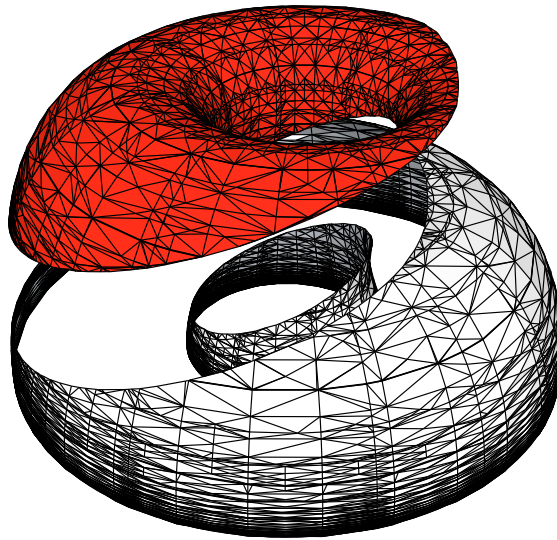


UNIVERSITAT JAUME I



TFM: Máster en Matemática Computacional.

**LOS CATENOIDES ESFÉRICOS EN  $\mathbb{H}^3$**   
APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE CHERN-OSSERMAN



Irmina Gozalbo Ejarque

Castellón, 22 de septiembre de 2014.

---

Dirigido por: Vicente Palmer Andreu y Vicent Gimeno García.

\*\*\*

## Agradecimientos.

Quiero agradecer a mis dos tutores, Vicente Palmer Andreu y Vicent Gimeno Garcia por su paciencia y su perseverancia, que me han enseñado todo lo que sé de geometría diferencial y permitido desarrollar un trabajo del que me siento sinceramente orgullosa. Huelga decir que sin vosotros este TFM no habría sido posible.

Gracias también a todas esas personas que han estado cerca, apoyándome en los momentos fáciles y también en los complicados.

*"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real." N. Lobachevsky*

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>7</b>
1.1	La familia de catenoides esféricos en el espacio hiperbólico. . . . .	8
1.2	La fórmula de Chern-Osserman. . . . .	12
1.3	Resultados obtenidos. . . . .	13
<b>2</b>	<b>Definiciones.</b>	<b>15</b>
2.1	Definiciones básicas. . . . .	15
2.1.1	Derivada covariante, geodésicas y aplicación exponencial. . . . .	16
2.1.1.1	Ecuaciones locales de las geodésicas. . . . .	18
2.1.2	Variedades conexas, simplemente conexas y completas. . . . .	19
2.1.3	Distancia y bolas métricas. . . . .	19
2.1.4	Bolas y esferas geodésicas. . . . .	20
2.1.5	Curvatura, curvatura seccional y curvatura de Gauss. . . . .	21
2.2	Inmersiones. . . . .	22
2.2.1	Inmersiones, inmersiones propias e inmersiones isométricas. . . . .	22
2.2.2	Ecuaciones de una inmersión. . . . .	24
2.2.2.1	Segunda Forma Fundamental. . . . .	24
2.2.2.2	Aplicación de Weingarten. . . . .	24
2.2.2.3	Ecuación de Gauss. . . . .	25
2.2.2.4	Curvaturas Principales. . . . .	25
2.2.2.5	Curvatura Media. . . . .	26
2.2.3	Fórmula de la co-área. . . . .	26
2.3	Superficies inmersas en una variedad de dimensión 3. . . . .	27
2.3.1	Norma de la Segunda Forma Fundamental y minimalidad. . . . .	27
2.3.1.1	Distancia extrínseca y bolas extrínsecas. . . . .	29
2.3.2	Característica de Euler. . . . .	30
2.3.2.1	La característica de Euler-Poincaré. . . . .	30

2.3.2.2	Superficies y suma conexa. . . . .	31
2.3.2.3	Superficies compactas sin borde: género y característica de Euler-Poincaré. . . . .	32
2.3.2.4	Superficies compactas con borde: género y característica de Euler-Poincaré. . . . .	32
2.3.2.5	Superficies no compactas: número de finales y topología finita. . . . .	33
2.3.3	Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	34
2.3.4	Desigualdades isoperimétricas de las bolas extrínsecas en una subvariedad minimal propia- mente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard. . . . .	35
2.4	El Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ . . . . .	35
2.4.1	Modelos del Espacio Hiperbólico. . . . .	36
2.4.1.1	El modelo de Lorentz ( $LM^n$ ). . . . .	36
2.4.1.2	El modelo del semiespacio superior ( $UHM^n$ ). . . . .	36
2.4.1.3	Proyección entre modelos. . . . .	36
2.4.2	El modelo del semiplano de Poincaré. Notación compleja. . . . .	37
2.4.2.1	Transformaciones de Moebius. . . . .	37
2.4.2.2	Los símbolos de Christoffel. . . . .	39
2.4.2.3	Las curvas geodésicas. . . . .	40
2.4.2.4	Distancia y bolas extrínsecas. . . . .	41
2.4.3	Bolas y esferas geodésicas en el hiperbólico. . . . .	45
<b>3</b>	<b>Catenoides esféricos en el espacio hiperbólico.</b>	<b>47</b>
3.1	Los catenoides esféricos. . . . .	47
3.2	Superficies de revolución en el espacio de Minkowski. . . . .	48
3.3	Superficies minimales de revolución en $\mathbb{H}^3$ . . . . .	53
3.4	Expresión de la Primera y Segunda Formas Fundamentales de la inmersión. . . . .	59
3.5	Correspondencia con otras parametrizaciones. . . . .	60
3.5.1	Catenoides Esféricos en el modelo del semiespacio superior $UHM^3$ . . . . .	60
3.5.2	Primera y Segunda Formas Fundamentales en el modelo del semiespacio superior. . . . .	63
3.5.3	Otros Catenoides Esféricos en $\mathbb{R}_1^4$ . . . . .	66
<b>4</b>	<b>La desigualdad de Chern-Osserman en el hiperbólico.</b>	<b>67</b>
4.1	Característica de Euler-Poincaré. . . . .	67
4.2	Integral del cuadrado de la Norma de la Segunda Forma Fundamental. . . . .	68
4.3	Crecimiento del Volumen de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{H}^3$ . . . . .	72
4.3.1	Crecimiento del Volumen. . . . .	72
4.3.2	Crecimiento del Volumen de la familia de Catenoides Esféricos. . . . .	77
4.3.2.1	Distancia extrínseca. . . . .	79
4.3.2.2	Bolas extrínsecas y conjuntos de nivel de la función coordenada $s$ . . . . .	86

---

4.3.2.3	Estimación del crecimiento del volumen. . . . .	88
4.4	Conclusiones. . . . .	95



# Capítulo 1

## Introducción.

Esta memoria trata sobre la *fórmula de Chern-Osserman* y su aplicación en el espacio hiperbólico. En su forma original, esta ecuación relaciona entre sí distintas cantidades geométricas de superficies minimales isométricamente inmersas en el espacio euclídeo,  $\mathbb{R}^n$ . En ese ambiente, su comportamiento es bien conocido y tiene entre otras una interesante propiedad: todos sus términos toman valores naturales. (Además, poco después de su aparición se demostraba que uno de sus términos, el *volume growth*, era igual al número de finales de la superficie si ésta estaba embebida siendo, por tanto, independiente del punto en el que se centrara). Unas décadas después de ésta se desarrolló una variación de la ecuación que la adaptaba a espacios con curvatura seccional constante negativa,  $\mathbb{K}^n(-c^2)$ . En este punto resulta inevitable preguntarse: seguirán los términos de esta ecuación tomando valores naturales en los nuevos ambientes? (seguirá el *volume growth* tomando el valor del número de finales de la superficie?) Con la intención de arrojar un poco de luz sobre estas cuestiones y con las mejores herramientas disponibles, decidimos que la manera más efectiva de abordar el problema era el clásico *apliquémosla y veamos qué pasa*. Sólo necesitábamos encontrar una superficie que hiciera de modelo, la cual debía satisfacer ciertas condiciones: ser una superficie minimal y de rotación, estar isométricamente inmersa en un espacio con curvatura seccional constante negativa y no presentar autointersecciones. La mejor candidata acabó siendo la familia de Catenoides Esféricos inmersos en el 3-espacio hiperbólico,  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ . Con este modelo, la fórmula de Chern-Osserman y una buena dosis de cálculos, lograremos dar respuesta a unas cuantas preguntas que nos ayudarán a entender mejor el comportamiento de la fórmula de Chern-Osserman en el espacio hiperbólico. Antes, veamos los contenidos de esta memoria que están estructurados en cuatro partes incluyendo esta introducción.

En la segunda parte, **Capítulo 2**, se hace un repaso a las definiciones y propiedades geométricas básicas de las inmersiones isométricas de superficies minimales en variedades riemannianas con curvatura seccional constante, concretando desde los casos más generales a términos específicos de las mismas; la característica de Euler-Poincaré, el *volume growth* o crecimiento del volumen, y finalmente algunas características útiles de dos modelos del n-espacio hiperbólico que manejaremos en los apartados siguientes: el modelo de Lorentz ( $LM^n$ ) y el modelo del semiespacio superior ( $UHM^n$ ).

En la tercera parte, **Capítulo 3**, se obtiene paso a paso una parametrización de una familia de superficies en  $\mathbb{H}^3$ , los Catenoides Esféricos  $\Sigma_b$ , isométricamente inmersos en el espacio de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^4$ , siguiendo el artículo de H. Mori "Minimal surfaces of revolution in  $\mathbb{H}^3$  and their global stability." (ver [Mor81]). Estas superficies también son obtenidas siguiendo un proceso similar en el artículo de doCarmo y Dajczer "Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature." (ver [dCD83]), como uno de los tres tipos de superficies minimales de revolución en  $\mathbb{R}_1^4$  (De hecho este artículo es más general que el anterior). Bérard y Sa Earp obtienen otra parametrización, esta vez por métodos diferentes, en el artículo "Lindelöf's theorem for hyperbolic catenoids." (ver [BSE10]), considerándolos como hipersuperficies de  $\mathbb{H}^3$ . En los últimos puntos de este capítulo demostraremos que todas ellas son equivalentes y obtendremos las propiedades geométricas de las inmersiones, que utilizaremos en el último capítulo.

En la cuarta parte, **Capítulo 4**, introduciremos la ecuación de Chern-Osserman en el espacio hiperbólico a través del ejemplo de la familia de superficies obtenidas en el apartado anterior. En esta ecuación intervienen tres elementos: la característica de Euler-Poincaré, la curvatura total (en  $\mathbb{R}^n$ ) o la integral del cuadrado de la norma de la Segunda Forma Fundamental (Integral de la Norma, en  $\mathbb{K}^n(-c^2)$ ), y el crecimiento del volumen o *volume growth*. La característica de Euler es una propiedad intrínseca de las superficies, de manera que no se verá afectada por la inmersión. Sin embargo no sucede lo mismo con los otros tres términos. Veremos una idea intuitiva de por qué la curvatura total de las superficies minimales propiamente inmersas en el espacio euclídeo, si no es infinita, es un número natural. En el capítulo 4 demostraremos que la Integral de la Norma, su homólogo en el espacio hiperbólico, no está cuantizado pero toma un valor interesante en el caso límite  $b \rightarrow b_{min}$ . En cuanto al tercer término, demostraremos que dada una subvariedad inmersa en el espacio euclídeo y una exhaustión por bolas extrínsecas de la misma, el crecimiento del volumen es independiente del punto en el que se centre la exhaustión. En contraposición, veremos que la familia de Catenoides Esféricos no es el único tipo de superficies para las cuales ésta propiedad no se cumple cuando trabajamos en el espacio hiperbólico. A pesar de estas diferencias, veremos que en el citado caso límite la ecuación de Chern-Osserman pasaría a comportarse de manera similar a como lo hace en el espacio euclídeo. Ahora vamos a presentar brevemente la familia de Catenoides Esféricos, la ecuación de Chern-Osserman, y un resumen de los resultados que obtenemos a lo largo de la memoria.

## 1.1 La familia de catenoides esféricos en el espacio hiperbólico.

Aunque más adelante lo veremos con más detalle (apartado 2.4), recordemos que el espacio de Minkowski puede verse como el par  $(\mathbb{R}^4, g_1)$ , es decir, el conjunto de puntos  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  dotado de una métrica lorentziana

$$g_1 := -dx^1 \otimes dx^1 + \sum_{i=2}^4 dx^i \otimes dx^i$$

donde  $\{dx^i\}_{i=1}^4$  es una referencia ortonormal en el espacio dual  $\mathbb{R}^{4*}$  al espacio tangente  $T\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ . Consideremos  $\mathbb{H}^3$  como una subvariedad de  $\mathbb{R}_1^4$  de tal manera que si  $x \in \mathbb{H}^3$ ,  $g_1(x, x) = -1$ . En este contexto, una descripción intuitiva de la familia de catenoides puede ser la siguiente: Consideremos un subespacio vectorial  $P^2 \subset \mathbb{R}_1^4$  de dimensión 2. Este subespacio puede ser de tres tipos excluyentes entre sí (ver [O'N83]) dependiendo del carácter que adquiera la



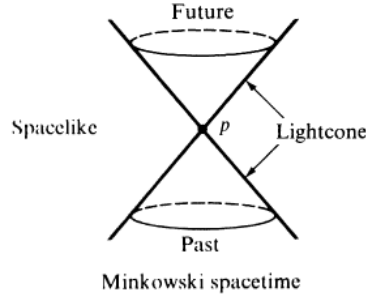


Figure 1.1: Cono de luz y subespacios temporal y espacial en el espacio de Minkowski.

métrica al restringirla a él: si  $g_1|_{P^2}$  es definida positiva (euclídea),  $P^2$  será de tipo espacial. Si  $g_1|_{P^2}$  es no degenerada de índice 1 (lorentziana),  $P^2$  será de tipo temporal. Si  $g_1|_{P^2}$  es degenerada,  $P^2$  será *lightlike* o tipo luz. Definamos  $P^2$  como un plano temporal de acuerdo con nuestra métrica y sea  $\Gamma$  una curva inmersa en un plano de  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  parametrizada como  $\Gamma := \gamma(s)$  con

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^4 \\ s &\rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), 0) \end{aligned}$$

y que no corte a  $P^2$ . Podemos aplicar una transformación ortogonal a  $\mathbb{R}_1^4$  que haga rotar la curva dejando fijo al plano  $P^2$ . Por ejemplo la rotación  $\mathcal{R}_\theta$ :

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

El producto  $\Sigma := f(s, \theta) = \mathcal{R}_\theta \cdot \gamma(s)$  parametrizado como

$$f(s, \theta) = (x(s), y(s), z(s) \cos \theta, z(s) \sin \theta)$$

es una hipersuperficie de rotación  $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ .

Como es lógico, si intersectamos la superficie con un plano que sea paralelo al plano de rotación y que pase por un punto determinado de la curva ( $\gamma(s_0)$ ), obtenemos una circunferencia. De la misma manera, en dimensiones mayores, intersectando con  $n$ -planos paralelos al de rotación obtenemos esferas de dimensión  $n$ , y por ese motivo se le llama a este caso *caso esférico*. Cuando el subespacio  $P^2$  es espacial o de luz, aplicando las transformaciones adecuadas se obtienen hiperboloides y paraboloides, por lo que estos otros dos casos son llamados *hiperbólico* y *parabólico* respectivamente.

Finalmente, para que la superficie obtenida sea minimal, habrá que determinar las expresiones de las funciones  $x(s), y(s), z(s)$  de manera que la curvatura media  $H(\Sigma)$  se anule. Tras realizar todos los cálculos necesarios, se

logra expresar  $x(s)$  y  $y(s)$  en función de  $z(s)$ , y la condición de la minimalidad queda representada por la ecuación diferencial

$$z(s) \cdot z''(s) + z'^2(s) - 2z^2(s) - 1 = 0 \quad (1.1)$$

que se deberá satisfacer. En el artículo de doCarmo y Dajczer se llega a una expresión más general,

$$z(s) \cdot z''(s) + (n - 1)z'^2(s) + nc z^2(s) - \delta(n - 1) = 0 \quad (1.2)$$

donde  $n$  es la dimensión de la hipersuperficie,  $c$  la curvatura seccional de la variedad ambiente (que nosotros hemos llamado  $-c^2$  destacando que será negativa) y  $\delta$  el parámetro que distingue entre cada uno de los tres casos:  $\delta = 1, 0, -1$  (esférico, parabólico e hiperbólico respectivamente). Cuando buscamos el caso  $n = 2, c = 0, \delta = 1$ , obtenemos la ecuación de una catenaria parametrizada por su longitud de arco, motivo por el cual a estas superficies se les denomina catenoides.

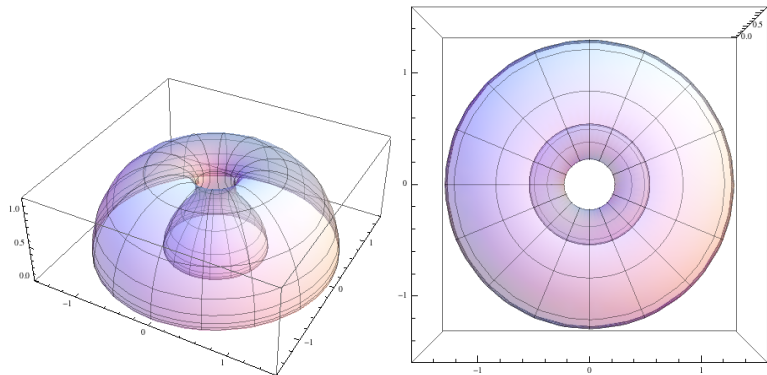


Figure 1.2: Catenoides Esférico en el modelo del semiespacio superior (las líneas marcan los meridianos y los paralelos).

Como veremos en el capítulo 3, la resolución de la ecuación diferencial (1.1) da como resultado toda una familia de catenoides esféricos minimales con parámetro distintivo  $b$  parametrizados como

$$f_b(s) = (x_b(s), y_b(s), z_b(s) \cos \theta, z_b(s) \sin \theta)$$

donde

$$\begin{aligned}
x_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \sinh(\phi_b(s)) \\
y_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \cosh(\phi_b(s)) \\
z_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\
\phi_b(s) &= \left( b^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \int_0^s \left( b \cosh(2t) + \frac{1}{2} \right)^{-1} \left( b \cosh(2t) - \frac{1}{2} \right)^{-1/2} dt
\end{aligned}$$

para  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $b > \frac{1}{2}$ , en el modelo de Lorentz del espacio hiperbólico.

Una forma alternativa de obtener la familia de superficies es la descrita por Bérard y Sa Earp en [BSE10]. En este caso, se trabaja con las *coordenadas de Fermi* del plano hiperbólico, en concreto en el modelo llamado del *semiplano de Poincaré*. En este modelo, dada una geodésica  $\alpha(s) = (0, e^s)$ , las coordenadas de Fermi asociadas a ella vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\beta_s(t) = \left( e^s \tanh(t), \frac{e^s}{\cosh(t)} \right)$$

En estas coordenadas se traza una curva (en realidad una familia de curvas con parámetro distintivo  $a$ ), de expresión

$$\gamma_a(s) = \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)), \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right)$$

donde las funciones  $\Lambda_a(s)$  y  $y_a(s)$  cumplen las condiciones necesarias para que, al hacerla rotar en torno al eje vertical ( $x_1 = x_2 = 0$ ) de  $\mathbb{H}^3$ , se obtenga una parametrización alternativa de la familia de catenoides esféricos en el modelo del semiespacio superior:

$$f_a(s, \theta) = \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \cos \theta, e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \sin \theta, \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right)$$

con

$$\Lambda_a(s) = \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau,$$

y

$$y_a(s) = a + \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2\tau)}{(\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1)^{1/2}} d\tau$$

para  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$ .

Finalmente, usando la transformación propuesta por Polthier en [Pol94] para pasar del modelo de Lorentz al modelo del semiespacio superior, demostramos que la primera parametrización se transforma en la segunda sin más que considerar un giro y una equivalencia entre los parámetros distintivos dada por

$$b = \frac{1}{2} \cosh(2a)$$

## 1.2 La fórmula de Chern-Osserman.

En 1967, Chern y Osserman demostraban en [CO67] el siguiente teorema: *Sea  $P^2$  una superficie minimal completa inmersa en  $\mathbb{R}^n$  y con curvatura total finita  $\int_P |K^P| d\sigma < \infty$ , siendo  $K^P$  la curvatura de Gauss de la superficie, entonces:*

$$-\chi(P) \leq -\frac{1}{2\pi} \int_P K^P dA - \sup_{R>0} \frac{\text{Vol}(D_R)}{\text{Vol}(B_R^{0,2})}$$

donde  $\chi(P)$  es la característica de Euler de la superficie y, dado  $r(x)$  la distancia de un punto fijo de  $\mathbb{R}^n$  al punto  $x$ ,  $D_R := \{x \in P : r(x) < R\}$  son las bolas extrínsecas de radio  $R$  de la superficie. En 1983, Jorge y Meeks ([JM83]) conseguían la igualdad para el caso de superficies embebidas, demostrando además en ese caso que el crecimiento del volumen es igual al número de finales de la superficie,  $\mathcal{K}$ , que es el número de componentes conexas no acotadas del complementario de los compactos en  $P$ :

$$-\chi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_P K_G dA - \mathcal{K}$$

La demostración de la desigualdad está basada en la propiedad de las superficies minimales inmersas en el espacio euclídeo de ser parametrizables mediante dos funciones meromorfas (representación de Weierstrass), y se puede seguir en [Oss86]. En el espacio euclídeo la curvatura total de la superficie, si no es infinita, coincide con el área de su proyección sobre la esfera de Gauss por una de estas funciones cambiada de signo. Por las propiedades de las funciones meromorfas, esta cantidad (el área esférica) es el área de la esfera unitaria ( $4\pi$ ) recorrida tantas veces como indica el grado de la función. Es decir, si la curvatura total es finita, entonces su valor es un entero positivo multiplicado por  $4\pi$ . Sin embargo, en ambientes con curvatura seccional negativa no existen superficies minimales completas con curvatura total finita, ya que, por la ecuación de Gauss (que veremos más adelante):

$$\int_P K^P dA = -c^2 \cdot \text{Vol}(P) - \frac{1}{2} \int_P \|B^P\|^2 dA = -\infty$$

donde  $\|B^P\|$  es la norma de la segunda forma fundamental de la inmersión y  $-c^2$  es la curvatura seccional del ambiente. Esta cuestión fue abordada por Chen y Cheng en 1999 ([Che99], [QY99]) y establecieron el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $P$  una superficie minimal completa y orientada inmersa en  $\mathbb{H}^n$ ,  $B^P$  la segunda forma fundamental de  $P$ ,  $r$  la distancia en  $\mathbb{H}^n$  desde un punto fijo y  $D_R = \{x \in P : r(x) < R\}$ . Supongamos que  $\int_P \|B^P\|^2 dA < \infty$ , entonces  $P$  tiene topología finita y*

$$(1) \sup_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{2\pi(\cosh(t)-1)} < \infty;$$

$$(2) -\chi(P) \leq \frac{1}{4\pi} \int_P \|B^P\|^2 dA - \sup_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{2\pi(\cosh(t)-1)}$$

donde  $\chi(P)$  es la característica de Euler de  $P$ .

Sin embargo, las técnicas utilizadas por Chen y Cheng son muy diferentes a las utilizadas en el espacio euclídeo ya que, en principio, la representación de Weierstrass no es extensible a superficies minimales en el hiperbólico. Más

recientemente, Gimeno y Palmer, en [GP13], definen los términos necesarios para la igualdad en el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $P$  una superficie minimal completa y propiamente inmersa en  $\mathbb{H}^n(b)$  con  $b \leq 0$  y supongamos que  $\int_P \|B^P\|^2 dA < \infty$ . Entonces*

$$-\chi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_P \|B^P\|^2 dA - \text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t(p))}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} - \frac{1}{2\pi} G_b(P)$$

donde el término  $G_b(P)$  es una cantidad finita y no negativa que no depende de la exhaustión por bolas extrínsecas  $\{D_t(p)\}_{t>0}$  centrada en un punto  $p \in P$ , y que viene dada por

$$G_b(P) := \lim_{t \rightarrow \infty} \left( h_b(t) \text{Vol}(B_t^{b,2}) \left( \frac{\text{Vol}(D_t(p))}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} \right)' + \int_{\partial D_t(p)} \langle B^P(e, e), \frac{\nabla^\perp r}{\|\nabla^P r\|} \rangle dA_t \right)$$

### 1.3 Resultados obtenidos.

Lo que hemos querido hacer en esta memoria es estudiar un caso concreto de aplicación de la fórmula de Chern-Osserman en el hiperbólico para caracterizar el comportamiento de sus términos. Aunque la característica de Euler es independiente de la inmersión, la integral del cuadrado de la norma de la Segunda Forma Fundamental (Integral de la Norma,  $\frac{1}{4\pi} \int_P \|B^P\|^2 dA$ ) y el Crecimiento del Volumen de las bolas extrínsecas  $\left( \text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t(p))}{\text{Vol}(B_t^{-c^2,2})} \right)$  no lo son, y eso es parte de lo que hemos logrado demostrar. Las siguientes cuestiones, que justificaremos debidamente en los próximos capítulos, diferencian el comportamiento de la ecuación de Chern-Osserman en el hiperbólico de su comportamiento en el espacio euclídeo:

#### Integral de la Norma:

- (1) La Integral de la Norma de la familia de Catenoides Esféricos,  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ , no está cuantizada.
- (2) La Integral de la Norma de la inmersión  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  va a infinito dentro de la familia de Catenoides Esféricos.
- (3) La Integral de la Norma de la inmersión  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  tiende a 2 (número de finales) cuando el valor del parámetro distintivo  $b$  tiende a su valor mínimo, asemejándose a su comportamiento en  $\mathbb{R}^3$ .

#### Crecimiento del Volumen:

- (4) El Crecimiento del Volumen de una superficie inmersa en el espacio euclídeo es independiente del punto en el que se centre su exhaustión por bolas extrínsecas.
- (5) El Crecimiento del Volumen de una superficie inmersa en el espacio hiperbólico no es independiente del punto en el que se centre la exhaustión.
- (6) Podemos acotar el valor del Crecimiento del Volumen de la familia de Catenoides Esféricos:
  - (6.1) Cuando la exhaustión por bolas extrínsecas de la superficie está centrada en el punto  $(0, 0, 1)$ , el Crecimiento del Volumen es inferior a 2 (número de finales de la superficie), mientras que en  $\mathbb{R}^3$  es exactamente igual a 2.
  - (6.2) Podemos acotar el valor del Crecimiento del Volumen en función de la distancia existente entre el centro de la exhaustión y el punto  $(0, 0, 1)$  cuando éstos sean diferentes.

(7) La ecuación de Chern-Osserman sobre la familia de Catenoides Esféricos se comporta casi como una igualdad (como la haría en el espacio euclídeo) cuando el valor del parámetro distintivo  $b$  tiende a su valor mínimo.

**Correspondencia entre modelos:**

(8) La familia de Catenoides Esféricos obtenida por Bérard-SaEarp,  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  (ver [BSE10]), es la misma que la obtenida por Mori,  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{R}_1^4$  (ver [Mor81]), sin más que aplicarle un giro y un cambio de parámetro distintivo dado por  $b = \frac{1}{2} \cosh(2a)$ .

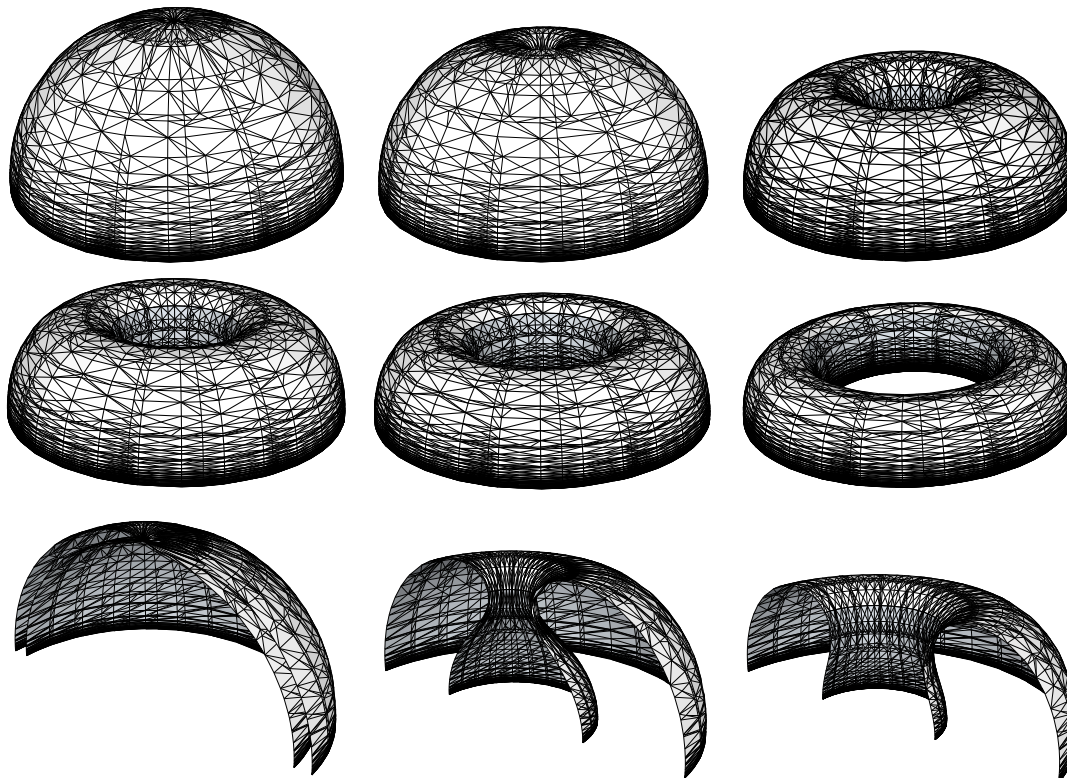


Figure 1.3: Catenoides Esféricos  $\Sigma_{0.01}, \Sigma_{0.07}, \Sigma_{0.5}, \Sigma_{0.7}, \Sigma_{0.9}, \Sigma_{1.2}$ , y medios Catenoides  $\Sigma_{0.01}, \Sigma_{0.2}, \Sigma_{0.6}$ .

# Capítulo 2

## Definiciones.

### 2.1 Definiciones básicas.

Vamos a dar una serie de definiciones y a fijar la notación utilizada en esta memoria. Empezaremos con una breve introducción a la métrica que nos ayudará a introducir otros conceptos más adelante.

