\infty$ són continus per la dreta a λ_0 ens permet trobar una successió $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$
\begin{aligned}
|u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u^+(\lambda_{n_k})| &\leq |u_{n_k}^+(\lambda_{n_k}) - u_{n_k}^+(\lambda_{0+})| \\
&\quad + |u_{n_k}^+(\lambda_{0+}) - u^+(\lambda_0+)| + |u^+(\lambda_0+) - u^+(\lambda_{n_k})| \leq 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

que ens porta a una contradicció. Si, contràriament a com hem suposat, hi ha una subsuccessió infinita de $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ els elements de la qual són menors que λ_0, mitjançant el Lema 6.2.5 i un argument similar a l'anterior, obtenim una contradicció. Això completa la prova. ■

Capítol 7

Línies d'investigació futures

L'anàlisi difús es basa en el concepte de nombre difús de la mateixa manera que l'anàlisi real es basa en el nombre real. L'anàlisi difús ha rebut molta atenció en els darrers anys, així com les seues aplicacions, entre les quals podem citar les equacions diferencials, teoria de l'optimització, processament d'imatges, mètodes computacionals, etc. (veure [6]). Es tracta, doncs, d'un ampli camp de recerca tant en la seua vessant teòrica com pràctica.

La nostra futura recerca s'enmarcarà en l'estudi de propietats topològiques i d'anàlisi funcional quan treballem substituint els nombres reals pels nombres difusos. Concretant, estem interessats en el següents problemes:

- Estudiar les propietats de l'espai de les funciones contínues que prenen valors en l'espai $\mathbb{E}^1$ dotat de diferents topologies.
- Obtindre teoremes de tipus Arzela-Ascoli en els anteriors espais de funcions. Cal resaltar que l'únic resultat conegut en aquest camp és una versió del teorema de Arzela-Ascoli aplicat a l'espai de les funcions contínues definides sobre un compacte i que prenen valors en $\mathbb{E}^1$ dotat de la mètrica suprem induïda per d_∞. Aquest resultat és incorrecte perquè fa servir una caracterització incorrecta dels subconjunts compactes de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ (veure [14]).
- Teoremes de tipus Banach-Stone sobre l'anterior espai de funcions. En aquest context necessitarem introduir noves tècniques degut a l'estructura de l'espai $\mathbb{E}^1$, que està molt allunyada de l'estructura clàssica d'espai vectorial dels reals.

Bibliografia

[1] T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, (1989).

[2] J. Aranda, J.L. Fernández, J. Jiménez and F. Morilla, *Fundamentos de Lógica Matemática*, Sanz y Torres, (2000).

[3] J.J. Buckley i E. Eslami, *An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*, Physica-Verlag, (2002).

[4] http://www.calvin.edu/ pribeiro/othrlnks/Fuzzy/home.htm

[5] P. Diamond i P. Kloeden, *Characterization of compact subsets of fuzzy sets, Fuzzy Set and Systems* **29** (1989) 341–348.

[6] P. Diamond i P. Kloeden, *Metric spaces of fuzzy sets: Theory and applications*, World Scientific Publishing (1994).

[7] P. Diamond i P. Kloeden, *Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis*, (Dubois D. and Prade H, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1999.

[8] D. Dubois i H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, Internat. J. of Systems Sci. **9** (1978) 613-626.

[9] D. Dubois, H.T. Nguyen i H. Prade (1999), *Possibilistic theory, probability and fuzzy sets: Misunderstandings, bridges and gaps, Fundamentals of Fuzzy Sets*, (Dubois D. and Prade H, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1999.

[10] D. Dubois, W. Ostasiewicz i H. Prade (1999), *Fuzzy Sets: History and Basic Notions*, (Dubois D. and Prade H, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1999.

[11] J. Dugundji, *Topology.* Boston: Allyn and Bacon, (1966).

[12] R. Engelking, *General topology.* Translated from the Polish by the author. Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, (1989).

[13] J-X. Fang i H. Huang, *Some properties of the level convergence topology on fuzzy number space* $\mathbb{E}^n$, Fuzzy Sets and Systems **140** (2003) 509–517.

[14] Jin-Xuan Fang i Qiong-Yu Xue, *Some properties of the space of fuzzy-valued continous functions on a compact set*, Fuzzy Set and Systems **160** (2009) 1620–1631.

[15] J. Fodor i R.R. Yager (1999), *Fuzzy set-theoretic operators and quantifiers* (Dubois D. and Prade H, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1999.

[16] J.J. Font i M. Sanchis, *Sequentially compact subsets and monotone functions: an applications to fuzzy theory.* Enviat per a la seua publicació.

[17] J.J. Font, A. Miralles i M. Sanchis, *On the fuzzy number space with the level convergence topology.* Journal of Function Spaces and Applications, vol. 2012, Article ID 326417, 11 pages, 2012.

[18] S. Fuchino i S. Plewit, *On a theorem of E. Helly*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 **2** (1999), 491–497.

[19] R. Goetschel i W. Voxman *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Set and Systems **18** (1986) 31–43.

[20] O. Kaleva i S. Seikkla, *On fuzzy metric space, Fuzzy Sets and Systems* **12** (1984) 215–229.

[21] A. Kaufmann i M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic. Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold (1991).

[22] G.J. Klir i B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Prentice Hall. (1995).

[23] M.J. Martín, *Espais mètrics difusos.* UJI. Tesi del Màster Universitari en Matemàtica Computacional, (2010).

[24] J. Mira, A.E. Delgado, J. G. Boticario i F. J. Díez, *Aspectos básicos de la inteligencia artificial*, Sanz y Torres, (2003).

[25] C. V. Negoita i A. Ralescu, *Representation theorems for fuzzy concepts.* Kybernetes **4**(3) (1975a) 169–174.

[26] C. V. Negoita i A. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis.* Birkhauser, Basel and Stuttgart, and Halsted Press, New York, (1975b).

[27] D.S. Okhezing, *Study of families of monotone continuous functions on Tychonoff spaces, Journal of Mathematical Sciences*, **144**, (2007) 4152–4183.

[28] A. Oostra, *Sobre lógicas multivaluadas.* Revista Integración, Universidad Industrial de Santander, (2004).

[29] W. Pedrycz i F. Gomide, *An Introduction to Fuzzy Sets. Analysis and Design*, The MIT Press, (1998).

[30] M. Spivak, *Calculus*, editorial reverté s.a., (1988).

[31] Julián Velarde, *Lógica polivalente*. Revista El Basilisco, Núm 1, 93–99, (1978).

[32] www.wikipedia.org

[33] C.-x Wu i G.-x Wang, *Convergence of sequence of fuzzy numbers and fixed point theorems for increasing fuzzy mappings and applications, Fuzzy Sets and Systems* **130** (2002) 383–390.

[34] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets. Information and Control 8*, 3(1965), 338-353

[35] L.A. Zadeh, *The birth and evolution of Fuzzy Logic*, Int. J. General System, Vol 17(1990), 95–105