Programación didáctica de la asignatura de 4º de ESO

Trabajo Monográfico de Investigación:

"*Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*"

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Especialidad de Matemáticas

PRESENTADO POR:

Carlos Sergio Gutiérrez Perera, 20468139W

DIRIGIDO POR:

Gil Lorenzo Valentín, Área de Didáctica de la Matemática

María Lozano Estivalis, Área de Teoría e Historia de la Educación

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Junio 2014

AGRADECIMIENTOS

Este ha sido un proceso dificultoso, interrumpido por un período personal complicado, que se ha alargado más de lo previsto. El apoyo de mis allegados ha sido de suma relevancia para permitirme culminar este TFM y, al fin, el Máster. Por fortuna, he contado con la ayuda de Frasier Crane y Tyrion Lannister para mantener la cordura en los últimos meses, pero mucho más, de manera directa y sincera, agradezco el apoyo prestado:

A Gil y a María, directores de mi TFM, que han sido la tijera y el papel que me han devuelto al camino cuando me entretenía con las piedras, por su acertada, cercana y esforzada tutela.

A mis compañeras de Máster de la especialidad de matemáticas, a unas por las lager y las ale, a otra por las tabulaciones y los índices. Gracias.

A quienes me cuidaron durante la convalecencia, antes y después de la operación, en especial a Victor por acogerme en su casa en unos días más que difíciles.

A Iván, siempre, con quien aprendí de un efímero maestro, tiempo ha, que el juego es nuestro particular espejo de Galadriel, que nos regala visiones del pasado, del presente y del futuro y nos muestra incluso aquello que no pedimos, hurgando en nuestra imaginación y liberando emociones.

At last, but not least, (my right arm is complete again!),
a Fer, por atreverse a jugar a tigres y cabritas conmigo, y explorar un mundo nuevo.
Y por ser el mejor *senpai* que Byaku-chan podría tener.

RESUMEN

El trabajo presentado se enmarca en la modalidad 3 de diseño curricular, concretamente el de una programación didáctica anual para la asignatura optativa de 4º de ESO Trabajo Monográfico de Investigación, ofertada desde el departamento de matemáticas, que se ha titulado "*Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*".

La iniciativa partió de una serie de observaciones realizadas durante el *practicum* en conjunción con un interés personal por los juegos de tablero del mundo. El escenario problemático que tratamos de abordar queda concretado en el aula multicultural de matemáticas de educación secundaria, poblada por alumnas y alumnos que no gozan de un espacio de expresión y diálogo suficiente, están distanciados emocionalmente de las matemáticas a consecuencia de un bajo grado de identificación con el currículo académico, muestran limitadas competencias prácticas en el uso aplicado de las matemáticas y la resolución de problemas, y carecen de una perspectiva sólida y amplia de la cultura lúdica.

Nuestra propuesta se fundamenta en el reconocimiento y puesta en valor de las prácticas etnomatemáticas de diversas macroculturas y microculturas, excluidas de los currículos tradicionales en favor de la matemática eurocéntrica, plasmadas en una de las seis actividades matemáticas universales reconocidas por Alan Bishop: el juego. Adoptando un enfoque intercultural de la comunicación y la interrelación en el centro educativo, extensivo al ámbito extraescolar, la programación discurre por el camino de la iniciación a los procesos de investigación y construcción autónoma del conocimiento por parte del alumnado.

Se trata de una propuesta pedagógica novedosa en una asignatura del área de matemáticas, tanto por su fundamentación teórica y posicionamiento integral como por la combinación práctica de los métodos de aprendizaje cooperativo y los sistemas de evaluación por observación. Su intención pasa por el descubrimiento en pequeños grupos-tribu y la negociación social del conocimiento, apoyándose en un extenso y variado espectro de juegos de mesa de posición, de carreras, de caza y de guerra, y *mancala*, con espacio también para algunos solitarios y juegos de azar. A través del análisis de aspectos como la estructura morfológica de los tableros y las reglas abstractas de los juegos, los alumnos y las alumnas trabajarán en el desarrollo de diferentes competencias específicas y transversales mediante una práctica lúdica y amena de contenidos esencialmente matemáticos –geometrías simétricas, razonamiento abstracto, planificación y estrategia, tratamiento de probabilidades y azar, sistemas de notación, pensamiento arborescente…–, además de contribuir a la conservación de una parte importante del patrimonio inmaterial de la humanidad.

Palabras clave:

etnomatemáticas, interculturalidad, educación matemática, didáctica de las matemáticas, aprendizaje cooperativo, evaluación por observación, juegos de mesa, juegos de tablero, juegos del mundo, juegos abstractos, trabajo monográfico de investigación, contenidos transversales.

ABSTRACT

The work herein presented is framed under the modality of curriculum design, namely that of an annual syllabus for the optional course Trabajo Monográfico de Investigación (Research Monographic Project) in the 4th year of Spanish Compulsory Secondary Education, offered by the mathematics department, titled "*Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*" ("*World Board Games and Ethnomathematics*").

The initiative was derived from a series of observations conducted during the practicum period in conjunction with a personal interest and fondness for world board games. The problematic scenario being addressed is set in the secondary education multicultural mathematics classroom, populated by students who lack an adequate dialogue and expression space, are emotionally separated from mathematics as a consequence of a low level of curriculum relatedness, show limited practical abilities in the applied use of mathematics and problems resolution and no solid or wide perspective of ludic culture.

Our proposal is supported by the acknowledgement and highlighting of the ethnomathematical practices of different macrocultures and microcultures, excluded from traditional curricula in favour of Eurocentric mathematics, expressed in one of the six universal mathematic activities considered by Alan Bishop: playing. Under an intercultural approach of communication and interrelation in the educational centre, which is applicable to the extracurricular field, the syllabus runs through the path of research processes initiation and independent knowledge construction on the part of students.

This is a novel pedagogic proposal for a subject in the mathematics field, due to both its theoretical foundation and comprehensive positioning, and the applied combination of cooperative learning methods and assessment systems based on observation. Its intent covers social negotiation and discovery of knowledge in small groups called tribes, relying on an extensive spectrum of position, races, war and hunting and *mancala* board games, with space for some solitaries and chance games as well. Through the analysis of aspects such as the morphological structure of the boards and the abstract rules of the games, the students shall work in the development of several specific and cross-curricular skills by means of an entertaining and ludic practice of essentially mathematical contents –symmetrical geometries, abstract reasoning, planning and strategy, probabilities and chance addressing, notation schemes, arborescent thinking…–, in addition to contributing to the conservation of an important part of the intangible heritage of humankind.

Keywords:

ethnomathematics, interculturality, mathematical education, didactics of mathematics, cooperative learning, observation assessment, board games, world games, abstract games, research monographic project, cross-curricular themes.

Es una confusión seria que las matemáticas traten únicamente sobre cálculos.
No es así; tratan sobre imaginación, entendimiento e intuición.

David Wells, 2012

Presentar las matemáticas como generadas por sí mismas no sólo supone
una negación de la historia, sino que oculta sus conexiones vitales
con otras ramas del conocimiento. Desde un punto de vista pedagógico,
este intento es más desafortunado porque renuncia a la oportunidad
y gran necesidad de dar motivación y significado a las matemáticas.

Morris Kline, 1976

Madurez del hombre significa
haber reencontrado la seriedad que de niño se tenía al jugar.

Friedrich W. Nietzsche, 1886

Jugamos para ver cómo podría ser, jugamos para prepararnos por si fuera,
jugamos para evaluar lo que sería, jugamos para sentirnos de otro modo,
jugamos para sentirlos de otro modo, jugamos en fin
para recorrer los caminos que no recorremos.

Carlos Muñoz Gutiérrez, 2000

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS

ESO	Educación Secundaria Obligatoria
IES	Instituto de Educación Secundaria
M.A.C.	métodos de aprendizaje cooperativo
OCDE	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos
PISA	Program for International Student Assessment
PPTLS	piedra-papel-tijera-lagarto-spock
RPS	rock-paper-scissors (piedra-papel-tijera)
TDAH	trastorno por déficit de atención con hiperactividad
T.M.I.	Trabajo Monográfico de Investigación
UNESCO	Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura

1. INTRODUCCIÓN

1.1. CONTENIDO Y ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Este documento constituye la memoria escrita del Trabajo de Fin de Máster de su autor para la compleción de los estudios de Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, cursados en la Universitat Jaume I de Castelló, en la especialidad de Matemáticas. Se trata de una programación didáctica para la asignatura optativa Trabajo Monográfico de Investigación, en adelante T.M.I., que lleva por título "*Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*", diseñada para su puesta en práctica en el Instituto de Educación Secundaria Francesc Ribalta de Castelló de la Plana en el que el autor realizó el *practicum*.

La primera sección del documento cubre una serie de observaciones realizadas durante el *practicum* que se concretaron en varias cuestiones problemáticas acerca de la enculturación matemática y la enseñanza de matemáticas en la educación secundaria. De ellas se ha partido para establecer el objeto del trabajo y para el desarrollo de la programación.

En la segunda sección exploramos el marco teórico que fundamenta la propuesta, caracterizada por un posicionamiento etnomatemático que aboga por el carácter cultural y relativo de las matemáticas. Planteamos la educación matemática desde el enfoque intercultural, poniendo en valor los intercambios entre personas de distintas culturas. Como tercera pieza del puzzle incorporamos el elemento del juego como objeto de estudio matemático en sí mismo, y como actividad inmaterial que da sentido a la sociedad. No en vano el juego es una de las seis actividades matemáticas universales atribuidas por Bishop (1998) a todos los grupos humanos conocidos.

Apoyándonos en estos tres puntales, *etnomatemáticas, educación intercultural y juego*, en la tercera sección abordamos la programación didáctica de una asignatura impartida desde el área de matemáticas dentro del marco normativo de la optativa de 4º de ESO T.M.I., con la intención de hacer partícipe al estudiantado de nuevas maneras de aprender y trabajar matemáticas, y de estimular su creatividad, pasión, energía y talento. En esta materia se trabajará en grupos cooperativos, a los que no por casualidad hemos denominado *tribus*, y se analizarán e investigarán los fundamentos matemáticos subyacentes a una variedad de juegos de mesa tradicionales propios de diversas culturas, tratando: juegos de carreras, determinados por el azar aderezado con decisiones tácticas; juegos de posición, en los que las simetrías estructurales del tablero y la detección de patrones regulares son elementos clave; juegos de caza y de guerra, cuya piedra angular son la estrategia y el pensamiento abstracto; juegos *mancala*, basados en la pura y esencial aritmética modular; y por último, algunos juegos de creación reciente, con no más de siglo y medio de antigüedad, que reúnen una interesante mezcla de estrategia y táctica, arborescencia matemática y bicromía plástica. A este amplio abanico añadimos cuatro solitarios clásicos con evidente componente matemático: el *tangram*, las torres de Hanói, el *senku* o solitario de la Bastilla, y el *tchuka ruma*. Los resultados de los análisis serán plasmados por los alumnos y alumnas en fichas de investigación que se incluirán en portfolios cooperativos e individuales, que contendrán también construcciones de juegos elaboradas por los propios estudiantes en unas sesiones de taller previstas al efecto. Acompañamos el desarrollo de la programación con una sólida argumentación de las razones que nos llevan a decantarnos por los métodos de aprendizaje cooperativo y la evaluación por observación para nuestra propuesta.

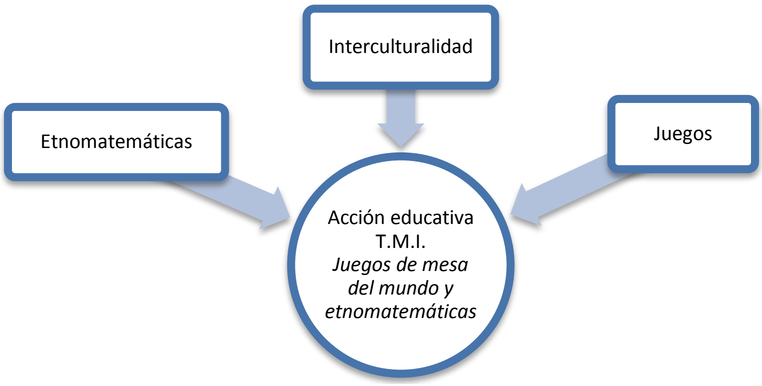


Figura 1.- Esquema conceptual de la propuesta.

Por último, en la cuarta sección presentamos una serie de conclusiones, limitaciones del trabajo y futuras líneas. Tras ellas, incorporamos las referencias y unos anexos con variada información de interés entre la que destaca una recopilación de apuntes y reglas de los juegos tratados en el curso.

Sabemos, nos lo reveló un zorro, que “sólo se conocen las cosas que se domestican” (Saint-Exupéry, 1946). Domesticar significa crear lazos; como los lazos que forman los estudiantes en sus sistemas cognitivos y emocionales, con los que abarcan entidades tan diversas como objetos de conocimiento, gustos personales, o amigos. Domesticar implica necesidad mutua; como la existente entre los individuos de una sociedad y el pensamiento matemático, pues ellos lo necesitan indefectiblemente para poder vivir, y éste los necesita a aquellos para desarrollarse y cobrar significado. Domesticar consiste en hacer propio, hacer “de uno”; como hacer de uno es el objetivo último al que hemos enfocado la propuesta que aquí presentamos: que los estudiantes se apropien de las matemáticas que creen ajenas, y que hagan, en realidad, sus propias matemáticas.

1.2. OBSERVACIONES DEL *PRACTICUM* Y PROBLEMÁTICA

A través de la experiencia como antiguo alumno del IES Francesc Ribalta y la reciente estancia como profesor en prácticas, se pudieron constatar los siguientes hechos:

- A pesar de los cambios acontecidos en los últimos veinte años en el ámbito social, los avances tecnológicos, el notable incremento de diversidad del alumnado, el nuevo marco normativo de la educación secundaria, etc., las *metodologías didácticas* y los *métodos de evaluación* empleados generalmente en la enseñanza de matemáticas en el instituto permanecen prácticamente inalterados.

- La *disposición general* ante el estudio de la asignatura de matemáticas así como ante el aprendizaje de las matemáticas en sí por parte del alumnado de ESO y de Bachillerato de Ciencias Sociales con el que se estableció relación, distaba en gran medida de ser positiva.
- El alumnado de Bachillerato de Ciencias Sociales al que se tuvo ocasión de conocer no exhibía un *nivel de competencias matemáticas* propio de la etapa. Conversaciones con profesores y educadores veteranos revelaron que es habitual que las competencias matemáticas de una amplia parte del alumnado que obtiene el título de Graduado en ESO no sean suficientes de cara al acceso a Bachillerato[1], a un correcto desempeño en la vida diaria adulta o a la posibilidad real de un ejercicio proactivo de ciudadanía.

Estas observaciones, unidas a la experiencia y conocimientos adquiridos durante los estudios de Máster y el ejercicio profesional como profesor particular y en una academia, hicieron surgir las siguientes cuestiones. Sin duda el enfoque dado a la enseñanza de las matemáticas influye en el logro de aprendizajes significativos por parte del alumnado. ¿Podríamos conseguir una mejor *educación matemática* apartándonos del *enfoque mecanicista* centrado en *repetir ejercicios* conocidos con leves variaciones, y abogando por el desarrollo de estrategias de *resolución de problemas* construidas desde una forma de *pensar matemáticamente*? ¿Podría, además, esta migración metodológica contribuir a resolver la severa *desafección* que sufre gran parte del alumnado con respecto a las matemáticas, extensiva a la ciudadanía en general, a través de una mejor motivación, una identificación con el conocimiento y una sensación de *utilidad interdisciplinar*? A la vista de las pobres puntuaciones obtenidas en los test comparativos internacionales tipo PISA, específicamente en competencias matemáticas y en resolución de problemas (PISA, 2012)[2], ¿de qué manera podríamos mejorar las *competencias matemáticas* de nuestro alumnado y fomentar la consecución de *aprendizajes significativos*?

Por otra parte, ciertas experiencias del *practicum* avivaron inquietudes suscitadas por elementos de bagaje e intereses de índole personal. Nos preocupa que, de manera general, los juegos propios de una cultura no gocen actualmente de la consideración de *patrimonio histórico cultural* entre la ciudadanía, como sí lo hacen la gastronomía, la moda o las fiestas. Muchos de estos juegos, ahora en el olvido colectivo, constituyen en esencia muestras de actividad

---

[1] En especial, a tenor de la introducción de la opcionalidad en la asignatura de Matemáticas de 4º de ESO, siendo que una considerable cantidad de estudiantes que desean continuar estudios humanísticos y sociales eligen cursar la modalidad finalista por considerarla “más sencilla”, con la consiguiente problemática derivada en las asignaturas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato.

[2] Los informes PISA están en tela de juicio por parte de un sector de expertos en educación y evaluación educativa que expresa reservas en cuanto a su fiabilidad, objetividad y legitimidad técnica de la equiparación de resultados entre países. Elaborados por la OCDE, organismo cuyo objetivo principal es el desarrollo económico de los países adscritos, sus rankings valoran fundamentalmente las competencias y conocimientos enfocados a lograr una mayor empleabilidad y competitividad, denuncian los críticos, sin consideración de aspectos psicológicos, cívicos, socioafectivos, etc., que se consideran objetivos fundamentales de la educación integral. Por otro lado, recientemente se ha atribuido un preocupante efecto iatrogénico a los informes y rankings PISA en materia de políticas educativas de distintos gobiernos nacionales, lo cual ha llevado a más de 80 expertos internacionales a dirigir una carta abierta a la OCDE al respecto (Meyer y Zahedi, 2014). A pesar del mal uso generalizado de la información que proporcionan los informes PISA, el sesgo que contienen sus clasificaciones y la limitación del alcance de los estudios, opinamos que son una herramienta a considerar como indicador de algunos aspectos del “estado de salud” de los sistemas educativos bajo análisis.

matemática otrora consideradas útiles y dignas de salvaguarda. Esto evidencia que las familias han descuidado cierta responsabilidad en la transmisión de las tradiciones lúdicas, lo cual nos lleva a plantearnos que los educadores podemos hacer algo al respecto, supliendo esas omisiones si no estamos dispuestos a seguir perdiendo estos *bienes inmateriales* que, como decimos, guardan estrecha relación con las matemáticas.