**Definición 2.1.1.** [O’N83] *Un tensor métrico  $g$  en una variedad diferenciable  $M$  es un campo tensorial 2-covariante simétrico y no degenerado en  $M$  con índice  $k$  constante.*

Dado un sistema de coordenadas  $\{x^i\}_{i=1}^n$  en  $U \subset M$ , el tensor  $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$  puede ser escrito como

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde  $\mathcal{T}_p^q$  representa los tensores  $p$ -covariantes,  $q$ -contravariantes (cfr. [O’N83]). Es decir, dados dos campos vectoriales  $V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i$ ,  $W = \sum_{j=1}^n W^j \partial_j \in TM$  y dos vectores  $v = V(p)$ ,  $w = W(p) \in T_p M$ , el tensor métrico asigna un producto escalar en el espacio tangente:

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \rightarrow g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j (v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i w^j$$

**Definición 2.1.2.** [O’N83] *Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable  $M$  dotada de un tensor métrico  $g$ .*

**Definición 2.1.3.** [O’N83] *Una variedad riemanniana es una variedad semi-riemanniana cuya métrica es definida positiva.*

Si nuestra variedad es todo  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  existe una forma canónica del tensor,  $g_0$ , tal que  $g_{0,ij} = \delta_{ij}$  que denotamos como euclídea. Con esta métrica, dados dos vectores  $v, w \in T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ , el producto escalar resulta

$$g_0(v, w) = \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i$$

De esta manera se define, para cualquier  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , la variedad riemanniana que llamamos **n-espacio Euclídeo**. Pero, qué pasa si escogemos un entero  $k \in [0, n]$  y cambiamos los  $k$  primeros signos de este tensor métrico de positivos a negativos? Lo que tenemos es un tensor de **índice**  $k$ :

$$g_k(v, w) = \langle v, w \rangle_k = - \sum_{i=1}^k v^i w^i + \sum_{j=k+1}^n v^j w^j$$

El par  $(\mathbb{R}^n, g_k)$  es un n-espacio **semi-Euclídeo** que denotamos por  $\mathbb{R}_k^n$ . Si  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{R}_1^n$  es el llamado **n-espacio de Minkowski** y si, en concreto,  $n = 4$ , lo que tenemos es la expresión más sencilla del *espacio-tiempo* relativista o espacio de **Lorentz**. El significado geométrico de esta definición viene de la siguiente clasificación (o *carácter causal*) que tomamos de la teoría de la relatividad:

**Definición 2.1.4.** [O'N83] Un vector  $v$  tangente a  $M$  es

$$\text{espacial : si } \langle v, v \rangle > 0 \quad \text{o} \quad v = 0$$

$$\text{nulo : si } \langle v, v \rangle = 0 \quad \text{y} \quad v \neq 0$$

$$\text{temporal : si } \langle v, v \rangle < 0$$

En el caso de Lorentz ( $\mathbb{R}_1^4$ ) los vectores nulos son también llamados *lightlike* y al conjunto de todos ellos se les conoce como cono de luz.

### 2.1.1 Derivada covariante, geodésicas y aplicación exponencial.

Denotaremos como  $(M^n, g)$  a una variedad riemanniana de dimensión  $n$  con métrica  $g$  y conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Denotaremos como  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre la variedad  $M$ .

**Definición 2.1.5.** [dC92] Sea  $M$  una variedad de Riemann con conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , y sea  $\gamma$  una curva en  $M$ . La aceleración de  $\gamma$  es el campo vectorial  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  a lo largo de  $\gamma$ . A una curva  $\gamma$  la llamaremos **geodésica** respecto a  $\nabla$  si y sólo si su aceleración es nula:  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ .

**Proposición 2.1.6.** [dC92] Sea  $M$  una variedad riemanniana con conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$ , otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , llamado **derivada covariante** de  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que:

$$(i) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(ii) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}, \text{ donde } W \text{ es un campo vectorial a lo largo de } c \text{ y } f \text{ es una función diferenciable en } I.$$

$$(iii) \text{ Si } V \text{ es inducido por un campo vectorial } Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ es decir, } V(t) = Y(c(t)), \text{ entonces } \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

**Nota 2.1.7.** Dado el campo vectorial  $\dot{\gamma}(t)$  a lo largo de  $\gamma(t)$ , existe una extensión  $Y$  de  $\dot{\gamma}(t)$  a un abierto que contiene a  $\gamma(t)$  de manera que  $Y(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ . Entonces podemos aplicar el punto (iii) de la proposición anterior y reescribir la ecuación de las geodésicas como



$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Cuando más adelante trabajemos con la parametrización de los catenoides esféricos necesitaremos calcular las derivadas covariantes en coordenadas locales. Para ello necesitaremos los símbolos de Christoffel o coeficientes de la conexión que dependen de la métrica de la variedad. Denotaremos, como es habitual, a los coeficientes de la métrica por  $g_{ij}$  y por  $\{E_i\}_{i=1}^n$  a la referencia del fibrado tangente, donde  $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

**Definición 2.1.8.** [dC92] Dada una parametrización  $(U, x)$  y la referencia del tangente asociada a ella  $\{E_i\}_{i=1}^n$ , llamamos **símbolos de Christoffel** o coeficientes de la conexión  $\nabla$  en  $U$  a las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  definidas en  $U$  por

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k \quad (2.1)$$

Calculamos los símbolos de Christoffel mediante siguiente expresión (cfr. [dC92]):

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (2.2)$$

donde  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$ , matriz de la métrica en la variedad.

**Proposición 2.1.9.** [dC92] La derivada covariante de dos vectores  $X, Y \in TP$  en coordenadas locales se expresa como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k) \right) E_k \quad (2.3)$$

donde  $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$ , y  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica.

*Demostración.* Dados dos campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  en la referencia  $\{E_i\}_{i=1}^n$  dada por la carta  $(U, x)$  entorno a un punto  $p \in M$ , de manera que

$$X = X^i E_i \quad Y = Y^j E_j$$

escribimos la derivada covariante de  $Y$  con respecto de  $X$  en  $M$  como:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \sum_{j=1}^n Y^j E_j = \sum_{j=1}^n (X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_X E_j) = \sum_{j=1}^n (X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i E_i} E_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (X(Y^j) E_j + Y^j X^i \nabla_{E_i} E_j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aplicando que  $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{j=1}^n X(Y^j)E_j + \sum_{i,j,k=1}^n Y^j X^i \Gamma_{i,j}^k E_k = \sum_{k=1}^n \left( X(Y^k)E_k + \sum_{i,j=1}^n Y^j X^i \Gamma_{i,j}^k E_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^n Y^j X^i \Gamma_{i,j}^k \right) E_k\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica.  $\square$

### 2.1.1.1 Ecuaciones locales de las geodésicas.

Ahora que ya sabemos cómo calcular las derivadas covariantes en coordenadas locales, vamos a ver cómo dar con ellas una expresión para las geodésicas. Para ello hay que considerar la expresión de la curva  $\gamma$  definida en un sistema de coordenadas  $(U, x)$  en torno a un punto  $p = \gamma(t_0)$  sobre la variedad:

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)); \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Para  $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} \cdot E_i|_{\gamma(t)}$  tenemos,

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \frac{D}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt} E_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 x^j}{dt^2} E_j + \sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt} \frac{D}{dt} E_j \quad (2.6)$$

como  $E_j = \frac{\partial}{\partial x_j}|_{\gamma(t)}$ , aplicamos la condición (iii) de la Proposición 2.1.6 y tenemos que

$$\frac{D E_j}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} E_j = \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt} E_i} E_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{E_i} E_j = \sum_{ik} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k E_k$$

Sustituyendo en 2.6 y aplicando la Definición 2.1.5 de geodésica llegamos a la expresión

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad (2.7)$$

que no es otra cosa que una ecuación diferencial de orden dos que debe satisfacer una curva para ser geodésica.

El siguiente teorema nos asegura que en todo entorno de la variedad encontraremos una y sólo una geodésica para cada punto señalando en una dirección determinada:

**Teorema 2.1.10.** [dC92] (Existencia y unicidad). Sea  $M$  una variedad de Riemann con conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Para cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$ , cualquier punto  $p \in M$  y cualquier  $v \in T_p M$ , existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  conteniendo a  $t_0$  y una única geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(t_0) = p$  y  $\gamma'(t_0) = v$

**Definición 2.1.11.** [dC76] Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana con conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Dados  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ , definimos la **aplicación exponencial** como

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) \quad v \in T_p M \quad (2.8)$$

donde  $\gamma$  es la geodésica que pasa por  $p$  con tangente  $v$ . Se cumple que:

$$\exp_p(v) = \gamma(|v|, p, \frac{v}{|v|})$$

Podemos ver la aplicación exponencial como un punto de  $M$  obtenido al desplazarse una longitud  $|v|$  a lo largo de una geodésica  $\gamma$  que, partiendo del punto  $p \in M$  tiene por vector tangente a la curva  $\frac{v}{|v|} \in T_p M$ .

### 2.1.2 Variedades conexas, simplemente conexas y completas.

**Definición 2.1.12.** [O’N83] Una variedad es conexas si y sólo si no puede ser expresada como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos.

Los entornos coordenados de una variedad muestran que todo par de puntos suficientemente próximos pueden ser unidos mediante un segmento de curva suave. Por tanto, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.13.** [O’N83] Una variedad  $M$  es conexas si y sólo si dos puntos cualesquiera en  $M$  pueden unirse mediante un segmento de curva diferenciable a trozos.

Veamos ahora la definición de homotopía:

**Definición 2.1.14.** [O’N83] Sean  $p, q \in M$  y sea  $I$  un intervalo cerrado  $[0, 1] \in \mathbb{R}$ . Un camino desde  $p$  hasta  $q$  en  $M$  es una aplicación continua  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = q$ .

Sea  $P(p, q)$  el conjunto de todos los caminos con esta definición. Entonces:

**Definición 2.1.15.** [O’N83] Si  $\alpha, \beta \in P(p, q)$ , una homotopía de extremos fijos desde  $\alpha$  hasta  $\beta$  es una aplicación continua  $H : I \times I \rightarrow M$  tal que para todo  $s, t \in I$ ,  $H(t, 0) = \alpha(t)$ ;  $H(t, 1) = \beta(t)$ ;  $H(0, s) = p$ ;  $H(1, s) = q$ .

Es decir, una homotopía de extremos fijos es una aplicación con parámetro  $t \in (0, 1)$  tal que cuando  $t = 0$  describe a la curva  $\alpha$  y cambia a medida que  $t$  aumenta hasta describir a la curva  $\beta$  cuando  $t = 1$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  curvas con extremos comunes. Ya podemos entender entonces la definición de variedad simplemente conexas:

**Definición 2.1.16.** Una variedad diferenciable  $M$  es **simplemente conexas** si es conexas y cada curva cerrada en  $M$  es homotópica a un punto.

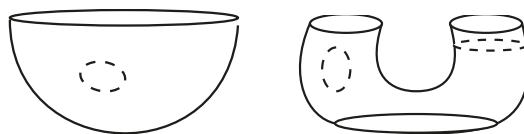


Figure 2.1: La primera figura es simplemente conexas, pero la segunda no, porque no todas las curvas cerradas pueden contraerse hasta un punto sin salirse de la variedad.

### 2.1.3 Distancia y bolas métricas.

Consideremos  $M$  una variedad riemanniana conexa. Dados dos puntos  $p, q \in M$ , considerar todas las curvas diferenciables a trozos uniendo  $p$  con  $q$ . Como  $M$  es conexa, tales curvas existen. Podemos entonces introducir la definición de distancia.

**Definición 2.1.17.** [dC92] La **distancia**  $d(p, q)$  está definida por

$$d(p, q) = l_{\min}(\gamma_{p,q}) = \inf \left\{ \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt : \gamma \text{ une } p \text{ con } q \right\}.$$

**Proposición 2.1.18.** [dC92] Con la distancia  $d$ ,  $M$  es un espacio métrico, es decir, se cumplen las siguientes propiedades:

- (1)  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$
- (2)  $d(p, q) = d(q, p)$
- (3)  $d(p, q) \geq 0$ , y  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

**Proposición 2.1.19.** [dC92] La topología inducida por  $d$  en  $M$  coincide con la topología inicial de  $M$ .

**Corolario 2.1.20.** [dC92] Si  $p \in M$ , la función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(q) = d(q, p)$  es continua.

**Definición 2.1.21.** Sea  $M$  una variedad riemanniana. Definimos la **bola métrica** de radio  $R$  centrada en el punto  $p \in M$  como:

$$B_R(p) = \{x \in M; d(p, x) < R\}$$

**Definición 2.1.22.** [dC92] Una variedad de Riemann  $M$  es **geodésicamente completa** si para todo  $p \in M$ , la aplicación exponencial  $\exp_p$  está definida para todo  $v \in T_p M$ , i.e., si cualquier geodésica  $\gamma$  empezando en  $p$  está definida para todos los valores del parámetro  $t \in \mathbb{R}$ .

Con todo esto podemos introducir ya el teorema de Hopf y Rinow.

**Teorema 2.1.23.** [dC92]. (Hopf y Rinow). Sea  $M$  una variedad riemanniana y sea  $p \in M$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a)  $\exp_p$  está definido para todo  $T_p M$ .
- b) Los cerrados y acotados de  $M$  son compactos.
- c)  $M$  es completa como espacio métrico.
- d)  $M$  es geodésicamente completa.
- e) Existe una sucesión de compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset K_{n+1}$  y  $\bigcup_n K_n = M$  tal que si  $q_n \notin K_n$  entonces  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ .

Además, cada una de las afirmaciones anteriores implica que

f) para todo  $q \in M$  existe una geodésica  $\gamma$  uniendo  $p$  con  $q$  con  $l(\gamma) = d(p, q)$ .

**Definición 2.1.24.** [GW79] Un punto de una variedad riemanniana es un **polo** si y sólo si la aplicación exponencial  $\exp : T_p M \rightarrow M$  es un difeomorfismo.

### 2.1.4 Bolas y esferas geodésicas.

**Definición 2.1.25.** [Sak96] Sea  $M$  una variedad riemanniana, sea  $p \in M$ , y sea  $U$  un entorno normal de  $p$ , es decir, un entorno  $U$  tal que la aplicación exponencial

$$\exp_p : U \subseteq T_p M \rightarrow M$$

es un difeomorfismo. Dada  $B_\varepsilon(0) \subset T_p M$  tal que  $B_\varepsilon(0) \subset U$ , llamamos a  $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$  la **bola geodésica** de radio  $\varepsilon > 0$  centrada en el punto  $p$ .

**Nota 2.1.26.** [Sak96] Si en la definición anterior el punto  $p$  es un polo, el concepto de bola geodésica coincide con el de **bola métrica**. Si el punto  $p$  no es un polo, sólo coincidirán para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ .

### 2.1.5 Curvatura, curvatura seccional y curvatura de Gauss.

**Definición 2.1.27.** [O'N83] Sea  $M$  una variedad riemanniana con conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . La aplicación

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.9)$$

es un campo tensorial (1,3) sobre  $M$  llamado **tensor curvatura de Riemann de  $M$** .

Sea  $\Pi \subset T_p M$  un subespacio bidimensional del tangente  $T_p M$ . Dados  $v, w \in \Pi$  dos vectores linealmente independientes, se define (cfr. [O'N83]):

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$$

**Lemma 2.1.28.** Sea  $\Pi$  un plano no degenerado tangente a  $M$  en  $p$ . El número

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{Q(v, w)} \quad (2.10)$$

no depende de la base  $(v, w)$  de  $\Pi$ , es decir  $K(v, w) = K(\Pi)$ , y es llamado **curvatura seccional**  $K(\Pi)$  de  $\Pi$ .

**Definición 2.1.29.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión 2. Llamamos **curvatura gaussiana** a la única curvatura seccional respecto a su plano tangente.

Ahora que ya hemos visto la definición de curvatura seccional, ya podemos definir las variedades de Cartan-Hadamard.

**Definición 2.1.30.** [dC92] Decimos que una variedad riemanniana  $M$  es una **variedad Cartan-Hadamard** si es completa, simplemente conexa, y todas las curvaturas seccionales en todos los puntos de la variedad son no positivas.

**Teorema 2.1.31.** [dC92](Teorema de Hadamard). Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura seccional  $K(p, \sigma) \leq 0$  para todo  $p \in M$  y todo  $\sigma \in T_p M$ . Entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim(M)$ , más concretamente  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  es un difeomorfismo  $\forall p \in M$ .

**Nota 2.1.32.** Todas las variedades Cartan-Hadamard son variedades con polo por el teorema de Hadamard (cfr. [Sak96]). De hecho, todos los puntos de una variedad de Cartan-Hadamard son polos.

**Nota 2.1.33.** Sea  $M$  una variedad de Riemann completa de curvatura seccional no positiva. Si suponemos que  $M$  es simplemente conexa ( es decir, una variedad Cartan-Hadamard), entonces, dado un punto  $p \in M$ , para cualquier otro punto  $q \in M$  existe una única geodésica uniendo  $p$  con  $q$ , que es minimizante (es decir, realiza la distancia) (cfr. [Sak96] ).

## 2.2 Inmersiones.

Hemos visto hasta ahora definiciones para variedades riemannianas en general, pero vamos a trabajar con hipersuperficies, así que necesitaremos algunas definiciones referentes a las inmersiones, en concreto a las inmersiones isométricas.

### 2.2.1 Inmersiones, inmersiones propias e inmersiones isométricas.

**Definición 2.2.1.** [dC76] [War83] Sean  $P^m$  y  $N^n$  dos variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente. A una aplicación diferenciable  $\varphi : P \rightarrow N$  la llamaremos **inmersión** si  $d\varphi_p : T_p P \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  es inyectiva para todo  $p \in P$ .

Vemos ahora las definiciones de inmersión propia y conformal:

**Definición 2.2.2.** Una aplicación entre dos espacio topológicos  $\varphi : X \rightarrow Y$  es **propia** si la preimagen de cada conjunto compacto en  $Y$  es compacto en  $X$ .

**Definición 2.2.3.** Sean  $P^m$  y  $N^n$  dos variedades diferenciables. Decimos que una aplicación diferenciable  $\varphi : P \rightarrow N$  es una **inmersión propia** si  $d\varphi : T_p P \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  es inyectiva y  $\varphi$  es propia para todo punto  $p \in P$ .

**Definición 2.2.4.** [dC76] Una aplicación  $\varphi : P \rightarrow N$  se llama **aplicación conformal** o **conforme** si para todo  $p \in P$  y todo  $v_1, v_2 \in T_p P$  tenemos

$$g_N(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)) = \lambda^2(p)g_P(v_1, v_2)_p \quad (2.11)$$

donde  $\lambda^2$  es una función diferenciable no nula en  $P$ .

Un caso especial es el siguiente:

**Definición 2.2.5.** [O'N83] Un difeomorfismo  $\varphi : P \rightarrow N$  de una variedad riemanniana en otra tal que  $g_N(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)) = c \cdot g_P(v_1, v_2)_p$  para alguna constante  $c \neq 0$  es llamada **homotecia de coeficiente  $c$** .

Si la constante es  $c = 1$  entonces tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.2.6.** [dC76] Dada una inmersión  $\varphi : P \rightarrow N$ , si  $N$  tiene métrica  $g_N$  y definimos la métrica de  $P$ ,  $g_P$ , de manera que:

$$g_P(v_1, v_2)_p := g_N(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)); \quad v_1, v_2 \in T_pP \quad (2.12)$$

entonces  $\varphi$  es una **inmersión isométrica**, y  $P$  hereda una métrica inducida por  $N$ . Es decir, se "conserva" la métrica de  $N$  en  $P$ .

**Nota 2.2.7.** [dC92] Como  $\varphi : P^m \rightarrow N^n$  es una inmersión, entonces para cada punto  $p \in P$  existe un entorno  $U \subset P$  tal que  $\varphi(U) \subset N$  es una **subvariedad** de  $N$ . Es decir, existe un entorno  $V \subset N$  de  $\varphi(p)$  y un difeomorfismo  $f : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f$  lleva  $\varphi(U) \cap V$  difeomórficamente a un subconjunto abierto de un subespacio de  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  (definición de variedad).

**Nota 2.2.8.** De aquí en adelante consideraremos inmersiones isométricas  $\varphi : P \rightarrow N$  y a  $P$  le llamaremos **subvariedad isométricamente inmersa en  $N$** .

**Nota 2.2.9.** Se puede ver que si  $\varphi : P^m \rightarrow N^n$  es una inmersión, entonces  $m \leq n$ , y la diferencia  $n - m$  es llamada **codimensión de la inmersión  $\varphi$** . Nosotros consideraremos que  $m < n$ , en concreto  $m - n = 1$  (**hipersuperficies**).

Para simplificar identificaremos  $U$  con  $\varphi(U)$  y cada vector  $v \in T_pP$  con  $p \in U \subset P$ , con  $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}N$ ,  $\varphi(p) \in N$ . Podemos descomponer entonces el espacio tangente a la variedad ambiente como

$$T_pN = T_pP \oplus (T_pP)^\perp \quad (2.13)$$

donde  $(T_pP)^\perp$  es el complemento ortogonal de  $T_pP$  en  $T_pN$ . (Notar que la dimensión de  $(T_pP)^\perp$  es la codimensión de la inmersión.)

**Nota 2.2.10.** Para cualquier vector  $v \in T_pN$  podemos escribir  $v = v^T + v^\perp$ , con  $v^T \in T_pP$  y  $v^\perp \in (T_pP)^\perp$ .

**Definición 2.2.11.** Sea  $\varphi : P \rightarrow N$  una inmersión de la subvariedad  $P$  en la variedad ambiente  $N$ . Dados dos campos vectoriales  $X, Y$  definidos en  $TP$ , denotando también como  $X, Y$  a sus extensiones en  $N$ , definimos la **conexión inducida en  $P$  por  $N$**  como

$$\nabla_X^P Y = (\nabla_X^N Y)^T \quad (2.14)$$

donde  $\nabla^N$  es la conexión de Levi-Civita en  $N$ .

Además, sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en  $N$  con conexión  $\nabla^N$ , y sean  $X$  e  $Y$  dos campos vectoriales del fibrado tangente de  $P$ ,  $TP$ , y extendidos por la inmersión a  $TN$ . Entonces:

$$\nabla_X^N Y = (\nabla_X^N Y)^T + (\nabla_X^N Y)^\perp \quad (2.15)$$

y por la definición de conexión inducida:

$$\nabla_X^N Y = \nabla_X^P Y + (\nabla_X^N Y)^\perp \quad (2.16)$$

### 2.2.2 Ecuaciones de una inmersión.

La idea de inmersión isométrica es la de una transformación que conserva la primera forma fundamental. Todas las propiedades de la subvariedad que dependan únicamente de ella serán, por tanto, invariantes de la inmersión, y podemos calcularlas sin "salir" de la subvariedad. Estas propiedades decimos que determinan la *geometría intrínseca*. Uno de los resultados más importantes en este contexto es el siguiente:

**Teorema 2.2.12.** [dC92] (*Gauss Theorema Egregium*). *La curvatura gaussiana  $K$  de una superficie es invariante por isometrías locales.*

Sin embargo en una inmersión aparecen una serie de propiedades relacionadas con la forma en que la subvariedad se encuentra inmersa en la variedad ambiente: es lo que llamamos *geometría extrínseca* y su elemento principal es la Segunda Forma Fundamental.

#### 2.2.2.1 Segunda Forma Fundamental.

**Definición 2.2.13.** *Sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad de Riemann  $N$  con conexión  $\nabla^N$ , sea  $TP$  el fibrado tangente a  $P$  y sea  $TP^\perp$  el fibrado normal a  $P$ . Definimos la **Segunda Forma Fundamental** como la aplicación  $B^P : TP \times TP \rightarrow TP^\perp$  dada por*

$$B^P(X, Y) := (\nabla_X^N Y)^\perp = \nabla_X^N Y - \nabla_X^P Y \quad (2.17)$$

donde  $X$  e  $Y$  son campos vectoriales sobre  $P$  que se extienden arbitrariamente en  $N$ .

**Lemma 2.2.14.** *La segunda forma fundamental  $B^P(X, Y)$  es*

- Independiente de las extensiones de  $X$  e  $Y$ .
- Bilineal.
- Simétrica respecto a  $X$  e  $Y$ .

#### 2.2.2.2 Aplicación de Weingarten.

Hemos visto que la Segunda Forma Fundamental expresa la relación existente entre las conexiones de  $P$  y de  $N$ . Ahora veremos que también sirve para expresar la relación entre sus curvaturas a través de la fórmula de Gauss (cfr. [dC92]). Para ello introducimos primero la aplicación de Weingarten.

**Definición 2.2.15.** [dC92] [O'N83] [Sak96] *Sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad riemanniana  $N$ , sean  $X$  e  $Y$  campos vectoriales en el fibrado tangente a  $P$ , y sea  $\eta$  un campo vectorial del fibrado*



normal a  $P$ . Entonces, para cualquier extensión de  $X, Y$  en  $N$ , y cualquier extensión del normal  $\eta$  en  $N$ , definimos la **aplicación de Weingarten** como la aplicación  $S_\eta : TP \rightarrow TP$  dada por

$$S_\eta(X) = -(\nabla_X^N \eta)^T \quad (2.18)$$

con las siguientes propiedades:

(i) Es bilineal.

(ii) Es autoadjunta.

**Lemma 2.2.16.** [dC92] [O'N83] [Sak96] (Ecuación de Weingarten). Sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad riemanniana  $N$ , sean  $X$  e  $Y$  campos vectoriales del fibrado tangente a  $P$ , y sea  $\eta$  un campo vectorial del fibrado normal a  $P$ . Entonces, para cualquier extensión de  $X$  e  $Y$  en  $N$  se cumple:

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = \langle B^P(X, Y), \eta \rangle \quad X, Y \in TP \quad (2.19)$$

*Demostración.* Sea  $Y$  un campo vectorial tangente a  $P$  y  $\eta$  un campo vectorial normal a  $P$ . Entonces, como  $\langle Y, \eta \rangle = 0$ , podemos decir que  $X\langle Y, \eta \rangle = \langle \nabla_X^N Y, \eta \rangle + \langle Y, \nabla_X^N \eta \rangle = 0$ , y por tanto que  $\langle \nabla_X^N Y, \eta \rangle = -\langle Y, \nabla_X^N \eta \rangle$ .

Aplicando 2.17 tenemos que  $\langle \nabla_X^P Y + B^P(X, Y), \eta \rangle = -\langle Y, \nabla_X^N \eta \rangle$ , y en concreto  $\langle B^P(X, Y), \eta \rangle = -\langle Y, \nabla_X^N \eta \rangle$ .

Finalmente, aplicando la expresión (2.18) obtenemos la relación  $\langle B^P(X, Y), \eta \rangle = \langle Y, S_\eta(X) \rangle$ .  $\square$

### 2.2.2.3 Ecuación de Gauss.

**Teorema 2.2.17.** [dC92] (Ecuación de Gauss). Sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad riemanniana  $N$ , sean  $X, Y, V$  y  $W$  campos vectoriales en  $TP$ , sean  $R^P$  y  $R^N$  los tensores curvatura de  $P$  y  $N$  respectivamente y sea  $B^P$  la Segunda Forma Fundamental. Entonces para cualquier extensión de  $X, Y, V, W \in N$ :

$$\langle R^P(V, W)X, Y \rangle = \langle R^N(V, W)X, Y \rangle + \langle B^P(V, X), B^P(W, Y) \rangle - \langle B^P(V, Y), B^P(W, X) \rangle \quad (2.20)$$

Además, la curvatura seccional está relacionada con el tensor curvatura, de manera que podemos encontrar una relación similar entre la curvatura seccional del ambiente, la de la subvariedad, y la Segunda Forma Fundamental de la inmersión:

**Corolario 2.2.18.** [dC92] Sea  $P$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad riemanniana  $N$ . Consideremos que los vectores  $u, v$  forman una base para un plano tangente no degenerado a  $P$ . Sean  $K^P$  y  $K^N$  las curvaturas seccionales de  $P$  y de  $N$  respectivamente, y sea  $B^P$  la Segunda Forma Fundamental. Entonces:

$$K^P(u, v) = K^N(u, v) + \frac{\langle B^P(u, u), B^P(v, v) \rangle - \langle B^P(u, v), B^P(u, v) \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2} \quad (2.21)$$

### 2.2.2.4 Curvaturas Principales.

Consideremos  $P$  una hipersuperficie de  $N$ . Sea  $p \in P$  y  $\eta \in (T_p P)^\perp$ . Como  $S_\eta : T_p P \rightarrow T_p P$  es autoadjunta, existe una base ortonormal de autovectores  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $T_p P$  con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , es decir (ver [dC92] o [dC76]):

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i; \quad 1 \leq i \leq m$$

Si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  y  $\{e_1, \dots, e_m, \eta\}$  son bases de  $T_p P$  y de  $T_p N$  respectivamente, manteniendo las orientaciones, entonces:

- (i)  $e_i$  son las **direcciones principales** y
- (ii)  $\lambda_i = k_i(p)$  son las **curvaturas principales** de la inmersión.

Además:

$$K_G(p) = \det(S_\eta)_p = \lambda_1 \dots \lambda_m \quad (2.22)$$

es la curvatura de **Gauss-Kronecker** y

$$H(p) = \frac{1}{m}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \quad (2.23)$$

es la **curvatura media** de la inmersión.

### 2.2.2.5 Curvatura Media.

**Definición 2.2.19.** [O'N83] [dC] Sea  $P^m$  una subvariedad isométricamente inmersa en la variedad riemanniana  $N^n$  con segunda forma fundamental  $B^P$ . Definimos el vector curvatura media como

$$\bar{H} = \frac{1}{m} \sum_{i=m+1}^n \text{tr}(S_\eta)_i \cdot \eta_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m B^P(e_j, e_j) \quad (2.24)$$

donde  $\{e_j\}_{j=1}^m$  es una referencia ortonormal de  $TP$ .

**Definición 2.2.20.** Decimos que una subvariedad es **minimal** si su vector curvatura media se anula en todos los puntos de la subvariedad.

### 2.2.3 Fórmula de la co-área.

**Definición 2.2.21.** [Sak96] Sea  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave definida sobre la variedad diferenciable  $P$ . Un punto  $p \in P$  es llamado punto crítico de  $f$  si la aplicación inducida  $f_{*p} : T_p P \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$  vale cero, es decir  $f_*|_p = 0$ .

**Nota 2.2.22.** [Sak96] Si en la definición anterior  $P$  es una variedad riemanniana,  $p \in M$  es un punto crítico de  $f$  si y sólo si  $\nabla f = 0$  en  $p$ .

**Definición 2.2.23.** [Sak96] Sea  $f : P \rightarrow N$  una aplicación  $C^\infty$ . Llamaremos valor crítico de  $f$  al punto  $q \in N$  si  $f^{-1}(q)$  contiene algún punto crítico de  $f$ . En caso contrario le llamaremos valor regular.

Se puede demostrar que el conjunto de todos los valores críticos de la función sobre la variedad forman un conjunto de medida nula:

**Teorema 2.2.24.** [GG73] [Spi79] [Che84] (Teorema de Sard). Sea  $f : P^m \rightarrow N^n$  una aplicación  $C^\infty$  entre dos variedades. Entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  forman un conjunto de medida de Lebesgue nula en  $N$ .