Un análisis reflexivo de las cuestiones planteadas hasta el momento nos lleva a formular la siguiente interrogación, que sentará las bases del objeto del trabajo:

> ¿De qué manera podemos *trabajar* las matemáticas en el aula de forma que alumnos y alumnas descubran *otras matemáticas* que puedan hacer propias, logrando aprendizajes significativos y una mejora sustancial de sus competencias matemáticas, al tiempo que damos respuesta a la realidad multicultural de las aulas y abogamos por la protección de los juegos de mesa tradicionales con contenido matemático?

1.3. OBJETO DEL TRABAJO

La perspectiva etnomatemática tiene muy poca presencia en nuestra educación secundaria, entorno de diversidad y riqueza intercultural privilegiadas. Los currículos están ampliamente dominados por un discurso matemático único y unidireccional con el que el alumnado presenta un nivel bajo de identificación. Por otra parte, el enfoque procedimental-mecanicista de la resolución de ejercicios instruccionales no suele dar suficiente espacio a un enfoque reflexivo y analítico de resolución de problemas propios de la vida real. Los alumnos muestran un grado limitado de motivación que redunda en una baja capacidad de puesta en práctica del conocimiento matemático que poseen.

Planteándonos este escenario problemático y la posibilidad de que otras estructuras de organización de aula y clase y sistemas de evaluación alternativos consigan aprendizajes más significativos, expresamos una intención conativa al respecto de la interrogación formulada en el apartado anterior. Habida cuenta, además, del interés personal ya señalado por los juegos de mesa tradicionales del mundo, cuya inmensa mayoría reúne diferentes facetas matemáticas en su más pura esencia, abordaremos el trabajo mediante la elaboración de la programación didáctica anual de una asignatura del área de matemáticas. Esta se enmarcará bajo la normativa vigente relativa a la materia optativa de 4º de ESO Trabajo Monográfico de Investigación, y se apoyará en una amplia variedad de juegos de mesa de distinta tipología y origen, desde un posicionamiento etnomatemático. En esta propuesta destacamos el interés por descubrir diferentes formas de hacer y aprender matemáticas, desde un enfoque inclusivo de educación integral en el que la interculturalidad se revela como activo de gran valor. Será una programación que invite a las y los estudiantes a hacer unas matemáticas alternativas, extracurriculares, cooperativas, no mecánicas, que se construyan en compañía; matemáticas que sean de investigación, análisis, abstracción teórica y puesta en práctica, ensayo-error, refinamiento de hipótesis y establecimiento de conclusiones; matemáticas de la experiencia que persigan aprendizajes específicos y transversales significativos, permitan socializar, contar y escuchar historias, compartiendo y construyendo conocimientos juntos; en definitiva, matemáticas que pretenden reconciliar a los y las estudiantes con las matemáticas.

2. MARCO TEÓRICO

Comenzamos el estudio del marco teórico del trabajo planteando por qué elegimos la asignatura T.M.I. como marco para la propuesta. También será de interés explorar, brevemente, la relación entre juegos de mesa tradicionales y matemáticas, así como escrutar su aplicación al ámbito educativo.

2.1. T.M.I. EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA E INTERCULTURAL

De acuerdo con la vigente Orden de 27 de mayo de 2008, de la Conselleria de Educación, por la cual se regulan las materias optativas en la educación secundaria obligatoria (DOCV Núm. 5783, Anexo I), la asignatura T.M.I. cuenta entre sus planteamientos básicos el fomentar "un modo de trabajar metódico donde poder aplicar los procedimientos y habilidades aprendidos, favoreciendo la curiosidad y el interés en su realización"; su fin "no es únicamente mostrar los conocimientos adquiridos […], sino aplicar métodos y técnicas de trabajo a través de contenidos diversos que ilustren su asimilación". La administración establece que "su planificación debería centrarse en la indagación, investigación y la propia creatividad, más que en la recopilación de datos o la simple acumulación de información", así como dar "oportunidades para aplicar e integrar conocimientos diversos" y fomentar "la participación de todos y todas en las discusiones, toma de decisión y en la realización del proyecto". Entre sus objetivos están "resolver problemas y tomar decisiones, incorporando el rigor y la satisfacción por el trabajo bien hecho" e "integrar y aplicar en la realidad personal los conocimientos adquiridos".

El proyecto de asignatura enmarcado dentro del T.M.I. está impregnado por las reivindicaciones formuladas por el Informe Delors a la UNESCO, que siguen vigentes dos décadas tras su publicación. En dicho informe la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI recoge cuatro aprendizajes que considera fundamentales, llamados *los cuatro pilares de la educación*, en torno a los cuales ésta debe estructurarse "para cumplir el conjunto de las misiones que le son propias" (Delors, 1996:95):

1. *Aprender a conocer*. Tender "menos a la adquisición de conocimientos clasificados y codificados que al dominio de los instrumentos mismos del saber" (Delors, 1996:96), crear herramientas y desarrollar habilidades para conseguir una capacidad crítica y un saber razonado, fomentando la curiosidad individual y entendiendo el conocimiento como medio y fin.

2. *Aprender a hacer*. Adquirir las capacidades necesarias para poner en práctica los conocimientos resolviendo problemas y encontrando respuestas. "Sería preferible que los estudiantes trabajaran por proyectos multidisciplinares o centros de interés de modo que integrasen en una problemática concreta destrezas y contenidos de diferentes áreas curriculares" (Feito, 2011:28).

3. *Aprender a vivir juntos, aprender a vivir con los demás*. Fomentar el conocimiento mutuo y participar en proyectos comunes para "evitar los conflictos o solucionarlos de manera pacífica" (Delors, 1996:99), y desterrar tanto prejuicios como desigualdad.

4. *Aprender a ser*. Estimular el crecimiento y desarrollo personal de forma que el alumnado construya herramientas como el pensamiento libre y el juicio crítico y autónomo para tomar decisiones propias, entre ellas, quiénes quieren ser y cómo desean vivir su vida.

En relación con la aplicación de saberes prácticos a la que alude la normativa, entendemos por un lado la sugerencia de planteamientos multidisciplinares, y por otro, la integración de los conocimientos de los diversos individuos. Por otra parte, el Informe Cockcroft (1985) expone en su punto 243 que "la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir: […] discusión entre el profesor y los alumnos y entre estos últimos; […] resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana; realización de trabajos de investigación". En el punto 227 recomienda "el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y juegos matemáticos" para estudiantes de cualquier nivel a fin de desarrollar el pensamiento lógico. Encontramos así una conexión muy coherente entre el planteamiento de la asignatura T.M.I. y la incorporación del diálogo y debate entre el alumnado a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la puesta en valor de los procesos de investigación. Las líneas marcadas por la administración y la fundamentación del Informe Delors nos inclinan a adoptar los métodos de aprendizaje cooperativo como recurso de excepcional valor, que permite también atender al conflicto inherente a nuestro alumnado adolescente entre las necesidades de construcción de la propia identidad y de socialización, siempre en interferencia.

La consideración de estos principios supone una perspectiva que aboga por la formación integral del alumnado. Según argumenta Callejo (2010:106), para ejercer la ciudadanía en una democracia participativa, se requiere ser matemáticamente competente, "lo que implica no sólo conocer hechos y algoritmos matemáticos, sino también procesos más complejos como la matematización de situaciones y la resolución de problemas". En su opinión, una pedagogía de la educación para el respeto de los derechos humanos "implica un proyecto de sociedad que se construye en diálogo y en colaboración con otros, desde la actuación individual y desde la actuación colectiva, desde los sujetos individuales y desde los sujetos sociales", para lo cual hace falta poner "en juego no sólo los conocimientos […] sino también valores como la participación, la comunicación y la solidaridad, la capacidad de trascender el punto de vista personal para acceder a otras visiones, para tolerar lo diferente, deliberar, negociar, resolver conflictos y construir acuerdos" (Callejo, 2010:107). Así, "muchos de los problemas que actualmente se presentan en las aulas no pueden resolverse desde una perspectiva psicológica del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que sólo son comprensibles y resolubles desde una perspectiva psicosocial mucho más amplia", tal como expone Goñi (2006:6).

El aula es un escenario social, y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la institución escolar son asimismo procesos sociales. "Los alumnos no sólo aprenden matemáticas desarrollando habilidades cognitivas, sino que a la vez desarrollan identidades sociales y culturales, así como identidades como aprendices de matemáticas" (Gorgorió, Prat y Santesteban, 2006:9). Es también un ecosistema de gran riqueza multicultural, y ello es porque cada uno de nuestros alumnos puede tener y poner en práctica una *cultura matemática* propia, según el sentido definido por Oliveras (2006:129): "La cultura comprende un conjunto muy amplio de aspectos […] semióticos […], sociopolíticos […], interpretativos […], cognitivos […], tecnológicos […], así como los sistemas de valores y creencias y los aspectos psicosociales, que hacen emerger de los grupos manifestaciones peculiares propias". Así, todas las aulas son multiculturales, a nivel *macrocultural* cuando "conviven estudiantes inmigrantes o de diversas minorías" y a nivel *microcultural* en cuanto a que "habrá siempre grupos de alumnos con características debidas a sus diversos orígenes socio-económicos, diversas edades, etc." (Oliveras, 2006:140). A partir de la constatación de este hecho, y distinguiendo entre *multiculturalidad*, entendida como la "yuxtaposición de varias culturas en una sociedad, sin implicaciones mutuas" e *interculturalidad*, concebida por Oliveras (2006:137) como "un conjunto de prácticas generadas por la interacción de culturas en una relación de intercambios recíprocos y en una perspectiva de salvaguarda de una relativa identidad cultural de los participantes", consideramos que toda educación en un contexto multicultural debería ser intercultural[3]. No es suficiente el respeto a la diversidad, sino que hay que favorecer el encuentro y la comunicación entre personas de diferentes culturas (Gómez, 2003).

Y en efecto, las matemáticas tienen un claro carácter cultural. Bishop (1998:24) sostiene que "no es demasiado útil definir las ideas matemáticas como algo universal porque en realidad no lo son. Más bien podemos decir que lo universal son las actividades en la[s] que la gente las involucra", postulando que *contar, localizar, medir, dibujar, jugar y explicar* son las seis actividades realizadas por todos los grupos culturales cuyas prácticas son conocidas "sobre las que se asientan los cimientos del conocimiento matemático". De acuerdo con Bishop, *todos hacemos matemáticas*, pero son unas matemáticas distintas (pues todos contamos, localizamos, medimos, dibujamos, jugamos y explicamos, de maneras diferentes), relativas, variadas, culturales, bien a nivel micro, bien a nivel macro, comprendiendo símbolos y signos, comunicación, lenguaje, contextos, etc. Son lo que llamamos *etnomatemáticas*. D'Ambrosio, considerado el iniciador de las investigaciones etnomatemáticas, explica el concepto como "las matemáticas practicadas por grupos culturalmente identificables, como pueden ser las sociedades nacionales o tribales, grupos gremiales, niños de un rango de edad determinado, clases profesionales, y demás" (D'Ambrosio, 1985:45), constituyendo un muy amplio espectro de actividades humanas expropiadas por el *establishment* académico a lo largo de la historia, formalizadas, codificadas e incorporadas en las llamadas matemáticas académicas; pero aún hoy vivas y cotidianas en las prácticas de dichos grupos. Las tesis de Bishop refrendan asimismo el papel protagonista del juego como actividad matemática, en un sentido etnomatemático. Este autor afirma que "cuando alguien enseña en una situación multicultural necesita conocer juegos que sean universalmente conocidos y practicados" ya que "pueden constituir un punto de contacto entre niños de grupos culturales y lingüísticos distintos que quizás no tengan otros puntos de contacto" (Bishop, 1998:20). Los juegos matemáticos son también actividades lúdicas universales, igual que los juegos físicos, de pillar, de pelota, etc. El desarrollo a lo largo del eje universalidad-culturalidad que afecta a la totalidad de las actividades matemáticas se concreta en las investigaciones etnomatemáticas. Ejemplificamos esta cuestión mediante un paralelismo entre el submundo de los juegos como actividad concreta y otras actividades propias de las matemáticas en la Tabla 1.

Retomando la cuestión de la educación en un escenario social de realidad multicultural, concordamos con Gorgorió et al. (2006:8) en que "desde el punto de vista de la educación

---

[3] La dicotomía planteada por estas definiciones dadas por Oliveras recuerda en parte, a los conceptos de educación integradora y educación inclusiva en relación a los alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales.

matemática, considerar las matemáticas como un producto cultural constituye el primer paso para un aprendizaje significativo", a la vez que "permite interpretar la diversidad cultural en el aula como fuente de riqueza para el aprendizaje". Así, para estas autoras, invitar al alumnado a aportar su bagaje cultural en el aula de matemáticas, reconocer el valor de sus conocimientos y legitimarlos será el paso siguiente. Desde este enfoque intercultural destacamos "la valoración del pluralismo cultural, el mantenimiento de la propia identidad cultural y la consideración de la mezcla de culturas como un enriquecimiento general" (Oliveras, 2006:138). Lo que buscamos en la práctica, según esta autora, no es la asimilación de las minorías, que lleva a los individuos que pertenecen a ellas a "adaptarse" perdiendo su identidad cultural, sino lograr un espacio cultural común que no suponga pérdidas de identidad y en el que la base de las relaciones sea la interacción cultural y el intercambio. En las sociedades multiculturales, afirma Oliveras (2006:139), "debe generarse una cultura nueva, mestiza de todas las culturas que conviven y patrimonio común de todos los ciudadanos que habitan un territorio". Lograr la construcción de un ente tal en el aula de matemáticas implicaría que el conocimiento social generado, etnomatemático, cultural, negociado, "*mestizo*", contara con la aceptación de todos los agentes. Sin embargo, la propia Oliveras apunta que todavía no existen suficientes estudios de base, medios económicos ni recursos didácticos adecuados "pensados y diseñados con una estructura y unos contenidos que tomen como fundamento las ideas de *diversidad cultural en la ciencia* y de *enriquecimiento intercultural* como objetivos de la educación" (Oliveras, 2006:134).

	Carácter universal	***Carácter cultural***
Operaciones aritméticas básicas	Actividad universal: contar. Significación de las operaciones de adición y sustracción. Significación de los resultados de suma y resta.	Diferentes algoritmos para las operaciones de adición y sustracción empleando diversas representaciones y métodos de cálculo (en columna, en fila, etc.). Realización de las operaciones con el apoyo de instrumental variado (ába-cos, quipus, palos tallados tipo hueso de Ishango, dedos, calculadoras…).
Conteo del 1 al 10	Actividad universal: contar. Significación de los números naturales del 1 al 10.	Distintos nombres para los números, y símbolos para representarlos; sistemas numéricos con distintas bases. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Urapon, ukusar, ukusar-urapon, ukusar-ukusar, ukusar-ukusar-urapon, ukusar-ukusar-ukusar. Omoko, bafe, basasu, bane, lioke, lioke lomoko, lioke lafe, lioke lasasu, lioke lane, bokama[4].
Juegos de carreras	Actividad universal: jugar. Concepto de juegos de carreras a lo largo de un tablero en los que el azar es representado por dados.	Concisamente similares: juegos del parchís (España), *pachisi* (La India), *ludo* (Reino Unido), *parcheesi* (EEUU)… Otros: juego de la oca, serpientes y escaleras, *senet*, juego real de Ur y similares[5].

Tabla 1.- Carácter universal de las actividades y cultural de las prácticas en diferentes cuestiones matemáticas.

[4] Huylebrouck, 2006. Del 1 al 6 para los Gumulgal de la Isla de Mabuiag, Australia. Desconocemos si cuentan más allá del 6. Sistema en base 2. Y del 1 al 10 para los Yasayama del Congo. No se trata de un verdadero sistema en base 5, porque según apunta el autor, $25=5^2$ no actúa como base.

[5] El propio Monopoly, actualmente marca registrada de Parker Brothers, de Hasbro, patentado por Charles Darrow en 1935 y creado a partir de un diseño original de Elizabeth Magie (The Landlord's Game), patentado en 1903, no es sino una revisión actualizada y recontextualizada en el mundo de las finanzas, de estos juegos tradicionales de carreras, *grosso modo*.

2.2. JUEGOS EN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN

Antes de continuar conviene aclarar a qué nos referimos en este trabajo cuando hablamos de *juegos*. Lejos de pretender, *hic et nunc*, una definición cerrada del concepto[6], sirva decir que nos referimos a una actividad libre y voluntaria cuyo resultado intrascendente contiene incertidumbre que causa placer, desarrollada en un ámbito espaciotemporal limitado en base a unas reglas aceptadas por quienes lo practican, pudiendo tener carácter simbólico.

La íntima relación existente entre las matemáticas y los juegos abstractos resulta evidente para quien haya dedicado una cantidad de tiempo digna de considerar a una de las dos cosas y al menos una mínima observación atenta a la otra. Hay juegos esencialmente aritméticos, algunos cuyo desarrollo depende primordialmente de un patrón geométrico, otros basados en la lógica o el azar… todo ello cuestiones matemáticas. Añadamos a los anteriores los juegos tácticos y estratégicos, y aquellos situados en las respectivas intersecciones entre los grupos, y tendremos un espacio muestral que englobará a la práctica totalidad de juegos de mesa abstractos creados por la humanidad, o lo que es lo mismo, un amplio catálogo de actividades matemáticas que han resultado de interés para diferentes civilizaciones y culturas humanas. Wells (2012) encuentra una serie de rasgos comunes entre juegos y matemáticas: abstracción, dificultad, búsqueda de patrones regulares, analogía, razonamiento, imaginación, intuición, elegancia y belleza. En su particular visión expresa: “las matemáticas reales pueden ilustrarse desde tres perspectivas diferentes. Tienen mucho que ver con una colección de juegos abstractos, tienen mucho que ver con una ciencia, y tienen muchísimo que ver con una cuestión de percepción, de visión”, y explica que los tres aspectos no pueden ser separados: “el matemático como jugador de juegos observa y formula conjeturas; el matemático como científico hace movimientos y descubre posibilidades; el matemático como observador estudia objetos que son muy parecidos a las piezas del juego abstracto del ajedrez” (Wells, 2012:7).

En su *Homo Ludens* Huizinga (1949) expone cómo los constructos de *homo sapiens* y *homo faber* se ven complementados por la entidad hombre-que-juega, desde la propia base de lo que define al ser humano como tal –como animal y ser social–, y argumenta que la cultura humana brota del juego y en él se desarrolla. Por tanto, no hay cultura posible sin actitud lúdica y juego. Al tratarse, de acuerdo con esta perspectiva etnográfica-antropológica, de una actividad inherente a la condición de ser humano, y dado que encontramos actividad lúdica en cualquier cultura y época de la historia, podemos afirmar que el juego tiene un carácter universal, siendo su existencia anterior a cualquier sociedad humana y por supuesto a la palabra que lo designa. Por tanto podemos preguntarnos qué función, o funciones, cumple el juego.