Si además la función  $f$  es propia tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.25.** [Sak96] Sea  $f : P^m \rightarrow \mathbb{R}$  una función propia  $C^\infty$  definida en una variedad riemanniana  $P^m$ . Para todo  $t$  perteneciente al conjunto de valores regulares de  $f$ ,  $f^{-1}(t)$  es una hipersuperficie compacta de  $P$  y el vector gradiente  $\nabla f(q)$  con  $f(q) = t$  es perpendicular a  $f^{-1}(t)$ . De hecho, para cualquier  $X \in T_q f^{-1}(t)$  tenemos  $\langle \nabla f, X \rangle = X_q f = 0$ .

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  denotamos

$$\begin{aligned} \Omega_t &:= \{p \in M : f(p) < t\} & V_t &:= \text{Vol}(\Omega_t) \\ \Gamma_t &:= \{p \in M : f(p) = t\} & A_t &:= \text{Vol}_{m-1}(\Gamma_t) \end{aligned}$$

**Nota 2.2.26.** Si  $t_0$  es un valor regular de  $f$ , por el teorema de la función inversa (cfr. [War83] [Mil63] [Sak96])  $\Omega_{t_0}$  es una variedad suave con borde y el borde ( $f^{-1}(a) \equiv \Gamma_{t_0}$ ) es una subvariedad suave de  $M$ .

Con estas definiciones podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.27.** [Sak96] [Cha84] (Fórmula de la co-área) Sea  $M$  una variedad riemanniana con métrica  $g$ . Sea  $f$  una función  $C^\infty$  definida en  $M$ . Para una función  $u$  integrable en  $M$  se tiene:

1. Si  $g_t$  es la métrica inducida en  $\Gamma_t := \{p \in M; f(p) = t\}$  desde  $g$ , entonces

$$\int_M u \|\nabla f\| d\nu_g = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma_t} u d\nu_{g_t} \quad (2.25)$$

2. si  $V_t := \text{Vol}(\Omega_t)$  es una función  $C^\infty$  con valor regular  $t$  de  $f$  tal que  $V_t < +\infty$  entonces

$$\frac{d}{dt} V_t = \int_{\Gamma_t} \|\nabla f\|^{-1} d\nu_{g_t} \quad (2.26)$$

Si  $S$  es una superficie propiamente inmersa en una variedad riemanniana  $N$ , usaremos esta proposición cuando la función  $f(p)$  es la función distancia extrínseca  $d_{o_N}^N(p)$ .

## 2.3 Superficies inmersas en una variedad de dimensión 3.

En este apartado vamos a revisar los conceptos vistos en el anterior para el caso de superficies inmersas en una variedad riemanniana tridimensional.

**Nota 2.3.1.** De aquí en adelante llamaremos superficie a una variedad conexa de dimensión 2 inmersa en una variedad riemanniana  $\mathbb{K}^3(-c^2)$  con curvatura seccional  $-c^2$ .

### 2.3.1 Norma de la Segunda Forma Fundamental y minimalidad.

Sea  $P^2 \hookrightarrow \mathbb{K}^3(-c^2)$  una superficie inmersa en  $\mathbb{K}^3(-c^2)$  con Segunda Forma Fundamental  $B^P$  y sea  $\{e_i\}_{i=1}^m$  una referencia ortonormal en el fibrado tangente de  $P$ ,  $TP$ . Calculamos la norma de la Segunda Forma Fundamental como

$$\begin{aligned} \|B^P\|^2 &= \sum_{i,j=1}^2 \langle B^P(e_i, e_j), B^P(e_i, e_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \|B^P(e_i, e_j)\|^2 = \\ &= \|B^P(e_1, e_1)\|^2 + 2\|B^P(e_1, e_2)\|^2 + \|B^P(e_2, e_2)\|^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Recordemos que las curvaturas principales se pueden calcular como

$$k_1 = B^P(e_1, e_1); \quad k_2 = B^P(e_2, e_2)$$

Si  $P^2$  es ahora una superficie minimal, entonces  $k_1 = -k_2$  y por tanto  $k_1^2 = k_2^2$ . Podemos escribir la norma de la Segunda Forma Fundamental como

$$\|B^P\|^2 = 2\|B^P(e_1, e_1)\|^2 + 2\|B^P(e_1, e_2)\|^2$$

Recuperando ahora la ecuación (2.21) para la curvatura seccional de una subvariedad  $P$  inmersa en una variedad riemanniana  $N$ , considerando  $P^2$  una superficie y  $N^3$  una variedad con curvatura seccional constante  $K^N = b$ , podemos escribir

$$K_{\Pi}^P = -c^2 + \frac{\langle B^P(e_1, e_1), B^P(e_2, e_2) \rangle - \|B^P(e_1, e_2)\|^2}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2}$$

y considerando finalmente que

$$\langle B^P(e_1, e_1), B^P(e_2, e_2) \rangle = -\|B^P(e_1, e_1)\|^2 \quad (2.28)$$

y que por ser  $\{e_i\}_{i=1}^2$  una b.o.n,

$$\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2 = 1 \quad (2.29)$$

queda:

$$K_{\Pi}^P = -c^2 - \frac{1}{2}\|B^P\|^2 \quad (2.30)$$

**Definición 2.3.2.** [dC92] Una inmersión  $\varphi : P \rightarrow N$  se dice que es **geodésica** en  $p \in P$  si la Segunda Forma Fundamental  $B^P$  es idénticamente nula en  $p$ .

**Definición 2.3.3.** [dC92] Una inmersión  $\varphi : P \rightarrow N$  es **totalmente geodésica** si es geodésica para todo  $p \in P$ .

**Proposición 2.3.4.** [dC92] Una inmersión  $\varphi : P \rightarrow N$  es geodésica si y sólo si toda geodésica  $\gamma$  de  $P$  es también una geodésica de  $N$ .

**Nota 2.3.5.** Notar que, por la expresión (2.30), si una superficie  $S$  está inmersa en  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$  entonces  $K_{\mathbb{H}}^S \leq 0$ , y si  $S$  es totalmente geodésica ( $B^S \equiv 0$ ) entonces  $K_{\mathbb{H}}^S = -c^2$ .

**Definición 2.3.6.** [dC92] Sea  $\gamma : I \rightarrow S$  una curva diferenciable en una superficie  $S$ . Definimos la **curvatura geodésica** de  $\gamma$  como

$$k_g = \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, i(\dot{\gamma}) \rangle}{\|\dot{\gamma}\|^3} \quad (2.31)$$

donde  $i$  es el giro de un vector  $\frac{\pi}{2}$  radianes en sentido positivo (antihorario) de manera que  $\{\dot{\gamma}, i(\dot{\gamma})\}$  forman una base de orientación compatible con la de  $S$ .

**Nota 2.3.7.** Considerando que la curva  $\gamma$  es una subvariedad inmersa en  $S$  y que  $\dot{\gamma}$  es un vector de  $T_p\gamma$ , entonces la curvatura geodésica es el cociente de la segunda forma fundamental de la inmersión relativa al vector normal  $\frac{i(\dot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|}$  y la primera forma fundamental:

$$k_g = \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, i(\dot{\gamma}) \rangle}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \frac{i(\dot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|} \rangle}{\|\dot{\gamma}\|^2}$$

### 2.3.1.1 Distancia extrínseca y bolas extrínsecas.

**Definición 2.3.8.** [Pal99] Sea  $P^m$  una subvariedad propiamente inmersa en una variedad riemanniana ambiente  $N^n$  completa. Sea  $o_N \in N^n$  un polo de  $N$ . Dado  $x \in N$ , denotamos por  $r(x) = d_{o_N}^N(x)$  la distancia en  $N$  desde  $o_N$  hasta el punto  $x$ , una función  $C^\infty$  en  $N - \{o_N\}$ . Como  $o_N$  es un polo, existe una única geodésica minimizante (por el teorema de existencia y unicidad) uniendo  $o_N$  con  $x$  que además realiza la distancia  $r(x)$ . Consideremos ahora la restricción de la distancia  $r(x)$  a la subvariedad  $P$ , ( $r_P : P \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ). Esta restricción es la **distancia extrínseca** desde  $o_N$  en  $P$ .

Ahora ya podemos introducir el concepto de *bola extrínseca*:

**Definición 2.3.9.** [Pal99] Sea  $\varphi : P \rightarrow N$  una inmersión propia de la subvariedad  $P$  en la variedad ambiente  $N$  con al menos un polo y sea este  $o_N \in N$ . Entonces definimos la **bola extrínseca** en torno a  $o_N$  de radio  $R$  como:

$$\begin{aligned} D_R(o_N) &= \{p \in P : r_P(p) < R\} = \{p \in P : d_{o_N}^N(\varphi(p)) < R\} = \varphi^{-1}(\varphi(P) \cap B_R^N(o_N)) = P \cap \varphi^{-1}(B_R^N(o_N)) \\ &= \varphi^{-1}(B_R^N(o_N)) \end{aligned}$$

donde  $B_R^N(o_N)$  es la bola geodésica abierta de radio  $R$  y centro en el polo  $o_N \in N$ .

**Nota 2.3.10.** También podemos definir la bola extrínseca como cualquiera de las componentes conexas de la intersección  $P \cap \varphi^{-1}(B_R^N(p))$  con  $p \in N$ . Pero si  $p$  no es un polo, entonces  $D_R(p)$  sólo podrá definirse para radios suficientemente pequeños.

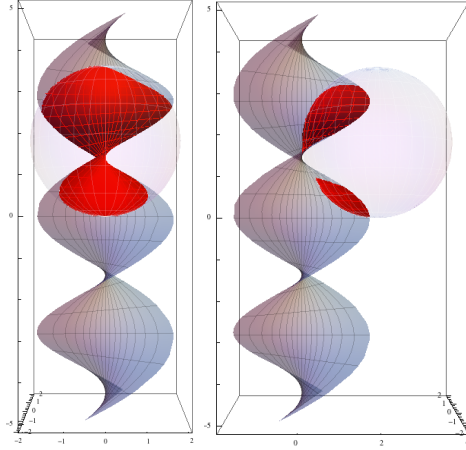


Figure 2.2: Dos bolas extrínsecas de radio 2 del helicoide inmerso en  $\mathbb{R}^3$ . La primera, centrada en el eje, tiene una componente conexas; la segunda está desplazada del eje y tiene dos componentes.

**Definición 2.3.11.** Definimos la esfera extrínseca  $\partial D_R(p)$  como:

$$\begin{aligned}\partial D_R(o_N) &= \{q \in P : d_{o_N}^N(\varphi(q)) = R\} = \varphi^{-1}(\varphi(P) \cap S_R^N(o_N)) \\ &= \varphi^{-1}(S_R^N(o_N))\end{aligned}$$

## 2.3.2 Característica de Euler.

### 2.3.2.1 La característica de Euler-Poincaré.

**Definición 2.3.12.** [Mas77] [Hsi81] Una **región**  $R \subset S$  se define como una unión de conjuntos abiertos en  $S$ , conexos y con frontera.

**Definición 2.3.13.** [Mas77] [Hsi81] Una región  $R \subset S$  es **regular** si es compacta y su frontera es una unión finita de curvas regulares cerradas y sin autointersecciones.

**Definición 2.3.14.** [Mas77] [Hsi81] Una región regular  $R \subset S$  es una región **simple** si es homeomorfa a un disco y su frontera es la imagen de una curva cerrada y simple diferenciable a trozos.

**Definición 2.3.15.** [Mas77] [Hsi81] Sea  $S$  una variedad 2-dimensional orientada. Una triangulación de una región regular  $R \subset S$  es una familia finita de conjuntos cerrados  $T_i$  homeomorfos a triángulos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^n$  tales que:

1.  $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$
2. Si  $i \neq j$  y  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  entonces los dos triángulos o bien comparten sólo una cara o bien sólo una arista.

**Definición 2.3.16.** [Hsi81] Dada una triangulación  $\mathcal{T}$  de una región regular  $R \subset S$  de una superficie  $S$ , denotamos por  $F$  al número de triángulos (caras), por  $E$  al número de lados (aristas) y por  $V$  al número de vértices de la triangulación. El número

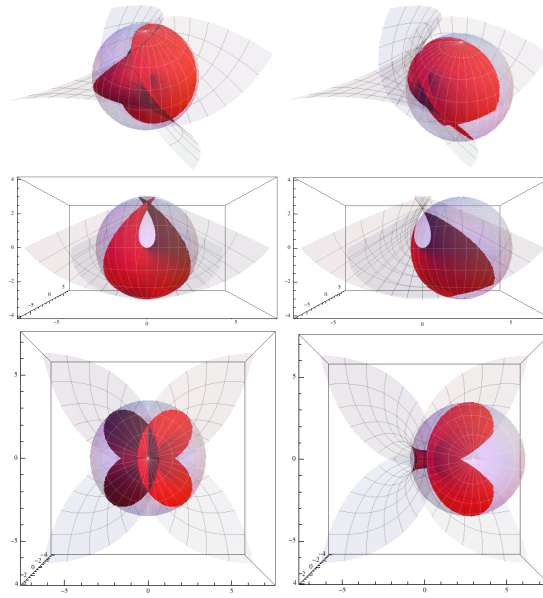


Figure 2.3: Bolas extrínsecas de la superficie de Enneper en  $\mathbb{R}^3$  obtenidas al intersectar con las bolas de radio  $R = 4$  centradas en el origen (izquierda) y en el punto  $(3,0,0)$  (derecha).

$$\chi = V - E + F \tag{2.32}$$

es llamado **característica de Euler-Poincaré** de la triangulación.

Dos condiciones especialmente útiles son que esta triangulación siempre existe en regiones regulares, y que la característica de Euler es independiente de la triangulación elegida, de manera que es una invariante topológica de la región  $R$ :

**Lemma 2.3.17.** [dC76] *Cualquier región regular de una superficie regular admite una triangulación.*

**Lemma 2.3.18.** [dC76] *Si  $R \subset S$  es una región regular de una superficie  $S$ , la característica de Euler-Poincaré no depende de la triangulación de  $R$ . Por tanto podemos denominarla en general por  $\chi(R)$*

### 2.3.2.2 Superficies y suma conexa.

**Definición 2.3.19.** [Mas77] *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies. Escogemos dos subconjuntos  $D_1 \subset S_1$  y  $D_2 \subset S_2$  tales que  $D_1$  y  $D_2$  sean homeomorfos a discos cerrados. Sea  $S'_i$  el complementario del interior de  $D_i$  en  $S_i$ . Escogemos un homeomorfismo  $h$  del contorno de  $D_1$  sobre el contorno de  $D_2$ . Entonces llamamos **suma conexa**  $S_1 \# S_2$  al espacio cociente de  $S'_1 \cup S'_2$  obtenido al identificar los puntos  $x$  con  $h(x)$  para todo  $x \in \partial D_1$ .*

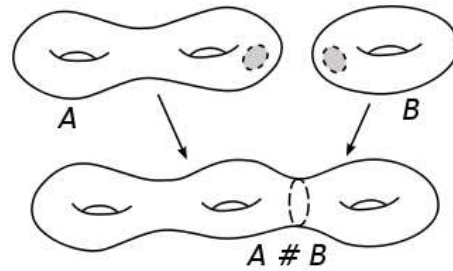


Figure 2.4: Suma conexa

**Nota 2.3.20.** *El tipo topológico de  $S_1 \# S_2$  no depende de la elección de los discos  $D_1, D_2$  ni del homeomorfismo  $h$ .*

### 2.3.2.3 Superficies compactas sin borde: género y característica de Euler-Poincaré.

Ya que vamos a centrarnos en las superficies compactas, es útil saber que podemos clasificarlas en tres grupos:

**Teorema 2.3.21.** *[Mas77] Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

El hecho de que la característica de Euler-Poincaré sea una invariante topológica nos indica que, si dos variedades son homeomorfas, tendrán la misma característica de Euler-Poincaré (pero no al revés). En el caso de variedades 2-dimensionales compactas y conexas tenemos:

**Teorema 2.3.22.** *[Mas77] Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies compactas. Entonces,  $S_1$  y  $S_2$  son homeomorfas si y sólo si sus características de Euler coinciden y las dos superficies son bien orientables o bien no orientables.*

Introducimos ahora el concepto de género:

**Definición 2.3.23.** *[Mas77] Decimos que una superficie  $S$  compacta es de **género**  $g$  si es homeomorfa a la suma conexa de  $g$  toros, o  $g$  planos proyectivos. En caso de ser homeomorfa a la esfera, es de género nulo.*

Y ya tenemos la relación entre el género y la característica de Euler de las superficies compactas:

**Proposición 2.3.24.** *[Mas77] Si  $S$  es una superficie compacta de género  $g$ , entonces la característica de Euler  $\chi(S)$  vale:*

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g & \text{si es orientable} \\ 2 - g & \text{si es no orientable} \end{cases} \quad (2.33)$$

### 2.3.2.4 Superficies compactas con borde: género y característica de Euler-Poincaré.

**Definición 2.3.25.** *[Mas77] Una superficie  $S$  con borde es un espacio Hausdorff en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una 2-bola de  $\mathbb{R}^2$  o bien al espacio*



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

El conjunto de todos los puntos que tienen entorno abierto homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  se llaman interior de la superficie, y el conjunto de los puntos que tienen un entorno abierto  $V$  tal que existe un homeomorfismo  $h$  de  $V$  sobre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$  con  $h(p) = (0, 0)$  se llama borde,  $\partial S$ , de la superficie.

**Nota 2.3.26.** La definición anterior hace referencia a una 2-variedad topológica con borde. Si queremos una definición de 2-variedad diferenciable con borde tenemos que sustituir la palabra homeomorfismo por difeomorfismo.

Imaginemos que tenemos una superficie compacta  $S$ , por ejemplo una esfera. Si trazamos sobre ella una cantidad finita  $c$  de discos cerrados y disjuntos y retiramos su interior nos queda una superficie con borde. Este borde tendrá  $\epsilon$  componentes conexas que serán homeomorfas a una circunferencia. Si realizamos el proceso inverso, escogiendo  $\epsilon$  discos cerrados y los adherimos identificando el borde de cada disco con una componente conexa del borde  $\partial S$ , obtenemos una superficie  $S^*$  que es de nuevo compacta. Notar que las superficies  $S$  y  $S^*$  son topológicamente iguales, dado que no importa la posición de los discos como vemos en el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.27.** [Mas77] Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes del borde, son ambas orientables o no orientables, y tienen la misma característica de Euler.

**Definición 2.3.28.** [Mas77] El género de una superficie compacta  $S$  con borde se define como el género de la superficie compacta  $S^*$  (sin borde) que se obtiene adhiriendo discos a las componentes conexas del borde de  $S$ .

**Teorema 2.3.29.** [Mas77] Sea  $S$  una superficie compacta con borde  $\partial S$ . Supongamos que  $\partial S$  tiene  $\epsilon$  componentes conexas. Sea  $S^*$  la superficie compacta sin borde que se obtiene al adherir un disco a cada una de las componentes conexas de  $\partial S$ . Entonces

$$\chi(S) = \chi(S^*) - \epsilon$$

Esto nos lleva al siguiente corolario que nos da la característica de Euler de una superficie compacta cuyo borde tiene  $\epsilon$  componentes conexas:

**Corolario 2.3.30.** Sea  $S$  una superficie compacta con borde. Entonces,

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g - \epsilon & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g - \epsilon & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases} \quad (2.34)$$

donde  $\epsilon$  es el número de componentes conexas del borde  $\partial S$  y  $g$  el género de la superficie  $S$ .

Veamos ahora las superficies no compactas.

### 2.3.2.5 Superficies no compactas: número de finales y topología finita.

**Definición 2.3.31.** [Tka94] Sea  $M$  una variedad diferenciable orientable. El **número de finales** es el invariante topológico  $\mathcal{K}(M)$  definido como el supremo de las componentes conexas con clausura no compacta de  $M \setminus F$ . Es decir, para todo conjunto compacto  $F \subset M$ , el número de componentes conexas distintas con clausura no compacta de  $M \setminus F$  es menor o igual a  $\mathcal{K}(M)$ .

**Definición 2.3.32.** [Oss86] [Whi87] Diremos que una superficie  $S$  no compacta es de tipo topológico finito sii es homeomorfa a  $S^* - \{p_1, \dots, p_k\}$  siendo  $S^*$  una superficie compacta sin borde. A los puntos  $p_i$  que extraemos de  $S^*$  se les denomina **finales** de la superficie  $S$ .

**Nota 2.3.33.** Se puede demostrar que el número de puntos  $p_i$  dados en la Definición 2.3.32 es el invariante topológico  $\mathcal{K}$ , número de finales de una superficie no compacta de tipo topológico finito, dado en la Definición 2.3.31 (cfr. [Tka94]).

Consideremos  $P^2$  una superficie no compacta de tipo topológico finito, y sea  $\mathcal{K}$  el número de finales de la superficie. Entonces por la Definición 2.3.32 es homeomorfa a una superficie  $S$ , resultado de eliminar un número  $\mathcal{K}$  de puntos a una superficie compacta  $S^*$ , es decir,  $P^2 \simeq S = S^* - \{p_1, \dots, p_k\}$ . Si en el lugar de cada uno de esos puntos extraídos adherimos un círculo  $S_i^1$  tenemos una superficie  $M$  compacta con borde (el borde será  $\partial M = \bigcup_{i=1}^k S_i^1$  y tendrá  $\mathcal{K}$  componentes conexas). Podemos decir entonces que  $S \simeq \text{int}(M)$  y, por tanto que

$$\chi(P^2) = \chi(S) = \chi(\text{int}(M))$$

donde, como  $M = \text{int}(M) \cup \partial M$ ,

$$\chi(M) = \chi(\text{int}(M)) + \chi(\partial M) - \chi(\text{int}(M) \cap \partial M)$$

pero, en primer lugar,  $\text{int}(M) \cap \partial M = 0$  y, en segundo lugar,  $\chi(S^1) = 0$ . Por tanto

$$\chi(M) = \chi(\text{int}(M))$$

es decir,

$$\chi(P^2) = \chi(M)$$

y como  $M$  es una superficie compacta con un borde de  $\mathcal{K}$  componentes conexas, podemos escribir una variación de la ecuación 2.3.30:

**Corolario 2.3.34.** Sea  $S$  una superficie no compacta con topología finita. Entonces,

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g - \mathcal{K} & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g - \mathcal{K} & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases} \quad (2.35)$$

Vamos a ver ahora un teorema fundamental de la Geometría Diferencial:

### 2.3.3 Teorema de Gauss-Bonnet

El Teorema de Gauss-Bonnet nos relaciona la característica de Euler de una superficie con su curvatura total y la curvatura geodésica de las componentes conexas de su borde.

**Teorema 2.3.35.** (Teorema de Gauss-Bonnet) [dC76] [Kre68]. Sea  $\Omega$  una región precompacta abierta de la variedad riemanniana de dimensión 2  $(M, g)$ . Si la frontera de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ , es suave y  $\Omega$  admite triangulación:

$$\int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \int_{\Omega} K_G dA = 2\pi\chi(\Omega) \quad (2.36)$$

donde  $K_G$  es la curvatura gaussiana,  $k_g$  la curvatura geodésica,  $\chi(\Omega)$  la característica de Euler de la región  $\Omega$  y tomamos la orientación de  $\partial\Omega$  parametrizada en la dirección de su orientación de Stokes (es decir, recorriendo la curva de manera que el dominio queda siempre a la izquierda).

### 2.3.4 Desigualdades isoperimétricas de las bolas extrínsecas en una subvariedad minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard.

**Teorema 2.3.36.** [Pal99] Sea  $P^m$  una subvariedad minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard  $N^n$  con curvatura seccional  $K_N \leq -c^2$ . Sea  $D_R$  la  $R$ -bola extrínseca en  $P^m$  con centro en un punto  $p$  que es también un polo en el espacio ambiente  $N$ . Entonces

$$\frac{\text{Vol}(\partial D_R)}{\text{Vol}(D_R)} \geq \frac{\text{Vol}(S_R^{-c^2, m-1})}{\text{Vol}(B_R^{-c^2, m})} \quad \forall R > 0 \quad (2.37)$$

donde  $B_R^{-c^2, m}$  y  $S_R^{-c^2, m-1}$  son el disco geodésico y la esfera geodésica, respectivamente, de radio  $R$  en  $\mathbb{K}^m(-c^2)$ .

**Definición 2.3.37.** Sea  $P^m \hookrightarrow \mathbb{K}^n(-c^2)$ , donde  $\mathbb{K}^n(-c^2)$  es una forma espacial real con curvatura seccional constante  $-c^2$ . Se define el **crecimiento del volumen extrínseco** como la función

$$f(t) := \frac{\text{Vol}(D_t^m)}{\text{Vol}(B_t^{-c^2, m})} \quad (2.38)$$

donde  $D_t$  es la bola extrínseca de radio  $t$  en  $P^m$  y  $B_t^{-c^2}$  es la bola geodésica de radio  $t$  en  $\mathbb{K}^n(-c^2)$ .

**Corolario 2.3.38.** [Pal99] [And84] Sea  $P^m$  una subvariedad minimal inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard  $N^n$  con curvatura seccional  $K_N \leq -c^2 \in \mathbb{R}$ . Entonces la función crecimiento del volumen es monótona no decreciente en  $t$ .

**Corolario 2.3.39.** [Pal99] Sea  $P^m$  una subvariedad minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard  $N^n$  con curvatura seccional  $K_N \leq -c^2$ . Sea  $D_R$  la  $R$ -bola extrínseca en  $P^m$  con centro en un punto  $p \in P$  que es también un polo en el espacio ambiente  $N$ . Entonces:

$$\text{Vol}(D_R) \geq \text{Vol}(B_R^{-c^2, m})$$

**Nota 2.3.40.** *Este último corolario sólo puede aplicarse si el punto que tomamos como centro de la bola extrínseca es también un punto de la subvariedad.*

## 2.4 El Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ .

Al comienzo de este capítulo dábamos una descripción del espacio de Minkowski. Ahora la retomaremos para definir el espacio hiperbólico ya que una forma de verlo es como hipersuperficie espacial, es decir, cuyos vectores tangentes son espaciales en todo punto, y totalmente geodésica de  $\mathbb{R}_1^4$  (ver [Pol94]). Ésta manera de verlo es el llamado modelo de Lorentz y es donde se ha generado la parametrización de la familia de Catenoides Esféricos propuestos por H. Mori en [Mor81] y doCarmo-Dajczer en [dCD83] y que estudiaremos en el capítulo siguiente. Sin embargo para determinadas operaciones resultará más cómodo trabajar en otro modelo. Trasladaremos la parametrización al modelo del semiespacio superior de  $\mathbb{H}^3$  y de esta manera obtendremos la parametrización propuesta por Bérard-SaEarp en [BSE10], demostrando que ambas son equivalentes. Vamos a dar una descripción de los dos modelos utilizados en esta memoria.

### 2.4.1 Modelos del Espacio Hiperbólico.

Al espacio hiperbólico también se le conoce como espacio de Lobachevsky por uno de los tres matemáticos, Bolyai, Gauss y Lobachevsky, que lo estudiaron por primera vez en el siglo XIX, aunque fue Poincaré quien desarrolló modelos concretos unas décadas más tarde. El espacio hiperbólico se puede modelar de distintas maneras, y la primera y más intuitiva es como hipersuperficie del espacio de Minkowski.

#### 2.4.1.1 El modelo de Lorentz ( $LM^n$ ).

Si definimos el espacio de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , como el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  con la métrica lorentziana, es decir,

$$\mathbb{R}_1^{n+1} := (\mathbb{R}_1^{n+1}, g_1) \text{ siendo } g_1 = \sum_{j=1}^n dx^j \otimes dx^j - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1}$$

donde  $\{x^j\}_{j=1}^{n+1}$  es un sistema de coordenadas en  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Podemos ver el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  como la hipersuperficie de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  simplemente conexa

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : g_1(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$$

con la métrica riemanniana  $g_h := g_1|_{\mathbb{H}^n}$ .

### 2.4.1.2 El modelo del semiespacio superior ( $UHM^n$ ).

El modelo del semiespacio superior (Upper Halfspace Model) se construye como un abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotado de una métrica proporcional a la euclídea y definido como:

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \quad g_h(x) = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \quad (2.39)$$

Este modelo nos será especialmente útil cuando trabajemos en dimensión 2, caso en el que también es conocido como semiplano de Poincaré o semiplano de Lobatchevsky. Este modelo se construye dotando a parte del plano complejo de una métrica equivalente.

### 2.4.1.3 Proyección entre modelos.

Las proyecciones entre los dos modelos dados la encontramos en [Pol94], y vienen dadas por:

$$\begin{cases} LM^{n+1} \rightarrow UHM^n & (x_0, \dots, x_n) \rightarrow \frac{(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)}{x_0 - x_n} \\ UHM^n \rightarrow LM^{n+1} & (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \frac{(1 + |y|^2, 2y_1, \dots, 2y_{n-1}, |y|^2 - 1)}{2y_n} \end{cases}$$

## 2.4.2 El modelo del semiplano de Poincaré. Notación compleja.

Identifiquemos  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ , siendo  $\mathbb{C}$  el plano complejo. De esta manera, dado un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  tendremos:  $x(p) = (x_1, x_2) \equiv \zeta(p) = \zeta_1 + i\zeta_2$ . Entonces, construimos el semiplano de Poincaré de la siguiente manera: Sea  $\mathbb{C}$  el plano complejo con coordenadas  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ , de manera que su conjugado es  $\bar{\zeta} = \zeta_1 - i\zeta_2$ . Entonces  $d\zeta = d\zeta^1 + id\zeta^2$  y  $d\bar{\zeta} = d\zeta^1 - id\zeta^2$  de manera que  $d\zeta \otimes d\bar{\zeta} = d\zeta^1 \otimes d\zeta^1 + d\zeta^2 \otimes d\zeta^2$ . Sea  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Dado un punto  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) \in \mathbb{C}^+$ , la métrica en el plano de Lobatchevsky se puede escribir entonces como

$$g_h(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} d\zeta \otimes d\bar{\zeta} \quad (2.40)$$

Con esto, una definición puede ser la siguiente:

**Definición 2.4.1.** Consideremos el semiplano complejo  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  con coordenada compleja  $\zeta = \zeta^1 + i\zeta^2$ . Definamos en  $z \in \mathbb{C}^+$  la métrica  $g_h(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} d\zeta \otimes d\bar{\zeta}$ . Al par  $(\mathbb{C}^+, g_h)$  se le denota como  $\mathbb{H}^2$ , y es el modelo del plano hiperbólico llamado modelo del semiplano de Poincaré o de Lobatchevsky, en notación compleja.

El hecho de considerar este modelo como parte del plano complejo simplifica la notación, y nosotros lo adoptaremos de aquí en adelante. Vamos a ver ahora varias propiedades métricas del modelo estrechamente relacionadas: las transformaciones de Moebius, los símbolos de Christoffel, las curvas geodésicas y finalmente la distancia y las bolas métricas.