En el desarrollo del individuo desde la niñez a la edad adulta se suceden los juegos sensorio-motor y físico, simbólico, social y formal (véase Figura 2). Destacamos, muy

[6] Para lo cual referimos al/la lector/a interesado/a a los grandes clásicos: *Homo Ludens* de Huizinga (1949) y *Man, Play and Games* de Caillois (1961), que proporcionan aproximaciones al concepto de “juego” (necesariamente consideradas parciales en la actualidad) y detalladas clasificaciones taxonómicas, además de sustanciales consideraciones de índole social y antropológica.

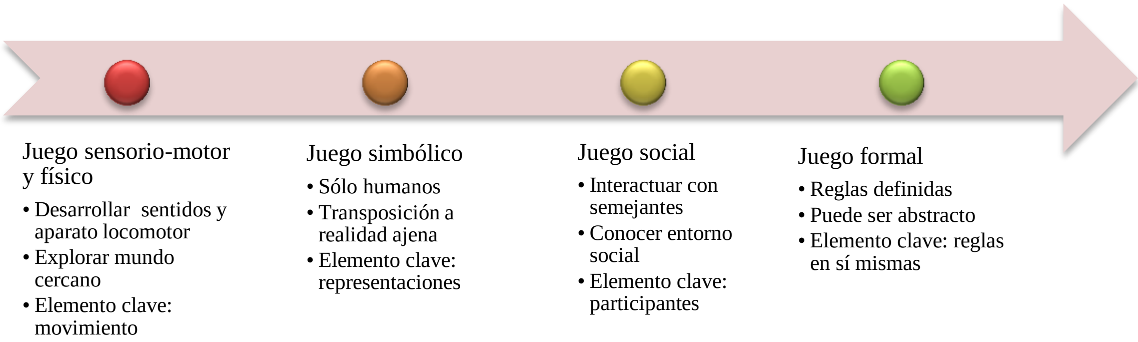


Figura 2.- Cómo se juega. Evolución cronológica de los juegos a lo largo del desarrollo.

brevemente, las funciones exploratoria e iniciática (el juego ayuda a conocer el mundo que nos rodea y prepara para la vida adulta), simbólica (entrelaza realidades propias y ajenas y contribuye con el uso de representaciones al desarrollo cognitivo[7]), socializadora e integradora (quebranta desigualdades), y entretenedora. El juego formal aparece a partir de la consolidación de un aparato de estructuras cognitivas que dan soporte a una actividad lúdica en que las propias reglas establecidas son el elemento primordial, y actuar en base a ellas, la fuente de placer[8]. Desde ese punto de vista, ¿qué son la religión, la ciencia, o la democracia, sino juegos?

Puesto que la actividad matemática es también, como la actividad lúdica, un rasgo inherente a cualquier cultura humana, podemos encontrar un argumento relativamente protocientífico para la consustancialidad de ambos fenómenos con el desarrollo de las culturas y las civilizaciones. ¿Es casualidad que los juegos *mancala*, arquetipo de *actividad matemática* en el continente africano y a la vez paradigma de *actividad lúdica* ancestral, surgieran en las mismas regiones en las que comenzaron a escribirse las primeras páginas de nuestra historia? Quizá no podamos determinar una respuesta cerrada a esa pregunta, pero parece claro que, en efecto, juegos y matemáticas caminan juntos como actividades consustanciales a la cultura humana desde prácticamente sus albores. No olvidemos que algunas ramas de las matemáticas han surgido directamente a partir de juegos: el problema de los puentes de Königsberg, resuelto negativamente por Euler en 1735, dio origen a la teoría de grafos, y el desarrollo de la teoría de la probabilidad se asocia a los problemas sobre juegos de azar planteados por el Caballero de Méré en correspondencia personal a Pascal, y éste a su vez a Fermat.

George Pólya (1989) dio una visión de las matemáticas como disciplina que trata de la resolución de problemas, que propuso resolver mediante su método de cuatro pasos basado en técnicas heurísticas, estableciendo consecuentemente que lo sustancial en la enseñanza de las matemáticas es desarrollar tácticas en la resolución de problemas. Desde una perspectiva metacognitiva, estas ideas son extrapolables al ámbito de los juegos de mesa si concebimos abordar el estudio de éstos como la resolución de problemas, de forma que la aplicación de

[7] Con respecto al juego simbólico, actividad fuera del ámbito de interés de este trabajo, recomendamos al/la lector/a interesado/a la consulta de los textos de Prieto y Medina (2005), que tratan con profusión varias teorías sobre la naturaleza del juego simbólico y su valor educativo.

[8] En la historia y protohistoria del juego como actividad humana, el juego formal debe, necesariamente, surgir tras la sedentarización, como resultado de la agricultura; probablemente, sólo tras la aparición de la escritura.

técnicas heurísticas serviría para progresar en el dominio de los juegos en cuestión[9]. En la Tabla 2 proponemos una analogía entre el método general de resolución de problemas de Pólya tal como fue formulado y una serie de tareas o técnicas generales expresadas en preguntas que lo harían aplicable al ámbito de los juegos.

Retomando la cuestión de la multifuncionalidad del juego como actividad humana, a continuación listamos algunas de las funciones básicas que en nuestra opinión tiene el juego, que se podrían también entender como *razones* que tenemos *para jugar*:

- Conocer: conocerse a uno mismo, a los demás y el entorno.
- Aprender: la intrascendencia de ciertos fracasos y victorias; a utilizar la función simbólica para crear contextos; a respetar normas y reglas voluntariamente; resiliencia y perseverancia; autocontención y autodisciplina; a tener metas y objetivos; a interpretar la realidad; a anticipar situaciones y planificar acciones venideras; a reaccionar ante imprevistos; a superar las limitaciones; a sobrevivir…
- Desarrollarse: psicomotriz, intelectual, afectiva y socialmente.
- Divertirse.

A la vista de estas funciones, resulta claro que *jugar* puede entenderse como una forma de *educarse o aprender*, y que *enseñar a jugar* puede considerarse una manera de *educar*, si bien, por supuesto, ni todos los juegos son educativos ni toda la educación se hace vía el juego. Payà (2008) presenta una amplia panorámica de la consideración del juego como factor de la actuación educativa y su variedad de valores para la educación integral, recorriendo las principales corrientes pedagógicas españolas desde finales del s. XIX hasta la actualidad (incluimos en el Anexo II una compilación de algunas citas ofrecidas por Payà a modo de ilustración). Este autor constata que dicha consideración ha experimentado una profunda evolución, como es lógico a tenor de los cambios sociopolíticos y el desarrollo del corpus a lo largo del lapso considerado, corroborando que el juego ha sido y es una preocupación permanente en educación sobre la que hay variedad de interpretaciones particulares. La postura de la pedagogía de vanguardia es que se debe sistematizar el uso del juego en la institución escolar como elemento facilitador de la educación integral, pues “no importan tanto los motivos que originen la inclusión del juego en la enseñanza, puesto que finalmente los logros educativos acaban siendo globales o integrales” (Payà, 2008:33); pero no sólo eso, sino que, según Payà (2008:29), “la actividad lúdica debe ser un elemento que impregne toda la práctica educativa […] a modo de contenido transversal y como fin en sí mismo” para el desarrollo global del individuo.

Muchos autores han escrito profusamente sobre las bondades del juego en especial en la edad infantil y etapas tempranas de la escolaridad, en las que los beneficios sobre el desarrollo psicomotriz y cognitivo son observados de común acuerdo por la práctica totalidad de educadores. No obstante, la inmensa mayoría del corpus en este sentido se centra en trabajos

---

[9] Esta concepción ha sido criticada por algunos investigadores alegando que una memoria a largo plazo que almacene gruesas cantidades de información relativa al desarrollo de múltiples partidas de un juego (lo que se conoce como un “libro de partidas”), tratándose de conocimiento específico del campo, puede resultar más útil de cara al dominio del juego que un repertorio de técnicas generales de resolución de problemas, que son en todo caso conocimiento no específico del ámbito en concreto (Sweller, Clark, y Kirschner, 2010).

acerca del juego físico y motor, abordado hasta bien entrado el s. XX por doctores, higienistas, y maestros de gimnástica, obedeciendo ese interés a las circunstancias y prioridades de la época. Por otra parte, algunos autores recomiendan que el juego se disminuya progresivamente en la educación secundaria, mientras que otros sugieren de manera más o menos tímida, que permanezca presente en etapas posteriores. Pensamos que los beneficios atribuidos al juego son válidos y deseables desde una concepción amplia de la actividad lúdica en la que incluimos el objeto-juego fundamental de nuestro interés: el juego formal, de mesa y abstracto, y atendiendo a su variedad multifuncional como actividad, opinamos firmemente que el juego debe estar presente como método y actitud en las pedagogías actuales de la educación integral, así como contenido conceptual de los currículos de todas las áreas y etapas.

La industria juguetera ha contribuido enormemente a la proliferación del juego en las aulas, tanto como elemento nuclear como ocasional, al proporcionar una gran variedad de juegos educativos[10]. Es en los últimos años del siglo XX cuando la introducción de saberes científico-tecnológicos y la renovación de los juegos y juguetes tradicionales suponen una verdadera explosión en este sentido (Garfella, López, y Rius, 1999). En la educación secundaria, puzzles didácticos, juegos de sociedad, de rol, de preguntas y respuestas, materiales lúdico-didácticos, juegos de mesa, videojuegos y multimedia han irrumpido con fuerza.

Además, los propios profesores e investigadores se han afanado en crear juegos *ad hoc* para diversas áreas y asignaturas. En matemáticas destaca en nuestro país la labor de Corbalán, investigador y serio divulgador de las *matemáticas lúdicas*, que ha compilado un exhaustivo catálogo de juegos pre-, post-, e instruccionales (Corbalán, 1994). Sin desmerecer estos esfuerzos, antes al contrario, opinamos que no se aprovecha suficientemente el precioso recurso de los juegos tradicionales con base en diversas ramas de las matemáticas. La literatura de matemáticas lúdicas para el aula de secundaria que abarque más allá de los pasatiempos y acertijos lógicos, los juegos instruccionales, el tangram, las Torres de Hanói, y el ajedrez, es exigua. Los juegos llamados de conocimiento, que favorecen el aprendizaje de contenidos específicos, son bastante aceptados por la comunidad escolar, mientras que, los juegos de estrategia, pese a permitir "poner en marcha procedimientos típicos para la resolución de problemas y del pensamiento matemático de alto nivel" y tener una buena acogida entre el alumnado, de acuerdo con Olfos y Villagrán (2001:3), suelen encontrar mayor oposición por parte del profesorado "por factores ideológicos y por lo difícil de visualizar logros de objetivo en el corto plazo". Oller y Muñoz (2006:41) recomiendan también los "juegos que ya pertenecen a la cultura del entorno del alumno" frente a los juegos creados específicamente, ya que "el alumno puede haber tenido experiencias previas fuera del aula, con lo cual parte con un bagaje previo de ensayos, razonamientos y estrategias que pueden serle útiles a la hora de detectar regularidades y posibles generalizaciones" y, al poder adquirir competencias sociales que son percibidas como útiles fuera del aula además de trabajar competencias matemáticas, percibe "un gran factor motivador" en los juegos tradicionales.

[10] En materiales encargados por diferentes asociaciones internacionales de fabricantes, Goldstein (1997) atribuye 80 beneficios al juego y al juguete (mejora de la atención, pensamiento abstracto, concentración, curiosidad, pensamiento divergente, control de los impulsos, toma de perspectiva, desarrollo de la personalidad, iniciativa…) y advierte de que una cantidad de juego insuficiente puede afectar de forma severa el desarrollo de niños y niñas (Goldstein, 2012), opinión compartida por Whitebread (2012), quien proporciona sólidas referencias al respecto y extiende la advertencia a otras especies animales.

Consideremos por un momento el caso del ajedrez, que goza de las consideraciones de ciencia, pasión, deporte, arte, rey de los juegos de mesa… Su complejidad es abrumadora: cada jugador maneja un total de dieciséis piezas, empleando seis tipos diferentes, cada uno de ellos con sus propias reglas de movimiento. De acuerdo con las reglas de competición actuales, existen veinte movimientos de apertura diferente para las blancas, 400 posibles situaciones tras el primer turno, 360.000 tras el segundo y más de 100.000 millones tras el cuarto (Cuixart, 2011). La práctica de un juego con semejante grado de complejidad, de pura estrategia, sin espacio alguno para el azar, requiere y al tiempo desarrolla, grandes capacidades de cálculo, concentración, atención, memoria, razonamiento abstracto...

En la actualidad disponemos de abundantes estudios científicos que han relacionado el ajedrez con la prevención del deterioro cognitivo y el envejecimiento cerebral (por ejemplo, Friedland et al., 2001; Verghese et al., 2003) así como con tratamientos de rehabilitación a enfermos de mal de Alzheimer, con la mejora de las funciones visioespaciales y la velocidad de proceso de la información, y con experiencias positivas en niños y adultos con trastornos del espectro autista (van Delft, 2010) y TDAH (Blasco-Fontecilla et al., 2012).

Ello es gracias al enorme valor del ajedrez como herramienta de desarrollo cognitivo y de socialización: el ajedrez potencia la empatía y la inteligencia emocional, de acuerdo con los expertos. Es por estas razones que ha sido aplicado extensamente en el contexto de la pedagogía, ofreciendo beneficios como la mejora de las habilidades de lectoescritura (Margulies, 1991), las competencias matemáticas, el pensamiento crítico, el razonamiento abstracto, la planificación estratégica, el reconocimiento de patrones, la creatividad, la flexibilidad y las capacidades de evaluación y síntesis. El ajedrez ayuda a fortalecer las habilidades de resolución de problemas (Celone, 2001) y la capacidad de tomar decisiones difíciles bajo presión, y enseña el valor del trabajo duro y la gratificación postergada (Drummond, 2000). Dauvergne (2000) recalca que pocas herramientas pedagógicas proporcionan un *feedback* tan rápido, ya que recompensa la concentración y proporciona penalización inmediata a los fallos. Kennedy (1998) argumenta cómo el ajedrez puede ayudar a estudiantes desconectados del entorno escolar a lograr confianza en sí mismos y reincorporarse de manera favorable al progreso académico. Por último, Ferguson, quien realizó una revisión de varios de los estudios sobre la aplicación del ajedrez en la educación más significativos de las décadas de los 70, 80 y 90, detalla:

> Un entorno de aprendizaje organizado en torno a los juegos afecta positivamente a las actitudes de los estudiantes acerca del aprendizaje. Esta dimensión afectiva actúa como elemento facilitador del logro cognitivo […] El juego instruccional es una de las herramientas más motivadoras en el repertorio del buen profesor. A los niños les encantan los juegos. El ajedrez les motiva a convertirse en dispuestos solucionadores de problemas y pasar horas silenciosamente inmersos en el pensamiento lógico. Estos mismos jóvenes a menudo son incapaces de permanecer sentados quietos durante quince minutos en la clase tradicional. (Ferguson, 1995:12)

Según Leontxo García (Cuixart, 2011) en el año 2011 había alrededor de 1000 colegios en España donde se daban clases de ajedrez, bien como actividad extraescolar, bien como asignatura optativa; en seis de ellos, como obligatoria. A la vista de todas las virtudes atribuidas al ajedrez y sus beneficios en el entorno pedagógico, podríamos suponer que otros juegos –más sencillos– similares en su naturaleza, puedan ofrecer beneficios equiparables en algunos ámbitos, cuestión ya sugerida por el propio Ferguson (1995), Quintero y Tion (2012), Corbalán (1996) y otros. Esto refuerza nuestro interés y propósito de aplicar los juegos abstractos de estrategia a la educación en general y a la didáctica de las matemáticas en particular.

Los juegos instruccionales creados *ad hoc*, siempre que estén bien diseñados, cumplen sin lugar a dudas su propósito curricular; sin embargo, en ocasiones adolecen de falta del elemento clave que hace que un juego sea precisamente un juego: la diversión. Los juegos de tablero del mundo, pensemos en el *backgammon*, el ajedrez, el *go*, el tres en raya, el dominó, los *tafl* o los *mancala*… han perdurado durante siglos, en ocasiones milenios, a pesar de guerras, cambios sociales y tecnológicos, migraciones, asimilaciones culturales, modas en el propio submundo de los juegos… Su supervivencia no es debida a razón baladí: son divertidos, educativos y cautivadores. Usémoslos pues para divertir, educar y cautivar.

Método de Resolución de Problemas de G. Pólya	*Analogía en los juegos de mesa*
1.- Comprensión del problema	
Determinación de incógnitas y datos. Determinación de condiciones y decisión de si éstas son o no suficientes, redundantes y/o contradictorias.	Conocimiento del tablero y las fichas. Conocimiento de las reglas. Comprensión de las condiciones de victoria y derrota. Exploración inicial y familiarización con los elementos. ¿De qué manera la posición actual puede conducir a una victoria, o a una derrota? ¿Qué hay que hacer ahora para que el juego acabe de una u otra manera?
2.- Concepción de un plan de resolución	
Analogía con problemas similares. Aplicación de métodos o resultados de problemas semejantes. Reducción. Simplificación. Generalización. Particularización. Reformulación.	Elaboración del plan de juego. Comparación con momentos similares de partidas anteriores. ¿Cómo se resolvieron? Aplicación de la analogía. Visualización de una situación de partida más favorable que la actual: ¿cómo conseguimos pasar de la actual a la más favorable? Reducción del problema a otro espacialmente menor si es posible. Generalización de resultados obtenidos anteriormente a casos más complejos o sucesivos. Particularización de principios generales a situaciones concretas.
3.- Ejecución del plan de resolución	
Comprobación de los pasos. Validación y demostración de los pasos.	Puesta en práctica de los movimientos, jugadas o decisiones tácticas que pueden formar parte del despliegue de la estrategia. Si hacemos esta jugada, ¿ocurre lo que esperábamos? ¿Cada uno de estos movimientos, es correcto (cumple las reglas, y nos acerca a una situación más favorable)? Validación o invalidación de las creencias o hipótesis establecidas. Determinación de si la generalización o la particularización aplicadas son correctas, insuficientes, o erróneas.
4.- Examen analítico de la solución	
Verificación de resultados y razonamiento. Retrospección para la resolución de futuros problemas: validación de la solución y del método de resolución.	Aceptación del final de la partida. Reflexión sobre el proceso. ¿Cómo ha acabado la partida? ¿El método empleado para ganar es generalizable? ¿Se trata de una estrategia ganadora infalible? ¿Había otras opciones que condujeran a la victoria? ¿Hemos perdido por culpa de la estrategia desarrollada? ¿Hemos puesto en práctica una serie de jugadas que nos conducirían irremediablemente a la derrota independientemente de la respuesta del rival, o ha sido el oponente quien ha tomado ventaja de alguno de nuestros movimientos para forzar nuestra derrota? ¿Podríamos haberlo evitado? ¿Cómo?

Tabla 2.- Analogía entre el método de resolución de problemas de Pólya y su aplicación a los juegos de tablero.

3. PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

Entendemos por programación didáctica la organización racional del conjunto de decisiones que se plantean, transformando unas intenciones educativas generales en propuestas didácticas concretas, para alcanzar unos objetivos en un contexto educativo específico. El diseño de una programación didáctica trata de decidir y concretar qué, cuándo y cómo enseñar y evaluar, teniendo en cuenta a quiénes y por qué. Debe estar fundamentado en una justificación teórica y una contextualización de centro y alumnado, y abordar los objetivos a lograr, los contenidos y competencias a desarrollar, la temporalización de las acciones educativas, la metodología, el sistema de evaluación y los aspectos de atención a la diversidad y necesidades educativas específicas.

3.1.1. Contextualización

Esta programación didáctica ha sido diseñada para su puesta en práctica en el curso 2013-2014 en el IES Francesc Ribalta de Castelló de la Plana. Se trata de un IES público, urbano, sito en el centro de la ciudad, que reúne aproximadamente una plantilla de 170 docentes y 2000 estudiantes. Cuenta con una extensa variedad de programas de atención a la diversidad, así como instalaciones poco habituales que le confieren un cierto carácter de excepción. El alumnado del centro es ampliamente diverso en cuanto a origen socioeconómico, cultural y étnico. La Figura 3 muestra su procedencia, destacando como nacionalidades extranjeras la presencia de 245 estudiantes rumanos, 33 marroquíes y 17 colombianos. Estimamos que, del total de 404 estudiantes extranjeros, 57 tienen el español como lengua materna.

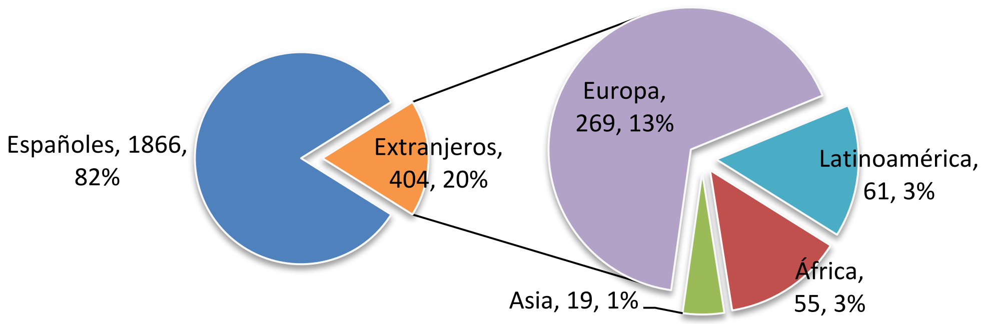


Figura 3.- Distribución porcentual de la procedencia del alumnado del IES Francesc Ribalta, curso 2013-2014. Fuente de los datos: Conselleria d'Educació, Generalitat Valenciana.

A pesar de haber considerado en todo momento el contexto del IES Francesc Ribalta en el planteamiento de la programación, esta puede ser implementada en cualquier centro de educación secundaria con las pertinentes adaptaciones metodológicas y de contenidos en base a los recursos disponibles y las necesidades específicas del alumnado y el centro en concreto.

3.1.2. Destinatarios y tiempo necesario

La programación se dirige a 4º curso de ESO, sin ser restrictiva en cuanto a itinerario posterior ni opción de matemáticas finalistas o de continuidad, pues los contenidos desarrollados se apoyan en una base cognitiva que todo estudiante de este nivel debe tener. Se prevén dos cuestiones “críticas”: el tratamiento del azar y el diseño de notaciones abstractas, en las que el estudiantado con menos base matemática puede necesitar apoyo y refuerzo por parte del docente y de sus compañeros/as, circunstancia contemplada por la metodología.

El tiempo de desarrollo previsto es el correspondiente a la asignatura marco T.M.I., que de acuerdo con la legislación vigente es de un curso académico con dedicación lectiva de una sesión semanal. Se ha tomado el supuesto de que la asignatura se imparte los martes, contando un total de 36 sesiones en las 40 semanas de curso (véase apartado 3.5). Las sesiones de clase en el IES Ribalta tienen una duración de 50 minutos cada una.

3.1.3. Justificación de la programación e interés didáctico

En cuanto a la fundamentación normativa, remitimos al lector a lo relativo al T.M.I. plasmado en la Orden de 27 de mayo de 2008, de la Conselleria de Educación, extractada en el Anexo I. A lo discutido en el marco teórico, añadimos lo siguiente.

Es un hecho que en España niños y niñas juegan cada vez menos. Por un lado, el modelo de ocio autónomo en la infancia y la adolescencia ha cambiado radicalmente: actividades eminentemente pasivas como la televisión o internet copan actualmente el interés. Por otro lado, el exceso de actividad extraescolar planificada por algunas familias para paliar el ocio que consideran improductivo, satisfacer sus propias expectativas con respecto a sus hijos e hijas, o mantenerlos ocupados mientras terminan la jornada laboral, extenúa el posible tiempo dedicado al juego (Rius, 2011). Difícilmente los jóvenes transmitirán de adultos los juegos que no han aprendido de sus familiares, y como resultado de la tendencia decreciente de la natalidad y la disminución del tiempo familiar en común, muchos juegos de mesa tradicionales del mundo están en peligro de desaparición, en especial en los entornos urbanos, lo que incrementa la preocupación dado el proceso de urbanización global acelerado al que asistimos.

Gran cantidad de juegos tradicionales de mesa se apoya en cuestiones matemáticas, que aun pudiendo pasar inadvertidas para muchos jugadores, se revelan tras una breve reflexión. El estudiantado de 4º de ESO está en posesión de conocimientos matemáticos suficientes como para jugar competentemente a muchos de estos juegos, que con práctica seguridad desconoce y a los que no tiene un acceso directo ni fácil. De acuerdo con los estudios neuropsicológicos del desarrollo, en esta edad las chicas buscan reforzar los lazos sociales, ampliar y consolidar su círculo de amistades, mientras los chicos tienden más a la confrontación, la competición (Martín y Navarro, 2011), por lo que creemos certeramente sano ofrecer una asignatura que permite:

a) una comunicación intensa que fomenta las relaciones sociales basadas en el respeto y el conocimiento mutuo, poniendo en valor el principio de interculturalidad;
b) una práctica lúdica que contempla el enfrentamiento entre rivales resuelto con diversión y aprendizaje, pudiendo redundar en una motivación positiva extensiva a otros campos;

c) trabajar inadvertidamente contenidos matemáticos “ocultos”, evitando posibles rechazos o percepción de dificultad, y gozando sin embargo de cuantos beneficios supone ahondar en el conocimiento matemático y desarrollar el pensamiento abstracto;
d) iniciarse en los procesos de investigación, incentivando el espíritu crítico, el pensamiento autónomo, la creatividad y la capacidad de integración de conocimientos, valorando el carácter multidisciplinar de las cuestiones reales;
e) contribuir a la conservación de los juegos como parte del patrimonio de la humanidad.

3.1.4. Problemática a abordar

En relación a la predisposición negativa hacia el aprendizaje y el estudio de las matemáticas, a la que hemos aludido anteriormente, nos planteamos si puede deberse a que las asignaturas de matemáticas se perciban como difíciles, poco interesantes, o inconexas con el mundo real y la vida cotidiana del alumnado. Este último aspecto nos preocupa particularmente, dado lo erróneo del planteamiento y la responsabilidad de docentes y currículos en la cuestión.

Por otra parte, consideramos que el enfoque mecanicista tradicional, en especial en las áreas de ciencias y matemáticas, no proporciona de forma general suficientes conocimientos prácticos ni técnicas heurísticas directamente transferibles a la resolución de situaciones problemáticas que son de interés para las y los estudiantes. Esto, además, supone un detrimento de la capacidad de poner en marcha procesos de razonamiento superior, cuyo fomento consideramos un deber inexcusable en la educación, y más, en la educación matemática.

En último lugar, opinamos que la educación secundaria ofrece poco espacio de expresión individual y de diálogo entre iguales a alumnos y alumnas, cuestión más acentuada si cabe en la mayoría de clases de matemáticas. En general, el discurso es único y unidireccional, por lo que la identificación del alumnado con el conocimiento “impuesto” es baja. Trataremos de aportar una propuesta diferente a través de la programación didáctica de esta asignatura.

3.2. OBJETIVOS DIDÁCTICOS

De acuerdo con la Orden de 27 de mayo de 2008 (DOCV Núm. 5783), cuyo extracto se recoge en el Anexo I, el T.M.I. “tendrá como finalidad el desarrollo las siguientes capacidades:

1. Adquirir la disciplina intelectual más adecuada para realizar un trabajo de forma metódica, utilizando procedimientos y recursos coherentes con el fin perseguido, fomentando el sentido de la autonomía y la responsabilidad individual y colectiva.
2. Resolver problemas y tomar decisiones, incorporando el rigor y la satisfacción por el trabajo bien hecho, y la voluntad de corregirlo y perfeccionarlo.
3. Integrar y aplicar en la realidad personal los conocimientos adquiridos, mostrando iniciativa, interés y motivación por el tema.
4. Utilizar las tecnologías de la información y de la comunicación como herramienta de aprendizaje y de comunicación, valorando su uso para trabajar de forma autónoma, como instrumento de colaboración y de desarrollo de proyectos de trabajo cooperativo.

5. Expresar y comunicar experiencias, oralmente y por escrito, apreciando la necesidad de una utilización cuidadosa del lenguaje, de un vocabulario preciso y de un registro adecuado, interpretando y ajustando el discurso a las diversas situaciones comunicativas.
6. Participar activamente tanto en la realización y exposición oral del trabajo como en la realización de un pequeño resumen que valore la exposición de sus compañeros.”

A través de esta programación se contribuye a desarrollar tanto dichas capacidades, fijadas por los objetivos generales para el T.M.I., como lo descrito por los siguientes objetivos específicos propuestos para la asignatura *Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*.

1. Familiarizarse con juegos de mesa de diversa tipología. Aprender y ser capaz de explicar sus reglas. Distinguir entre juegos de azar y de estrategia. Identificar la familia y la procedencia geográfica de los juegos y asociarla con culturas o civilizaciones conocidas.
2. Analizar los juegos desde una perspectiva investigadora. Identificar estrategias ganadoras y perdedoras en los juegos de estrategia. Plantear y responder preguntas; formular hipótesis, experimentar y discutir los resultados. Obtener conclusiones en cuanto al funcionamiento general de los juegos y la estructura de los tableros que permitan proponer posibles variantes. Crear notaciones abstractas que permitan describir el desarrollo de partidas.
3. Elaborar portfolios reuniendo material que certifique la actividad llevada a cabo. Producir y cumplimentar fichas de investigación de los juegos. Construir de manera sencilla tableros de juego propios para poder jugar e investigar fuera de clase.
4. Adquirir las habilidades socioemocionales y de comunicación que requiere el desarrollo de la asignatura, así como demostrar la capacidad de aplicarlas.
5. Aprender a trabajar en equipo desde la perspectiva del aprendizaje cooperativo. Atender a la diversidad, respetar y valorar las opiniones ajenas, solicitar ayuda cuando sea necesario y ofrecerla cuando los demás la requieran, comprometerse con los grupos de trabajo y responsabilizarse del aprendizaje propio y del de los compañeros y compañeras.
6. Participar activamente del paradigma de la educación inclusiva e intercultural.

3.3. CONTENIDOS DIDÁCTICOS

Los contenidos didácticos son el conjunto de aprendizajes que debe conseguir el alumnado para alcanzar los objetivos específicos propuestos y los generales de su etapa educativa, así como desarrollar las competencias básicas en las áreas indicadas. De acuerdo con la normativa referente a T.M.I. (DOCV Núm. 5783, Anexo I), los contenidos de la asignatura “vendrán dados fundamentalmente en la oferta hecha por el departamento o profesor”. Pese a que la Orden oficial propone un posible esquema, otorga libertad al respecto.

Los contenidos cubiertos por esta programación didáctica, tanto específicos del área de matemáticas, desde una perspectiva curricular clásica, como relativos al ámbito de los juegos, y transversales a las distintas áreas de conocimiento, son los siguientes:

1. Contenidos conceptuales: incluyen hechos o datos, conceptos y principios o leyes que el alumnado debe comprender para poder construir su conocimiento de la materia.
    - Tratamiento del azar, elementos de probabilidad y estadística. Equiprobabilidad, Ley de Laplace, tablas de frecuencias sencillas, diagramas de barras…

- Sistemas de notación abstracta. Coordenadas cartesianas y variantes.
- Análisis morfológico de los tableros y las posiciones de las fichas en el transcurso de una partida. Transformaciones isométricas como rotaciones y reflexiones.
- Modalidades de captura de fichas en distintos juegos: salto, ocupación, custodia, aproximación y alejamiento, y otros sistemas.
- Reglas de los juegos tratados. Versiones de las mismas en variantes.
- Clasificación (taxonómica y folksonómica) de la tipología de los juegos tratados.
- Datos antropológicos e históricos contextuales de las tribus involucradas.

2. Contenidos procedimentales: comprenden conjuntos de acciones que facilitan el logro de un fin, es decir, métodos y/o estrategias para llevar a cabo tareas determinadas.
    - Estrategias de búsqueda de información específica en internet.
    - Iniciación a los procesos de investigación: planteamiento de la problemática, formulación de hipótesis, puesta en práctica de experimentación, contraste de resultados con hipótesis, análisis de datos y establecimiento de conclusiones.
    - Construcción, evaluación y elección de sistemas de notación matemática que describan de manera clara, eficiente y unívoca aquello que se desea expresar.
    - Reflexión crítica sobre las creencias y opiniones propias y ajenas. Construcción cooperativa del conocimiento a partir de acuerdos alcanzados mediante el diálogo y la conversación. Expresión oral y redacción escrita clara y coherente, que permita comunicar las opiniones o conocimientos adquiridos de forma eficaz.
    - Elaboración de portfolios incluyendo resultados de los procesos de investigación y materiales de tipo manualidad creados por el alumnado.
    - Trabajo en equipos o grupos cooperativos como estructura social básica para el desarrollo de la asignatura y la puesta en práctica de los procesos de investigación. Participación cooperativa y corresponsable en el aprendizaje de todo el grupo.

3. Contenidos actitudinales: abarcan actitudes y valores que el alumnado debe adquirir o desarrollar y normas que, en beneficio y a raíz de las expectativas comunes, debe respetar.
    - Reconocimiento y toma de conciencia de las diferencias existentes entre distintos individuos y distintos grupos humanos. Interiorización de la idea de igualdad de derechos y valía. Conocimiento de culturas distintas a la propia y adquisición de respeto a sus creencias, modos de vida, cosmogonías, etc. Muda de la posición multicultural a la intercultural en relación con la convivencia en el centro educativo.
    - Comprensión del valor de los juegos como expresión del patrimonio cultural de los diversos grupos humanos. Comprensión de las matemáticas como esfuerzo humano universal y apreciación de las contribuciones de las diversas culturas a su desarrollo.
    - Uso racional y ecológico de los materiales y recursos.
    - Superación de la espiral del silencio. Respeto a las opiniones y turno de palabra de los demás.

3.4. COMPETENCIAS BÁSICAS

Entendemos por competencias básicas el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes contextualizadas, integradas como saberes prácticos, que el alumnado debe haber alcanzado al final de la etapa para su desarrollo y realización personal, así como su integración social y participación ciudadana. Esta programación contribuye al desarrollo de las competencias básicas definidas en el RD 1631/2006, de 29 de diciembre, en la manera siguiente:

Competencia en comunicación lingüística

- Participar activamente en las situaciones comunicativas con iguales y con el docente.
- Expresar oralmente y por escrito ideas, opiniones y creencias de manera ordenada, inteligible y coherente, empleando el lenguaje como instrumento para la representación, comprensión e interpretación de la realidad observada.

Competencia matemática

- Localizar patrones de regularidad. Analizar la simetría de estructuras geométricas.
- Aplicar la experiencia para abordar la resolución de nueva problemática haciendo uso de la analogía. Inferir conclusiones.
- Utilizar representaciones abstractas para la descripción de diferentes realidades.
- Entrenar los pensamientos inductivo, deductivo, analítico, creativo y divergente. Desarrollar el razonamiento arborescente mediante la construcción mental de árboles de posibilidades.
- Adquirir destreza en el tratamiento del azar y de situaciones reales que se basan en él.
- Jugar, desde la perspectiva etnomatemática.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Conocer mediante la interacción otras formas de pensar, expresarse y relacionarse, y otras personas y culturas, y aprender a interpretar sus realidades y circunstancias.
- Valorar la importancia del tratamiento ecológico de los recursos disponibles.
- Tomar conciencia del impacto de cualquier actuación a nivel personal y social.

Tratamiento de la información y competencia digital

- Desarrollar las habilidades de búsqueda de información específica en internet.
- Desarrollar las capacidades de discriminación, relación y síntesis de la información.

Competencia social y ciudadana

- Integrarse en el grupo vía el habla y la escucha activa. Superar la espiral del silencio.
- Trabajar las relaciones sociales entre iguales y entrenar las capacidades socioafectivas.
- Establecer estrategias de construcción colectiva de conocimiento en el seno de grupos cooperativos de aprendizaje. Asumir responsabilidades en la realización de tareas en equipo.
- Adquirir conciencia de la realidad multi- e intercultural tanto dentro como fuera del aula.