### 2.4.2.1 Transformaciones de Moebius.

Sea  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  la unión del plano complejo con el punto en el infinito. Entonces,

**Definición 2.4.2.** Una transformación de Moebius es una función  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.41)$$

Las transformaciones básicas son:

$$\text{Inversión : } \left\{ I(z) = \frac{1}{z}; \quad a = d = 0, b = c = 1; \quad ad - bc = -1 \neq 0; \right\}$$

$$\text{Traslación : } \left\{ D(z) = z + k; \quad k \in \mathbb{R}; \quad a = 1, b = k, c = 0, d = 1; \quad ad - bc = 1 \neq 0; \right\}$$

$$\text{Rotación : } \left\{ R(z) = qz; \quad q = e^{i\theta}; \quad a = e^{i\theta}, b = c = 0, d = 1; \quad ad - bc = e^{i\theta} \neq 0; \right\}$$

$$\text{Homotecia : } \left\{ H(z) = kz; \quad k \in \mathbb{R}; \quad a = k, b = c = 0, d = 1; \quad ad - bc = k \neq 0; \right\}.$$

Se puede demostrar que toda transformación de Moebius es una combinación de estas cuatro.

#### Transformaciones de Moebius isométricas

Sea  $\mathbb{C}$  el cuerpo de los complejos y  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ , con coordenada compleja  $\zeta = \zeta^1 + i\zeta^2$ .

**Proposición 2.4.3.** Dada una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^+$  tal que  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ , usando la métrica dada en (2.40), la longitud hiperbólica de  $\gamma$  viene dada por

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}}{\gamma_2(t)} dt = \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\text{Im}(z)} \quad (2.42)$$

donde  $z = \gamma(t)$ .

Notar que entonces  $dl = \frac{|d\zeta|}{\text{Im}(z)}$ , es decir,  $dl^2 = \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\text{Im}(z)^2}$  que se corresponde con la métrica en el modelo del semiplano.

**Proposición 2.4.4.** [GR04] Sea la transformación de Moebius  $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$  dada por  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y tal que  $ad - bc \neq 0$ . Si en concreto  $ad - bc = 1$ , se cumple para toda curva  $\gamma$  que  $l(T(\gamma)) = l(\gamma)$ , donde  $l(\gamma)$  es la longitud hiperbólica de la curva.

Como las transformaciones de Moebius que cumplen la proposición anterior son biyecciones que conservan la longitud de todo el segmento transformado, por el teorema de Myers-Steenrod (ver [Pet98]) son isometrías y podemos enunciar:

**Proposición 2.4.5.** Sea  $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$  una transformación de Moebius con  $ad - bc = 1$ . Entonces,  $T$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$ .

Pero además las transformaciones de Moebius con  $ad - bc = 1$  actúan transitivamente sobre el fibrado tangente  $T\mathbb{H}^2$ :

**Proposición 2.4.6.** [dC92] Dados dos puntos  $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$  y dos vectores  $v_1 \in T_{p_1}\mathbb{H}^2$  y  $v_2 \in T_{p_2}\mathbb{H}^2$ , existe una transformación de Moebius isométrica  $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  tal que  $T(p_1) = p_2$  y  $T_*(v_1) = v_2$ , y ésta es única.

Por tanto, teniendo en cuenta que estas transformaciones conservan la orientación (invierten la orientación las transformaciones tales que  $ad - bc = -1$ , ver [GR04]) podemos concluir que

**Proposición 2.4.7.** [GR04] [dC92] *El grupo de isometrías que preservan la orientación en el semiplano de Poincaré es el grupo de transformaciones de Moebius isométricas que conservan la orientación y que viene dado por*

$$MO_{\mathbb{H}^2} = \left\{ \psi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 : \psi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \right\} \quad (2.43)$$

En concreto tenemos el siguiente caso:

**Proposición 2.4.8.** *Las rotaciones en  $\mathbb{H}^3$  de la forma*

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son transformaciones isométricas.

*Demostración.* Considerando el Teorema de Myers-Steenrod, basta demostrar que las longitudes se conservan. Consideremos una curva  $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in \mathbb{H}^3$ . Calculamos su longitud como

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

donde

$$\|\gamma'(t)\| = g_1((u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t)), (u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t))) = \frac{1}{u_3(t)} (u_1'^2(t) + u_2'^2(t) + u_3'^2(t))$$

Si ahora le aplicamos la rotación a la curva tenemos:

$$\gamma_{\mathcal{R}}(t) = \mathcal{R}(\theta) \cdot \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \cos \theta - u_2(t) \sin \theta \\ u_1(t) \sin \theta + u_2(t) \cos \theta \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \|\gamma'_{\mathcal{R}}(t)\| &= g_1(\gamma'_{\mathcal{R}}(t), \gamma'_{\mathcal{R}}(t)) \\ &= g_1((u_1'(t) \cos \theta - u_2'(t) \sin \theta, u_1'(t) \sin \theta + u_2'(t) \cos \theta, u_3'(t)), (u_1'(t) \cos \theta - u_2'(t) \sin \theta, u_1'(t) \sin \theta + u_2'(t) \cos \theta, u_3'(t))) \\ &= \frac{1}{u_3(t)} (u_1'^2(t) + u_2'^2(t) + u_3'^2(t)) = \|\gamma'(t)\| \end{aligned}$$

□

**Nota 2.4.9.** *Notar que, en la proposición anterior, la clave es que la transformación no afecta a la última coordenada, que participa de la métrica. Por este mismo motivo, una rotación similar en  $\mathbb{H}^2$ :*

$$\mathcal{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

*no conserva la distancia.*

### 2.4.2.2 Los símbolos de Christoffel.

Antes de ponernos a dar una expresión para las geodésicas debemos calcular los símbolos de Christoffel. Ya habíamos visto en (2.2) cómo calcularlos de una forma genérica; ahora vamos a dar una expresión concreta en nuestro modelo.

Dado un punto  $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ , la métrica del modelo viene dada por:

$$g_h(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} (d\zeta \otimes d\bar{\zeta}) = \frac{1}{y^2} ((d\zeta^1)^2 + (d\zeta^2)^2) = \frac{1}{y^2} ((dx)^2 + (dy)^2) \quad (2.44)$$

de manera que, considerando una base del tangente  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ ,

$$g_{h,ij}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Recordemos que calculamos los símbolos como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{h,mj}(z) + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{h,im}(z) - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{h,ij}(z) \right\} g_h^{km}(z) \quad (2.45)$$

Por tanto es directo calcular que

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}; \quad y \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}; \quad (2.46)$$

anulándose el resto.

### 2.4.2.3 Las curvas geodésicas.

#### Ecuación de una geodésica.

Ahora que ya conocemos el valor de los coeficientes de la conexión podemos utilizarlos para encontrar las geodésicas, y será casi tan sencillo como sustituir en las ecuaciones propias. Busquemos en primer lugar la ecuación de la geodésica, de forma  $\gamma(s) = \gamma_1(s) + i\gamma_2(s)$  que se extiende a lo largo del eje imaginario en  $\mathbb{C}^+$ . Dicha curva tendrá la forma:

$$\gamma(s) = i\gamma_2(s)$$

y deberá cumplir las ecuaciones de las geodésicas:



$$\ddot{\gamma}_i(s) + \Gamma_{ij}^k \cdot \dot{\gamma}_j(s) \cdot \dot{\gamma}_i(s) = 0; \quad i, j = 1, 2.$$

Sustituyendo los valores de los símbolos de Christoffel dados en (2.46) y la expresión de la curva, tenemos:

$$\ddot{\gamma}_2(s) - \frac{1}{\gamma_2(s)} \dot{\gamma}_2^2(s) = 0$$

Operando un poco y resolviendo la ecuación diferencial llegamos a la solución general  $\gamma_2(s) = e^{cs}$ . En concreto con  $c = 1$  para que  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ . Por tanto,

$$\gamma(s) = ie^s \tag{2.47}$$

Uno de los resultados más interesantes que se extraen del apartado 2.4.2.1 es que los elementos de  $MO_{\mathbb{H}^2}$  transforman al eje imaginario en rectas paralelas y semicircunferencias con centro en el eje real (ver [dC92], Cap. 1, ej. 4). De esto se deduce que, dada una geodésica de la forma  $\gamma(t) = ie^t$  (sobre el eje imaginario), se pueden generar otras que serán rectas paralelas y semicircunferencias mediante este grupo de transformaciones. Es más, podemos afirmar que éstas serán todas las geodésicas del plano hiperbólico, ya que podemos hacer que pasen por cualquier punto del plano en cualquier dirección. De forma general tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.10.** [dC92] *Las líneas perpendiculares al hiperplano  $x_n = 0$  y los círculos de  $\mathbb{H}^n$  cuyos planos son perpendiculares al hiperplano  $x_n = 0$  y cuyos centros están en ese plano son las **geodésicas** de  $\mathbb{H}^n$ .*

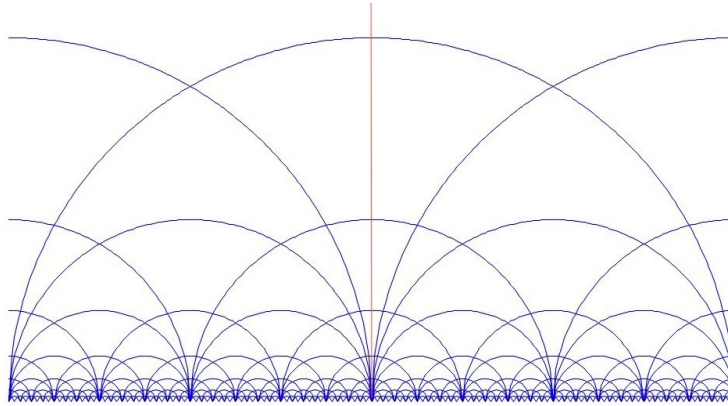


Figure 2.5: Geodésicas en el plano de Lobatchevski.

Considerando que es el *grupo de isometrías directas* definido más arriba el que permite generar todas estas geodésicas a partir de la primera, tenemos otras dos proposiciones:

**Proposición 2.4.11.** [dC92] *Dada la geodésica  $\gamma(t) = ie^t$ , todas las geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  son de la forma*

$$\beta(t) = \psi(\gamma(t)); \quad \psi \in MO_{\mathbb{H}^2}$$

*Demostración.* La demostración es directa a partir de la Proposición 2.4.6 y la Proposición 2.4.7.  $\square$

**Proposición 2.4.12.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ . Entonces existe una transformación  $\psi \in Mo_{\mathbb{H}^2}$  tal que  $\psi(z_1) = ip$  y  $\psi(z_2) = iq$  con  $p, q > 0$ .

*Demostración.* Por ser  $\mathbb{H}^2$  una variedad Cartan-Hadamard, dados dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ , va a existir siempre una geodésica  $\beta(t)$  uniéndolos. Por la Proposición 2.4.11, existe una transformación isométrica  $\psi \in Mo_{\mathbb{H}^2}$  tal que  $\psi(\gamma(t)) = \beta(t)$ , donde  $\gamma(t) = ie^t$ . Entonces, si  $\beta(t_1) = z_1$  y  $\beta(t_2) = z_2$ , tendremos que  $\psi(\gamma(t_1)) = \beta(t_1) = z_1$  y  $\psi(\gamma(t_2)) = \beta(t_2) = z_2$ , por lo que  $\psi^{-1}(z_1) = \gamma(t_1) = ie^{t_1}$  y  $\psi^{-1}(z_2) = \gamma(t_2) = ie^{t_2}$ .  $\square$

#### 2.4.2.4 Distancia y bolas extrínsecas.

En general, la manera de medir la distancia depende de la métrica y, en el espacio hiperbólico, ésta depende del modelo que sigamos. En este punto vamos a deducir la expresión de la distancia en el modelo del semiplano de Poincaré y con ella tendremos una expresión para las bolas métricas.

**Proposición 2.4.13.** [dC92] Sean  $u_1 = ia, u_2 = ib \in \mathbb{H}^2$ . La geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  dada por  $\gamma(t) = ie^t$  realiza la distancia entre ambos puntos, de manera que

$$l(\gamma) = \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (2.48)$$

*Demostración.* Sea  $\alpha : [c, d] \rightarrow \mathbb{H}^2$  una curva tal que  $\alpha(c) = ia$  y  $\alpha(d) = ib$ . Esta curva se puede descomponer en sus partes real e imaginaria:

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t)$$

Siguiendo la expresión (4.20), dado que  $\alpha : [c, d] \rightarrow \mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{H}^2$  tiene la métrica del semiplano de Poincaré definida en la fórmula (2.40) podemos calcular la longitud de la curva como

$$l(\alpha) = \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt$$

donde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{g_h(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t))} = \frac{1}{\alpha_2(t)} \sqrt{((\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2)}$$

de manera que

$$l(\alpha) = \int_c^d \frac{\sqrt{\alpha_1'^2(t) + \alpha_2'^2(t)}}{\alpha_2(t)} dt \geq \int_c^d \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} dt = \ln(\alpha_2(d)) - \ln(\alpha_2(c)) = \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Sea, por otra parte,

$$\begin{aligned}\gamma &: [c, d] \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\rightarrow \gamma(t) = ie^t\end{aligned}$$

la geodésica tal que  $\gamma(c) = ie^c = ia$  y  $\gamma(d) = ie^d = ib$  de manera que  $c = \ln(a)$  y  $d = \ln(b)$ . Si calculamos su longitud podemos comprobar que

$$l(\gamma) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \int_c^d dt = d - c = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

donde

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_h(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))} = \frac{1}{\gamma_2(t)} \sqrt{0^2 + e^{2t}} = \frac{1}{e^t} e^t = 1$$

□

Esto nos permite enunciar la proposición principal de este apartado:

**Proposición 2.4.14.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ . Entonces la distancia  $d(z_1, z_2)$  viene dada por

$$d(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}\right) \quad (2.49)$$

*Demostración.* Veamos en primer lugar que la expresión (2.49) es equivalente a la siguiente:

$$\cosh(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} \quad (2.50)$$

En primer lugar veamos que (2.49) implica (2.50). Para ello podemos tomar el coseno hiperbólico de la distancia en (2.49) y operar un poco:

$$\begin{aligned}\cosh(d(z_1, z_2)) &= \frac{1}{2} \left( \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} + \frac{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|} \right) = \frac{1}{2} 2 \frac{|z_1 - \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|z_1 - z_2|^2 + 2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}\end{aligned}$$

En segundo lugar veamos que (2.50) implica (2.49). Considerando la relación  $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x+1}\sqrt{x-1})$ , podemos operar,

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_2) &= \operatorname{arcosh}(\cosh(d(z_1, z_2))) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}\right) = \\
&= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \sqrt{2 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}} \sqrt{\frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}}\right) = \\
&= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \sqrt{\frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \frac{|z_1 - z_2|^4}{4\operatorname{Im}^2(z_1)\operatorname{Im}^2(z_2)}}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \sqrt{\frac{4|z_1 - z_2|^2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + |z_1 - z_2|^4}{4\operatorname{Im}^2(z_1)\operatorname{Im}^2(z_2)}}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \sqrt{\frac{|z_1 - z_2|^2}{4\operatorname{Im}^2(z_1)\operatorname{Im}^2(z_2)} (4\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + |z_1 - z_2|^2)}\right)
\end{aligned}$$

Notar que  $|z_1 + \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 4\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_2) &= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)} + \sqrt{\frac{|z_1 - z_2|^2}{4\operatorname{Im}^2(z_1)\operatorname{Im}^2(z_2)} |z_1 - \bar{z}_2|^2}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|(|z_1 - z_2| + |z_1 - \bar{z}_2|)}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + |z_1 - z_2|(|z_1 - z_2| + |z_1 - \bar{z}_2|)}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) + |z_1 - z_2|(|z_1 - z_2| + |z_1 - \bar{z}_2|)}{\frac{1}{2}(|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)}\right)
\end{aligned}$$

Como  $|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|)(|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|)$ , podemos sustituir en la ecuación y eliminar el factor  $(|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|)$ , quedando

$$d(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|) + |z_1 - z_2|}{\frac{1}{2}(|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|)}\right) = \ln\left(\frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}\right)$$

Una vez visto que ambas expresiones son equivalentes, demostraremos que (2.50) es cierta, aceptando el resultado como válido también para la expresión (2.49). Veamos que, dados dos complejos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+$  y una transformación isométrica  $\psi \in Mo_{\mathbb{H}^2}$ , se cumple que

$$\begin{aligned}
|\psi(z_1) - \psi(z_2)|^2 &= \left|\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}\right|^2 = \left|\frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}\right|^2 = \\
&= \left|\frac{z_1(ad - bc) + z_2(bc - ad)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}\right|^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

donde hemos aplicado la propiedad  $ad - bc = 1$  y, como

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) + b}{c(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) + d} = \\
&= \frac{(a(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) + b)(c(\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)) + b)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}
\end{aligned}$$

se da que  $\operatorname{Im}(\psi(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$ , de donde podemos escribir:

$$Im(\psi(z_1))Im(\psi(z_2)) = \frac{Im(z_1)Im(z_2)}{|cz_1 + d|^2|cz_2 + d|^2} \quad (2.52)$$

Con (2.51) y (2.52) tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{|\psi(z_1) - \psi(z_2)|^2}{2Im(\psi(z_1))Im(\psi(z_2))} &= 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{|cz_1 + d|^2|cz_2 + d|^2} \frac{|cz_1 + d|^2|cz_2 + d|^2}{2Im(z_1)Im(z_2)} = \\ &= 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Im(z_1)Im(z_2)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Recordemos ahora que, por la proposición 2.4.12, dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ , existe una transformación isométrica  $\psi \in Mo_{\mathbb{H}^2}$  tal que  $\psi(z_1) = ip$  y  $\psi(z_2) = iq$  con  $p, q > 0$ . Además, por definición,  $d(z_1, z_2) = d(\psi(z_1), \psi(z_2)) = d(ip, iq)$ . Por la proposición 2.48, esta distancia es conocida:  $d(ip, iq) = \ln\left(\frac{q}{p}\right)$ . Es decir, que

$$\begin{aligned} \cosh(d(z_1, z_2)) &= \cosh(d(\psi(z_1), \psi(z_2))) = \cosh(d(ip, iq)) = \frac{\frac{q}{p} + \frac{p}{q}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq} = \\ &= 1 + \frac{|ip - iq|^2}{2pq} = 1 + \frac{|\psi(z_1) - \psi(z_2)|^2}{2Im(\psi(z_1))Im(\psi(z_2))} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalmente, por (2.53)

$$\cosh(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Im(z_1)Im(z_2)}$$

como queríamos. Además, por ser equivalentes,

$$d(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}\right)$$

□

### Bolas extrínsecas.

Dada una curva parametrizada como  $\alpha(s) = \alpha_1(s) + i\alpha_2(s) \in \mathbb{H}^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ , obtendremos las bolas extrínsecas de radio  $R$  centradas en un punto  $\mathcal{O} (D_R(\mathcal{O}))$  como el conjunto de puntos de la curva tales que su distancia al punto es menor o igual a este radio. Es decir,

$$d(\mathcal{O}, \alpha(s)) = \log \frac{|\alpha(s) - \bar{\mathcal{O}}| + |\alpha(s) - \mathcal{O}|}{|\alpha(s) - \bar{\mathcal{O}}| - |\alpha(s) - \mathcal{O}|} \leq R$$

### 2.4.3 Bolas y esferas geodésicas en el hiperbólico.

Dejamos ya el plano hiperbólico para tratar con otras dimensiones. Los conceptos de bola y esfera geodésica habían quedado definidos en el punto 2.1.4, y lo que vamos a ver ahora es cómo calcular su volumen. Siguiendo [Gra04] podemos afirmar que, si  $B_r^{b,m}$  es la bola geodésica de radio  $r$  en un ambiente con curvatura seccional constante igual a  $b$  y dimensión  $m$ , y  $S_r^{0,m}$  es la esfera euclídea unitaria de dimensión  $m$ , entonces

$$Vol(B_r^{b,m}) = Vol(S_1^{0,m-1}) \int_0^r (\varphi_b(t))^{m-1} dt \quad (2.55)$$

y el volumen de la esfera geodésica viene dado por

$$\frac{d}{dr} \text{Vol}(B_r^{b,m}) = \text{Vol}(S_r^{b,m-1})$$

donde

$$\varphi_b(t) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{b}t}{\sqrt{b}} & \text{si } b > 0 \\ t & \text{si } b = 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-b}t}{\sqrt{-b}} & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

En el caso hiperbólico,  $b = -1$ , calculamos el volumen de una bola geodésica de dimensión 2 y radio  $r$  como

$$\text{Vol}(B_r^{-1,2}) = 2\pi \int_0^r \sinh(t) dt = 2\pi (\cosh(r) - 1) \quad (2.57)$$

Y derivando obtenemos el volumen de la esfera geodésica de radio  $r$ :

$$\frac{d}{dr} \text{Vol}(B_r^{-1,2}) = \text{Vol}(S_r^{-1,1}) = 2\pi \sinh(r)$$

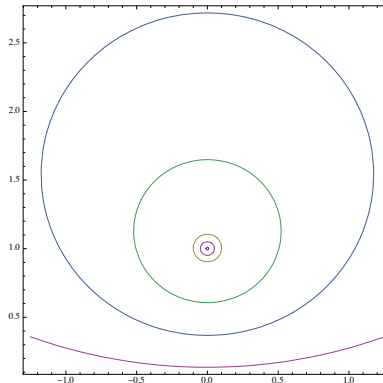


Figure 2.6: Bolas métricas en el semiplano de Poincaré de radios  $R = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1$  y  $2$  centradas en  $\mathcal{O} = (0, 1)$ .

Con esta hemos visto todas las propiedades que necesitaremos en los dos apartados de cálculos, el primero para obtener la parametrización de la familia de catenoides, y el segundo para estudiar la desigualdad de Chern-Osserman sobre las superficies.

## Capítulo 3

# Catenoides esféricos en el espacio hiperbólico.

### 3.1 Los catenoides esféricos.

Es bien sabido que los catenoides son hipersuperficies de rotación minimales y completas en  $\mathbb{R}^3$  y, por su simplicidad, se utilizan muchas veces como modelo o ejemplo, pero cuando buscamos una superficie análoga en el espacio hiperbólico, la cosa se complica. Estudiamos la representación de Enneper-Weierstrass ([Oss86], [Pre10]) y la representación de Bryant ([RS98], [UY93]), y encontramos que podemos *trasladar* los catenoides de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{H}^3$ . Sin embargo, estas dos técnicas sólo son válidas para superficies con curvatura media constante  $c$  (los llamados *CMC*  $-c$ ) inmersas en una variedad con curvatura  $-c^2$ . El resultado en el hiperbólico son, en consecuencia, los conocidos como *catenoid cousins*, una familia de hipersuperficies con curvatura media constante igual a 1 (*CMC*  $-1$ ). Más recientemente ([Kok97]) se han desarrollado técnicas similares a la de Weierstrass para representar superficies minimales en el hiperbólico, pero su comprensión queda fuera del alcance de este trabajo. En nuestra búsqueda de una superficie minimal de revolución en  $\mathbb{H}^3$  encontramos los Catenoides Esféricos, de manera aislada en [Mor81] y [BSE10] o como parte de una familia de superficies minimales de revolución junto con los catenoides hiperbólicos y los parabólicos en [dCD83].

Lo que vamos a hacer en este capítulo es reproducir y explicar la obtención del catenoide esférico en el espacio de Minkowski siguiendo el procedimiento descrito por Mori en [Mor81]: definiremos una curva generatriz en un plano de  $\mathbb{H}^3$ , la rotaremos y buscaremos la expresión de su curvatura media; impondremos la minimalidad y con ello completaremos la parametrización buscada. Finalmente demostraremos que la superficie obtenida es equivalente a las expuestas en los otros dos artículos.

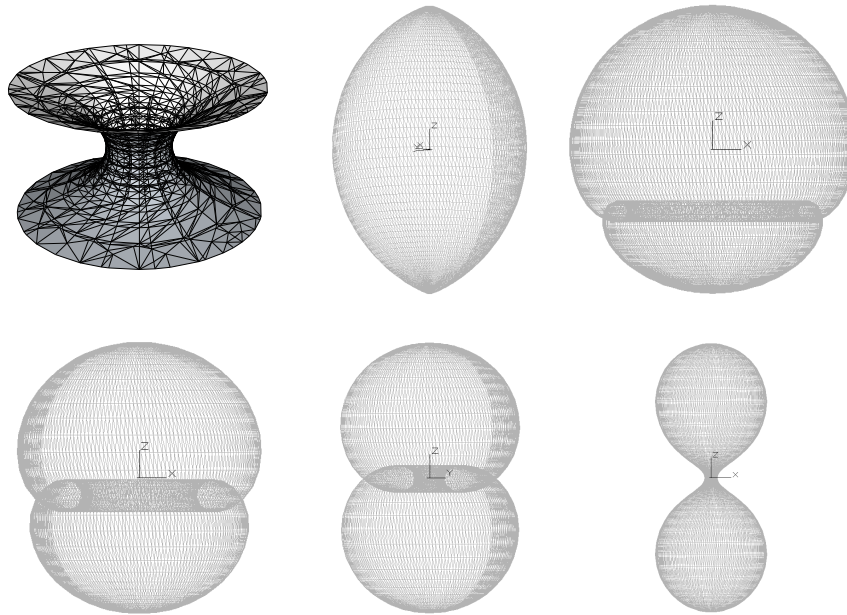


Figure 3.1: Catenoide en  $\mathbb{R}^3$  y *catenoid cousins* en  $\mathbb{H}^3$ .

### 3.2 Superficies de revolución en el espacio de Minkowski.

Recordemos que el espacio-tiempo de Minkowski es el espacio semieuclicédeo  $\mathbb{R}_1^4$  que se obtiene al dotar al conjunto  $\mathbb{R}^4$  de una métrica lorentziana:

$$\mathbb{R}_1^4 := (\mathbb{R}^4, g_1) \text{ siendo } g_1 = -dx^1 \otimes dx^1 + \sum_{i=2}^4 dx_i \otimes dx^i \quad (3.1)$$

Dados dos vectores  $v, w \in \mathbb{R}^4$ , representaremos el producto  $g_1(v, w)$  como  $\langle v, w \rangle_1$ . Podemos definir el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  como la hipersuperficie de  $\mathbb{R}_1^4$  simplemente conexa tal que

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}_1^4 : \langle x, x \rangle_1 = -1, x_1 > 0\}$$

con la métrica riemanniana  $g_1|_{\mathbb{H}^3}$ . Consideremos una curva diferenciable  $\Gamma$  inmersa en  $\mathbb{R}_1^4$  como

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^4 \\ s &\rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para que esté contenida en  $\mathbb{H}^3$  y parametrizada por su longitud de arco necesitamos que cumpla:

$$-x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = -1, \quad x(s) \geq 1 \quad (3.3)$$

y



$$-x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \quad (3.4)$$

respectivamente, donde se ha utilizado la métrica  $g_1$  definida en (3.1). Por otra parte, la transformación dada por

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

transforma isométricamente a  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  dejando fijo el plano  $\{x_1, x_2, 0, 0\}$ . En concreto  $\mathcal{R}_\theta$  es una rotación, de manera que al aplicársela a la curva  $\Gamma$  obtenemos una superficie de revolución  $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}_1^4$ . La función resultante,  $f(s, \theta) = \mathcal{R}_\theta \cdot \gamma(s)$ , nos da la inmersión:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4 \\ (s, \theta) &\rightarrow f(s, \theta) = (x(s), y(s), z(s) \cos(\theta), z(s) \sin \theta); \quad s \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.5)$$

de manera que  $\Sigma := f(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$  y donde, por regularidad de la superficie, asumimos que  $z > 0$ .

Lo que vamos a hacer ahora es calcular la Primera y Segunda Formas Fundamentales de esta inmersión.

### Métrica.

La métrica que heredará la superficie de  $\mathbb{R}_1^4$  la calcularemos mediante los coeficientes de su primera forma fundamental. Dados dos vectores  $\{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}_p \in T_p \Sigma$  del fibrado tangente de  $\Sigma$  en el punto  $p$ , y dada la inmersión  $f : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}_1^4$ , calculamos el *push-forward* de los vectores (su inmersión en  $\mathbb{R}_1^4$  mediante la inmersión  $f$ , lo que denotamos como  $f_*$ ) como  $f_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial f}{\partial s} = f_s(s, \theta)$  y  $f_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial f}{\partial \theta} = f_\theta(s, \theta)$ . Para ello, denotamos  $\{f_s(s, \theta), f_\theta(s, \theta)\}$  una base del tangente  $T_{f(s, \theta)} \Sigma$  con:

$$\begin{aligned} f_s(s, \theta) &:= (x'(s), y'(s), z'(s) \cos(\theta), z'(s) \sin \theta) \\ f_\theta(s, \theta) &:= (0, 0, -z(s) \sin(\theta), z(s) \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con esta base y la métrica en  $\mathbb{R}_1^4$  es directo calcular los coeficientes de la primera forma fundamental (IFF):

$$\begin{aligned} g_{ss} &= \langle f_s, f_s \rangle_1 = -x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \\ g_{s\theta} &= g_{\theta s} = \langle f_s, f_\theta \rangle_1 = 0 \\ g_{\theta\theta} &= \langle f_\theta, f_\theta \rangle_1 = z^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

### Vector normal unitario.

Sea  $\mu : \Sigma \rightarrow T\mathbb{H}^3$  un campo vectorial unitario definido como:

$$\mu(s, \theta) := \begin{pmatrix} y'(s)z(s) - y(s)z'(s) \\ x'(s)z(s) - x(s)z'(s) \\ (x(s)y'(s) - x'(s)y(s)) \cos \theta \\ (x(s)y'(s) - x'(s)y(s)) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Se puede comprobar que  $\mu$  es un campo vectorial normal a  $\Sigma$ :

$$\langle f_s(s, \theta), \mu(s, \theta) \rangle_1 = -x'(y'z - yz') + y'(x'z - xz') + z'(xy' - x'y) = 0$$

$$\langle f_\theta(s, \theta), \mu(s, \theta) \rangle_1 = -z(xy' - x'y) \sin \theta \cos \theta + z(xy' - x'y) \sin \theta \cos \theta = 0$$

**Nota 3.2.1.** Además se puede comprobar fácilmente que  $\langle f(s, \theta), \mu(s, \theta) \rangle_1 = -x(y'z - yz') + yx'z - xz' + z(xy' - x'y) = 0$ .