Competencia cultural y artística

- Ahondar en el conocimiento de ciertas culturas a través del contacto con sus formas de interpretar la realidad y su contexto cercano. Tomar conciencia del valor de manifestaciones culturales como los juegos como parte del patrimonio histórico, cultural y etnográfico.
- Construir materiales de juego de manera creativa.

Competencia para aprender a aprender

- Adquirir estrategias variadas para la resolución de problemas y entrenar la autonomía e iniciativa personal en lo relativo a construcción del conocimiento.
- Desarrollar las habilidades necesarias para realizar investigaciones en cualquier ámbito.
- Enriquecer el propio conocimiento a través del trabajo en grupos cooperativos.

Autonomía e iniciativa personal

- Responsabilizarse del propio aprendizaje así como corresponsabilizarse del aprendizaje del grupo, haciéndose partícipe de los procesos de enseñanza-aprendizaje y evaluación.
- Adquirir la capacidad de emprender investigaciones personales, hacerse preguntas sobre lo desconocido y evaluar cualquier cuestión con sentido crítico.
- Elaborar materiales que dejen constancia de la actividad académica personal y permitan reflejar los logros, dudas, esfuerzo, conclusiones, posibles tareas pendientes, etc.

En la propuesta destacan el peso de la competencia matemática y el de la competencia para aprender a aprender, siendo en estos ámbitos en los que el alumnado de la asignatura T.M.I.: *Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas* desarrollará más sus habilidades.

3.5. TEMPORALIZACIÓN

En la Tabla 3 y la Tabla 4 se muestran sendos cronogramas que describen la temporalización de la asignatura. En el primero, secuencial y de estilo organizativo, presentamos la distribución y recuento de sesiones por evaluaciones. En el segundo, de tipo diagrama de Gantt, señalamos la distribución de tareas o actividades a lo largo del curso.

Las evaluaciones en el IES Francesc Ribalta tienen lugar en el curso 2013-2014 en las siguientes fechas: inicial, del 7 al 11 de octubre de 2013; primera, del 2 al 5 de diciembre de 2013; segunda, del 17 al 20 de marzo de 2014; tercera y final, del 16 al 19 de junio de 2014. Las tribus a las que pertenecerá cada estudiante, indicadas en los cronogramas mediante el color de sombreado de las celdas, abarcarán las siguientes sesiones y unidades didácticas: primera, desde la 2ª hasta la 10ª sesión (U.1, U.2, U.X); segunda, desde la 11ª hasta la 17ª sesión (U.3, U.4, U.X, taller); tercera, desde la 18ª hasta la 25ª sesión (U.5, U.X, taller); cuarta, desde la 26ª hasta la 33ª sesión (U.6, U.7, U.X, taller); gran tribu-clase, sesiones 34ª a 36ª.

3.6. METODOLOGÍA

3.6.1. Principios metodológicos de intervención educativa

Entendemos por principios metodológicos el conjunto de criterios que regulan y organizan la relación entre los diversos componentes que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje: alumnado, docentes, otros agentes de la comunidad educativa, objetivos, contenidos, recursos, etc.

Como base fundamental partimos del principio de que alumnos y alumnas deben ser protagonistas y artífices de su propio aprendizaje, convirtiéndose el docente en un guía del proceso y mediador-gestor en el aula. Bajo este planteamiento, este deja de ser un “portador-transmisor de conocimientos” y se convierte en “entrenador en competencias socioemocionales que faciliten el aprendizaje autónomo” del alumnado (Vaello, 2011:25).

1ª evaluación. Trimestre de otoño		*2ª evaluación. Trimestre de invierno*		*3ª evaluación. Trimestre de primavera*	
Fecha	Sesión	Fecha	Sesión	Fecha	Sesión
		10 – 12 – 2013	13. U.X: Solitarios		
		17 – 12 – 2013	14. Taller		
		24 – 12 – 2013	Vacaciones de Navidad	25 – 3 – 2014	Fiestas de la Magdalena
17 – 9 – 2013	1. Presentación	31 – 12 – 2013	Vacaciones de Navidad	1 – 4 – 2014	26. U.6: Juegos mancala
24 – 9 – 2013	2. U. X: Solitarios	7 – 1 – 2014	15. U.4: Juegos de caza	8 – 4 – 2014	27. U.6: Juegos mancala
1 – 10 – 2013	3. U.1: Elementos de azar	14 – 1 – 2014	16. U.4: Juegos de caza	15 – 4 – 2014	28. U. X: Solitarios
8 – 10 – 2013	4. U.1: Elementos de azar	21 – 1 – 2014	17. Simposio	22 – 4 – 2014	Vacaciones de Pascua
15 – 10 – 2013	5. U.1: Elementos de azar	28 – 1 – 2014	18. U.5: Juegos de guerra	29 – 4 – 2014	29. U.7: Juegos modernos
22 – 10 – 2013	6. U.1: Elementos de azar	4 – 2 – 2014	19. U.5: Juegos de guerra	6 – 5 – 2014	30. U.7: Juegos modernos
29 – 10 – 2013	7. U.2: Juegos de posición	11 – 2 – 2014	20. U.5: Juegos de guerra	13 – 5 – 2014	31. U.7: Juegos modernos
5 – 11 – 2013	8. U.2: Juegos de posición	18 – 2 – 2014	21. U.5: Juegos de guerra	20 – 5 – 2014	32. Taller
12 – 11 – 2013	9. U.2: Juegos de posición	25 – 2 – 2014	22. U.5: Juegos de guerra	27 – 5 – 2014	33. Simposio
19 – 11 – 2013	10. Simposio	4 – 3 – 2014	23. U. X: Solitarios	3 – 6 – 2014	34. Coloquio
26 – 11 – 2013	11. U.3: Juegos de carreras	11 – 3 – 2014	24. Taller	10 – 6 – 2014	35. Coloquio
3 – 12 – 2013	12. U.3: Juegos de carreras	18 – 3 – 2014	25. Simposio	17 – 6 – 2014	36. Coloquio
12 semanas, 12 sesiones de clase		15 semanas, 13 sesiones de clase		13 semanas, 11 sesiones de clase	

Tabla 3.- Cronograma de sesiones de la asignatura.

	Sept.		*Octubre*					*Noviembre*				*Diciembre*					*Enero*				*Febrero*				*Marzo*				*Abril*					*Mayo*				*Junio*		
Actividades	17	24	1	8	15	22	29	5	12	19	26	3	10	17	24	31	7	14	21	28	4	11	18	25	4	11	18	25	1	8	15	22	29	6	13	20	27	3	10	17
Introducc.																																								
U1																																								
U2																																								
U3																																								
U4																																								
U5																																								
U6																																								
U7																																								
UX																																								
Taller																																								
Simposios																																								
Coloquios																																								
Investig.																																								
Evaluación																																								
Form. tribus																																								
Pres. tribus																																								
Disol. tribus																																								
Vacaciones																																								
Sesiones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	-	-	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	-	26	27	28	-	29	30	31	32	33	34	35	36

Tabla 4.- Diagrama de Gantt de las actividades y unidades didácticas en la asignatura.

Esto supone la evolución de lo que Vaello (2011) denomina “profesor 1-2-3” a “profesor YEMA”, acrónimo de “Yo Educo a través de una Materia a Alumnos”, e implica una reflexión autocrítica, la conjunción entre instrucción curricular y educación ciudadana y socioemocional, el dominio de los conocimientos de la asignatura y un método adaptable a las características del alumnado. Desde la perspectiva psico-cognitiva, se partirá del conjunto de conocimientos de dicho alumnado, en especial de sus competencias matemáticas, capacidad de raciocinio y pensamiento abstracto, dominio de la búsqueda de información, capacidades de trabajo en grupo y habilidades sociales y de expresión oral y escrita. Si bien los contenidos conceptuales planteados no presentan una relación biunívoca con los curriculares de las asignaturas de matemáticas de segundo ciclo de ESO, el conjunto de contenidos procedimentales, actitudinales y conceptuales fijados (ver apartado 3.3) supone una serie de propuestas muy beneficiosas para la vida tanto académica como extraescolar.

La construcción autónoma de aprendizajes significativos a partir de investigaciones en torno a cuestiones mayoritariamente desconocidas a priori se constituirá en un reto considerable. Por ello la actividad investigadora estará tutelada por el docente, cuya misión mediadora-gestora de la actividad cobra gran relevancia: deberá invitar a alumnos y alumnas a ahondar en los juegos, y motivar su interés para que realicen investigaciones con un nivel aceptable de formalidad satisfaciendo así los objetivos del curso. Cabe mencionar que la autonomía que deseamos logre el estudiantado no es la capacidad de trabajar por su cuenta sin más, sino la de adquirir una conciencia conducente a responsabilizarse de su propio aprendizaje.

Además de lo anterior, en el diseño de la programación se han tenido en cuenta los principios de: intuición, referido a la captación de la realidad vía los sentidos; motivación, que atañe a la forma de presentar los contenidos y desarrollar la asignatura de manera que se perciba como interesante por el alumnado; creatividad, que incide en la capacidad adaptativa de combinar lo conocido para resolver una problemática generando productos o soluciones originales; individualización y atención a la diversidad, que reconoce explícitamente los rasgos y características individuales y prevé la adaptación de ritmos, el préstamo de ayuda, etc.; socialización, que junto a la adquisición de conocimientos constituye un fin fundamental de la institución escolar; y juego, que, si bien es más habitual en etapas anteriores de la educación (infantil y primaria), es un recurso fundamental para el desarrollo integral del alumnado.

3.6.2. Aprendizaje cooperativo: método de las tribus de trabajo

Las matemáticas son una de las materias a las que se han aplicado más profusamente los métodos de aprendizaje cooperativo (M.A.C.) desde que fueron formulados inicialmente (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008).

Partiendo de la teoría de la interdependencia social dentro del aula de Deutch y las investigaciones de Johnson y Johnson, existen tres estructuras básicas de interdependencia (Gavilán y Alario, 2010; Negro, Torrego y Zariquiey, 2012): competitiva, apoyada en el hecho de que competir sirve como estímulo para mejorar, si bien en ella el fracaso se percibe como algo a desdeñar; individualista, basada en la independencia de los estudiantes y la ausencia de interrelación social salvo con el docente; y cooperativa, caracterizada porque los estudiantes alcanzan juntos las metas educativas, y fundamentada en el principio de que nuestra sociedad se basa en la necesidad intrínseca de cooperación entre los individuos.

En cuanto a la docencia estructurada siguiendo modelos de trabajo en grupo, Gavilán y Alario (2010:113) detallan que “no todos los grupos en que sus miembros trabajan conjuntamente, son grupos cooperativos”, y de esta manera distinguen entre grupos de pseudoaprendizaje, tradicionales y de trabajo cooperativo. Centrándonos en los últimos, las relaciones que nos interesarán no son las de tutoría (asimétricas, basadas en la diferencia de roles y niveles de conocimiento entre quienes trabajan juntos), ni las de mera colaboración (simétricas en cuanto a roles y nivel de conocimiento a priori), sino las relaciones cooperativas, que se establecen entre grupos generalmente heterogéneos en cuanto a nivel de conocimiento, en los que los roles de tutor y tutorando “pueden alternarse a lo largo del proceso” (Gavilán y Alario, 2010:116), de forma que “el conocimiento se transmite y se negocia” vía el diálogo y la cooperación. Algunas investigaciones han precisado que la heterogeneidad en cuanto a habilidad debe ser media, es decir, abarcando niveles poco distanciados (Serrano et al., 2008).

De acuerdo con Gavilán y Alario (2010), los elementos básicos que caracterizan a los grupos de aprendizaje cooperativo consisten en los siguientes principios:

a) Interdependencia positiva: cada individuo alcanza el éxito si y sólo si sus compañeros de grupo también lo hacen; requiere establecer una meta interdependiente y garantía de recompensa para todos los miembros de acuerdo con la calidad de los esfuerzos.
b) Interacción que promociona: necesita un tiempo de encuentro suficiente, comunicación efectiva en el equipo, participación social positiva de todos los miembros y concepción de necesidad de apoyo mutuo, retroalimentando la confianza y la cooperación.
c) Responsabilidad individual y grupal; debe ser evaluada dualmente.
d) Aprendizaje de habilidades sociales, de comunicación, de confianza, de liderazgo, para resolver conflictos de manera constructiva…
e) Revisión del proceso del grupo: mecanismo de evaluación interna a fin de determinar las acciones útiles y convenientes para el grupo y las que no lo son.

Establecidas las bases de los M.A.C., cabe resaltar que las investigaciones sobre ellos son abundantes y fructíferas. Distintos autores dan cuenta de resultados positivos en varios ámbitos: el académico, en cuanto al rendimiento (Negro et al., 2012) y el mayor uso de estrategias de razonamiento de alto nivel, el pensamiento crítico y divergente, la creatividad y la curiosidad epistémica (Gavilán y Alario, 2010); el social, en cuanto a un aumento del conocimiento mutuo, la empatía, el compromiso, la cohesión grupal, el apoyo social, la integración de minorías étnicas y alumnos con necesidades educativas especiales, una reducción del absentismo y los prejuicios entre grupos, y una mejora de la calidad en las relaciones interpersonales (Negro et al., 2012); el personal, consiguiendo mejora de la autoestima y la automotivación, el equilibrio, el bienestar y la salud psicológica (Gavilán y Alario, 2010).

A pesar de estos logros la aplicación de los M.A.C. dista mucho de ser cotidiana en nuestros institutos. Gavilán y Alario (2010:155) sostienen que “desde las instituciones escolares se sigue fomentando un tipo de aprendizaje en el que se considera como fin básico la adquisición de logros académicos y donde el agente principal es el profesor en su papel innegable de transmisor de conocimientos. Las relaciones entre los estudiantes se consideran secundarias, cuando no perjudiciales, y por ello son descuidadas. Los estudiantes que trabajan lo hacen aisladamente para conseguir sus propios objetivos o, aunque menos frecuentemente, lo hacen en una clara situación competitiva". Sin embargo, sabemos que las matemáticas son una actividad esencialmente social en muchos contextos y debemos preparar a nuestro alumnado para la vida en sociedad. De acuerdo con Gavilán y Alario (2010:210), "la confrontación de las ideas propias con las ajenas estimula el pensamiento y amplía perspectivas. La naturaleza de los conceptos matemáticos necesita para su formación un proceso de aprendizaje activo, que se ve potenciado por las discusiones en los grupos". Por ello, en esta propuesta consideramos a cada miembro de los grupos de trabajo como posible fuente de conocimiento para sus compañeros.

Denominamos al sistema, diseñado ex profeso, *método de las tribus de trabajo*, y lo describimos según el esquema estructural sugerido por Gavilán y Alario (2010):

Tamaño de los grupos

Dadas las características de la asignatura (optativa en 4º de ESO, pudiendo formar parte de una amplia variedad ofertada por el centro), los grupos de trabajo, a los que en adelante nos referiremos indistintamente así o con la denominación de "tribus", deberán estar formados, idealmente, por cuatro estudiantes. La mayoría de juegos a tratar son juegos de estrategia para dos personas, siendo importante que la composición de las tribus facilite que se puedan jugar partidas fluidas y el aprovechamiento sea máximo para todos los integrantes del grupo. Tras considerar varios esquemas, proponemos el siguiente algoritmo para determinar la composición de las tribus, representando el valor de M el número de personas matriculadas. En el Anexo IV presentamos una definición alternativa del algoritmo.

Si $M \leq 5$, 1 tribu de M miembros.
Si $M = 6$, 2 tribus de 3 miembros.
Si $M = 7$, 1 tribu de 4 miembros y 1 tribu de 3 miembros.
Si $M \geq 8$, $\lfloor M/4 \rfloor$ tribus de 4 miembros y…
- Si $M \bmod 4 \equiv 0$, fin.
- Si $M \bmod 4 \equiv 1$, la última tribu es de 5 miembros.
- Si $M \bmod 4 \equiv 2$, las últimas 2 tribus son de 5 miembros.
- Si $M \bmod 4 \equiv 3$, 1 tribu de 3 miembros.

Formación de los grupos

Las tribus, formadas por el docente, serán heterogéneas en la medida de lo posible y de los datos que obren en sus manos en relación a los siguientes criterios: competencias matemáticas (grado de heterogeneidad medio, a fin de respetar la zona de desarrollo próximo de la mayoría de estudiantes), actitudes con respecto a las matemáticas, sexo, etnia y nacionalidad. El criterio de preferencia personal del alumnado puede ser tenido en cuenta pero nunca será prioritario. Una vez formados los grupos, conviene revisarlos a fin de que no coincidan estudiantes antagónicos, disruptores, ni mejores amigos en un mismo grupo. Si hay suficientes matriculados se agruparán siempre de forma que no se haya trabajado anteriormente con los compañeros y compañeras de equipo. Las tribus trabajarán juntas durante una serie de sesiones, suficientes para que se den en su seno las condiciones requeridas para el buen funcionamiento del aprendizaje cooperativo, período tras el cual se formarán otras nuevas.

En la formación de las primeras tribus del curso el docente dispondrá de menos información acerca de los alumnos y alumnas. Para tener una idea previa de los niveles de aptitudes sin invadir su intimidad, un criterio parcial sería considerar la opción de matrícula en la asignatura de matemáticas de 4º de ESO: finalista o de continuidad, lo cual puede proporcionar información sobre las ideas del alumnado con respecto a su propia aptitud (si bien también puede ser indicativo de aspectos actitudinales); otra posible consideración a partir de información de términos hábiles es si se tiene o no pendiente la asignatura de matemáticas de 3º de ESO. A medida que avance el curso y el docente pueda observar a la clase en la práctica del trabajo en grupo, irá completando sus datos acerca de las competencias y actitudes de cada cual, de manera que pueda formar agrupaciones de manera más idónea. En todo caso, siempre se podrá cambiar algún componente de las tribus si la situación lo requiere.

Distribución de los grupos en el aula

Los compañeros y compañeras de tribu se sentarán juntos de manera que sus mesas queden enfrentadas 2 a 2, a fin de facilitar las partidas de los juegos y el diálogo, considerando la visibilidad e inclusión de las personas que quedan sin pareja de juego en las tribus de 3 ó 5 miembros. Todo el mundo debe tener buena visión de la pizarra, sin molestarse unas tribus a otras, siendo lo ideal una distribución en el aula “en U”, dejando un espacio central libre.

Control de la efectividad de los grupos

El sistema de evaluación multimodal previsto, descrito en el apartado 3.9, contempla la autoevaluación por parte de las tribus (formativa, además de sumativa) de las cuestiones de progreso académico y construcción social del conocimiento así como uso adecuado de habilidades sociales necesarias para el buen funcionamiento de las tribus y el aprovechamiento de las sesiones, integrando también componentes homoevaluativos y heteroevaluativos.

Objetivos de cada lección y planteamiento de la tarea

Los objetivos actitudinales y sociales, referidos a las habilidades socioemocionales a utilizar en cualquier instancia del proceso enseñanza-aprendizaje, y en concreto a las requeridas para el trabajo en grupos cooperativos, serán introducidos progresivamente por el docente durante las primeras sesiones del curso, de forma que a medida que los alumnos y alumnas los vayan integrando a su modo de hacer habitual, no será necesario detallar objetivos específicos para cada lección. En cuanto a los objetivos académicos, según se trate de un tipo u otro de sesión (ver apartados 3.6.6 y 3.6.7), el docente iniciará la clase realizando la breve explicación que sea pertinente, indicando qué tareas deben cumplirse e incidiendo en los objetivos a lograr.

Intervenciones del/la profesor/a

En general, en las sesiones tipo de investigación en tribu las intervenciones del docente hacia toda la clase se limitarán a aclarar conceptos si fuera necesario o recordar pautas generales de procedimiento y comportamiento. Su principal misión es la de observar y supervisar el desempeño (académico, social y actitudinal) de las tribus y sus integrantes, y orientar los procesos y los aprendizajes de manera oportuna.

Evaluación del aprendizaje y revisión del funcionamiento de los grupos

Dedicamos apartados específicos para esta cuestión más adelante (véanse 3.9 y 3.10).

3.6.3. Actividad de formación de tribus

En las sesiones que requieran constituir nuevos grupos, el/la profesor/a iniciará la clase informando de su composición. Tras ello los nuevos compañeros se sentarán juntos y acordarán el nombre de su tribu; puesto que se empleará para referirse al grupo de trabajo cooperativo durante el desarrollo de las sesiones siguientes, todos los miembros deben estar conformes. Elegida la denominación de la tribu, sus integrantes consignarán nombres y apellidos, nombre de tribu, fecha de formación y unidades didácticas en las que trabajarán juntos, en el Acta de Fundación de Tribu (véase apartado 3.8 más adelante), documento que certifica el compromiso acordado e inaugura el Portfolio de tribu, y la firmarán. No se podrán repetirán nombres de tribu.

Creemos que "nominalizar" los grupos cooperativos (ver Tabla 5,[11]), *i.e.*, utilizar las denominaciones tribu de los cherokee, yanomami, masai… en lugar de grupo 1, grupo 2, o grupo A, grupo B, etc., es muy beneficioso a nivel de sentimiento de pertenencia e identificación, lo cual puede reforzar el compromiso y la responsabilidad para con el grupo y mejorar el desempeño general. Por supuesto alumnos y alumnas pueden sugerir sus propios nombres de tribu, respetando el concepto social-antropológico habitual de "tribu". Se permitirán tribus urbanas[12], excluidas las violentas y aquellas cuya cohesión responda a cuestiones de tipo religioso, racial, ideológico, etc., prefiriendo las agrupaciones cuya filosofía característica tenga que ver con música, cultura, u otros intereses. Es importante que alumnos y alumnas sean conscientes de que elegir un nombre de tribu no implica particular adhesión o respaldo, sino simplemente que el grupo de trabajo decide en consenso adoptar el nombre de dicha tribu.

3.6.4. Actividad de presentación de tribus

Uno de los contenidos de la programación es el conocimiento de algunos rasgos de las tribus reales involucradas. Por ello los nuevos compañeros y compañeras de tribu buscarán información para aportar unos pocos datos sobre la tribu elegida. Ello les dará oportunidad para seguir conociéndose si no eran ya amigos. Al inicio de la siguiente sesión a su formación, las nuevas tribus se presentarán dirigiéndose a la totalidad de la clase, debiendo intervenir todos los integrantes. Tras ello reanudarán las investigaciones en el punto en el que hubiesen quedado.

3.6.5. Actividad de disolución de tribus

Después de varias sesiones de trabajo las agrupaciones se disolverán para dar lugar a otras nuevas en sesiones venideras. Sus miembros cumplimentarán y firmarán el Acta de

---

[11] Tribus ordenadas alfabéticamente, y atendiendo al criterio de incluir representación de los cinco continentes. No se han tenido en cuenta en la elaboración de la lista criterios de representatividad histórica ni distinciones de carácter sociológico entre tribus, clanes, etc.

[12] Si bien recomendamos no incluirlas como opción hasta la cuarta y última tribu del curso, a fin de considerar las dinámicas del grupo y las relaciones interpersonales surgidas, la madurez de los alumnos y las posibles interacciones entre identidades diferentes, y prever que pudieran surgir conflictos.

Disolución de Tribu (véase apartado 3.8 más adelante), momento en el cual dejarán oficialmente de formar parte de ella y no seguirán investigando juntos en el aula, donde deberán trabajar con nuevos compañeros y compañeras. Si los miembros que formaban la tribu quieren completar o ampliar alguna investigación a medias, podrán reunirse y trabajar juntos fuera de clase.

Tribus	Acadios, Apaches, Alanos, Arapahoes, Asirios, Ávaros, Aztecas, Babilonios, Bosquimanos, Bretones, Cherokee, Cheyennes, Egipcios, Escitas, Etruscos, Galos, Fenicios, Filisteos, Helvecios, Hititas, Hunos, Iberos, Incas, Inuit, Jíbaros, Jarawas, Jutos, Lapones, Latinos, Lusitanos, Maoríes, Masai, Mapuches, Mayas, Medas, Minoicos, Mohicanos, Mongoles, Navajos, Normandos, Otomanos, Patagones, Persas, Pictos, Pies Negros, Pigmeos, Quechuas, Sabinos, Sioux, Suevos, Sumerios, Tártaros, Tasmanos, Teutones, Tuaregs, Yanomami, Zulúes…
Tribus urbanas	Emos, Frikis, Geeks, Góticos, Grafitteros, Hackers, Heavies, Hiphopperos, Hipsters, Indies, Mods, Nerds, Otakus, Poperos, Rastas, Rockers, Skaters, Trekkies…

Tabla 5.- Tribus y tribus urbanas sugeridas.

3.6.6. Sesión tipo de investigación

Exceptuando las de presentación, simposio, coloquio y taller, cuyos detalles se abordan más adelante, el resto de sesiones, denominadas sesiones tipo de investigación, tendrán una misma estructura dividida en cuatro fases:

Fase 1. Tribus y reparto de material.

- Actividad de formación o presentación de nuevas tribus si el programa lo indica.
- Reparto de los componentes de juego necesarios para la sesión a cada una de las tribus (tableros, piezas, dados u otros elementos de azar) junto a las fichas explicativas de los juegos en cuestión, para que las tribus los vayan manipulando.

Fase 2. Contextualización de juegos y explicaciones.

- En las sesiones de unidades didácticas ordinarias (U.1 a U.7), todos los juegos contemplados en la unidad estarán a disposición de las tribus junto a sus fichas explicativas. En la primera sesión el docente señalará las características y posibles líneas de análisis comunes a los juegos de la familia. En cada sesión hará una breve contextualización de un subgrupo de juegos perteneciente a la familia, proporcionando oralmente pinceladas sobre la mecánica de juego u otra información que pueda complementar la incluida en las fichas explicativas, a fin de despertar el interés de las tribus. Esto responde asimismo a la necesidad de conseguir la atención y calma del grupo en los primeros minutos, antes de pasar al trabajo en tribu.
- Si se trata de una sesión correspondiente a la unidad de solitarios, se contextualizará el juego en cuestión y se explicarán su objetivo y sus reglas.

Fase 3. Elección tribal del objeto de investigación.

- Cada tribu decidirá, en consenso y en base a su volición, sobre cuál de los juegos iniciar una investigación. Toda la tribu debe investigar junta sobre un mismo juego. Si se trata de una sesión de la unidad de solitarios no habrá elección, y toda la clase abordará el mismo juego.

- Esta fase será pasada por alto por las tribus que ya tengan una investigación a medias, que volverán a este punto una vez completen dicha investigación y deseen emprender otra.

Fase 4. Desarrollo de la investigación.

- Una vez elegido el juego a investigar, los miembros de la tribu leerán atentamente su ficha explicativa y comentarán internamente cualquier duda que puedan tener sobre las reglas, objetivo, condiciones de victoria…, asegurándose de que todos y todas comprenden perfectamente el juego. Consultarán al profesor si tienen dudas antes de proseguir.
- La tribu comenzará a familiarizarse con el juego escogido, aprendiendo progresivamente a jugar y descubriendo las mecánicas intrínsecas y las posibles estrategias. En el transcurso de la investigación formularán hipótesis que tratarán de verificar o invalidar recreando momentos del juego que les permitan averiguar si lo que han pensado es cierto o no, lo es a veces, etc., recopilando información que discutirán siempre en el seno de la tribu. Podrán idear variantes de los juegos modificando los tableros, el número de fichas, algunas reglas, etc. Podrán inventar sistemas de notación para registrar el desarrollo de partidas de manera unívoca. Y en general, desarrollarán investigaciones abiertas y libres, que deberán formalizar en la medida de lo posible hasta llegar a construir un conocimiento social sólido. Los productos de estas investigaciones serán plasmados en las fichas de investigación de juegos, que formarán parte del Portfolio de tribu.
- El docente intervendrá lo menos posible, salvo para realizar aclaraciones generales o corregir actitudes o comportamientos. Sólo a demanda de las tribus que se atasquen en sus investigaciones, proporcionará sugerencias para continuar el trabajo (véase Anexo VII).

Como explica Vilella (2009:167) acerca de este tipo de actividades ricas estructuradas en torno a tareas abiertas, “conviene dejar su tiempo al alumnado para ir creando significados, negociando representaciones, debatiendo argumentaciones, y facilitar la co-construcción del conocimiento matemático”. Asimismo “el profesorado debe establecer las normas sociales y de la práctica matemática en clase; dejar claro el papel del error (fuente de aprendizaje, oportunidad para mejorar y descubrir puntos débiles de nuestro razonamiento […]); establecer el camino preferido en clase para la validación de la verdad matemática (basado en el diálogo y la argumentación de ideas); y organizar el trabajo cooperativo en grupos” (Vilella, 2009:168).

3.6.7. Sesiones y unidades didácticas

A continuación presentamos un breve resumen de los aspectos técnicos de cada unidad didáctica o bloque de sesiones. Las sesiones de unidades didácticas ordinarias no se restringen a las subfamilias de juegos señaladas, sino que esto se refiere a la contextualización reseñada en la fase 2 de las sesiones tipo de investigación. Recomendamos complementar lo aquí expuesto con los apuntes sobre los juegos que presentamos en el Anexo VII.

Presentación

En la primera sesión del curso se presentará al profesor y la asignatura, indicando objetivos, contenidos, competencias a desarrollar, metodología y sistema de evaluación. En especial se hará hincapié en el M.A.C. en tribus (procesos de formación, presentación y disolución, así como en qué debe consistir el trabajo de investigación en tribu) y en el sistema de portfolios, por suponer la mayor novedad para los alumnos y alumnas. También se reseñará brevemente la secuencia de familias de juegos que cubrirá el curso.

Unidad X.- Solitarios

Sesión 2. Formación de tribus. El *tangram*.
Sesión 13. Las torres de Hanói.
Sesión 23. El solitario de la Bastilla o *senku*.
Sesión 28. El *tchuka ruma*.

La unidad didáctica dedicada a solitarios se impartirá en sesiones no correlativas en las que mostraremos al alumnado varios juegos para una persona cuidadosamente seleccionados, todos ellos susceptibles de análisis matemático, cuyos contenidos guardan relación con los de las unidades didácticas respectivamente precedentes. El *tangram* es un rompecabezas de origen chino puramente geométrico; las torres de Hanói representan un problema de intercambio de posiciones apoyado en la recursividad de subproblemas más fácilmente resolubles, en cuyo análisis formal aparecen las sucesiones numéricas; el solitario de la Bastilla consiste en un ejercicio de autoeliminación secuencial de fichas en el que el la simetría del problema resulta fundamental; por último, el *tchuka ruma* es un *mancala* de origen indio para un jugador.

La inclusión de estos solitarios en el curso constituye un ejercicio responsable de atención a la diversidad. Actualmente son habituales en nuestro contexto educativo los hijos e hijas únicas; por otro lado, los juegos de mesa del mundo no gozan en España de una salud excepcional, ni en el ámbito familiar ni en los grupos de adolescentes, como hemos discutido anteriormente, por lo que no siempre es fácil conseguir compañeros de juegos de mesa. Por ello, difundir estos solitarios y dar la oportunidad de construirlos en las sesiones de taller permitirá que los estudiantes interesados puedan disfrutarlos y analizarlos con más profundidad a posteriori, siendo las investigaciones derivadas actividades matemáticas de alto nivel.

Unidad 1.- Elementos de azar

Sesión 3. Presentación de tribus. Introducción al azar. Probabilidad y medida de incertidumbre. Elementos de azar: monedas y dados hexaedros.
Sesión 4. Elem. de azar: tablillas, cauris, maíz, tabas. Juegos de monedas: cara o cruz y *lu-lu*.
Sesión 5. Elementos de azar: dados D4, D8, D10, D12, D20. Juegos de dedos: los chinos, pares o nones y piedra-papel-tijera.
Sesión 6. Juegos de tabas: *ave victrix*. Juegos de dedos: piedra-papel-tijera-lagarto-spock.

Esta primera unidad será ligeramente diferente de las que componen el resto del curso. En primer lugar, diferirá a nivel técnico, ya que servirá para que el/la docente y el alumnado se conozcan y se familiaricen con la forma de trabajar que seguirán a lo largo del curso. Se deberá llevar a cabo una exploración inicial de los conocimientos sobre azar y probabilidad de la clase, a fin de determinar si resulta necesario hacer una breve explicación formal de los conceptos puestos en juego para homogeneizar conocimientos. Durante las sesiones 3 y 4 el docente conducirá a las tribus por los diferentes temas de investigación a fin de corroborar el avance y la adquisición de los conceptos por parte de todos; en las sesiones 5 y 6 las tribus experimentarán e investigarán de manera más autónoma. En segundo lugar, esta unidad destaca en cuanto a contenidos, porque versa sobre azar y pequeños juegos en los que éste es el carácter fundamental, al contrario que los juegos que se tratarán más adelante, cuyos componentes táctico o estratégico son los primordiales. El conocimiento y estudio de estos elementos de azar servirán como apoyo al alumnado, que estudiará posteriormente juegos en los que dados, monedas, u otros elementos decidirán el orden de precedencia o el número de casillas que una ficha se puede mover. Excluimos de la programación los llamados juegos de dados por estar excesivamente relacionados con las apuestas.

Unidad 2.- Juegos de posición

Sesión 7. Juegos de bloqueo: *pong hau k'i* y *mu torere*.
Sesión 8. Juegos de molino: tres en raya, danza de los seis hombres, danza de los nueve hombres y danza de los doce hombres.
Sesión 9. Otros juegos de posición: *seega* moderno y *sz'kwa*.

En esta unidad los estudiantes conocerán los juegos de posición, algunos de los cuales datan de hace 4000 años. El *go*, uno de los juegos abstractos más populares en el mundo, pertenece a esta familia; pese a la excelsa simplicidad de sus reglas, el nivel de complejidad de sus estrategias queda fuera del alcance del curso.

Los juegos de bloqueo a tratar se caracterizan por la ausencia de capturas: en ellos, cada jugador trata de bloquear los movimientos de las piezas del contrincante colocando y moviendo las suyas propias según unas reglas concretas. Con estos juegos los estudiantes comenzarán a familiarizarse con la planificación táctica y la elaboración de pequeños árboles de posibilidades. Los juegos de molino, también conocidos como de danza, *Morris*, o *mill*, forman un ancestral grupo de juegos muy similares entre sí, con diferentes niveles de complejidad. Culturas distantes en tiempo y espacio desarrollaron estos juegos, desde los benjamines (tres en raya o *tic-tac-toe*, y *achi*), hasta los mayores de la familia que entrañan mayor diversión y estrategia, siendo el más popular y extendido la danza de los nueve hombres (*nine men's Morris*). Con esta familia de juegos los estudiantes abordarán retos estratégico-tácticos con los que desarrollarán la detección de patrones regulares y el razonamiento arborescente.

Unidad 3.- Juegos de carreras

Sesión 11. Formación de nuevas tribus. Juego real de Ur y *senet*.
Sesión 12. Presentación de tribus. Juegos de cruz y círculo: *nyout* y *pachisi*.

Los juegos de carreras estudiados en la U.3 están estrechamente relacionados con los elementos de azar de la U.1[13]. En ellos se emplean dados u otros componentes aleatorios para determinar el número de casillas que se pueden mover las fichas, que deben seguir el recorrido del tablero hasta alcanzar una meta. El juego de la oca y el parchís, que deriva del *pachisi*, dos de los juegos de tablero sin duda más conocidos por el alumnado, son de esta familia. También

[13] Considerando la influencia positiva en el rendimiento académico del factor de la motivación, se ha decidido intercalar la U.2 entre estas unidades a fin de evitar la monotonía en los contenidos, dando al alumnado una cierta variedad en las semanas iniciales de la asignatura, cubriendo tanto juegos estratégico-tácticos (U.2 y U.3) como de azar (U.1 y U.3). También, así posibilitamos mayor variedad de líneas de investigación durante las vacaciones navideñas a quienes tengan interés en su desarrollo.

pertenece a ella uno de los pocos rivales sólidos del ajedrez en cuanto a popularidad mundial: el *backgammon*, excluido de la asignatura dadas las limitaciones temporales y la accesibilidad del juego *extra schola*, cuyos antecesores más antiguos, el juego de Ur y el *senet*, sí tratamos, asumiéndolos ignotos para el alumnado. Con esta familia los alumnos y alumnas descubrirán el concepto de los "juegos con estrategia favorecedora", que son aquellos que tienen un elemento importante de azar (los dados o similares) pero admiten estrategias que, puestas en práctica correctamente, pueden conducir a la victoria con más probabilidad que jugar de manera aleatoria, combinando por tanto las decisiones táctico-estratégicas con el azar.