### Segunda Forma Fundamental.

Denotemos  $\nabla$  la derivada covariante con respecto a la métrica  $g_1$  en  $\mathbb{R}_1^4$ ,  $\nabla^H$  la derivada covariante con respecto a la métrica inducida en  $\mathbb{H}^3$  y  $\nabla^\Sigma$  la derivada covariante sobre la superficie  $\Sigma$ . Dado un punto  $x \in \mathbb{H}^3$ , llamamos  $\nu(x)$  al vector de posición de  $x$  respecto al origen de  $\mathbb{R}_1^4$ , que es un campo de vectores normales a  $\mathbb{H}^3$  en  $\mathbb{R}_1^4$ . Dados dos campos vectoriales  $X, Y \in T\Sigma$ , denotamos por  $B(X, Y)$  la segunda forma fundamental de  $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}_1^4$  con respecto a los campos  $X, Y$ . Entonces,

**Proposición 3.2.2.** Considerando que  $\Sigma$  está localmente embebida en  $\mathbb{H}^3$  en el sentido dado por las notas 2.2.7 y 2.2.8, tenemos:

$$\nabla_X^H Y = \nabla_X^\Sigma Y + \langle B(X, Y), \mu \rangle \mu \quad (3.9)$$

$$\nabla_X^H \eta = -S_\mu(X) \quad (3.10)$$

$$\nabla_X Y = \nabla_X^H Y + \langle X, Y \rangle \nu \quad (3.11)$$

donde  $X, Y \in T\Sigma$  y  $S_\mu$  es un campo tensorial tipo  $(1,1)$  en  $\Sigma$  correspondiente a  $\mu$  tal que  $\langle S_\mu(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \mu \rangle = H(X, Y)$  (Aplicación de Weingarten).

*Demostración.* Es directo ver que 3.9 y 3.10 son las ecuaciones de Gauss y de Weingarten. Para la ecuación 3.11, multiplicando la parte izquierda por el vector posición tenemos:

$$\langle \nabla_X Y, \nu(x) \rangle_1 = X \cdot g_1 \langle Y, \nu(x) \rangle_1 - \langle Y, X \nu(x) \rangle_1 = -\langle Y, Xx \rangle_1 = -\langle Y, X \rangle_1$$

Donde hemos utilizado la propiedad:  $Xx \equiv X$  (cfr. [KN96]). Si ahora aplicamos el mismo producto en la parte derecha de 3.11 tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^H Y, \nu(x) \rangle_1 + \langle X, Y \rangle_1 \langle \nu(x), \nu(x) \rangle_1 &= \langle X, Y \rangle_1 \langle \nu(x), \nu(x) \rangle_1 \\ &= \langle X, Y \rangle_1 (-1) = -\langle X, Y \rangle_1 \end{aligned}$$

De donde se ve que podemos escribir la componente normal de  $\nabla_X Y$  como  $-\langle X, Y \rangle \nu$ . Recordemos ahora que los símbolos de Christoffel se pueden calcular como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (3.12)$$

Pero la métrica en  $\mathbb{R}_1^4$ , al igual que en  $\mathbb{H}^3$ , tiene coeficientes constantes, por lo que todos los símbolos se anularán. Como consecuencia, cuando consideremos  $\mathbb{R}_1^4$  como variedad ambiente de la superficie, tendremos que

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k} \equiv 0 \quad \forall i, j, k = 1, \dots, 4 \quad (3.13)$$

(y lo mismo sucederá con  $\mathbb{H}^3$  en el modelo de Lorentz:  $\nabla_{\partial_{x_i}}^H \partial_{x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k} \equiv 0 \quad \forall i, j, k$ ).

□

Ya estamos en condiciones de calcular la Segunda Forma Fundamental de la inmersión. Explicaremos la primera componente y el resto de obtendrá de forma análoga.

**Proposición 3.2.3.**

$$\|B^\Sigma(f_s, f_s)\| = \langle \nu, \nabla_{f_s} f_s \rangle_1 \quad (3.14)$$

*Demostración.* Por la propiedad 2.18 de la aplicación de Weingarten podemos afirmar que:

$$\|B^\Sigma(f_s, f_s)\| = \langle B^\Sigma(f_s, f_s), \mu \rangle_1 = \langle S_\mu(f_s), f_s \rangle_1$$

Por 3.10,

$$\langle S_\mu(f_s), f_s \rangle_1 = -\langle \nabla_{f_s}^H \mu, f_s \rangle_1$$

y por 3.11,

$$\begin{aligned} &= -\langle \nabla_{f_s} \nu - \langle f_s, \nu \rangle_1 \nu, f_s \rangle_1 = -\langle \nabla_{f_s} \nu, f_s \rangle_1 + \langle f_s, \mu \rangle_1 \langle \mu, f_s \rangle_1 = -\langle \nabla_{f_s} \nu, f_s \rangle_1 = \\ &= -f_s \langle \nu, f_s \rangle_1 + \langle \nu, \nabla_{f_s} f_s \rangle_1 = \langle \nu, \nabla_{f_s} f_s \rangle_1 \end{aligned}$$

Calcularemos la componente utilizando esta propiedad. Si la desarrollamos, denotando como  $x'_i$  a las derivadas de  $x_i$  con respecto de  $s$ , tenemos,

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_s} f_s &= \nabla_{f_s} (x' \partial_{x_1} + y' \partial_{x_2} + z' \cos \theta \partial_{x_3} + z' \sin \theta \partial_{x_4}) = \\
&= x'' \partial_{x_1} + x' \nabla_{f_s} \partial_{x_1} + y'' \partial_{x_2} + y' \nabla_{f_s} \partial_{x_2} + \\
&+ z'' \cos \theta \partial_{x_3} + z' \cos \theta \nabla_{f_s} \partial_{x_3} + z'' \sin \theta \partial_{x_4} + z' \sin \theta \nabla_{f_s} \partial_{x_4} = \\
&= x'' \partial_{x_1} + y'' \partial_{x_2} + z'' \cos \theta \partial_{x_3} + z'' \sin \theta \partial_{x_4} + \\
&+ x' \nabla_{f_s} \partial_{x_1} + y' \nabla_{f_s} \partial_{x_2} + z' \cos \theta \nabla_{f_s} \partial_{x_3} + z' \sin \theta \nabla_{f_s} \partial_{x_4}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por 3.13 tenemos que

$$\nabla_{f_s} \partial_{x_i} = x' \nabla_{\partial_{x_1}} \partial_{x_i} + y' \nabla_{\partial_{x_2}} \partial_{x_i} + z' \cos \theta \nabla_{\partial_{x_3}} \partial_{x_i} + z' \sin \theta \nabla_{\partial_{x_4}} \partial_{x_i} \equiv 0$$

Sustituyendo en 3.15 tenemos:

$$\nabla_{f_s} f_s = (x'', y'', z'' \cos \theta, z'' \sin \theta) \tag{3.16}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\langle \mu, \nabla_{f_s} f_s \rangle_1 &= \langle (y'z - yz', x'z - xz', (xy' - x'y) \cos \theta, (xy' - x'y) \sin \theta), (x'', y'', z'' \cos \theta, z'' \sin \theta) \rangle_1 \\
&= -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y)
\end{aligned}$$

y (3.14) queda:

$$\|B^\Sigma(f_s, f_s)\| = -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y) \tag{3.17}$$

El resto de coeficientes se obtienen de la misma manera:

$$\|B^\Sigma(f_\theta, f_\theta)\| = \langle B^\Sigma(f_\theta, f_\theta), \mu \rangle_1 = \langle S_\mu(f_\theta), f_\theta \rangle_1 = -z(xy' - x'y) \tag{3.18}$$

$$\|B^\Sigma(f_s, f_\theta)\| = \|B^\Sigma(f_\theta, f_s)\| = \langle B^\Sigma(f_\theta, f_s), \mu \rangle_1 = \langle S_\mu(f_\theta), f_s \rangle_1 = 0 \tag{3.19}$$

□

### Curvatura Media.

Siguiendo la definición de curvatura media dada en (2.24) tenemos que

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(S_\eta)$$

Calculamos la traza de  $S_\eta$  como

$$\text{tr}(S_\eta) = \langle S_\eta(f_s), f_s \rangle_1 \frac{1}{\|f_s\|^2} + \langle S_\eta(f_\theta), f_\theta \rangle_1 \frac{1}{\|f_\theta\|^2} = \frac{\|B^\Sigma(f_s, f_s)\|}{\|f_s\|^2} + \frac{\|B^\Sigma(f_\theta, f_\theta)\|}{\|f_\theta\|^2}$$

para lo que utilizaremos 3.17 y 3.18:

$$\begin{aligned} \text{tr}(S_\eta) &= \frac{\|B^\Sigma(f_s, f_s)\|}{\|f_s\|^2} + \frac{\|B^\Sigma(f_\theta, f_\theta)\|}{\|f_\theta\|^2} = \\ &= -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y) - z(xy' - x'y)\frac{1}{z^2} = \\ &= -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y) - \frac{1}{z}(xy' - x'y) \end{aligned}$$

De donde la curvatura media puede expresarse como,

$$H = \frac{1}{2} \left( -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y) - \frac{1}{z}(xy' - x'y) \right) \quad (3.20)$$

Si queremos que la superficie sea minimal la curvatura media ha de ser nula, lo que nos lleva a la siguiente expresión:

$$z^2(x'y'' - x''y') - zz'(xy'' - x''y) + (xy' - x'y)(zz'' - 1) = 0 \quad (3.21)$$

Esta es la ecuación a partir de la cual obtendremos la parametrización de la familia de superficies minimales de revolución.

### 3.3 Superficies minimales de revolución en $\mathbb{H}^3$

Vamos a ver ahora qué deben cumplir las funciones  $x(s), y(s), z(s)$  para que la superficie de revolución  $\Sigma := f(\mathbb{R} \times [0, 2\pi))$  definida en (3.5) sea minimal. Para ello estudiaremos antes otras dos ecuaciones, la (3.3) y la 3.4), del apartado anterior, que garantizan ciertas propiedades de la generatriz. En primer lugar, para que la curva generatriz pertenezca efectivamente a  $\mathbb{H}^3$ , deberá satisfacer la ecuación (3.3). Es fácil comprobar que esto se consigue definiendo  $x(s), y(s)$  como

$$x(s) = (1 + z^2(s))^{1/2} \cosh(\phi(s)); \quad y(s) = (1 + z^2(s))^{1/2} \sinh(\phi(s)) \quad (3.22)$$

ya que al sustituir en (3.3):

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 + z^2 &= -(1 + z^2) \cosh^2(\phi) + (1 + z^2) \sinh^2(\phi) + z^2 = \\ &= (1 + z^2)(\sinh^2(\phi) - \cosh^2(\phi)) + z^2 = -(1 + z^2) + z^2 = -1 \end{aligned}$$

En segundo lugar, para tener una curva generatriz parametrizada por longitud de arco, se debe satisfacer la ecuación (3.4). Lo que vamos a hacer es derivar los términos y dejarlos en función de  $z(s)$  de acuerdo con (3.22):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{zz'}{(1 + z^2)^{1/2}} \cdot \cosh(\phi) + (1 + z^2) \sinh(\phi) \cdot \phi' \\ x'^2 &= \frac{z^2 z'^2}{(1 + z^2)} \cdot \cosh^2(\phi) + (1 + z^2)^2 \sinh^2(\phi) \cdot \phi'^2 \\ &\quad + 2 \cdot \frac{zz'}{(1 + z^2)^{1/2}} \cdot (1 + z^2) \cdot \cosh(\phi) \cdot \sinh(\phi) \cdot \phi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{zz'}{(1+z^2)^{1/2}} \cdot \sinh(\phi) + (1+z^2) \cosh(\phi) \cdot \phi' \\
y'^2 &= \frac{z^2 z'^2}{(1+z^2)} \cdot \sinh^2 \phi + (1+z^2)^2 \cosh^2(\phi) \cdot \phi'^2 \\
&\quad + 2 \cdot \frac{zz'}{(1+z^2)^{1/2}} \cdot (1+z^2) \cdot \sinh(\phi) \cdot \cosh(\phi) \cdot \phi'
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.4) tenemos:

$$-x'^2 + y'^2 + z'^2 = -\frac{z^2 z'^2}{(1+z^2)} + (1+z^2) \cdot \phi'^2 + z'^2$$

que tiene que ser igual a uno, es decir:

$$-\frac{z^2 z'^2}{1+z^2} + (1+z^2) \cdot \phi'^2 + z'^2 = 1$$

Esto nos determinará la expresión de  $\phi(s)$  en función de  $z(s)$ :

$$\begin{aligned}
\phi'^2 &= \frac{z^2 z'^2}{(1+z^2)^2} - \frac{z'^2}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^2} \\
&= \frac{z^2 z'^2 - z'^2(1+z^2) + 1 + z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1 + z^2 - z'^2}{(1+z^2)^2}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\phi(s) = \epsilon \int_0^s \frac{\sqrt{1 + z^2(t) - z'^2(t)}}{1 + z^2(t)} dt \quad (3.23)$$

Donde  $\epsilon = \pm 1$  y asumiremos, sin pérdida de generalidad,  $\epsilon = 1$ .

### La función $z(s)$

Ahora ya lo tenemos todo en función de  $z(s)$ . Para garantizar que la superficie generada será minimal, sus términos deberán satisfacer la ecuación (3.21) de minimalidad. Lo que haremos es expresar en función de  $z(s)$  y sus derivadas cada uno de los términos de la ecuación. Utilizando cálculos previos sabemos que

$$\begin{aligned}
x \cdot y' &= (1+z^2)^{1/2} \cdot \cosh(\phi) \cdot \left( \frac{zz'}{(1+z^2)^{1/2}} \cdot \sinh(\phi) + (1+z^2) \cosh(\phi) \cdot \phi' \right) \\
x' \cdot y &= (1+z^2)^{1/2} \cdot \sinh(\phi) \cdot \left( \frac{zz'}{(1+z^2)^{1/2}} \cdot \cosh(\phi) + (1+z^2) \sinh(\phi) \cdot \phi' \right)
\end{aligned}$$

y restando:

$$x \cdot y' - x' \cdot y = (1+z^2) \cdot \phi' \quad (3.24)$$

tenemos la primera expresión necesaria:

$$x \cdot y' - x' \cdot y = \sqrt{1 + z^2 - z'^2} \quad (3.25)$$

Derivando a ambos lados tenemos la segunda expresión necesaria:

$$xy'' - x''y = \frac{zz' - z'z''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \quad (3.26)$$

Por otra parte, derivando (3.3) una vez, tenemos  $xx' - yy' = zz'$ , y derivando otra vez tenemos que

$$x'x' + xx'' - y'y' - yy'' = z'z' + zz''$$

Como  $x'^2 - y'^2 - z'^2 = -1$ , entonces:

$$xx'' - yy'' = z'z'' + 1 \quad (3.27)$$

Derivando ahora (3.4) tenemos:

$$x'x'' - y'y'' = z'z'' \quad (3.28)$$

Despejando e igualando la  $x''$  en (3.27) y (3.28) tenemos:

$$x'' = \frac{z'z'' + y'y''}{x'} = \frac{z'z'' + yy'' + 1}{x}$$

y sacando factor común la  $y''$ :

$$y'' \left( \frac{y'}{x'} - \frac{y}{x} \right) = \frac{z'z''}{x} + \frac{1}{x} - \frac{z'z''}{x'}$$

Dejando un denominador de  $xx'$  a ambos lados queda:

$$\frac{y''(xy' - x'y)}{xx'} = \frac{x'(1 + z'z'') - xz'z''}{xx'}$$

es decir,

$$y'' = \frac{x'(1 + z'z'') - xz'z''}{xy' - x'y} \quad (3.29)$$

De la misma manera, despejamos e igualamos  $y''$  de (3.27) y (3.28):

$$y'' = \frac{x'x'' - z'z''}{y'} = \frac{xx'' - z'z'' - 1}{y}$$

Iguamos y tachamos denominadores:

$$x'x''y - z'z''y = xx''y' - z'z''y' - y'$$

y sacamos factor común la  $x''$ :

$$x''(x'y - xy') = -z'z''y' - y' + z'z''y = -y'(1 + z'z'') + z''z'y$$

de donde obtenemos:

$$x'' = \frac{y'(1 + zz'') - z'z''y}{x'y - xy'} \quad (3.30)$$

Multiplicando (3.29) por  $x'$  y (3.30) por  $y'$ , y sustituyendo (3.26), tenemos

$$\begin{aligned} x'y'' &= x' \frac{x'(1 + zz'') - xz'z''}{(xy' - x'y)} = \frac{x'^2(1 + zz'') - xx'z'z''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \\ y'x'' &= y' \frac{y'(1 + zz'') - z'z''y}{(xy' - x'y)} = \frac{y'^2(1 + zz'') - z'z''yy'}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Finalmente, restándolas,

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= \frac{x'^2(1 + zz'') - xx'z'z'' - y'^2(1 + zz'') - z'z''yy'}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(x'^2 - y'^2) + zz''(x'^2 - y'^2) + z'z''(yy' - xx')}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(z'^2 - 1) + zz''(z'^2 - 1) + z'z''(-zz')}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(z'^2 - 1)(1 + zz'') - zz'^2z''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} = \frac{-1 + z'^2 - zz''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

tenemos la última expresión buscada:

$$x'y'' - x''y' = \frac{-1 + z'^2 - zz''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \quad (3.31)$$

Si sustituimos las expresiones (3.25), (3.26) y (3.31) en la ecuación de la minimalidad 3.21 tenemos:

$$z^2 \frac{z'^2 - 1 - zz''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} - zz' \frac{zz' - z'z''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} + (zz'' - 1)(1 + z^2 - z'^2)^{1/2} = 0$$

Eliminando el denominador:

$$z^2(z'^2 - 1 - zz'') + zz'(zz' - z'z'') + (zz'' - 1)(1 + z^2 - z'^2) = 0$$

y reordenando,

$$zz'' - 2z^2 + z'^2 - 1 = 0$$

Es decir, para que la superficie sea minimal, la función  $z(s)$  ha de cumplir

$$zz'' + z'^2 = 2z^2 + 1 \quad (3.32)$$

Considerando ahora que  $(z^2)' = 2zz'$  y derivando:  $(z^2)'' = 2z^2'' + 2zz'' = 2(zz'' + z'^2) = 2(1 + 2z^2) = 4z^2 + 2$ , podemos reducir la condición de minimalidad de la superficie a:



$$(z^2(s))'' = 4z^2(s) + 2 \quad (3.33)$$

Lo que tenemos es una ecuación diferencial de orden 2. Para encontrar sus soluciones, vamos a definir una función  $u(s)$  de manera que

$$u(s) = z(s)^2 + \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

Es evidente que  $4u = 4z^2 + 2$ . Entonces, derivando una vez tenemos:

$$u' = 2zz'$$

y derivando dos veces:

$$u'' = 2(z'^2 + zz'')$$

Por (3.33), esto es equivalente a  $u'' = 2(1 + 2z^2) = 2 + 4z^2 = 4u$ , es decir,

$$u(s)'' = 4u(s) \quad (3.35)$$

Esta ecuación ya tiene soluciones fácilmente reconocibles, que serán de la forma:

$$u(s) = \alpha e^{2s} + \beta e^{-2s} \quad (3.36)$$

Poniéndolo en (3.31) obtendremos una expresión para la función  $z(s)$ :

$$z(s) = (\alpha e^{2s} + \beta e^{-2s} - \frac{1}{2})^{1/2} \quad (3.37)$$

Vamos ahora a dar condiciones iniciales para encontrar una solución concreta. Siguiendo [Mor81] tomamos como condición inicial

$$u'(s_0) = 0$$

Entonces,

$$2\alpha e^{2s_0} = 2\beta e^{-2s_0}$$

Si operamos vemos que esto implica

$$\frac{\alpha}{\beta} = e^{-2s_0} \cdot e^{-2s_0} = e^{-4s_0}$$

Tomando logaritmos vemos que  $\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = -4s_0$  es decir,  $s_0 = \frac{1}{4} \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . En ese caso,

$$\alpha e^{2s_0} = \alpha e^{\frac{1}{2} \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} = (\alpha\beta)^{1/2}$$

Para que el interior de la raíz en (3.37) sea positivo, necesitaremos que:

$$\alpha e^{2s_0} + \beta e^{-2s_0} = 2\alpha e^{2s_0} = 2(\alpha\beta)^{1/2} > \frac{1}{2}$$

Es decir,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas tales que  $\alpha\beta > 1/16$ . Además, recordar que  $z > 0$ . Si ahora sustituimos el parámetro  $s$  por otro nuevo  $s + s_0$  podemos operar para simplificar:

$$\begin{aligned} \alpha e^{2s+2s_0} + \beta e^{-2s-2s_0} &= \alpha e^{2s} e^{2s_0} + \beta e^{-2s} e^{-2s_0} = \alpha e^{2s_0} (e^{2s} + e^{-2s}) \\ &= (\alpha\beta)^{1/2} (e^{2s} + e^{-2s}) = \frac{b}{2} (e^{2s} + e^{-2s}) = b \cosh(2s) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $b = 2\sqrt{\alpha\beta} > \frac{1}{2}$ . Por tanto la función  $z(s)$  queda:

$$z(s) = (b \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{1/2}; \quad s \in \mathbb{R}; b > \frac{1}{2} \quad (3.39)$$

Para terminar sustituimos (3.39) en las expresiones de (3.22) para hallar el resto de componentes de la parametrización, quedando:

$$x(s) = (b \cosh(2s) + \frac{1}{2})^{1/2} \cosh(\phi(s)) \quad (3.40)$$

$$y(s) = (b \cosh(2s) + \frac{1}{2})^{1/2} \sinh(\phi(s)) \quad (3.41)$$

$$\phi(s) = (b^2 - \frac{1}{4})^{1/2} \int_0^s (b \cdot \cosh(2t) + \frac{1}{2})^{-1} (b \cdot \cosh(2t) - \frac{1}{2})^{-1/2} dt \quad (3.42)$$

Notar que al aparecernos el parámetro  $b$ , lo que tenemos es toda una familia de catenoides esféricos que podemos obtener, de manera continua, dando valores a  $b \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ . De aquí en adelante denotaremos a estas parametrizaciones con su subíndice correspondiente:

$$f_b(s, \theta) = (x_b(s), y_b(s), z_b(s) \cos(\theta), z_b(s) \sin(\theta)) \quad (3.43)$$

Es decir, dado un parámetro  $b \in (\frac{1}{2}, \infty)$ , las funciones

$$\begin{aligned} f_b : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ (s, \theta) &\rightarrow f_b(s, \theta) = (x_b(s), y_b(s), z_b(s) \cos \theta, z_b(s) \sin(\theta)) \end{aligned}$$

es una familia de inmersiones isométricas. A  $\Sigma_b := f_b(\mathbb{R}, [0, 2\pi))$  se les llama *Catenoides esféricos* y son una familia de superficies de revolución minimales y completas en  $\mathbb{H}^3$ .

### 3.4 Expresión de la Primera y Segunda Formas Fundamentales de la inmersión.

Una vez conocida la parametrización podemos volver a las expresiones iniciales y dar una expresión a la Primera y Segunda Formas Fundamentales de la familia de catenoides.

#### Métrica

Sustituyendo en la expresión (3.7) para la primera forma fundamental tenemos

$$\begin{aligned}g_{ss} &= 1 \\g_{s\theta} &= 0 \\g_{\theta\theta} &= b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

#### Densidad riemanniana de Volumen.

Calculamos la densidad riemanniana de volumen a partir de la métrica:

$$dA_{\Sigma} = \sqrt{\det(g_{\Sigma})} ds d\theta = \left( b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2} \right)^{1/2} ds d\theta \quad (3.44)$$

#### Curvaturas principales.

Con las expresiones (3.17), (3.18) y (3.19) para los coeficientes de la IFF podemos obtener las curvaturas principales.

Por una parte,

$$k_1 = \frac{\|B(f_s, f_s)\|}{\|f_s\|^2} = -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y)$$

y dejándolo en función de  $z(s)$ :

$$\begin{aligned}k_1 &= -x''(y'z - yz') + y''(x'z - xz') + z''(xy' - x'y) = z(x'y'' - x''y') + z'(x''y - xy'') + z''(xy' - x'y) \\ &= z\left(\frac{-1 + z'^2 - zz''}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}}\right) + z'\left(\frac{z'z'' - zz'}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}}\right) + z''(1 + z^2 - z'^2)^{1/2} \\ &= [z(-1 + z'^2 - zz'') + z'(z'z'' - zz') + z''(1 + z^2 - z'^2)] \frac{1}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} = \frac{z'' - z}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$k_2 = \frac{\|B(f_s, f_s)\|}{\|f_s\|^2} = \frac{-z(xy' - x'y)}{z^2}$$

y de nuevo dejándolo en función de  $z(s)$ :

$$k_2 = -\frac{(xy' - x'y)}{z} = -\frac{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}}{z}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{z'' - z}{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}} \\ k_2 &= -\frac{(1 + z^2 - z'^2)^{1/2}}{z} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sustituyendo la expresión de  $z(s)$  que encontramos en (3.39), en la ecuación (3.45) comprobamos que las dos curvaturas son efectivamente iguales pero con distinto signo:

$$\begin{aligned} k_1 &= \left( \frac{-1 + 4b^2}{(1 - 2b \cdot \cosh(2s))^2} \right)^{1/2} \\ k_2 &= -\left( \frac{-1 + 4b^2}{(1 - 2b \cdot \cosh(2s))^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

### Norma de la Segunda Forma Fundamental

En el punto 2.3.1 del capítulo de definiciones veíamos que la norma de la Segunda Forma Fundamental (IIF) de una superficie  $P$  minimal inmersa en una variedad ambiente  $N$  puede ser expresada en función de sus curvaturas principales. Aplicándolo a la superficie  $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ , tenemos,

$$\|B^\Sigma\|^2 = \left( \frac{\|B(f_s, f_s)\|}{\|f_s\|^2} \right)^2 + \left( \frac{\|B(f_\theta, f_\theta)\|}{\|f_\theta\|^2} \right)^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (3.47)$$

Por tanto no hay más que sustituir las expresiones de (5.5) en (5.6) para encontrar la norma de la IIF:

$$\|B^\Sigma\|^2 = 2 \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^2} \quad (3.48)$$

Ahora que ya tenemos bien definida la inmersión, podemos estudiar en ella la desigualdad de Chern-Osserman.

## 3.5 Correspondencia con otras parametrizaciones.

### 3.5.1 Catenoides Esféricos en el modelo del semiespacio superior $UHM^3$ .

Como habíamos adelantado en la introducción, la inmersión vista hasta ahora y propuesta por H. Mori en [Mor81], no es la única que podemos encontrar para esta familia de catenoides. En este caso, las superficies se encuentran inmersas en  $\mathbb{H}^3$  considerado a su vez como una hipersuperficie de  $\mathbb{R}_1^4$ . Por tanto, cabe esperar otra inmersión que lleve los catenoides esféricos a  $\mathbb{H}^3$  simplemente. Ésta la encontramos en el artículo de Bérard y Sa Earp ([BSE10]). Lo que vamos a hacer es demostrar que, mediante algunas transformaciones, ambas inmersiones describen a la misma familia de superficies. Para ello utilizaremos las transformaciones propuestas por Polthier en [Pol94].

**Proposición 3.5.1.** *Dado un parámetro  $a \in (0, \infty)$ , y una familia de inmersiones dada por*

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ (s, \theta) &\rightarrow f_a(s, \theta) = \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \cos(\theta), e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \sin(\theta), \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

con

$$\Lambda_a(s) = \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau, \quad (3.50)$$

y

$$y_a(s) = a + \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2\tau)}{(\cosh^2(2a) \cosh^2(2\tau) - 1)^{1/2}} d\tau, \quad (3.51)$$

la superficie definida como  $\Sigma_a := f_a(\mathbb{R} \times [0, 2\pi))$  en el modelo del semiespacio superior de  $\mathbb{H}^3$ , es equivalente a la superficie definida como  $\Sigma_b := f_b(\mathbb{R} \times [0, 2\pi))$  en el modelo de Lorentz, donde  $f_b(s, \theta)$  es una familia de inmersiones que viene dada por

$$\begin{aligned} f_b : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4 \\ (s, \theta) &\rightarrow f_b(s, \theta) = (x_b(s), y_b(s), z_b(s) \cos(\theta), z_b(s) \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

siendo

$$\begin{aligned} z_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ x_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \sinh(\phi_b(s)) \\ y_b(s) &= \left( b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \cosh(\phi_b(s)) \\ \phi_b(s) &= (b^2 - \frac{1}{4})^{1/2} \int_0^s (b \cosh(2t) + \frac{1}{2})^{-1} (b \cosh(2t) - \frac{1}{2})^{-1/2} dt. \end{aligned} \quad (3.53)$$

y teniendo en cuenta que la relación entre los parámetros  $a$  y  $b$  viene dado por

$$b = \frac{1}{2} \cosh(2a) \quad (3.54)$$

De hecho, la primera es un giro de la segunda.