Unidad 4.- Juegos de caza

Sesión 15. Juegos de zorros: la zorra y los gansos. Juegos de leopardos: vacas y leopardos.
Sesión 16. Juegos de tigres: *bagh chal* y corderos y tigres.

Los juegos que en este trabajo hemos llamado "de caza" (U.4) y "de guerra" (U.5) suelen aparecer en la literatura en un mismo gran grupo bajo la denominación común de juegos de guerra[14]. No obstante en esta programación se han decidido tratar por separado por dos motivos. En primer lugar, consideramos una razón técnica en cuanto a planificación. Dado que se prevé un cambio de tribu al final de la U.4, los "juegos de caza" y los "de guerra", estrechamente relacionados en cuanto a mecánica, se trabajarán en tribus diferentes, lo cual proporcionará riqueza y variedad a las investigaciones y contribuirá a la mejora general de los conocimientos sociales generados.

En segundo, la decisión atiende a un criterio de diferencia simbólica. Los que hemos llamado "juegos de caza" representan en su origen diversas confrontaciones entre presa y predador animales propias del contexto cultural particular de cada juego, mientras que los "de guerra" representan batallas entre ejércitos. Esta cuestión, no significativa a nivel técnico, más aún cuando los juegos abstractos se suelen recrear empleando fichas indistintas, cobra importancia bajo nuestro enfoque intercultural de la educación, en el que la contextualización de los contenidos objeto de estudio es relevante. Wells (2012) considera la dimensión abstracta de los juegos y afirma que los aspectos determinantes son la estructura del tablero y las reglas, aduciendo por ejemplo que el hecho de que el ajedrez en su origen representara una batalla entre dos ejércitos, ya no importa. Sin embargo, en el diseño de esta programación didáctica el aspecto simbólico de los juegos sí nos interesa. Se trata de complementar el juego abstracto como tal, que, despojado de todo ornamento, quedaría reducido únicamente a las reglas, con su contexto: su porqué, su cómo, su dónde y sus quiénes, operandos que desde la posición etnomatemática consideramos fundamentales. De acuerdo con su raíz simbólica, los "de caza" son juegos asimétricos en los que bandos en desigualdad numérica (presas son siempre más numerosas que predadores) tienen objetivos diferentes e incluso distintas reglas de movimiento

[14] Es el caso, por ejemplo, en las obras de Bell y Cornelius (1988), que diferencian juegos de guerra entre fuerzas iguales numéricamente y juegos de guerra entre fuerzas dispares, y el propio Bell (1979), que propone la taxonomía: de alquerque, tipo ajedrez, de damas, *tafl*, grupo del *latrunculorum* y de correr y pelear, todos ellos como subgrupos de los juegos de guerra. Provenzo y Provenzo (1990) hablan de juegos estratégicos de guerra y de otro tipo de juegos de batalla o de caza en el que las fuerzas contendientes son desiguales. Ballesteros (2005) separa entre juegos de alquerque y juegos de *tafl*, atendiendo a los mecanismos de captura, morfología de los tableros e igualdad o desigualdad numérica.

(habitualmente los predadores compensan su inferioridad numérica con mayor movilidad y capacidad de captura que no poseen las presas). Los juegos de este tipo son sorprendentemente versátiles, y sirven bien a los propósitos de esta programación, pues los alumnos tienen que aprender a jugar con las piezas de ambos bandos[15], aspecto que ofrece considerables posibilidades didácticas y variadas propuestas para la investigación. Sólo algunos de los llamados juegos "de guerra" tienen también esta característica de desigualdad numérica, en especial los juegos *tafl*.

Unidad 5.- Juegos de guerra

Sesión 18. Formación de nuevas tribus. Juegos de alquerque: alquerque y *peralikatuma*.
Sesión 19. Presentación de tribus. Juegos de alquerque: *fanorona* y *kolowis awithlaknannai*.
Sesión 20. Juegos *tafl*: *tablut* y *hnefatafl*.
Sesión 21. Juegos de damas: damas del perdedor y *halma*.
Sesión 22. Otros juegos de guerra: asalto y *puluc*.

Tanto los juegos de caza como los de guerra constituyen el "núcleo duro" del contenido estratégico abordado en el curso, por lo que será en la U.4 y la U.5 donde los estudiantes reforzarán más intensamente su pensamiento abstracto, inductivo, deductivo, analítico y creativo, así como el razonamiento arborescente.

Como ya se ha explicado, los juegos incluidos en la U.5 representan en su mayoría confrontaciones de índole militar. No resulta cómodo titular una unidad de la asignatura "Juegos de guerra", pero es de hecho lo más lógico dada la naturaleza de las reglas y la disposición inicial de las piezas en el tablero, y ese es el título habitual de capítulos y epígrafes que cubren esta clase de juegos en la literatura, como ya hemos apuntado. La familia es muy numerosa, pues prácticamente todas las culturas han desarrollado en algún momento juegos de mesa de guerra[16]. Parece intrínseco en el ser humano el deseo de confrontación y la resolución del conflicto mediante la guerra. En esta programación se ha seleccionado una pequeña muestra representativa de la variedad original de estos juegos. No habría sido coherente programar una asignatura de juegos de mesa matemático-estratégicos cercenando del *corpus* los juegos de guerra. Si bien nada está más lejos de nuestra intención que fomentar conceptualmente la guerra como parte del ideario de nuestro estudiantado, consideramos lícito "jugar a la guerra" sobre el tablero, por su valor educativo (sacrificio de la parte por el bien del todo, superación de uno mismo, resiliencia, autodisciplina, hoy gano yo y mañana ganas tú, intrascendencia del conflicto menor…) y porque constituye una vía de canalización para los sentimientos y pulsiones de agresividad y competitividad que habitualmente manifiestan los y las adolescentes. Además, enseñar que cuando se gana, se gana al otro jugador y no a la otra persona es educar para la paz.

[15] Al contrario de lo que ocurre por ejemplo, en el ajedrez, juego con igualdad numérica y simetría entre ambos bandos, que disponen de las mismas piezas: ocho peones, dos torres, dos caballos, dos alfiles, la dama y el rey, que se mueven de igual manera ya sean blancas o negras y persiguen idéntico objetivo.

[16] Los maoríes de Nueva Zelanda parecen ser la única excepción conocida. Pese a que su cultura es rica en juegos deportivos, la evidencia apunta a que el *mu torere*, un juego de posición de bloqueo (véase U.2), es el único juego de tablero ampliamente popular entre ellos de acuerdo con diferentes fuentes (Bell, 1979; Bell y Cornelius, 1988).

Los juegos de alquerque, los *tafl* y los de damas son subfamilias clásicas de los juegos de guerra. El *halma* es un juego de damas moderno inventado en la segunda mitad del s. XIX para dos, tres o cuatro personas, pariente de las damas chinas y las damas diagonales. El asalto es una variante de la zorra y los gansos (U.4), y el *puluc* es un curioso juego de guerra con componente de azar de origen mesoamericano.

Unidad 6.- Juegos mancala

Sesión 26. Formación de nuevas tribus. Juegos *mancala* II: *kalaha*.
Sesión 27. Presentación de tribus. Juegos *mancala* II: *wari*.

Los *mancala* son una extensa y proverbial familia originalmente egipcia a la que se atribuye más de 7.000 años de antigüedad (Provenzo y Provenzo, 1990). Las rutas comerciales diseminaron los *mancala* e hicieron que aparecieran variantes en toda África, en Arabia, Asia e incluso en el Caribe. Por alguna razón nunca arraigaron en Europa (Bell y Cornelius, 1988), con la única excepción relevante de la zona de los Balcanes y la antigua Yugoslavia por influencia otomana (Bikić y Vuković, 2010). Desgraciadamente muchos *mancala* están desapareciendo de sus lugares de origen, desplazados por juegos occidentales, considerados modernos y urbanos, frente al estigma de rurales y antiguos que tienen los *mancala* en algunas regiones.

La estructura y el funcionamiento de los juegos *mancala* es común a todos ellos: una serie de receptáculos que representan campos dispuestos en filas, la mitad de ellos asignados a cada jugador, contienen inicialmente una cantidad determinada de semillas. En cada turno los jugadores vacían uno de sus campos y siembran las semillas una a una en los campos adyacentes, tras lo cual se pueden recoger semillas en algunos casos, ganando la partida el jugador que consiga recolectar mayor cantidad de ellas. La diferencia entre unos *mancala* y otros consiste en los números iniciales de filas, de campos por fila, y de semillas por campo, y las restricciones en las reglas de sembrado y recolección. Hay juegos con dos, tres –los más raros– y cuatro filas, denominados respectivamente, *mancala* II, *mancala* III y *mancala* IV[17].

Townshend (citado en Claus, 1981) destaca ocho atributos en relación a los juegos *mancala*: astucia, atención, previsión, resiliencia, perseverancia, discreción, memoria y auto-control. Subyacentes a los juegos *mancala* se pueden encontrar diversas cuestiones matemáticas no triviales, que pasarán inadvertidas al alumnado al que se dirige este curso, como son la aritmética modular (Gering, s.f.) y el sistema de numeración en base 12, común en muchas zonas de África, aún hoy en día (Huylebrouck, 2006). Serán pues estimulantes retos aritméticos en relación con la agilidad de cálculo, la previsión y la estrategia. Los *mancala* llevan años siendo objeto de estudio en los ámbitos de la investigación matemática formal y la inteligencia artificial (entre otras fuentes, Erickson, 1996), si bien los resultados en cuanto a competencia de los autómatas desarrollados son altamente dependientes del juego en concreto y su complejidad.

[17] El *wari*, por ejemplo, originario de África occidental, se juega en un tablero de 2 filas y 6 campos por fila, con 48 semillas en total, mientras que el *bao*, popular en Kenya y Zanzíbar, se juega con un total de 64 semillas en tableros de 4 filas y 8 campos por fila. Existen también *mancalas* para juego solitario: el *ise-ozin-egbe* nigeriano, de dos filas, y el *tchuka ruma* de la India (U.X), con una sola fila. En Congo emplean semillas de ngola para jugar a sus *mancala*; en África occidental, semillas de mulacca; en Uganda, de omuyiki; en Ghana, de bonduc; en Sri Lanka, de olinda… En Asia Central, kazajos, uzbekos, tayikos, mongoles… juegan a sus *mancalas* utilizando excrementos de cabra y oveja.

Unidad 7.- Juegos modernos

Sesión 29. Othello.
Sesión 30. Abalone.
Sesión 31. Othello y Abalone.

En esta última unidad didáctica trataremos dos juegos abstractos modernos, que pueden considerarse propios de una aldea global, cuyos habitantes no los emplean para predecir el devenir, ni para representar elementos culturales característicos, ni recrear parte de su historia, sino única y exclusivamente como mero divertimento. No derivan de ninguna tradición oral ni escrita, si bien se inspiran en juegos del mundo conocidos. No obstante, ello no quiere decir que esta unidad sea una concesión al *tout va bien* y abandone los objetivos que marcan la programación de principio a fin; al contrario. Los juegos elegidos, pese a ser modernos y comerciales, tienen profundas raíces de análisis (etno)matemático, lo que hace que resulten muy interesantes de cara a generar investigaciones por parte de nuestros alumnos. La altísima variabilidad en cuanto al estado de la partida de un turno a otro y el carácter marcadamente geométrico-espacial son sus características principales. Ambos tableros son perfectamente simétricos, cuadrado el del Othello y hexagonal regular el del Abalone, constituyendo unas estrictas "condiciones de contorno" impuestas sobre los problemas tratados en estos dos juegos.

Simposios

Sesión 10. Simposio sobre las U.1 y 2 y primer solitario. Al término, disolución de tribus.
Sesión 17. Simposio sobre las U.3 y 4 y segundo solitario. Al término, disolución de tribus.
Sesión 25. Simposio sobre la U.5 y tercer solitario. Al término, disolución de tribus.
Sesión 33. Simposio sobre las U.6 y 7 y cuarto solitario. Al término, disolución de tribus.

Se han programado sesiones de simposio destinadas a discusión-investigación en tribu, en las que el alumnado dispondrá de tiempo "libre" no interrumpido por explicaciones del docente para complementar el tiempo dedicado en las sesiones tipo de investigación previas. Es importante que además de comentar las impresiones preliminares que puedan haber adquirido los estudiantes mientras aprendían los juegos, se les dé oportunidad de intercambiar opiniones, seguir experimentando con ellos, y al fin, alcanzar acuerdos; en definitiva, se trata de espacios de diálogo para que el alumnado, debatiendo de igual a igual, convierta la información adquirida en conocimiento, realizando así el objetivo de sus investigaciones grupales (tribales) y concretando los productos que formarán parte del Portfolio de tribu. Al final de cada simposio, las tribus que han venido trabajando juntas en las sesiones precedentes serán disueltas, para formar nuevas tribus al inicio de la siguiente sesión, que inaugurará unidad didáctica. Las investigaciones que hayan quedado a medias tras las sesiones de simposio deberán ser completadas por las tribus correspondientes fuera del horario de clase.

Sesiones de taller

Sesión 14. Taller de construcción de juegos de las U.2 y U.3 y los dos primeros solitarios.
Sesión 24. Taller de construcción de juegos de las U.4 y U.5 y el tercer solitario.
Sesión 32. Taller de construcción de juegos de las U.6 y U.7 y el cuarto solitario.

Hemos reservado tres sesiones destinadas a taller a lo largo del curso, para que alumnos y alumnas puedan construir con los materiales disponibles en el centro y/o los que traigan de casa, su propia copia de los juegos de estrategia, azar o solitarios tratados en la asignatura, lo cual constituye uno de los objetivos del curso. La temporalización de estas tres sesiones es intencional: se ubican antes de las vacaciones, en semanas en que es difícil mantener la concentración de la clase con sesiones al uso, dando la oportunidad de crear juegos que poder disfrutar y con los que ahondar en las investigaciones durante las vacaciones (siempre habrá, esperamos, alumnado interesado en profundizar por su cuenta; debemos atender esa diversidad y reforzar positivamente el interés y la automotivación). En el caso de la segunda y tercera sesiones de taller, se han intercalado simposios entre ellas y las vacaciones o el final de curso por dos razones: en primer lugar, para optimizar el aprovechamiento de las sesiones de taller, en las que es conveniente que los estudiantes trabajen con la referencia de una tribu, y en segundo, para dar tiempo a los grupos a avanzar sus investigaciones de cara a las sesiones de simposio.

En cada una de las sesiones de taller se fomentará la construcción de juegos estudiados en las unidades didácticas inmediatamente precedentes, si bien se dará libertad para que los alumnos y las alumnas trabajen también en juegos vistos anteriormente si así lo deciden.

Coloquios

Al final de curso se han programado tres sesiones (34ª, 35ª y 36ª) reservadas a coloquio en las que, disueltas las últimas tribus, toda la clase pasará a formar parte de una única gran tribu de iguales. Agruparlas en las tres últimas semanas del curso da cierta flexibilidad en cuanto a necesidades de acortar o alargar el contenido desarrollado en sesiones anteriores.

En estas sesiones se dará espacio de expresión al alumnado para que: comente algunos resultados de sus investigaciones; plantee posibles dudas no resueltas; aporte ideas, comentarios, o soluciones a los compañeros y compañeras que lo demanden; explique variantes de algún juego que hayan desarrollado; justifique qué juegos han resultado más interesantes y cuáles menos; valore la experiencia del taller de construcción de juegos; exponga su percepción acerca del contenido matemático de la asignatura manifestando si ha tenido sensación de “estar haciendo matemáticas” a lo largo del curso y si cree que ha aprendido; valore la asignatura en general… La tarea del docente en estas sesiones será moderar el debate interfiriendo lo menos posible con la expresión del alumnado. Abrirá temas e invitará a la participación, escuchará a la clase, tomará nota de las diversas cuestiones de interés planteadas y responderá las interpelaciones directas que recibiera. El objetivo de estas sesiones es múltiple:

- Formación de vínculos gran tribu-clase. Hasta el momento el alumnado habrá venido trabajando en pequeños grupos-tribu con los que podemos esperar que haya establecido relaciones emocionales y académicas, y disfrutado de una amplia oportunidad de relación. Sin embargo, la situación derivada de la pertenencia a una nueva gran tribu formada por la totalidad de la clase puede contribuir a reforzar la cohesión del grupo y ofrecer nuevas oportunidades de cara al futuro.
- Rotura de la espiral del silencio. A lo largo del curso los estudiantes habrán podido dialogar *en petit comité* sin moderación del profesor. No obstante, son contadas las ocasiones en que el alumnado de secundaria goza de la posibilidad de dirigirse al grupo-clase; por ello, en estas sesiones se ofrece dicha opción, al tiempo que se invita al estudiantado más silencioso a participar en el diálogo, tratando de fomentar en su seno una actitud más activa.

- Evaluación de la asignatura. Los comentarios orales libres de la clase permitirán al docente detectar puntos fuertes y débiles tanto de la programación didáctica en general, como de aspectos concretos de la metodología empleada y del contenido desarrollado. Unidas a la evaluación por observación pautada desarrollada a lo largo del curso, las opiniones finales del alumnado constituyen una información de gran valor de cara a reorientar y mejorar la docencia y la propuesta de asignatura.

3.7. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Asumimos que el alumnado matriculado en la asignatura de T.M.I. la habrá elegido de entre la oferta optativa para 4º de ESO porque le haya resultado atractiva por sus contenidos. Fundamentada sobre una perspectiva etnomatemática de la educación matemática, constituye, *per se*, una propuesta curricular de atención a la diversidad desde la raíz. En ella, alumnos y alumnas descubrirán una serie de características culturales propias conservadas por diversos grupos humanos, en concreto, algunas formas de hacer matemáticas en torno al juego. Sin duda entre la clase habrá estudiantes de culturas herederas de las que crearon los juegos tratados, lo cual reforzará su identidad como aprendices de matemáticas y como personas incluidas en su grupo social y académico y en el centro educativo. Tal como expresa Oliveras (2006:120): “En nuestros países la falta de valoración científica de las culturas de los países de los inmigrantes es la más refinada fuente de estereotipos y prejuicios, que conducen a los modos modernísimos de racismo y xenofobia. Contra esto, el reconocimiento de sus etnomatemáticas puede ser una ayuda valiosa, en general, y especialmente para el profesor de aulas multiculturales.”

El alumnado aprenderá a relacionarse entre *iguales distintos* (pero no diferentes), como tendrán que hacerlo con cualquier persona en la vida adulta; el M.A.C. en tribus utilizado requiere la asunción del principio de interdependencia positiva, así como respetar y valorar la presencia, la aportación y la identidad de todos los compañeros y compañeras.