*Demostración.* De acuerdo con [Pol94], podemos transformar el modelo del semiespacio superior de dimensión  $n$  ( $UHM^n$ ) en el modelo de Lorentz ( $LM^n$ ), y a la inversa, utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} LM^{n+1} \rightarrow UHM^n & \quad (x_0, \dots, x_n) \rightarrow \frac{(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)}{x_0 - x_n} \\ UHM^n \rightarrow LM^{n+1} & \quad (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \frac{(1 + |y|^2, 2y_1, \dots, 2y_{n-1}, |y|^2 - 1)}{2y_n} \end{aligned}$$

Nosotros utilizaremos la transformación, que denotaremos por  $T$ , del caso  $n = 3$ :

$$T : LM^4 \rightarrow UHM^3 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \frac{(x_2, x_3, 1)}{x_1 - x_3}$$

Vamos a transformar la inmersión  $f_b(s, \theta)$  en el modelo  $LM^4$  en la inmersión  $f_a(s, \theta)$  en el  $UHM^3$ . El giro comentado supone cambiar el eje de rotación (sin que esto afecte a la métrica), y podemos hacerlo simplemente reordenando los términos de la expresión. Es éste giro el que permitirá que la superficie obtenida en  $\mathbb{H}^3$  sea claramente de rotación:

$$f_b(s, \theta) = (x_b(s), z_b(s) \cos(\theta), z_b(s) \sin(\theta), y_b(s)) \quad (3.55)$$

Una vez hecho esto, utilizamos la relación descrita arriba para pasar al  $UHM^4$ :

$$T(f_b(s, \theta)) = \left( \frac{z_b(s) \cos(\theta)}{x_b(s) - y_b(s)}, \frac{z_b(s) \sin(\theta)}{x_b(s) - y_b(s)}, \frac{1}{x_b(s) - y_b(s)} \right) \quad (3.56)$$

Utilizando las expresiones en (3.53) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{z_b(s) \cos(\theta)}{x_b(s) - y_b(s)} &= \frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}} \cos(\theta)}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} (\sinh(\phi_b(s)) - \cosh(\phi_b(s)))} = \frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}} \cos(\theta)}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} \cdot e^{-\phi_b(s)}} \\ \frac{z_b(s) \sin(\theta)}{x_b(s) - y_b(s)} &= \frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}} \sin(\theta)}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} (\sinh(\phi_b(s)) - \cosh(\phi_b(s)))} = \frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}} \sin(\theta)}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} \cdot e^{-\phi_b(s)}} \end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{x_b(s) - y_b(s)} = \frac{1}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} (\sinh(\phi_b(s)) - \cosh(\phi_b(s)))} = \frac{1}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} \cdot e^{-\phi_b(s)}}$$

Por lo que, sustituyendo en (3.56), tenemos que

$$T(f_b(s, \theta)) = \left( e^{\phi_b(s)} \sqrt{\frac{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}}{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} \cos(\theta), e^{\phi_b(s)} \sqrt{\frac{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}}{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} \sin(\theta), \frac{e^{\phi_b(s)}}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} \right) \quad (3.57)$$

El término  $\phi_b(s)$  se puede transformar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_b(s) &= \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \int_0^s \frac{1}{(b \cdot \cosh(2\tau) + \frac{1}{2}) (b \cdot \cosh(2\tau) - \frac{1}{2})^{1/2}} d\tau = \\ &= \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \int_0^s \frac{(b \cdot \cosh(2\tau) - \frac{1}{2})^{1/2}}{(b \cdot \cosh(2\tau) + \frac{1}{2}) (b \cdot \cosh(2\tau) - \frac{1}{2})} d\tau = \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \int_0^s \frac{(b \cdot \cosh(2\tau) - \frac{1}{2})^{1/2}}{(b^2 \cdot \cosh^2(2\tau) - \frac{1}{4})} d\tau = \\ &= \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \int_0^s \frac{(2b \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}}}{(4b^2 \cdot \cosh^2(2\tau) - 1) \frac{1}{4}} d\tau = \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \int_0^s \frac{(2b \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2} 2\sqrt{2}}{(4b^2 \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau = \\ &= (4b^2 - 1)^{1/2} \frac{2\sqrt{2}}{2} \int_0^s \frac{(2b \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(4b^2 \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau = \sqrt{2} (4b^2 - 1)^{1/2} \int_0^s \frac{(2b \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(4b^2 \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau \end{aligned}$$

Recordemo ahora que, por la expresión (3.54),  $b = \frac{1}{2} \cosh(2a)$  y renombremos  $\phi_b(s)$  a  $\Lambda_a(s)$ . Entonces:

$$\phi_b(s) \equiv \Lambda_a(s) = \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau \quad (3.58)$$

Por otra parte, podemos operar otro término en la expresión (3.56):

$$\frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}}}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \cosh(2a) \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \cosh(2a) \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\cosh(2a) \cdot \cosh(2s) - 1}}{\sqrt{\cosh(2a) \cdot \cosh(2s) + 1}}$$

Si ahora definimos un nuevo término  $y_a(s)$  de manera que  $\cosh(2y_a(s)) = \cosh(2a) \cosh(2s)$ , podemos sustituir quedando

$$\frac{\sqrt{\cosh(2a) \cdot \cosh(2s) - 1}}{\sqrt{\cosh(2a) \cdot \cosh(2s) + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh(2y_a(s)) - 1}}{\sqrt{\cosh(2y_a(s)) + 1}}$$

Recordemos que para funciones hiperbólicas,  $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ . Entonces

$$\frac{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2}}}{\sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2 \sinh^2(y_a(s))}}{\sqrt{2 \cosh^2(y_a(s))}} = \tanh(y_a(s)) \quad (3.59)$$

Operando el último término,

$$\begin{aligned} \sqrt{b \cdot \cosh(2s) + \frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \cosh(2a) \cosh(2s) + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cosh(2y_a(s)) + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh(2y_a(s)) + 1} = \cosh(y_a(s)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Finalmente, sustituyendo (3.58), (3.59) y (3.60) en (3.56) tenemos:

$$f_a(s, \theta) = \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \cos(\theta), e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \sin(\theta), \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right) \quad (3.61)$$

Esta parametrización coincide con la propuesta por Bérard y SaEarp en [BSE10] una vez la se reparametrizado por longitud de arco.

□

### 3.5.2 Primera y Segunda Formas Fundamentales en el modelo del semiespacio superior.

Es fácil comprobar que, con esta nueva parametrización, tendremos otras expresiones para la Primera y Segunda Formas Fundamentales. Para no alargar innecesariamente este trabajo con más cálculos, las enunciaremos directamente.

**Proposición 3.5.2.** *La familia de catenoides esféricos  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  parametrizados como*

$$f_a(s, \theta) = \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \cos(\theta), e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \sin(\theta), \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right) \quad (3.62)$$

donde

$$\Lambda_a(s) = \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{(\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2\tau) - 1)} d\tau, \quad (3.63)$$

y

$$y_a(s) = a + \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2\tau)}{(\cosh^2(2a) \cosh^2(2\tau) - 1)^{1/2}} d\tau \quad (3.64)$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$ , tiene las siguientes propiedades geométricas:

**Base del tangente:**

$$f_{a,s}(s, \theta) = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_a(s)} \cos(\theta) (\tanh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) + \operatorname{sech}(y_a(s))^2 (y'_a(s))) \\ e^{\Lambda_a(s)} \sin(\theta) (\tanh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) + \operatorname{sech}(y_a(s))^2 y'_a(s)) \\ e^{\Lambda_a(s)} \operatorname{sech}(y_a(s)) (\Lambda'_a(s) - \tanh(y_a(s)) y'_a(s)) \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$f_{a,\theta}(s, \theta) = \begin{pmatrix} -e^{\Lambda_a(s)} \sin(\theta) (\tanh(y_a(s))) \\ e^{\Lambda_a(s)} \cos(\theta) (\tanh(y_a(s))) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

**Métrica:**

$$\begin{cases} g_{ss} = \langle f_s^a, f_s^a \rangle_1 = 1 \\ g_{s\theta} = \langle f_s^a, f_\theta^a \rangle_1 = 0 \\ g_{\theta\theta} = \langle f_\theta^a, f_\theta^a \rangle_1 = \sinh(y_a(s))^2 \end{cases} \quad (3.67)$$

**Densidad riemanniana de Volumen:**

$$dA = \sqrt{\det(g)} ds d\theta = \sinh(y_a(s)) ds d\theta \quad (3.68)$$

**Vector Normal Unitario:**

$$\nu_a = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_a(s)} \operatorname{sech}(y_a(s)) (\cosh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) - \sinh(y_a(s)) y'_a(s)) \cos(\theta) \\ e^{\Lambda_a(s)} \operatorname{sech}(y_a(s))^2 (\cosh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) - \sinh(y_a(s)) y'_a(s)) \sin(\theta) \\ -e^{\Lambda_a(s)} \operatorname{csch}(y_a(s)) \operatorname{sech}(y_a(s)) (\sinh(y_a(s))^2 \Lambda'_a(s) + \tanh(y_a(s)) y'_a(s)) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

**Derivadas covariantes:**

$$\nabla_{f_{a,\theta}} f_{a,\theta} = \begin{pmatrix} -e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \cos(\theta) \\ -e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) \sin(\theta) \\ e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s))^2 \cosh(y_a(s)) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s} = \left( (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^1, (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^2, (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^3 \right) \quad (3.71)$$

donde:



$$\begin{aligned}
 (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^1 &= \\
 &- \frac{1}{2} e^{\Lambda_a(s)} \cos(\theta) \operatorname{sech}(y_a(s))^2 (\Lambda'_a(s) (\sinh(2y_a(s)) \Lambda'_a(s) + 2y'_a(s)) - 2(\cosh(2y_a(s)) \Lambda'_a(s) y'_a(s) + \\
 &\cosh(y_a(s)) \sinh(y_a(s)) \Lambda''_a(s) + y''_a(s))) \\
 (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^2 &= \\
 &- e^{\Lambda_a(s)} \sin(\theta) (\tanh(y_a(s)) (\Lambda'_a(s))^2 - (1 + \tanh(y_a(s))^2) \Lambda'_a(s) y'_a(s) + \operatorname{sech}(y_a(s))^2 \tanh(y_a(s)) (y'_a(s))^2 + \\
 &\operatorname{sech}(y_a(s))^3 y'_a(s) (\cosh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) - \sinh(y_a(s)) - \tanh(y_a(s)) \Lambda''_a(s) - \operatorname{sech}(y_a(s))^2 y''_a(s)) \\
 (\nabla_{f_{a,s}} f_{a,s})^3 &= \\
 &e^{\Lambda_a(s)} \operatorname{sech}(y_a(s))^2 (\cosh(y_a(s)) \sinh(y_a(s))^2 (\Lambda'_a(s))^2 + 2 \sinh(y_a(s)) \Lambda'_a(s) y'_a(s) + \cosh(y_a(s)) \Lambda''_a(s) - \\
 &\sinh(y_a(s)) y''_a(s))
 \end{aligned}$$

**Curvaturas Principales:**

$$\begin{aligned}
 k_{a,1} &= -\cosh(y_a(s))^2 \sinh(y_a(s)) (\Lambda'_a(s))^3 - \cosh(y_a(s)) y'_a(s) \Lambda''_a(s) + \Lambda'_a(s) (-2 \sinh(y_a(s)) (y'_a(s))^2 + \cosh(y_a(s)) y''_a(s)) \\
 k_{a,2} &= -\cosh(y_a(s)) \coth(y_a(s)) \Lambda'_a(s)
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

**Norma de la Segunda Forma Fundamental:**

$$\|B^{\Sigma_a}\|^2 = 2 (\cosh(y_a(s)) \coth(y_a(s)) \Lambda'_a(s))^2 \tag{3.73}$$

**Nota 3.5.3.** Es fácil ver que la superficie  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  es una superficie de rotación. Si definimos una curva  $\Gamma_a := \gamma_a(s)$ , donde  $\gamma_a(s)$  es la inmersión dada por

$$\begin{aligned}
 \gamma_a(s) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\
 s \rightarrow \gamma_a(s) &= \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)), \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right)
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

podemos describir la inmersión de la superficie como

$$f_a(s, \theta) = \mathcal{R}(\theta) \cdot \gamma_a(s)$$

donde  $\mathcal{R}(\theta)$  es la rotación definida en el  $UHM^3$  y dada por

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que, como ya habíamos visto en la Nota 2.4.8, es una transformación isométrica.

### 3.5.3 Otros Catenoides Esféricos en $\mathbb{R}_1^4$ .

Las dos parametrizaciones estudiadas, procedentes de dos artículos distintos, consideran los Catenoides Esféricos como superficies aisladas. Sin embargo, encontramos un artículo de doCarmo y Dajzer ([dCD83]) en el que se obtienen tres familias de superficies minimales de rotación en el espacio de Minkowski: los Catenoides Esféricos, los Hiperbólicos y los Parabólicos. En éste, los Catenoides Esféricos vienen parametrizados por la expresión

$$\begin{aligned} f(t, s) &= (x_1(s)\varphi_1(t), x_1(s)\varphi_2(t), x_3(s), x_4(s)) \\ \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) &= 1 \end{aligned} \tag{3.75}$$

representando la hipersuperficie esférica de revolución de  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  generada por una curva  $\{x_1(s), 0, x_3(s), x_4(s)\}$ .

Si además tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} x_3(s) &= (1 + x_1^2(s))^{1/2} \sinh(\phi(s)) \\ x_4(s) &= (1 + x_1^2(s))^{1/2} \cosh(\phi(s)) \\ \phi(s) &= \int_0^s \frac{(1 + x_1^2(\sigma) - x_1^2(\sigma))^{1/2}}{1 + x_1^2(\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

es fácil comprobar que esta parametrización es igual a la de [Mor81] sin más que considerar que  $z(s) = x_1(s), y(s) = x_3(s), x(s) = x_4(s)$ , con  $x_1(s) = (a \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{1/2}$ .

## Capítulo 4

# La desigualdad de Chern-Osserman en el hiperbólico.

Como ya adelantábamos en la introducción, en este capítulo vamos a estudiar, a través del ejemplo de los Catenoides Esféricos, cómo cambian los términos de la desigualdad de Chern-Osserman cuando la subvariedad objeto de estudio se encuentra inmersa en el espacio hiperbólico. Recordemos que, dada  $P$  una superficie minimal completa y orientada inmersa en  $\mathbb{H}^n$ ,  $B^P$  la Segunda Forma Fundamental de la inmersión,  $r$  la distancia en  $\mathbb{H}^n$  desde un punto fijo y  $D_R = \{x \in P : r(x) < R\}$  las bolas extrínsecas de radio  $R$  de la superficie, si  $\int_P \|B^P\|^2 dA < \infty$ , entonces

$$-\chi(P) \leq \frac{1}{4\pi} \int_P \|B^P\|^2 dA - \sup \frac{\text{Vol}(D_R)}{2\pi(\cosh(t) - 1)} \quad (4.1)$$

donde  $\chi(P)$  es la característica de Euler de  $P$ .

Esta es la desigualdad de Chern-Osserman en el hiperbólico, de la que vamos a calcular sus tres términos aplicados a la familia de Catenoides Esféricos: la característica de Euler-Poincaré, la Integral del cuadrado de la Norma de la Segunda Forma Fundamental de la inmersión y el Crecimiento del Volumen de las bolas extrínsecas de la familia de superficies. En cada caso, compararemos con lo que sucede cuando la variedad ambiente es el espacio euclídeo.

### 4.1 Característica de Euler-Poincaré.

Los catenoides esféricos son superficies orientables no compactas con topología finita, en concreto con dos finales ( $\mathcal{K} = 2$ ), y de género nulo ( $g = 0$ ). Entonces, calculamos su característica de Euler con la expresión (2.35):

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - \mathcal{K} = 2 - 2 \cdot 0 - 2 = 0$$

Esta propiedad es independiente de la inmersión, por lo que permanece invariable.

## 4.2 Integral del cuadrado de la Norma de la Segunda Forma Fundamental.

A partir de la expresión (3.73) para el cuadrado de la norma y la expresión (3.68) para la densidad riemanniana de volumen, ambas en la parametrización  $f_a(s, \theta)$  dada por la fórmula (3.62), calculamos la Integral de la Norma como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} 2 (\cosh(y_a(s)) \coth(y_a(s)) \Lambda_a(s)')^2 \cdot \sinh(y_a(s)) ds d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^4(y_a(s))}{\sinh(y_a(s))} (\Lambda_a(s)')^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^4(y_a(s))}{\sinh(y_a(s))} (\Lambda_a(s)')^2 ds \end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cosh^4(y_a(s))}{\sinh(y_a(s))} (\Lambda_a(s)')^2 ds \quad (4.2)$$

La expresión equivalente, correspondiente a la parametrización propuesta por H. Mori la habíamos obtenido ya (ver ecuación (3.48)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma}\|^2 dA_{\Sigma} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma}\|^2 dA_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds \quad (4.3)$$

de la cual podemos obtener una expresión con *Mathematica* aunque poco manejable:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} = \frac{\left( i(-1 + 2b) \sqrt{\frac{-1+2b \cdot \cosh(2s)}{-1+2b}} E\left( is, \frac{4b}{-1+2b} \right) + 2b \cdot \sinh(2s) \right)}{\sqrt{-\frac{1}{2} + b \cdot \cosh(2s)}}$$

donde la función  $E(\phi, m) = E(\phi|m)$  es una integral elíptica de segundo tipo, que se define como  $E(\phi|m) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta$  con  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . En cualquier caso, los métodos de resolución de este tipo de integrales quedan fuera del alcance de esta memoria, de manera que buscaremos otras formas de estudiar su valor.

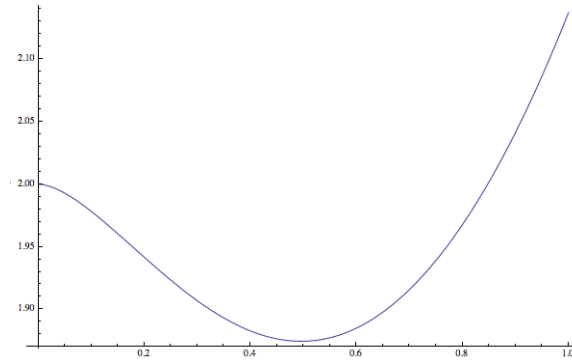


Figure 4.1: Integral de la norma utilizando la parametrización  $f_a(s, \theta)$  de Bérard frente al parámetro  $a$ . Notar que, a medida que  $a$  tiende a su valor mínimo, el valor de la integral tiende a 2, número de finales, y valor que tomaría en  $\mathbb{R}^3$ .

Por definición, las ecuaciones (4.2) y (4.3) son equivalentes, y se puede comprobar numéricamente que esto es cierto. Por tanto, en adelante, utilizaremos una u otra según convenga en cada caso sin pérdida de generalidad.

La importancia de estudiar el valor de la Integral de la Norma reside en el hecho de que, en las superficies minimales con curvatura total finita embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , dicho valor está cuantizado. Es más, éste es igual al número de finales de la superficie menos el valor de su característica de Euler (ver [Oss86], cap. 9 para una explicación más detallada). Sin embargo no se puede decir lo mismo en el espacio hiperbólico. De hecho podemos demostrar lo siguiente:

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  la familia de catenoides esféricos inmersos en el espacio hiperbólico. Entonces,*

- (i)  $\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} < \infty$
- (ii)  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} = \infty$

*Demostración.* Dada la expresión 4.3 para la integral, podemos considerar una función

$$g(b, s) = \frac{1}{(b + bs^2 - \frac{1}{2})^{3/2}}$$

de manera que

$$\frac{1}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} \leq \frac{1}{(b + bs^2 - \frac{1}{2})^{3/2}}$$

para todo  $s$  y  $b \in \mathbb{R}^+$  con  $b > \frac{1}{2}$  (ver [Seo11]). Esto es verdad porque, comparando las funciones  $g_1(b, s) = (b + bs^2)$  y  $g_2(b, s) = b \cdot \cosh(2s)$ , el valor mínimo de ambas es  $b$  (cuando  $s = 0$ ) y, a partir de ahí, la primera crece con una pendiente de valor  $\frac{\partial g_1(b, s)}{\partial s} = 2bs$  y la segunda con pendiente  $\frac{\partial g_2(b, s)}{\partial s} = 2b \cdot \sinh(2s)$ , que es siempre mayor que la primera. Entonces,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b + b^2 - \frac{1}{2})^{3/2}} ds < \infty$$

demostrando el punto (i). Para el punto (ii) basta con comprobar que, en la expresión (4.3) para la integral de la norma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds > \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2 - \frac{1}{4})}{(b \cdot \cosh(2s))^{3/2}} ds = \\ \frac{b^2 - 1/4}{b^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(2s)^{-3/2} ds &= C \frac{b^2 - 1/4}{b^{3/2}} \end{aligned}$$

de manera que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_b} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} > \lim_{b \rightarrow \infty} C \frac{b^2 - 1/4}{b^{3/2}} = \infty$$

□

Para demostrar la no cuantificación de los valores de la integral de la norma, demostramos la siguiente proposición:

**Proposición 4.2.2.** *En las condiciones descritas hasta ahora, dada la parametrización  $f_b(s, \theta)$ , cuando  $b = 1$  se cumple que*

$$1.90049 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \|B^{\Sigma_1}\|^2 dA_{\Sigma_1} \leq 1,90051$$

*Demostración.* Dado que no conocemos la expresión de la integral (no una manejable), vamos a aproximar su valor utilizando la regla del rectángulo, que dice que  $\int_a^b f'(x)dx \simeq f(a)(b - a)$ . Dividiremos el intervalo de integración en  $n$  partes para conseguir un resultado más exacto y, utilizando el teorema del valor medio, acotaremos el error. Esto será suficiente para demostrar la proposición e incluso para dar valores bastante buenos a la integral, dado que ésta no tarda mucho en converger. Por comodidad, denotemos la integral definida en (4.2) como

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_b}\|^2 dA_{\Sigma_b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2 - \frac{1}{4}}{(b \cdot \cosh(2s) - \frac{1}{2})^{3/2}} ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_b(s) ds \quad (4.4)$$

Es fácil ver que  $F_b(s)$  es una función positiva y par de  $s$ . Entonces, haciendo un cambio de variable  $s \rightarrow \frac{s}{1-s}$  podemos cambiar los límites de integración a  $(0, 1)$  y renombrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_b(s) ds = 2 \int_0^1 F_b\left(\frac{s}{1-s}\right) \frac{1}{(1-s)^2} ds = 2 \int_0^1 \mathcal{F}_b(s) ds$$

Como  $\mathcal{F}_b(s)$  es continua y diferenciable en el intervalo  $(0, 1)$ , podemos aplicar el teorema del valor medio. Según éste, dada una función  $f(x)$  y siendo  $(a, b)$  el intervalo en cuestión, existe un valor  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Esto es lo mismo que decir que, dado un valor  $c \in (a, x)$ ,

$$f'(c)(x - a) = f(x) - f(a)$$

Integrando y tomando valores absolutos en ambos lados tenemos,

$$\int_a^b f'(c)(x - a) dx = \int_a^b (f(x) - f(a)) dx$$

es decir,

$$f'(c) \cdot \frac{(b-a)^2}{2} = \int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a) \quad (4.5)$$

De esto se deduce que, para algún valor  $c \in [a, b]$ ,

$$f(a)(b-a) - \frac{(b-a)^2}{2} \cdot |f'(c)| \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot |f'(c)| \quad (4.6)$$

Por lo que, de forma general, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx \in \left[ f(a)(b-a) - \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq c \leq b} |f'(c)|, f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq c \leq b} |f'(c)| \right] \quad (4.7)$$

Volvamos ahora a nuestra integral. Dividiendo el intervalo de integración  $(0, 1)$  en  $n$  subintervalos y denominando cada uno de ellos como  $[\alpha_i, \beta_i]$  con  $i = 1, \dots, n$ , podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \mathcal{F}_b(s)ds \in \left[ \mathcal{F}_b(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i) - \frac{(\beta_i - \alpha_i)^2}{2} \cdot \max_{\alpha_i \leq \zeta \leq \beta_i} |\mathcal{F}'_b(\zeta)|, \mathcal{F}_b(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i) + \frac{(\beta_i - \alpha_i)^2}{2} \cdot \max_{\alpha_i \leq \zeta \leq \beta_i} |\mathcal{F}'_b(\zeta)| \right]$$

y teniendo en cuenta que  $\alpha_i - \beta_i = \frac{1}{n}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , y que, para el subintervalo  $i$ -ésimo,  $\alpha_i = \frac{i-1}{n}$ , tenemos que

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \mathcal{F}_b(s)ds \in \left[ \mathcal{F}_b\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \cdot \max_{\alpha_i \leq \zeta \leq \beta_i} |\mathcal{F}'_b(\zeta)|, \mathcal{F}_b\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \cdot \max_{\alpha_i \leq \zeta \leq \beta_i} |\mathcal{F}'_b(\zeta)| \right] \quad (4.8)$$

De esta manera, al sumar los  $n$  subintervalos, tenemos:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{F}_b\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \cdot \max_{0 \leq s \leq 1} |\mathcal{F}'_b(s)| \leq \int_0^1 \mathcal{F}_b(s)ds \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_b\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \cdot \max_{0 \leq s \leq 1} |\mathcal{F}'_b(s)| \quad (4.9)$$

Sustituyendo para el caso en el que  $b = 1$  y tomando  $n = 10^6$ , tenemos que

$$1.90049 \leq 2 \cdot \int_0^1 \mathcal{F}_1(s)ds \leq 1.90051,$$

demostramos de esta manera que el valor de la Integral de la Norma no está necesariamente cuantizado en el espacio hiperbólico. (Notar que el valor absoluto máximo de la derivada de la función se ha obtenido con la función *MaxValue[f]* de Mathematica, dado que su estimación es sencilla y no presenta dudas.)  $\square$

**Nota 4.2.3.** Siguiendo la forma de la gráfica (Figure 4.1) intuimos que el mínimo de la Integral de la Norma se encuentra en torno a  $a = 0.5$  ( $b \simeq 0.7715$ ), pero dando valores detectamos que en realidad se encuentra un poco más abajo. En concreto podemos decir que el mínimo se encuentra entre los valores  $a = 0.495$  y  $a = 0.497$ .

$a = 0.494$	$1.874490 \leq I.N. \leq 0.874510$
$a = 0.495$	$1.874492 \leq I.N. \leq 1.874508$
$a = 0.4955$	$1.874490 \leq I.N. \leq 1.874508$
$a = 0.497$	$1.874492 \leq I.N. \leq 1.874508$
$a = 0.498$	$1.874500 \leq I.N. \leq 1.874510$
$a = 0.5$	$1.874508 \leq I.N. \leq 1.874524$

Finalmente, destacaremos una propiedad que ya se aprecia en la Figura 4.1 de la Integral de la Norma en función de su parámetro distintivo.

**Proposición 4.2.4.** *En las condiciones descritas hasta ahora, dada la parametrización  $f_b(s, \theta)$ , cuando  $b \rightarrow \frac{1}{2}$  se cumple que*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\frac{1}{2}}} \|B^{\Sigma_{\frac{1}{2}}}\|^2 dA_{\Sigma_{\frac{1}{2}}} \simeq 2 = \mathcal{K}(\Sigma)$$

en concreto podemos asegurar que su valor se encuentra acotado como

$$1.9881 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\frac{1}{2}}} \|B^{\Sigma_{\frac{1}{2}}}\|^2 dA_{\Sigma_{\frac{1}{2}}} \leq 2.0053$$

usando el método numérico anterior con  $n = 10^6$ .

### 4.3 Crecimiento del Volumen de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{H}^3$ .

Lo que haremos en este apartado es deducir unas expresiones generales para el Crecimiento del Volumen en los 3-espacios euclídeo e hiperbólico. A continuación, estudiaremos el caso concreto de la familia de Catenoides Esféricos.

#### 4.3.1 Crecimiento del Volumen.

Como anticipábamos más arriba, el segundo de los elementos que componen la desigualdad de Chern-Osserman es el Crecimiento del Volumen o *volume growth*, que determina el cociente entre el volumen de las bolas extrínsecas de la subvariedad ( $Vol(D_t)$ ) y el de las bolas métricas de dimensión 2 en una forma espacial  $\mathbb{K}^2(-c^2)$  ( $Vol(B_t^{-c^2}, 2)$ ). Mientras en el espacio Euclídeo el valor del crecimiento del volumen es independiente del punto en el que se centren las bolas en cuestión, en el espacio hiperbólico encontramos casos en los que esto no sucede, como la familia de catenoides esféricos o el plano hiperbólico. En este apartado daremos una demostración de ambos casos. Empecemos con el euclídeo.

**Proposición 4.3.1.** *Dada una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^n$  y dada una exhaustión por bolas extrínsecas  $\{D_t\}_{t>0}$  de la misma centradas en el punto  $p$ , el valor del crecimiento del volumen definido como*



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t(p))}{\text{Vol}(B_t^{0,2})},$$

donde  $B_t^{0,2}$  son las bolas geodésicas de dimensión 2 y radio  $t$  en  $\mathbb{R}^2$ , es independiente del punto  $p$  que se escoja como centro de la exhaustión.

*Demostración.* Sean  $P^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  una inmersión y  $D_t(p) = P \cap B_t^{0,n}(p)$  las bolas extrínsecas de  $P^m$  en  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos dos exhaustiones de  $P^m$  por bolas extrínsecas, una centrada en el punto  $p_1$  y otra en el punto  $p_2$ :  $\{D_t(p_1)\}_{t>0}$  y  $\{D_s(p_2)\}_{s>0}$  respectivamente. Si podemos demostrar que, para una función  $s(R)$  y un  $R$  suficientemente grandes,  $D_{s(R)}(p_2) \subseteq D_R(p_1)$  y  $D_{s(R)}(p_1) \subseteq D_R(p_2)$ , tendremos que  $\{D_{s(R)}(p_2)\}_{t>R} = \{D_t(p_1)\}_{t>R}$ . Es decir, que ambas serán equivalentes.

Supongamos que existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{0,2})} = k_1 < \infty$$

Entonces debe existir

$$\lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_2))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} = k_2$$

con  $k_2 \leq k_1$ .

Sea  $R_0 = d_N(p_1, p_2)$ . Entonces  $p_2 \in \partial D_{R_0}(p_1)$ . De la misma manera, dado  $R > R_0$ ,  $p_2 \in D_R(p_1)$ . Definamos  $s(R) = R - R_0$ . Entonces, dado un punto  $x \in D_{s(R)}(p_2)$ ,  $d_N(x, p_1) \leq d_N(x, p_2) + d_N(p_2, p_1) \leq s(R) + R_0 = R - R_0 + R_0 = R$ . Es decir,  $x \in D_R(p_1)$ .

Entonces:

$$k_2 = \lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_2))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{0,2})} \cdot \frac{\text{Vol}(B_R^{0,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})}$$

donde además  $\exists \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{0,2})} = k_1 < \infty$  por hipótesis, por lo que podemos escribir

$$k_2 \leq k_1 \cdot \frac{\text{Vol}(B_R^{0,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})}$$

Sólo falta demostrar que existe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^{0,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} = k < \infty \quad (4.10)$$

Recordemos que, en una variedad con curvatura seccional constante  $c$  de dimensión  $m$ , calculamos el volumen de las bolas métricas de radio  $R$  como

$$\text{Vol}(B_R^{c,m}) = v_0 \int_0^R F'_c(t)^{m-1} dt \quad (4.11)$$

Donde

$$v_0 = \text{Vol}(S_1^{0,m-1}) \quad (4.12)$$

y cuando  $c = 0$ , entonces  $F_0(t) = \frac{t^2}{2}$ ; es decir,  $F'_0(t) = t$  en  $\mathbb{R}^n$ . Retomando la ecuación (4.10) y utilizando la ecuación (4.11), tenemos que, para el caso de  $\mathbb{R}^3$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^{0,2})}{\text{Vol}(B_{R-R_0}^{0,2})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^{0,2})'}{\text{Vol}(B_{R-R_0}^{0,2})'} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{F'_0(R)^{2-1}}{F'_0(R-R_0)^{2-1}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{(R-R_0)} = 1$$

Por tanto, en (4.10),  $k = 1$  y

$$k_2 \leq k_1 \cdot 1 = k_1 \quad (4.13)$$

Sigamos el razonamiento inverso con  $p_2$  en el lugar de  $p_1$ . Supongamos ahora que existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_2))}{\text{Vol}(B_R^{0,2})} = k_2 < \infty$$

Entonces, la pregunta es si existe el límite

$$k_1 = \lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_1))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} \leq k_2$$

Operando de la misma manera que antes llegamos a

$$k_1 \leq k_2 \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^B)}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{0,2})} = k_2 \cdot 1$$

es decir,

$$k_1 \leq k_2 \quad (4.14)$$

Considerando las expresiones (4.13) y (4.14) podemos concluir que  $k_1 = k_2$ .  $\square$

Veamos ahora lo que sucede en el caso hiperbólico.

**Proposición 4.3.2.** *Dada una superficie inmersa en  $\mathbb{H}^3$  y dada una exhaustión por bolas extrínsecas  $\{D_t(p)\}_{t>0}$  de la misma centradas en el punto  $p$ , el valor del crecimiento del volumen definido como*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t(p))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})},$$

donde  $B_t^{-1,2}$  son las bolas métricas de dimensión 2 y radio  $t$  en  $\mathbb{H}^2$ , no es necesariamente independiente del punto  $p$  que se escoja como centro de la exhaustión.

*Demostración. Contraejemplo:* El plano  $\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ .

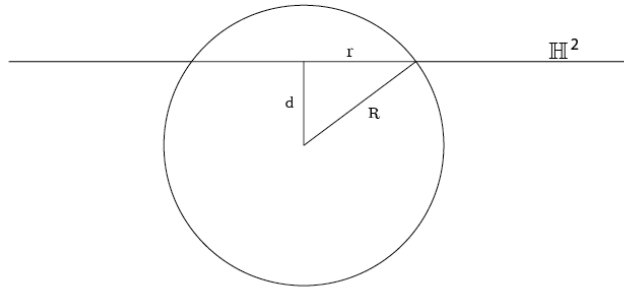


Figure 4.2: Intersección de  $\mathbb{H}^2$  con una bola  $B_R^{-1,2} \in \mathbb{H}^3$  con centro alejado una distancia  $d$  del plano hiperbólico.

Por la ecuación (2.38), la función crecimiento del volumen en el plano hiperbólico,  $\mathbb{H}^2$ , como subvariedad de  $\mathbb{H}^3$  viene dada por

$$f(t) := \frac{Vol(D_t^2)}{Vol(B_t^{-1,2})} = \frac{Vol(\mathbb{H}^2 \cap B_t^{-1,3})}{Vol(B_t^{-1,2})}$$

donde  $Vol(D_t^2)$  es el volumen de las bolas extrínsecas de radio  $t$  en el plano hiperbólico, y  $Vol(B_t^{-1,2})$  es el volumen de las bolas geodésicas de radio  $t$  y dimensión 2 en el ambiente. La bola extrínseca  $D_R^2$  es una bola geodésica de  $\mathbb{H}^2$  con un radio  $r$  que dependerá de  $R$  y de la distancia  $d$  a la que se encuentre su centro. Por el teorema de coseno (ver [Rat06]) en el espacio hiperbólico, podemos relacionarlos como

$$\cosh(R) = \cosh(d) \cosh(r)$$

Para calcular los volúmenes seguiremos la ecuación (2.57) del capítulo anterior:

$$Vol(D_R^2) = Vol(B_r^{-1,2}) = 2\pi (\cosh(r) - 1)$$

y

$$Vol(B_R^{-1,2}) = 2\pi (\cosh(R) - 1)$$

Por tanto, el valor máximo del crecimiento del volumen vendrá dado por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_R^2)}{Vol(B_R^{-1,2})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi (\cosh(r) - 1)}{2\pi (\cosh(R) - 1)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\cosh(r)}{\cosh(R)} = \frac{1}{\cosh(d)}$$

dependiendo del lugar en el que se centre la bola extrínseca.

□

**Nota 4.3.3.** Si seguimos el mismo procedimiento que en el caso euclídeo, vemos que el resultado no es concluyente.

Supongamos que existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{-1,2})} = k'_1 < \infty$$

Entonces debe existir el límite

$$\lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_2))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})} = k'_2 \leq k'_1$$

Sea  $R_0 = d_{\mathbb{H}^3}(p_1, p_2)$ . Entonces  $p_2 \in \partial D_{R_0}(p_1)$ . De la misma manera, dado  $R > R_0$ ,  $p_2 \in D_R(p_1)$ . Definamos  $s(R) = R - R_0$ . Entonces, dado un punto  $x \in D_{s(R)}(p_2)$ ,  $d_{\mathbb{H}^3}(x, p_1) \leq d_{\mathbb{H}^3}(x, p_2) + d_{\mathbb{H}^3}(p_2, p_1) \leq s(R) + R_0 = R - R_0 + R_0 = R$ . Es decir,  $x \in D_R(p_1)$ . Entonces:

$$k'_2 = \lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_2))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{-1,2})} \cdot \frac{\text{Vol}(B_R^{-1,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})}$$

donde además  $\exists \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_1))}{\text{Vol}(B_R^{-1,2})} = k'_1 < \infty$  por hipótesis, por lo que podemos escribir

$$k'_2 \leq k'_1 \cdot \frac{\text{Vol}(B_R^{-1,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})}$$

Sólo falta demostrar que existe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^{-1,2})}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})} = k' < \infty \quad (4.15)$$

Recordemos que,

$$\text{Vol}(B_R^{c,m}) = v_0 \int_0^R F'_c(t)^{m-1} dt \quad (4.16)$$

con  $v_0 = \text{Vol}(S_1^{0,m-1})$  y  $F_c(t) = \frac{1}{c}(1 - \cosh(\sqrt{-c}t))$  para el caso  $c < 0$ . Es decir,  $F'_{-c^2}(t) = -\frac{\sqrt{c^2}}{c^2} \sinh(\sqrt{c^2}t)$ .

Retomando la ecuación (4.15) y utilizando la ecuación (4.16), tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R^{-1,2})}{\text{Vol}(B_{R-R_0}^{-1,2})} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sinh(R)}{\sinh(R-R_0)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(e^R - e^{-R})}{(e^{R-R_0} - e^{-(R-R_0)})} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(e^R - e^{-R})}{e^{-R_0} (e^R - e^{-R+2R_0})} = e^{R_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(e^R - e^{-R})}{(e^R - e^{-R} \cdot e^{2R_0})} \\ &= e^{R_0} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - e^{-2R}}{1 - e^{-2R+2R_0}} \right) = e^{R_0} < \infty \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$k'_2 \leq k'_1 \cdot e^{R_0} < \infty \quad (4.17)$$

Sigamos el razonamiento inverso con  $p_2$  en el lugar de  $p_1$ . Supongamos ahora que existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_R(p_2))}{\text{Vol}(B_R^{-1,2})} = k_2 < \infty$$

La pregunta es si existe entonces el límite

$$k'_1 = \lim_{s(R) \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{s(R)}(p_1))}{\text{Vol}(B_{s(R)}^{-1,2})} \leq k'_2$$

Operando de la misma manera que antes llegamos a

$$k'_1 \leq k'_2 \cdot e^{R_0} < \infty \tag{4.18}$$

Es decir que en  $\mathbb{H}^n$ , por (4.17) y (4.18) tenemos que

$$k'_2 \leq k'_1 \cdot e^{R_0} \leq k'_2 \cdot e^{2R_0}$$

y en concreto para  $\mathbb{H}^3$ ,

$$k'_2 \leq k'_1 \cdot e^{R_0} \leq k'_2 \cdot e^{2R_0}$$

Lo cual no demuestra que tenga que existir la desigualdad necesariamente, ni que no tenga que existir, por lo que resulta más interesante ver un contraejemplo.

### 4.3.2 Crecimiento del Volumen de la familia de Catenoides Esféricos.

Vamos a ver ahora cómo se comporta el crecimiento del volumen en la familia de catenoides esféricos atendiendo a la posición del centro de su exhaustión por bolas extrínsecas. Ya hemos visto cómo calcular el volumen de las bolas geodésicas en  $\mathbb{H}^3$ . Entonces, sólo falta calcular el volumen de las bolas extrínsecas de las superficies. Esto se puede hacer utilizando la fórmula de la co-área que, recordemos, es:

$$\text{Vol}(D_t) = \int_0^t \int_{\partial D_s} \frac{1}{\|\nabla f\|} d\mu_{g_s} ds$$

donde  $f$  es la función distancia. El problema es que necesitamos obtener antes los contornos  $\partial D_t$ . Para ello trabajaremos con la parametrización de la superficie dada por la expresión (3.62). Como hemos visto, los catenoides esféricos en el modelo del semiespacio superior son superficies de revolución. De hecho son el resultado de rotar una curva generatriz  $\Gamma_a := \gamma_a(s)$  parametrizada como

$$\begin{aligned} \gamma_a(s) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ s \rightarrow \gamma_a(s) &= \left( e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)), \frac{e^{y_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \right) \end{aligned}$$

en torno al eje  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$  que denotaremos simplemente como *Eje z*. Por tanto, mientras sea posible, trabajaremos con esta curva que viene dada en el modelo del semiplano de Poincaré. En este contexto podemos considerar las siguientes definiciones:

**Definición 4.3.4.** Sea  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  la familia de superficies parametrizadas por la expresión (3.62) y  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  un punto genérico de dicha superficie. Entonces, definimos los conjuntos de nivel  $\Sigma_{-t,t}^a$  de la función coordenada  $s$  como:

$$\Sigma_{-t,t}^a := \{f_a(s, \theta) \in \Sigma_a : -t \leq s \leq t; \theta \in [0, 2\pi)\}$$

**Nota 4.3.5.** El elemento de volumen de los conjuntos de nivel dados en la Definición 4.3.4 viene dado por

$$dVol(\Sigma_{-t,t}^a) = \sinh(y_a(s)) ds d\theta$$

donde hemos utilizado la expresión de la densidad riemanniana de volumen (3.68).

**Nota 4.3.6.** El contorno  $\partial\Sigma_{-t,t}^a$  de los conjuntos de nivel se puede escribir como:

$$\partial\Sigma_{-t,t}^a := \{f_a(s, \theta) \in \Sigma_{-t,t}^a : s = \pm t\}$$

Es decir, estos contornos están generados por la rotación de los puntos  $\gamma_a(t), \gamma_a(-t) \in \Gamma_a$  en torno al Eje  $z$  del espacio hiperbólico.

Dicho esto, lo que vamos a hacer es lo siguiente:

1. Daremos una expresión para la distancia extrínseca de un punto sobre la curva generatriz al punto  $\tilde{\mathcal{O}} = (0, 1)$  del semiplano de Poincaré.
2. demostraremos que los conjuntos de nivel de la función coordenada  $s$  sobre la superficie son iguales a bolas extrínsecas centradas en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  con un radio determinado.
3. Calcularemos el volumen de los conjuntos de nivel en la superficie.
4. Estimaremos el crecimiento del volumen de las bolas extrínsecas centradas en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  identificándolas con los conjuntos de nivel descritos.

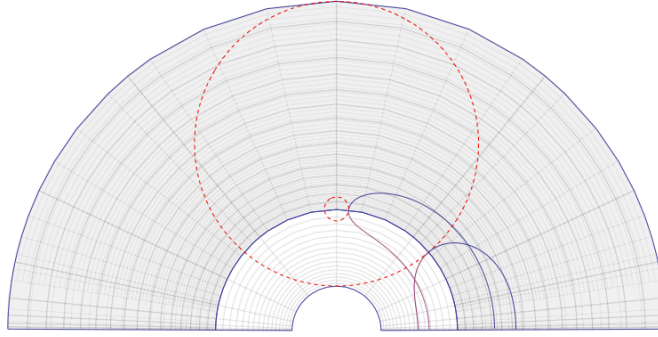


Figure 4.3: En gris, geodésicas en el semiplano de Poincaré (centradas en el eje imaginario). En rojo, esferas geodésicas de radios  $a_1, a_2$  y, en azul, curvas generatrices  $\Gamma_{a_1}, \Gamma_{a_2}$  en el semiplano de Poincaré. La franja gris corresponde a los positivos ( $s > 0$ ) y la blanca a los negativos ( $s < 0$ ).

#### 4.3.2.1 Distancia extrínseca.

Como hemos visto ya en Proposición 2.4.14, dados dos puntos  $z, w$  en el semiplano de Poincaré, la distancia entre ellos viene dada por:

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

Por otra parte, hemos visto que, usando la parametrización dada por la expresión (3.62), la curva generatriz de la familia de superficies puede expresarse en notación compleja como

$$\gamma_a(s) = e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) + i \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))} \quad (4.19)$$

Entonces tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 4.3.7.** Dado  $\gamma_a(s) \in \Gamma_a$  un punto sobre la curva generatriz que definimos mediante la expresión (4.19) y dado el punto  $\tilde{\mathcal{O}} = (0, 1)$  en el semiplano de Poincaré, la distancia en  $\mathbb{H}^2$  entre ambos puntos viene dada por

$$d_{\tilde{\mathcal{O}}}^{\mathbb{H}^2}(\gamma_a(s)) = d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s)) = \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1} \right]$$

*Demostración.* Dado el punto  $\tilde{\mathcal{O}} = (0, 1)$  descrito, la distancia de  $\tilde{\mathcal{O}}$  a un punto genérico  $w = x + iy$  es, siguiendo la expresión (2.4.14),

$$d(\tilde{\mathcal{O}}, w) = \ln \frac{|-x + i(1+y)| + |-x + i(1-y)|}{|-x + i(1+y)| - |-x + i(1-y)|} \quad (4.20)$$

Si el punto genérico es un punto sobre la curva  $\gamma_a(s)$ , que definimos mediante la expresión (4.19), sustituyendo y operando por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
|-x_a + i(1 + y_a)| &= |-e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) + i \left(1 + \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}\right)| = \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s))^2 + 1 + \frac{e^{2\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))^2} + \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} \left(\tanh(y_a(s))^2 + \frac{1}{\cosh(y_a(s))^2}\right) + 1 + \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \quad (4.21) \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} + 1 + 2\frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} = \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \frac{e^{\Lambda_a(s)} + e^{-\Lambda_a(s)}}{2} + \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \\
&= \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) + \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|-x_a + i(1 - y_a)| &= |-e^{\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s)) + i \left(1 - \frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}\right)| = \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} \tanh(y_a(s))^2 + 1 + \frac{e^{2\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))^2} - \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} \left(\tanh(y_a(s))^2 + \frac{1}{\cosh(y_a(s))^2}\right) + 1 - \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \quad (4.22) \\
&= \sqrt{e^{2\Lambda_a(s)} + 1 + 2\frac{e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} = \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \frac{e^{\Lambda_a(s)} + e^{-\Lambda_a(s)}}{2} - \frac{2e^{\Lambda_a(s)}}{\cosh(y_a(s))}} \\
&= \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) - \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.21) y (4.22) en (4.20),

$$\begin{aligned}
d(\tilde{O}, \gamma_a(s)) &= \ln \left[ \frac{\sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) + \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)} + \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) - \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)}}{\sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) + \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)} - \sqrt{2e^{\Lambda_a(s)} \left(\cosh(\Lambda_a(s)) - \frac{1}{\cosh(y_a(s))}\right)}} \right] \\
&= \ln \left[ \frac{\sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) + \cosh(y_a(s))^{-1}} + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) - \cosh(y_a(s))^{-1}}}{\sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) + \cosh(y_a(s))^{-1}} - \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) - \cosh(y_a(s))^{-1}}} \right]
\end{aligned}$$

Multiplicando arriba y abajo por el numerador,



$$\begin{aligned}
d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s_0)) &= \ln \left[ \frac{2 \cosh(\Lambda_a(s)) + 2\sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) + \cosh(y_a(s))^{-1}} \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s)) - \cosh(y_a(s))^{-1}}}{2 \cosh(y_a(s))^{-1}} \right] \\
&= \ln \left[ \frac{2 \cosh(\Lambda_a(s)) + 2\sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 - \cosh(y_a(s))^{-2}}}{2 \cosh(y_a(s))^{-1}} \right] \\
&= \ln \left[ \frac{\cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 - \cosh(y_a(s))^{-2}}}{\cosh(y_a(s))^{-1}} \right] \\
&= \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \left( \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 - \cosh(y_a(s))^{-2}} \right) \right] \\
&= \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \left( \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\frac{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1}{\cosh(y)^2}} \right) \right] \\
&= \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1} \right]
\end{aligned}$$

Es decir,

$$d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s)) = \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1} \right] \quad (4.23)$$

□

Recordemos ahora que la superficie  $\Sigma_a$  surge como el resultado de rotar una curva generatriz  $\Gamma_a$  en torno al *Eje*  $z$ , que pasa por el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$ . Entonces, dado que las rotaciones en  $\mathbb{H}^3$  son isometrías, es directo deducir que la distancia extrínseca (i.e. en  $\mathbb{H}^3$ ) desde el punto  $\mathcal{O} \in \mathbb{H}^3$  a todos aquellos puntos de la superficie con el mismo valor del parámetro  $s$ , será la misma. Dicho de otra manera, dado un punto  $f_a(s_0, \theta) \in \Sigma_a$ , éste pertenece al conjunto de los puntos originados por la rotación del punto  $\gamma_a(s_0) \in \Gamma_a$  (pertenece al contorno  $\partial\Sigma_{-s_0, s_0}^a$  del conjunto de nivel  $\Sigma_{-s_0, s_0}^a$ ) y su distancia extrínseca al  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  la podemos obtener como

$$d_{\mathcal{O}}^{\mathbb{H}^3}(f_a(s_0, \theta)) = d_{\mathcal{O}}^{\mathbb{H}^3}(\gamma_a(s_0)) = d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s_0))$$

Hecha esta observación, vamos a definir la función distancia que utilizaremos de aquí en adelante:

**Definición 4.3.8.** Sea  $\Gamma_a$  la curva generatriz parametrizada mediante la expresión (4.19). Dado un punto sobre la curva,  $\gamma_a(s) \in \Gamma_a$ , definimos la función

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
s &\rightarrow \tilde{r}_a(s) = d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s))
\end{aligned}$$

como la distancia en  $\mathbb{H}^2$  de dicho punto al  $\tilde{\mathcal{O}} = (0, 1)$ , calculándose ésta según la expresión (4.23).

**Definición 4.3.9.** Dado un punto  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  perteneciente a  $\partial\Sigma_{-s, s}^a$ , con la superficie expresada usando la parametrización (3.62), definimos la función

$$r_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$s \rightarrow r_a(s) = d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s)) = \text{dist}_{\mathbb{H}^3}^{\mathcal{O}}(f_a(s, \theta))$$

como la distancia extrínseca de  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  al punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1) \in \mathbb{H}^3$

Para conocer el comportamiento de esta función distancia necesitamos estudiar las funciones que lo componen:  $y_a(s)$  y  $\Lambda_a(s)$ .

**Proposición 4.3.10.** Dada la función  $\Lambda_a(s)$  definida como

$$\Lambda_a(s) = \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2\tau) - 1)^{1/2}}{\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2\tau) - 1} d\tau$$

podemos demostrar que

$$\Lambda_a(s) < \sqrt{2}; \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

**Nota:** demostraremos que  $\Lambda_a(s) < \sqrt{2}$ , aunque numéricamente se intuye que es mejorable hasta  $\Lambda_a(s) < \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Denotemos

$$\lambda_a(t) = \frac{(\cosh(2a) \cdot \cosh(2t) - 1)^{1/2}}{\cosh^2(2a) \cdot \cosh^2(2t) - 1}$$

Como  $\cosh(2a) \cosh(2t) + 1 \geq 2$ , multiplicando el numerador en el interior de la integral tenemos,

$$\frac{((\cosh(2a) \cosh(2t) - 1) (\cosh(2a) \cosh(2t) + 1))^{1/2}}{(\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)} \geq \sqrt{2} \frac{(\cosh(2a) \cosh(2t) - 1)^{1/2}}{(\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)}$$

de manera que al darle la vuelta obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_a(t) &= \frac{(\cosh(2a) \cosh(2t) - 1)^{1/2}}{(\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)} \leq \frac{((\cosh(2a) \cosh(2t) - 1) (\cosh(2a) \cosh(2t) + 1))^{1/2}}{\sqrt{2} (\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} (\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)^{1/2}} \end{aligned}$$

Descomponiendo de manera similar el denominador,

$$\begin{aligned} \lambda_a(t) &\leq \frac{1}{\sqrt{2} (\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2} ((\cosh(2a) \cosh(2t) + 1) (\cosh(2a) \cosh(2t) - 1))^{1/2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2} ((\cosh(2a) + 1) (\cosh(2a) \cosh(2t) - 1))^{1/2}} \end{aligned}$$

Como  $\cosh(2a) = \cosh(a)^2 + \sinh(a)^2$ , entonces

$$\cosh(2a) - 1 = 2 \sinh(a)^2$$

$$\cosh(2a) + 1 = 2 \cosh(a)^2$$

y sustituyendo,

$$\begin{aligned}
 \lambda_a(t) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}((2 \cosh(a)^2)(\cosh(2a) \cosh(2t) - 1))^{1/2}} = \frac{1}{2 \cosh(a)(\cosh(2a) \cosh(2t) - 1)^{1/2}} \\
 &\leq \frac{1}{2 \cosh(a)(\cosh(2a) \cosh(2t) - \cosh(2t))^{1/2}} = \frac{1}{2 \cosh(a) (\cosh(2t)(\cosh(2a) - 1))^{1/2}} \\
 &= \frac{1}{2 \cosh(a) (\cosh(2t) \cdot 2 \sinh(a)^2)^{1/2}} = \frac{1}{2 \cosh(a) \sqrt{\cosh(2t)} \sqrt{2} \sinh(a)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2} \cosh(a) \sinh(a) \sqrt{\cosh(2t)}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sinh(2a) \sqrt{\cosh(2t)}}
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación

$$\sinh(2a) = 2 \sinh(a) \cosh(a)$$

Como  $\cosh(2t) \geq \frac{e^{2t}}{2}$ ,

$$\lambda_a(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sinh(2a) \sqrt{\cosh(2t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sinh(2a) \sqrt{\frac{e^{2t}}{2}}} = \frac{1}{\sinh(2a) e^t}$$

Y sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_a(s) &= \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{(\cosh(2a) \cosh(2t) - 1)^{1/2}}{(\cosh(2a)^2 \cosh(2t)^2 - 1)} dt \leq \sqrt{2} \sinh(2a) \int_0^s \frac{1}{\sinh(2a) e^t} dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^s e^{-t} dt = -\sqrt{2} e^{-t} \Big|_0^s = -\sqrt{2} (e^{-s} - 1) = \sqrt{2}(1 - e^{-s})
 \end{aligned}$$

Es decir,  $\Lambda_a(s) \leq C$  siendo  $C$  un valor tal que  $C \in (-\infty, \sqrt{2})$ . Como además  $\Lambda_a(s) > 0$ , entonces podemos afirmar que la función  $\Lambda_a(s)$  es creciente con  $s$  y que  $\Lambda_a(s) \in [0, \sqrt{2})$ , es decir

$$\Lambda_a(s) < 2 \tag{4.24}$$

Por conveniencia para cálculos posteriores, definiremos una cantidad  $K_1$  de valor

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \cosh(\Lambda_a(s)) = \cosh\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \Lambda_a(s)\right) \in (1, \cosh(\sqrt{2})]$$

□

Veamos ahora la función  $y_a(s)$ .

**Proposición 4.3.11.** *La función  $y_a(s)$  definida como*

$$y_a(s) = a + \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{(\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1)^{1/2}} dt, \tag{4.25}$$

de la que podemos obtener una expresión integrando con Mathematica:

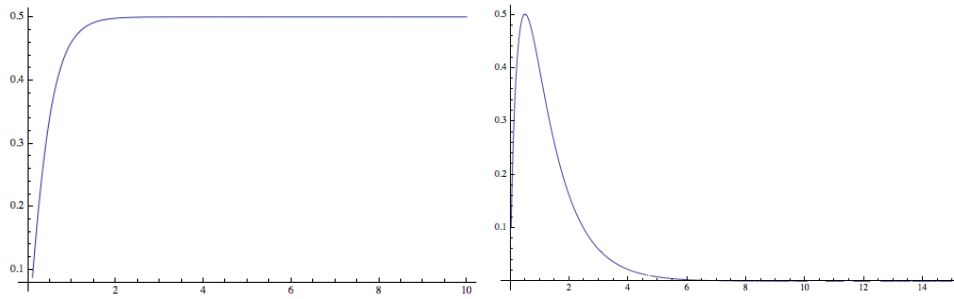


Figure 4.4: (a) La función  $\Lambda_a(s)$  se estabiliza muy rápidamente con  $s$ . (b) El límite  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Lambda_a(s)$  cae a cero cuando  $a \rightarrow \infty$ . Encontramos un máximo  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Lambda_a(s) = 0.5$  para  $a \simeq 0.5$  (motivo por el que sabemos que la cota es mejorable).

$$\begin{aligned}
 y_a(s) = & a + \frac{1}{2} \left( -\log \left( 2 \left( 1 + \cosh(4a) + \sqrt{\sinh^2(4a)} \right) \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \log(\cosh(4a - 2s) + 2 \cosh(2s) + \cosh(4a + 2s) + \right. \\
 & \left. \sqrt{-5 + 3 \cosh(4s) + \cosh(8a)(1 + \cosh(4s)) + 8 \cosh(4a) \sinh^2(2s)} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

para valores de  $a > 0$ , tiene la propiedad siguiente:

$$\exists \lim_{s \rightarrow \infty} y_a(s) - s \in [a - \log \sqrt{2}, a]$$

*Demostración.* Lo que vamos a hacer es ver que existe el límite de  $y_a(s) - s$  y dar una cota superior y una cota inferior a su valor.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y_a(s) - s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( a + \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} dt - s \right)$$

1. Cota inferior:

$$\frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} > \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t)}} = \tanh(2t)$$

y

$$\int_0^s \tanh(2t) dt = \frac{1}{2} \log(\cosh(2s)) \Big|_0^s = \frac{1}{2} \log(\cosh(2s) - 1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} dt - s \right) &\geq a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \log(\cosh(2s) - 1) - s \right) \\
 &= a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{2s}}{2}\right) - s \right) = a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} (\log(e^{2s}) - \log(2)) - s \right) = a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} (2s - \log(2)) - s \right) \\
 &= a - \frac{1}{2} \log(2) = a - \log(\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

2. Cota superior:

$$\begin{aligned}
 \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} &= \frac{\cosh(2a) \sqrt{\cosh^2(2t) - 1}}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - \cosh^2(2a)}}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} \\
 &\leq \frac{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_0^s \frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} dt - s \right) \leq a + \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_0^s 1 dt - s \right) = a$$

Para ver que existe el límite, basta con demostrar que la función es monótona decreciente, y esto sucede porque, escrito éste como una única integral, el integrando (su derivada) es siempre menor o igual a cero:

$$\frac{\cosh(2a) \sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2t) - 1}} - 1 = \frac{\sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2t) - \frac{1}{\cosh^2(2a)}}} - 1$$

como

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2t) - \frac{1}{\cosh^2(2a)}}} - 1 = \tanh(2t) - 1$$

y

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2t) - \frac{1}{\cosh^2(2a)}}} - 1 = \frac{\sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2t) - 1}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

podemos asegurar que

$$-2 \leq \tanh(2t) - 1 \leq \frac{\sinh(2t)}{\sqrt{\cosh^2(2t) - \frac{1}{\cosh^2(2a)}}} - 1 \leq 0$$

Entonces podemos decir que tenemos acotado el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (y_a(s) - s) \in [a - \log(\sqrt{2}), a] \tag{4.27}$$

**Nota:** Si denotamos  $K_2(a)$  al límite  $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{y_a(s) - s}$ , entonces

$$K_2(a) \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}e^a, e^a \right] \quad (4.28)$$

□

Ahora ya podemos demostrar las siguientes propiedades:

**Proposición 4.3.12.** *La función  $\tilde{r}_a(s)$ , dada en la Definición 4.3.8 y la función  $r_a(s)$  de la Definición 4.3.9, son funciones crecientes con  $s \geq 0$ .*

*Demostración.* Por un lado,  $\Lambda_a(s)$  es una función acotada, y por tanto también  $\cosh(\Lambda_a(s)) \geq 1$ . Por otro,

$$y_a(s)' = \frac{\cosh(2a) \sinh(2s)}{\sqrt{\cosh^2(2a) \cosh^2(2s) - 1}}$$

Como  $\cosh(2s) > 1, \sinh(2s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$ , el denominador está bien definido y el numerador será siempre positivo. La raíz la cogemos con signo positivo (haciéndolo al revés conseguimos una simetría que resulta redundante al rotar). De esta manera podemos asegurar que  $y_a(s)$  es una función estrictamente creciente. Además es directo ver que es siempre positiva (al integrar le añadimos el término  $a > 0$ ) y por tanto  $\cosh(y_a(s)) > 1$  también. Entonces, es directo ver que la distancia, definida en la ecuación (4.23) es una función creciente.

□

**Proposición 4.3.13.** *La función  $\tilde{r}_a(s)$ , dada en la Definición 4.3.8 y la función  $r_a(s)$  de la Definición 4.3.9, son funciones pares de  $s$ .*

*Demostración.* Basta considerar que las funciones  $\Lambda_a(s)$  y  $y_a(s)$  son par e impar respectivamente, y que la función  $\cosh(x)$  es una función par de  $x$ .

□

#### 4.3.2.2 Bolas extrínsecas y conjuntos de nivel de la función coordenada $s$ .

Vamos a ver ahora que el volumen de las bolas extrínsecas de la superficie centradas en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1) \in \mathbb{H}^3$  y con un radio  $t$  se corresponde con el volumen de un conjunto de nivel determinado de la función coordenada  $s$ . Para ello veamos antes una pequeña propiedad de la familia de los catenoides esféricos:

**Proposición 4.3.14.** *Sea  $\Sigma_a$  la familia de catenoides esféricos inmersos en  $\mathbb{H}^3$  y sea  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  un punto genérico de las superficies. Sea  $r_a(s)$  la función distancia dada en la Definición 4.3.9. Entonces se cumple que*

$$\inf\{r_a(s)\}_{s \in \mathbb{R}} = r_a(0) = a$$

*Demostración.* Recordemos que la expresión de la función  $r_a(s)$  venía dada por:

$$r_a(s) = d(\tilde{\mathcal{O}}, \gamma_a(s)) = \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(y_a(s))^2 \cosh(\Lambda_a(s))^2 - 1} \right]$$

Por la Proposición 4.3.12 la distancia es una función estrictamente creciente de  $s \geq 0$  y por la Proposición 4.3.13 sabemos que es una función par de  $s$ . Por otra parte las superficies  $\Sigma_a \in \mathbb{H}^3$  son completas sin borde, de manera que el máximo sólo se alcanzará en el infinito. Por tanto, el único punto crítico de la función distancia es el mínimo y lo encontraremos en  $s = 0$ . Vamos a calcular el valor de la función en ese punto. Cuando  $s \rightarrow 0$  tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} y_a(s) = a; \quad \lim_{s \rightarrow 0} \Lambda_a(s) = 0$$

Sustituyendo en la función distancia,

$$\inf\{r_a(s)\}_{s \in \mathbb{R}} = \lim_{s \rightarrow 0} r_a(s) = \ln \left( \cosh(a) + \sqrt{\cosh^2(a) - 1} \right) = \ln(\cosh(a) + \sinh(a)) = \ln(e^a) = a$$

□

Con la Proposición 4.3.14, la Proposición 4.3.12 y la Proposición 4.3.13, podemos afirmar que la función distancia toma valores desde  $r_a(0) = a$  hasta  $\lim_{s \rightarrow \infty} r_a(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} r_a(s) = \infty$ . Esto nos viene bien para demostrar la siguiente propiedad.

**Proposición 4.3.15.** *Sea  $D_{t_0}^a(\mathcal{O}) = \{f_a(s, \theta) \in \Sigma_a : r_a(s) \leq t_0\}$  la bola extrínseca de radio  $t_0$  centrada en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  de los catenoides  $\Sigma_a$ . Entonces, existe un valor  $s_0 = r_a^{-1}(t_0)$  tal que el conjunto de nivel de la función coordenada  $s$  sobre la superficie definido como  $\Sigma_{-s_0, s_0}^a$ , cumple que:*

$$D_{t_0}^a(\mathcal{O}) = \Sigma_{-s_0, s_0}^a$$

*Demostración.* En primer lugar, veamos que

$$D_{t_0}^a(\mathcal{O}) \subseteq \Sigma_{-s_0, s_0}^a$$

Sea  $f_a(s, \theta) \in D_{t_0}^a(\mathcal{O})$  de manera que  $0 \leq r_a(s) \leq t_0$ . Existe un  $s_0$  tal que  $s \in [-s_0, s_0]$ ?

1. Supongamos que  $s \geq 0$ . Por la Proposición 4.3.12, sabemos que  $r_a(s) = t$  es una función inyectiva y creciente en el intervalo considerado, por lo que existe su inversa  $r_a^{-1}(t)$  y es también creciente. Entonces,

$$a \leq r_a(s) \leq t_0 \Rightarrow 0 \leq s \leq r_a^{-1}(t_0) = s_0$$

2. Por la Proposición 4.3.13 sabemos que la distancia  $r_a(s)$  es una función par, por lo que, dado un punto  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  tal que  $a \leq r_a(s) \leq t$ , también se dará el caso en el que:

$$a \leq r_a(s) \leq t_0 \Rightarrow -s_0 \leq s \leq 0$$

Por tanto podemos decir que

$$D_{t_0}^a(\mathcal{O}) \subseteq \Sigma_{-s_0, s_0}^a \quad (4.29)$$

En segundo lugar, vamos a demostrar que

$$\Sigma_{-s_0, s_0}^a \subseteq D_{t_0}^a(\mathcal{O})$$

1. Sea  $f_a(s, \theta) \in \Sigma_a$  un punto de la superficie tal que  $0 \leq s \leq s_0$ . Si  $a \leq r_a(s) \leq t_0, \forall s \in [-s_0, s_0]$ , entonces  $f_a(s, \theta) \in D_{t_0}^a(\mathcal{O})$ ? Podemos ver que esto es cierto porque la distancia  $r_a(s)$ , como hemos visto antes, es creciente con  $s$ . Por tanto,

$$0 \leq s \leq s_0 \Rightarrow a \leq r_a(s) \leq t_0$$

2. Igual que antes, si  $s \leq 0$  esto se sigue cumpliendo por ser par la función distancia. Tenemos pues que

$$-s_0 \leq s \leq 0 \Rightarrow a \leq r_a(s) \leq t_0$$

Considerando las condiciones uno y dos podemos decir que

$$\Sigma_{-s_0, s_0}^a \subseteq D_{t_0}^a(\mathcal{O}) \quad (4.30)$$

Finalmente, con las expresiones (4.29) y (4.30) podemos afirmar que

$$D_{t_0}^a(\mathcal{O}) = \Sigma_{-s_0, s_0}^a \quad (4.31)$$

□

#### 4.3.2.3 Estimación del crecimiento del volumen.

Ya hemos demostrado que una bola extrínseca de radio  $t$  de la superficie puede expresarse como un conjunto de nivel de la función coordenada  $s$  de valor  $s_0 = r_a^{-1}(t_0)$ . Como consecuencia, el volumen de un conjunto de nivel, que en general denotaremos como:  $Vol(\Sigma_{-s, s}^a)$ , será equivalente al volumen de una bola extrínseca de la superficie de radio  $r_a(s)$  centrada en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$ , que denotaremos como:  $Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))$ . Es decir, que se cumplirá la relación

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(\Sigma_{-s, s}^a)}{Vol(B_s^{-1,2})} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s^{-1,2})}$$

Esto nos permitirá, descomponiendo el término de la derecha en

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s^{-1,2})} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})} \cdot \frac{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{Vol(B_s^{-1,2})}$$



y tras comprobar que todos los límites existen (siendo además el último distinto de cero), estimar el crecimiento del volumen mediante la expresión

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{\text{Vol}(B_{r_a(s)}^{-1,2})} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\Sigma_{-s,s})}{\text{Vol}(B_s^{-1,2})}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{\text{Vol}(B_s^{-1,2})}} \quad (4.32)$$

Vamos a calcular los límites en el numerador y el denominador de la parte derecha de la ecuación, a comprobar que existen, y que el último es distinto de cero.

**Proposición 4.3.16.** Sean  $B_s^{-1,2}$  las bolas geodésicas de radio  $s$  en  $\mathbb{H}^2$  y sea  $r_a(s)$  la función dada en la Definición.4.3.9. Entonces, existe el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{\text{Vol}(B_s)^{-1,2}} = K_1 \cdot K_2(a) \quad (4.33)$$

donde

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \cosh(\Lambda_a(s)) \in \left(1, \cosh(\sqrt{2})\right]$$

y

$$K_2(a) = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{y_a(s)-s} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^a, e^a\right]$$

*Demostración.* Recordar que calculamos el volumen de las bolas extrínsecas en el hiperbólico como

$$\text{Vol}(B_r^{-1,2}) = 2\pi(\cosh(r) - 1) \quad (4.34)$$

Si el radio  $r$  viene dado por  $r_a(s)$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_{r_a(s)}^{-1,2}) &= 2\pi \cdot (\cosh(r_a(s)) - 1) \\ &= 2\pi \cdot \left( \cosh \left( \ln \left( \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1} \right) \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{Vol(B_s^{-1,2})} = \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left( \cosh \left( \ln \left( \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2 - 1} \right) \right) - 1 \right)}{\cosh(s) - 1} = \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cosh \left( \ln \left[ \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)) + \sqrt{\cosh(\Lambda_a(s))^2 \cosh(y_a(s))^2} \right] \right)}{\cosh(s)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cosh(\ln(2 \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s))))}{\cosh(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln(2 \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s)))}}{e^s} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \cosh(y_a(s)) \cosh(\Lambda_a(s))}{e^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{y_a(s)} \cosh(\Lambda_a(s))}{e^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{y_a(s)}}{e^s} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \cosh(\Lambda_a(s)) = K_1 \cdot K_2(a)
\end{aligned}$$

que es el resultado buscado.  $\square$

**Proposición 4.3.17.** Sean  $D_t^a(\mathcal{O})$  las bolas extrínsecas de radio  $t$  centradas en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  de la familia de superficies  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  parametrizada por la expresión (3.62). Sean  $B_s^{-1,2}$  las bolas geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ , y  $r_a(s)$  la función distancia dada en la Definición 4.3.9. Entonces, existe el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s)} = 2K_2(a) \quad (4.36)$$

donde

$$K_2(a) = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{y_a(s)-s} \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} e^a, e^a \right]$$

y denotamos por  $D_{r_a(s)}$  a las bolas extrínsecas de la superficie  $\Sigma_a$ .

*Demostración.* Utilizaremos para la demostración la fórmula de Gauss-Bonnet que viene dada por:

$$\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} K_G dA + \int_{\partial \Sigma_{0,s_0}^a} k_g dL = 2\pi \chi(\Sigma_{0,s_0}^a) \quad (4.37)$$

donde  $\Sigma_{0,s_0}$  es el conjunto de nivel de la función coordenada  $s$  contenida entre los valores  $0 \leq s \leq s_0$ . El conjunto de nivel  $\Sigma_{0,s_0}^a$  es una superficie compacta, de género nulo, cuyo borde tiene dos componentes conexas. Por tanto, podemos afirmar, por el Corolario 2.3.30, que  $\chi(\Sigma_{0,s_0}^a) = 0$ . Por otra parte, calculamos la curvatura geodésica  $k_g^{\partial \Sigma_{0,s_0}^a}$  del contorno como la suma de la curvatura de la componente inferior ( $\partial \Sigma_0^a$ ) más la de la superior ( $\partial \Sigma_{s_0}^a$ ) con sus respectivos signos. De esta manera tenemos:

$$\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} K_G dA + \int_{\partial \Sigma_0^a} k_g dL - \int_{\partial \Sigma_{s_0}^a} k_g dL = 0 \quad (4.38)$$

Calculamos la curvatura geodésica de los contornos  $\partial\Sigma_0^a$  y  $\partial\Sigma_{s_0}^a$  mediante la ecuación dada en la Definición 2.3.6

$$\begin{aligned} k_g^{\partial\Sigma_s^a} &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|}} \frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|}, -\frac{\partial_s}{\|\partial_s\|} \right\rangle = -\frac{1}{\|\partial_\theta\|} \left\langle \nabla_{\partial_\theta} \frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|}, \partial_s \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|\partial_\theta\|} \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{\|\partial_\theta\|} \right) \partial_\theta, \partial_s \right\rangle - \frac{1}{\|\partial_\theta\|^2} \left\langle \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta, \partial_s \right\rangle = -\frac{1}{\|\partial_\theta\|^2} \left\langle \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta, \partial_s \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sinh(y_a(s))^2} \tanh(y_a(s)) y_a(s)' (1 + \sinh(y_a(s))^2) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las expresiones (3.67) y (3.70) en la parametrización dada por la expresión (3.62). Entonces,

$$k_g^{\partial\Sigma_s^a} = -\tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))^2} \quad (4.39)$$

Es fácil comprobar que  $k_g^{\partial\Sigma_0^a} = 0$  dado que  $y_a(0) = 0$ . Por tanto, la expresión (4.38) queda

$$\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} K_G dA = \int_{\partial\Sigma_{s_0}^a} k_g dL \quad (4.40)$$

donde, por (3.68),

$$dL = \sqrt{\det(g_{\partial\Sigma_a})} d\theta = \sinh(y_a(s)) d\theta$$

que no depende de la coordenada  $\theta$ , lo que nos permitirá integrar directamente la parte derecha:

$$\int_{\partial\Sigma_{s_0}^a} k_g dL = -2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))^2} \sinh(y_a(s))$$

La parte izquierda queda, aplicando la ecuación de Gauss (2.30),

$$\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} K_G dA = -\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} \left( 1 + \frac{1}{2} \|B^{\Sigma_a}\|^2 \right) dA = -Vol(\Sigma_{0,s_0}^a) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{0,s_0}^a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA$$

Reordenando,

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{0,s_0}^a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA = -Vol(\Sigma_{0,s_0}^a) + 2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))} \quad (4.41)$$

donde conocemos el valor de la parte izquierda de la ecuación (integral de la norma). En concreto sabemos que ésta cumple  $\int_{\Sigma_{0,s_0}^a} \|B^{\Sigma}\|^2 dA < \infty$ , por lo que el término de la derecha de la ecuación también habrá de ser finito. Sin embargo, teniendo en cuenta que  $\lim_{s \rightarrow \infty} y_a(s) = \infty$  y que  $\lim_{s \rightarrow \infty} y_a'(s) = 1$ , entonces,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))} = 2\pi \lim_{s \rightarrow \infty} s = \infty$$

por lo que el término  $Vol(\Sigma_{0,s_0}^a)$  tendrá que ser suficientemente grande como para compensar. Para operar, sacaremos en primera lugar factor común:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{0,s_0}^a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA = 2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))} \left( 1 - \frac{\text{Vol}(\Sigma_{0,s_0}^a)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}} \right)$$

De esta manera, lo que buscamos es que el interior del paréntesis se anule. Es decir

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\Sigma_{0,s_0}^a)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}} = 1 \quad (4.42)$$

Para calcular el límite (4.42) vamos a descomponerlo en un producto de límites que nos facilite la tarea:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\Sigma_{0,s}^a)}{2\pi(\cosh(s) - 1)} \cdot \frac{2\pi(\cosh(s) - 1)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}} = 1 \quad (4.43)$$

con la única condición necesaria de que exista el límite del segundo término y no sea nulo. Para comprobarlo, vamos a operarlo también:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2\pi(\cosh(s) - 1)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi(\cosh(s) - 1)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}}}{\left( \frac{\cosh(s) - 1}{\sinh(y_a(s))} \right)} \left( \frac{\cosh(s) - 1}{\sinh(y_a(s))} \right) \quad (4.44)$$

donde, como siempre, han de existir los límites de sus dos componentes. En primer lugar,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cosh(s) - 1}{\sinh(y_a(s))} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^s}{e^{y_a(s)}} = \frac{1}{K_2(a)} \quad (4.45)$$

donde hemos aplicado la Proposición 4.28. En segundo lugar,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi(\cosh(s) - 1)}{2\pi \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh^2(y_a(s))}{\sinh(y_a(s))}}}{\frac{\cosh(s) - 1}{\sinh(y_a(s))}} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sinh(y_a(s))}{\tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh^2(y_a(s))}{\sinh(y_a(s))}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sinh^2(y_a(s))}{\tanh(y_a(s)) y_a(s)' (1 + \sinh^2(y_a(s)))} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sinh^2(y_a(s))}{\tanh(y_a(s)) y_a(s)' \cosh^2(y_a(s))} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tanh(y_a(s))}{y_a(s)'} = 1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por tanto, volviendo a (4.44) tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2\pi(\cosh(s) - 1)}{2\pi \cdot \tanh(y_a(s)) y_a(s)' \frac{1 + \sinh(y_a(s))^2}{\sinh(y_a(s))}} = \frac{1}{K_2(a)}$$

Sustituyendo en (4.43) tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\Sigma_{0,s}^a)}{2\pi(\cosh(s) - 1)} \cdot \frac{1}{K_2(a)} = 1$$

es decir,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\Sigma_{0,s}^a)}{2\pi(\cosh(s) - 1)} = K_2(a) \quad (4.47)$$

Es fácil comprobar que  $Vol(\Sigma_{-s,s}^a) = 2 \cdot Vol(\Sigma_{0,s}^a)$ . Basta con ver que

$$Vol(\Sigma_{-s,s}^a) = \int_0^{2\pi} \int_{-s}^s \sqrt{\det(g_{\Sigma_a})} dt d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^s \sinh(y_a(t)) dt d\theta = 2Vol(\Sigma_{0,s}^a)$$

por simetría de la función  $y_a(s)$ . De esta manera, la expresión (4.47) se convierte en

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(\Sigma_{-s,s}^a)}{2Vol(B_s^{-1,2})} = K_2(a)$$

Es decir,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s^{-1,2})} = 2K_2(a) \quad (4.48)$$

como queríamos demostrar. □

Recordemos que estábamos buscando una estimación del crecimiento del volumen, dada por

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s^{-1,2})}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{Vol(B_s^{-1,2})}}$$

Por la proposición 4.3.16 tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})}{Vol(B_s^{-1,2})} = K_1 \cdot K_2(a)$$

y por la Proposición 4.3.17,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_s^{-1,2})} = 2K_2(a)$$

Por tanto, podemos concluir que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_{r_a(s)}(\mathcal{O}))}{Vol(B_{r_a(s)}^{-1,2})} = \frac{2}{K_1(a, s)} \in \left[ \frac{2}{\cosh(\sqrt{2})}, 2 \right) \quad (4.49)$$

Esto se puede resumir en el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.18.** *Sea  $\Sigma_a$  un elemento de la familia de catenoides esféricos  $\{\Sigma_a : a \in \mathbb{R}^+\}$  inmersos en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . Sea  $\{D_t^a(\mathcal{O})\}_{t>0}$  una exhaustión por bolas extrínsecas de la superficie centrada en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1) \in \mathbb{H}^3$ . Sea  $B_t^{-1,2}$  una bola métrica de radio  $t$  en  $\mathbb{H}^2$ . Entonces, el crecimiento del volumen de la superficie, definido como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_t^a(\mathcal{O}))}{Vol(B_t^{-1,2})}$  se encuentra acotado de la siguiente manera:*

- (1)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_t^a(\mathcal{O}))}{Vol(B_t^{-1,2})} \in \left[ \frac{2}{\cosh(\sqrt{2})}, 2 \right)$
- (2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_t^a(\mathcal{O}))}{Vol(B_t^{-1,2})} < \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA_{\Sigma_a}$

Si además tenemos en cuenta el resultado de la Proposición 4.3.2 podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.19.** *Sea  $\Sigma_a$  un elemento de la familia de catenoides esféricos  $\{\Sigma_a : a \in \mathbb{R}^+\}$  inmersos en  $\mathbb{H}^3$  y sea  $p \in \mathbb{H}^3$  un punto a una distancia  $R$  del  $\mathcal{O} \in \mathbb{H}^3$ . Sea  $\{D_t^a(p)\}_{t>0}$  una exhaustión por bolas extrínsecas de la superficie centrada en el punto  $p$ . Entonces, el valor del crecimiento del volumen estará acotado como*

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t^a(\mathcal{O}))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})} \in \left[ \frac{2}{\cosh(\sqrt{2})} e^{-R}, 2e^R \right)$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t^a(\mathcal{O}))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})} < \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA_{\Sigma_a}$$

donde  $R = d_{\mathbb{H}^3}^{\mathcal{O}}(p)$  con la distancia definida en la Proposición 2.4.14.

*Demostración.* Este resultado se deduce de la Proposición 4.3.2, en la que se demuestra que el valor del crecimiento del volumen depende de la distancia desde el centro de la exhaustión al punto considerado, en este caso el  $\mathcal{O} \in \mathbb{H}^3$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t^a(\mathcal{O}))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})} \frac{1}{e^R} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t^a(p))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(D_t^a(\mathcal{O}))}{\text{Vol}(B_t^{-1,2})} e^R,$$

donde la distancia la calculamos como  $R = d_{\mathbb{H}^3}^{\mathcal{O}}(p)$  según la expresión dada en la Proposición 2.4.14. □

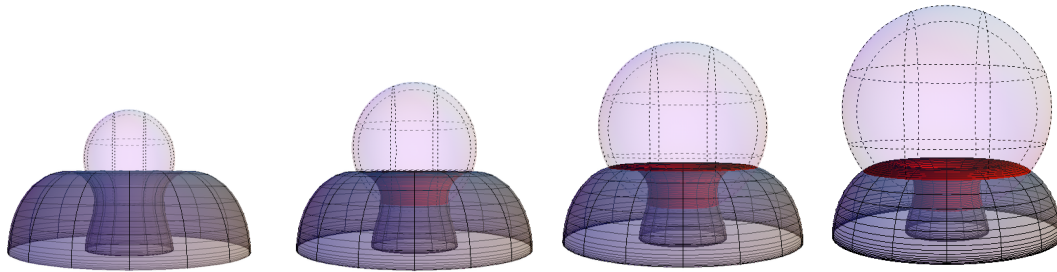


Figure 4.5: Muestras de una exhaustión por bolas extrínsecas del catenoide esférico  $\Sigma_{0,6} \hookrightarrow \mathbb{H}^3$  centrada en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$ .

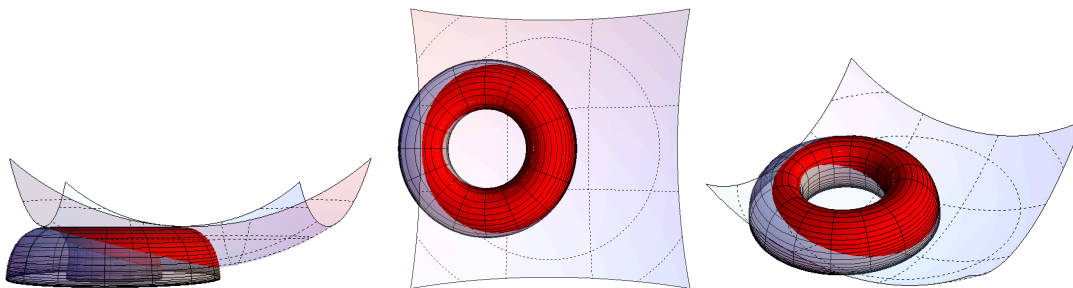


Figure 4.6: Bola extrínseca de radio 2 centrada en el punto  $p = (1, 0, 1)$  del catenoide esférico  $\Sigma_1 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ .

## 4.4 Conclusiones.

En este último apartado hemos estudiado el comportamiento de la ecuación de Chern-Osserman, que relaciona tres importantes propiedades geométricas de las subvariedades, cuando la variedad ambiente es el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . Para ello hemos utilizado el ejemplo de la familia de Catenoides Esféricos  $\Sigma_a \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ . Los resultados obtenidos se pueden resumir en:

(1) La Integral de la Norma no está cuantizada (**Proposición 4.2.3**):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA_{\Sigma_a} \notin \mathbb{N},$$

a diferencia de lo que sucede cuando la variedad ambiente es euclídea.

(2) La Integral de la Norma va a infinito dentro de la familia de Catenoides Esféricos (**Proposición 4.2.1**).

(3) La Integral de la Norma tiende a 2 (número de finales) cuando el parámetro distintivo tiende a su valor mínimo. (**Proposición 4.2.5**)

(4) El Crecimiento del Volumen de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^n$  es independiente del punto en el que centremos su exhaustión por bolas extrínsecas. (**Proposición 4.3.1**)

(5) El Crecimiento del Volumen de una superficie inmersa en  $\mathbb{H}^3$  no es independiente del punto en el que centremos su exhaustión por bolas extrínsecas. (**Proposición 4.3.3**)

(6) El crecimiento del volumen de la familia de superficies, definido como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Vol(D_t^a(p))}{Vol(B_t^{-1,t})}$  podría tomar en principio diferentes valores según el punto  $p$  que se escoja como centro de las bolas extrínsecas  $D_t^a(p)$ . Estudiamos los dos casos representativos:

(6.1) Cuando la exhaustión por bolas extrínsecas de la superficie se centra en el punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$  del espacio hiperbólico, el crecimiento del volumen toma valores acotados en el intervalo  $\left[\frac{2}{\cosh(\sqrt{2})}, 2\right)$  y nunca superiores al valor de la Integral de la Norma (**Teorema 4.3.29**).

(6.2) El crecimiento del volumen de la familia de superficies, cuando la exhaustión por bolas extrínsecas de la superficie se centra en un punto  $p$  del espacio hiperbólico situado a una distancia  $R(p) = d_{\mathcal{O}}^{\mathbb{H}^3}(p)$  del punto  $\mathcal{O} = (0, 0, 1)$ , está acotada entre los valores  $\left[\frac{2}{\cosh(\sqrt{2})}e^{-R}, 2e^R\right)$  y nunca superiores al valor de la Integral de la Norma (**Teorema 4.3.30**):

(6.3) Para cada valor del parámetro  $a$ , podemos definir una distancia crítica  $R_a = d_{\mathcal{O}}^{\mathbb{H}^3}(p_a) = \ln\left(\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_a} \|B^{\Sigma_a}\|^2 dA_{\Sigma_a}\right)$ , de manera que todo punto que se encuentre a una distancia mayor ( $R(p) > R_a$ ) tendrá como cota superior  $2e^{R(p)}$  y todo punto que se encuentre a una distancia menor ( $R(p) < R_a$ ) tendrá como cota superior la integral de la norma.

Por la Proposición 4.2.3 podemos decir que

(7) El comportamiento de la ecuación de Chern-Osserman sobre la familia de Catenoides Esféricos es muy similar a su comportamiento en el espacio euclídeo (es decir, se comporta casi como una igualdad) cuando el parámetro  $a$  tiende a su valor mínimo.

(8) Además, por la Nota 4.2.3, podemos decir que existe un mínimo para el valor de la Integral de la Norma en torno a los valores  $0.495 \leq a \leq 0.497$ . Este valor es muy similar a  $a \simeq 0.4955$ , valor en el que, según la Proposición 4.8 del artículo de Bérard-Sa Earp, la superficie  $\Sigma_a$  pasaría de tener índice 1 a ser estable.

(9) Demostramos (**Proposición 3.5.2**) que las parametrizaciones dadas por Mori ([Mor81]), doCarmo-Dajczer ([dCD83]) y Berard-SaEarp ([BSE10]) son equivalentes.

(10) De todo esto deducimos:

(i) Si la exhaustión está centrada en  $\mathcal{O} = (0, 0, 1) \Rightarrow VG(\Sigma_a) \neq \mathcal{K}(\Sigma_a)$ .

(ii) Si la exhaustión está centrada en  $p \neq \mathcal{O}$  existe un intervalo  $\mathcal{D}_1$  del parámetro  $a$  para el que  $VG(\Sigma_a)_p < 2 \Rightarrow VG(\Sigma_a)_p \neq \mathcal{K}(\Sigma_a)$

(iii) Si la exhaustión está centrada en  $\mathcal{O} = (0, 0, 1) \Rightarrow$  puede haber igualdad en la ecuación para un intervalo  $\mathcal{D}_2$  del parámetro  $a$ .

(iv) Si la exhaustión está centrada en  $p \neq \mathcal{O}$  puede existir la igualdad para todo valor del parámetro  $a$ .



# Índice alfabético

- Aplicación de Weingarten, 24
- Aplicación exponencial, 18
- Bola extrínseca, 29
- Bola geodésica, 20
- Bola métrica, 20, 21
- Característica de Euler-Poincaré, 30
- Conexión inducida, 23
- Crecimiento del volumen, 35
- Curvatura gaussiana, 21
- Curvatura geodésica, 28
- Curvatura media, 26
- Curvatura seccional, 21
- Curvaturas principales, 25
- Distancia, 19
- Distancia extrínseca, 29
- Ecuación de Gauss, 25
- Ecuación de Weingarten, 25
- Espacio de Minkowski, 16
- Espacio hiperbólico, 35
- Fórmula de la co-área, 26
- Genéro, 32
- Geodésicas, 16, 18
- Inmersión, 22
- Inmersión isométrica, 22
- Inmersión propia, 22
- Inmersión totalmente geodésica, 28
- Longitud hiperbólica., 37
- Número de finales, 33
- Polo, 20
- Región regular, 30
- Región simple, 30
- Símbolos de Christoffel, 17
- Segunda forma fundamental, 24
- Subvariedad, 23
- Subvariedad minimal, 26
- Suma conexa, 31
- Tensor curvatura de Riemann, 21
- Tensor métrico, 15
- Teorema de Gauss-Bonnet, 34
- Teorema de Hopf-Rinow, 20
- Transformación de Moebius, 37
- Variedad Cartan-Hadamard, 21
- Variedad geodésicamente completa, 20
- Variedad riemanniana, 15
- Variedad simplemente conexa, 19



# Bibliografía

- [And84] Michael T. Anderson, *The compactification of a minimal submanifold in euclidean space by the gauss map*, unpublished preprint, 1984.
- [BSE10] Pierre Bérard and Ricardo Sa Earp, *Lindelöf's theorem for hyperbolic catenoids*, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), no. 10, 3657–3669.
- [Cha84] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk. MR 768584 (86g:58140)
- [Che84] Bang-Yen Chen, *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, Series in Pure Mathematics, vol. 1, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984. MR 749575 (86b:53053)
- [Che99] Qing Chen, *On the area growth of minimal surfaces in  $H^n$* , Geom. Dedicata **75** (1999), no. 3, 263–273. MR 1689272 (2000h:53081)
- [CO67] Shiing-shen Chern and Robert Osserman, *Complete minimal surfaces in euclidean  $n$ -space*, J. Analyse Math. **19** (1967), 15–34. MR 0226514 (37 #2103)
- [dC76] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, Translated from the Portuguese. MR 0394451 (52 #15253)
- [dC92] Manfredo Perdigão do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. MR 1138207 (92i:53001)
- [dCD83] M. do Carmo and M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 2, 685–709. MR 694383 (85b:53055)
- [GG73] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, New York, 1973, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. MR 0341518 (49 #6269)
- [GP13] Vicent Gimeno and Vicente Palmer, *Extrinsic isoperimetry and compactification of minimal surfaces in Euclidean and hyperbolic spaces*, Israel J. Math. **194** (2013), no. 2, 539–553. MR 3047082

- [GR04] M. Pérez R. Gámez, D. Pasadas and C. Ruiz, *la Gaceta de la RSME* **7.2** (2004), 387–404.
- [Gra04] Alfred Gray, *Tubes*, second ed., Progress in Mathematics, vol. 221, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004, With a preface by Vicente Miquel. MR 2024928 (2004j:53001)
- [GW79] R. E. Greene and H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 699, Springer, Berlin, 1979. MR 521983 (81a:53002)
- [Hsi81] Chuan Chih Hsiung, *A first course in differential geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication. MR 608028 (83c:53001)
- [JM83] Luquésio P. Jorge and William H. Meeks, III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, *Topology* **22** (1983), no. 2, 203–221. MR 683761 (84d:53006)
- [KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996, Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1393941 (97c:53001b)
- [Kok97] Masatoshi Kokubu, *Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space.*, *Tohoku Math. J. (2)* **49** (1997), 367–377.
- [Kre68] E. Kreyszig, *Introduction to differential geometry and riemannian geometry*, Second edition, University of Toronto Press, 1968.
- [Mas77] William S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977, Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. MR 0448331 (56 #6638)
- [Mil63] J. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. *Annals of Mathematics Studies*, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. MR 0163331 (29 #634)
- [Mor81] H. Mori, *Minimal surfaces of revolution in  $h^3$  and their global stability*, *Indiana Univ. Math. Jour.* **30** (1981), 787–794.
- [O’N83] Barrett O’Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983, With applications to relativity. MR 719023 (85f:53002)
- [Oss86] Robert Osserman, *A survey of minimal surfaces*, second ed., Dover Publications Inc., New York, 1986. MR 852409 (87j:53012)
- [Pal99] Vicente Palmer, *Isoperimetric inequalities for extrinsic balls in minimal submanifolds and their applications*, *J. London Math. Soc. (2)* **60** (1999), no. 2, 607–616. MR 1724821 (2000j:53050)
- [Pet98] Peter Petersen, *Riemannian geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer-Verlag, New York, 1998. MR 1480173 (98m:53001)

- [Pol94] Konrad Polthier, *Geometric a priori estimates for hyperbolic minimal surfaces*, Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 263, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1994, Dissertation, Universität Bonn, Bonn, 1993. MR 1293964 (95h:53011)
- [Pre10] Andrew Pressley, *Elementary differential geometry*, second ed., Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2010.
- [QY99] Chen Qing and Cheng Yi, *Chern-rosserman inequality for minimal surfaces in  $\mathbb{H}^n$* , Proc. Amer. Math Soc. **128** (1999), 2445–2450.
- [Rat06] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer, New York, 2006.
- [RS98] Wayne Rossman and Katsunori Sato, *Constant mean curvature surfaces with two ends in hyperbolic space*, Experiment. Math. **7** (1998), no. 2, 101–119. MR 1677103 (2000b:53014)
- [Sak96] Takashi Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 149, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Translated from the 1992 Japanese original by the author. MR 1390760 (97f:53001)
- [Seo11] Keomkyo Seo, *Stable minimal hypersurfaces in the hyperbolic space*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), no. 2, 253–266. MR 2789454 (2012c:53096)
- [Spi79] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, second ed., Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1979. MR 532830 (82g:53003a)
- [Tka94] Vladimir G. Tkachev, *Finiteness of the number of ends of minimal submanifolds in Euclidean space*, Manuscripta Math. **82** (1994), no. 3-4, 313–330. MR 1265003 (95h:53012)
- [UY93] Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 3, 611–638. MR 1217349 (94c:53015)
- [War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983, Corrected reprint of the 1971 edition. MR 722297 (84k:58001)
- [Whi87] Brian White, *Complete surfaces of finite total curvature*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 315–326. MR 906393 (88m:53020)