En cuanto al aprovechamiento académico, nos situamos en el punto opuesto al principio *one-size-fits-all*: la asignatura admite, vía el sistema de evaluación propuesto y la amplia variedad de juegos puestos a disposición de la clase, el desarrollo de investigaciones voluntarias adicionales a los estudiantes que deseen hacerlas. Pese a que el docente animará a que la mayor parte del trabajo adicional se acometa en el seno de la tribu para que todos sus miembros se beneficien del proceso, puede suceder que algún/a estudiante prefiera trabajar en solitario puntualmente. Por otra parte, creemos que el método de las tribus de trabajo dará respuesta a la plena inclusión de todo el alumnado, ayudando en sus dificultades a quienes las tengan por cualquier razón. En todo caso la misión del docente es supervisar los procesos de aprendizaje y guiar la clase de la mejor manera posible, por lo que si algún alumno o alumna queda descolgado, se tomarán las decisiones oportunas para resolver la situación. En cuanto a la cuestión documental, todos los materiales y recursos didácticos textuales, así como escalas y rúbricas de evaluación, estarán disponibles tanto en castellano como en valenciano.

La asesoría del Departamento de Orientación del centro dará respuesta a las necesidades, dudas, cuestiones o requerimientos que pudieran surgir en relación con las necesidades específicas que tuvieran los alumnos y alumnas de la clase.

3.8. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

La asignatura sólo requiere por parte del alumnado de material para escribir, a fin de poder tomar notas sobre las investigaciones que van desarrollando con sus tribus. Se recomendará el uso de unidades de memoria USB para compartir datos en formato digital.

3.8.1. Fichas explicativas de juegos

En cada unidad didáctica el docente pondrá a disposición de las tribus un set de fichas explicativas de los juegos tratados. Dichas fichas incluirán estrictamente una representación abstracta de los componentes necesarios para cada juego, las reglas y condiciones de victoria. Sugerimos papel laminado para mayor durabilidad y bajo coste. En el Anexo VII incluimos las reglas de los juegos y algunos apuntes de interés para la elaboración de estas fichas.

3.8.2. Materiales para las sesiones de investigación y de taller

En las sesiones de investigación y simposios el docente se encargará de proporcionar los tableros, fichas o piezas y otros componentes para que toda la clase pueda disponer de lo necesario para trabajar los juegos correspondientes. Para las sesiones de taller, alumnos y alumnas podrán traer su propio material constructivo de casa, si bien se pondrán a su disposición materiales básicos, para minimizar el impacto económico sobre el centro, que podrán ser utilizados libremente, siempre atendiendo a los principios de reducción, reparto justo y uso responsable y ecológico.

Para los tableros, sugerimos construcciones a doble cara, con un juego en el anverso y otro en el reverso. Se pueden emplear impresiones en papel laminado para mayor durabilidad y bajo coste, o materiales tipo cartón ondulado, cartulinas, goma EVA, tablas de madera para marquetería, pasta para modelar de secado al aire, fieltro para manualidades, loneta, retales, ceras, rotuladores, *gomets*, etc. Recomendamos también hueveras de cartón (*mancalas* instantáneos), alfombrillas de ratón y mantelillos individuales en desuso. Se evitará el uso de colas, pinturas, sierras, pirograbadores, etc., en clase, por los problemas que se podrían derivan, invitando a alumnos y alumnas a perfeccionar sus productos en casa.

Para las fichas, optando por la solución de más bajo coste y admitiendo un carácter totalmente abstracto para todos los juegos, sugerimos emplear cuentas de vidrio de distintos colores de las usadas habitualmente para decoración. En la mayoría de los juegos bastará con un puñado de sendos colores. También se pueden utilizar fichas planas, tapones, chapas, etc. Para los juegos *mancala* la mejor opción es utilizar legumbres secas que resulten cómodas para las manos de los y las estudiantes en el proceso de recoger y sembrar: garbanzos, alubias…

Como elementos de azar (utilizados en la U.1 y la U.3 principalmente), necesitaremos monedas, tablillas para el *senet* (se pueden fabricar fácilmente con pinzas, varitas de madera o palitos de helado), cauris para el *pachisi*, granos de maíz gigante secos tostados por una cara para el *puluc* (U.5), *u-lu* para el *lu-lu* (se pueden fabricar con fichas de damas o discos pequeños de cualquier material), tabas, dados hexaedros y dados de rol (D4, D8, D10, D12, D20). Recomendamos también disponer de dados cargados y con caras repetidas, con fines pedagógicos únicamente: la alteración de los resultados en relación a lo esperado de un dado ordinario, ejemplo clásico de instrumento de Laplace, conduce a interesantes debates, tras los cuales, el/la profesor/a debe disuadir firmemente a los estudiantes de utilizar este tipo de dados en cualquier contexto lúdico, como es evidente.

3.8.3. Plantillas para Actas de tribu y Fichas de investigación

En el Anexo III se recogen las plantillas para las Actas de Fundación y Disolución de las tribus, que formarán parte de los Portfolios de tribu. Estos documentos tienen como propósito representar y registrar los compromisos adquiridos por los estudiantes para con sus tribus y sus compañeros y compañeras. Algunos autores han escrito sobre los beneficios que este tipo de "contratos" escolares firmados pueden suponer para diferentes fines: control actitudinal o de comportamiento, compromisos de esfuerzo y/o rendimiento, etc. (Vaello, 2011), tanto a nivel alumno-profesor como a nivel alumno-clase.

En el mismo anexo incluimos una plantilla de ficha de investigación que el docente ofrecerá tanto en formato digital como en papel. Los estudiantes serán libres de usar esta plantilla u otra creada por ellos mismos que reúna información equivalente, a fin de plasmar los resultados de sus investigaciones y almacenarlos en portfolios, ya sean físicos o digitales.

3.9. Evaluación del alumnado

El método de evaluación tradicional en matemáticas en niveles de educación secundaria emplea eminentemente reactivos para establecer el grado de adquisición de los contenidos conceptuales desarrollados, generalmente exámenes escritos con ejercicios y cálculos o diversas situaciones de aplicación. Los contenidos procedimentales se vienen evaluando en parte por observación, en parte asimilados a las respuestas del alumnado a dichas pruebas reactivas, a cuyas calificaciones muchos/as docentes incorporan una evaluación actitudinal.

De acuerdo con Nieto (2005), entre los instrumentos reactivos clásicos encontramos las llamadas pruebas objetivas (que obligan a la elección de una respuesta de entre las sugeridas, consideradas "justas" en cuanto a la objetividad de la calificación y representativas de la materia si incluyen muchas preguntas, pero evalúan niveles cognitivos bajos y no pueden discriminar procedimientos ni elaboración), las pruebas semiestructuradas (que permiten respuestas cortas ligeramente elaboradas, se consideran poco representativas y apenas permiten evaluar procedimientos) y las pruebas tipo ensayo (que obligan al ordenamiento lógico y relacional del conocimiento y la elaboración de respuestas coherentes, comprensivas y argumentadas, permitiendo "evaluar niveles profundos del conocimiento adquirido" (Nieto, 2005:22), si bien necesitan el uso de rúbricas o instrumentos similares a fin de lograr calificaciones objetivas).

Herman, Aschbacher y Winters (1992) recomiendan el uso de alternativas a los sistemas tradicionales de evaluación por reactivos bajo la visión común de pedir a los estudiantes que creen, produzcan o hagan algo; aprovechar el razonamiento de nivel superior y las habilidades de resolución de problemas; emplear tareas que impliquen actividades instruccionales significativas; mostrar aplicaciones del mundo real; implicar a los profesores en nuevos roles en cuanto a instrucción y evaluación; y que sean personas, y no máquinas, las responsables de las calificaciones, empleando el juicio humano. Asimismo presentan unas reflexiones sobre "tendencias recientes en la evaluación" (Herman et al., 1992:13), que inciden en el paso de la atención única en los productos o resultados del aprendizaje individual a la consideración del proceso de aprendizaje en sí y la evaluación en grupo, así como el tránsito entre la evaluación puntual con pruebas de papel y lápiz a una evaluación significativa de muestras a lo largo del tiempo, con énfasis en habilidades complejas e interdisciplinares, que atienda a la metacognición y las habilidades socioemocionales.

Algunas de estas consideraciones son comunes a la perspectiva del trabajo en grupos cooperativos, por lo que la combinación estructura cooperativa + evaluación por observación, raramente implementada en asignaturas del área de matemáticas, puede responder mejor a este espíritu de innovación. Para fomentar la utilización de procesos de pensamiento superiores y raciocinio, frente a un enfoque exclusivamente memorístico, quizás nuestros sistemas de evaluación deberían enfocarse a favorecer precisamente que el alumnado pueda mostrar habilidades cognitivas altas, procesos complejos, capacidad de pensar, en especial en las asignaturas del área de matemáticas, en lugar de mostrar un determinado rendimiento en la mecanización de tareas preconocidas, repetitivas y poco significativas. En este sentido, Nieto plantea:

> ¿Son las pruebas objetivas y las de preguntas de respuesta corta los únicos instrumentos para la evaluación de alumnos? Sin duda, no. ¿Ha llegado la hora de desterrar las pruebas y los exámenes? No, en ningún caso, pues cumplen su misión con limitaciones, pero aportan datos válidos si no se les confiere carácter de absolutos y definitivos. ¿Sería suficiente con destronar las pruebas y exámenes, permitiendo que compartan su misión con otros sistemas y tipos de instrumentos de evaluación? Sin duda, sí. (Nieto, 2005:12)

Vale la pena reflexionar sobre cómo queremos invertir el limitado tiempo, y por ello precioso, que comparten profesores/as y alumnos/as. Resulta dramática la excesiva dedicación a evaluación que se da en algunos contextos educativos, habitualmente por imposiciones externas con el consiguiente sentimiento de frustración y falta de aprovechamiento por parte tanto del alumnado como del personal docente[18]. Sería deseable que el proceso de evaluación supusiera la mínima interrupción posible para los procesos de enseñanza y aprendizaje. El enfoque clásico de la educación universitaria para resolver esta tarea de optimización es evaluar de manera final, puntual y única, pero un enfoque opuesto es el de la evaluación continua por observación, en cuyo fundamento se halla la idea de que el proceso pueda ser "transparente" para el alumnado y pasar inadvertido. Esta opción evita nervios y estrés –homólogo educativo del síndrome de la bata blanca–, naturaliza los procesos de evaluación, y al situar a la clase bajo una premisa de evaluación continua "invisible", no explicitada puntualmente pero públicamente acordada a priori, podría servir para aumentar sus niveles medios de atención, motivación y rendimiento.

[18] Especialmente significativo es el caso estadounidense con los sistemas de evaluación estandarizada, tanto en las etapas primaria como secundaria. Existen abundantes referencias al respecto; destacamos un artículo reciente: Strauss, 2013.

3.9.1. Criterios de evaluación

En esta programación proponemos emplear exclusivamente la evaluación por observación. Pensamos que:

- resulta más coherente con los objetivos planteados para la asignatura y los contenidos que en ella se desarrollan;
- permitirá recoger los datos suficientes y necesarios de cara a una evaluación integral de cada estudiante;
- en ningún momento supone una concesión en cuanto a niveles exigidos para aprobar u obtener tal o cual calificación, antes al contrario;
- permite evitar la "ruptura artificial de los procesos de enseñanza y de aprendizaje" (Nieto, 2005:28) que suponen los exámenes, ya sean orales o escritos.

La evaluación será continua (véase el cronograma presentado en la pág. 23), y tendrá a la vez carácter formativo, en el sentido de que sus resultados serán utilizados como retroinformación para reordenar y reorientar los procesos de enseñanza, y sumativo, en el sentido de que estimará el grado de aprendizaje conseguido por alumnos y alumnas a partir de los productos finales elaborados como fruto de la realización de tareas.

A lo largo de la asignatura emplearemos dos tipos de portfolios: los Portfolios de tribu, en los que cada grupo cooperativo dejará constancia de los resultados de sus investigaciones en forma de fichas de investigación, una por juego, e incluirán las actas de fundación y disolución, y los Portfolios personales, en los que cada estudiante guardará una colección con todo lo relativo a su experiencia personal, investigaciones desarrolladas y material elaborado.

La calificación final de un estudiante en cada evaluación vendrá dada por la valoración de los aspectos señalados en la Figura 4 y ponderada por los porcentajes sobre 10 indicados. En la Tabla 6 se resumen los conceptos a evaluar que detallamos a continuación. La máxima calificación que puede obtener un estudiante en cualquier evaluación es de 10 puntos.

Portfolios de tribu

Cada tribu trabajará unida durante una serie de sesiones en las que investigará varios juegos, almacenando los resultados de dicha actividad en su Portfolio de tribu. Dicho portfolio será evaluado por el docente con carácter formativo aproximadamente en la mitad del trabajo de la tribu, y con carácter sumativo una vez disuelta la misma tras el siguiente simposio. En ese momento, cada integrante recibirá una calificación uniforme a partir de los productos elaborados en grupo, así como una copia de los mismos que pasará a formar parte de su Portfolio personal. Esta calificación, sobre 4 puntos, comprenderá las investigaciones realizadas con la primera tribu en la primera evaluación, con la segunda y tercera tribus en la segunda evaluación (obteniéndose la calificación como media aritmética de las obtenidas con cada una de las dos tribus), y con la cuarta tribu en la tercera evaluación. Las tribus que realicen voluntariamente investigaciones adicionales, además de las mínimas obligatorias, podrán obtener hasta 1.5 puntos extra por este concepto en cada evaluación, a sumar a la calificación obtenida, hasta un máximo de 4 puntos.

Funcionamiento de las tribus

El funcionamiento de las tribus como equipos de aprendizaje cooperativo será revisado por el docente continuamente con carácter formativo, y evaluado de manera sumativa a la disolución de las tribus, sobre 0.7 puntos. Los miembros de las tribus también evaluarán su propio trabajo cooperativo en consenso, a modo de control de su efectividad, otorgándose hasta un máximo de 0.8 puntos. Todos los miembros de una tribu recibirán la misma calificación en este concepto. En la segunda evaluación se calculará como la media de las calificaciones obtenidas en la segunda y tercera tribus.

Portfolios personales

Cada estudiante irá acumulando los resultados de las investigaciones realizadas con cada una de sus tribus en su Portfolio personal, que también recogerá las construcciones de materiales de tipo tableros, fichas, dados, etc., elaboradas en las sesiones de taller (2ª y 3ª evaluación) o en casa, y las fichas de investigación derivadas del trabajo sobre los juegos solitarios (U.X), pese a que éste se lleve a cabo en sesiones tipo de investigación en el seno de las tribus. Este portfolio será evaluado por el docente con carácter sumativo al término de cada evaluación, de manera que el alumnado tenga tiempo de aportar a los mismos cuanto consideren oportuno. El aspecto de construcciones de juegos se calificará sobre 2 puntos, y la investigación de solitarios, sobre 1 punto. Los 2 puntos asignados a la evaluación de construcciones en la primera evaluación se repartirán de la siguiente manera: 1, para construcciones realizadas en casa, y 1, cuya distribución se negociará en las primeras sesiones de forma que la clase decidirá vinculantemente a cuáles de los otros conceptos se atribuye la calificación, dividiendo la puntuación libremente, sin poder asignar más de 0.5 puntos a ningún concepto. Quienes voluntaria e individualmente emprendan investigaciones adicionales sobre cualquier juego, o ampliaciones y profundizaciones sobre los resultados de las investigaciones realizadas en sus tribus podrán obtener hasta 1 punto extra por este concepto en cada evaluación a sumar a la calificación obtenida, hasta un máximo de 3 puntos. Si algún estudiante lo solicita, su Portfolio personal podrá ser evaluado también, con carácter formativo, durante el transcurso del trimestre.

Evaluación individual actitudinal y socioemocional

Por último, la actuación actitudinal de cada estudiante, las habilidades socioemocionales demostradas, los esfuerzos realizados, las responsabilidades asumidas, sus aportaciones al trabajo en tribu, etc., serán evaluadas mediante tres vías: autoevaluación, sobre 0.2 puntos, homoevaluación, sobre 0.6 (en la segunda evaluación se calculará como la media de las calificaciones recibidas de la segunda y tercera tribus), y heteroevaluación, sobre 0.7 puntos.

La Tabla 7 recoge los productos mínimos que debe reunir cada portfolio –las fichas de investigación de juegos, y las construcciones de tableros, piezas y otros elementos– en cada evaluación. Los estudiantes deben cumplir con el contenido mínimo de la manera que se indica. Para las construcciones quedan excluidos los juegos de dedos y cara o cruz. La tarea se trata, en definitiva, de un mínimo de diez investigaciones, siete presentadas como parte de los distintos Portfolios de tribu, y tres (solitarios) como parte del Portfolio personal, y diez construcciones de juegos, como parte también del Portfolio personal. Cualesquiera productos incluidos en los portfolios, ya sean de tribu o personales, por encima de estos mínimos, computarán como adicionales de cara a la obtención de calificación extra reseñada anteriormente.

Concepto a evaluar	*Puntuación máxima*
Portfolios de tribu: sobre 4	
Investigaciones juegos: productos cooperativos de las investigaciones realizadas en tribu.	4
Investigaciones adicionales a las mínimas requeridas, realizadas en tribu.	(+ 1.5)
Portfolios personales: sobre 3	
Construcciones: productos individuales de las sesiones de taller y otros tableros construidos fuera de clase.	2
Investigación solitarios: productos individuales de las investigaciones realizadas sobre solitarios.	1
Investigaciones adicionales realizadas individual y voluntariamente.	(+ 1)
Evaluación tribal, funcionamiento de grupos: sobre 1.5	
Heteroevaluación: control del funcionamiento de las tribus (habilidades de trabajo en equipo y socioemocionales, actitud, esfuerzos, compromiso) a cargo del profesor.	0.7
Autoevaluación: control del funcionamiento de las tribus a cargo de las propias tribus.	0.8
Evaluación individual actitudinal, SE: sobre 1.5	
Heteroevaluación: aspectos socioemocionales, actitudinales, de esfuerzos realizados, compromisos adquiridos y mantenidos, responsabilidad asumida, contribución aportada a las tribus, dedicación en el trabajo cooperativo, etc., a cargo del profesor.	0.7
Homoevaluación: aspectos actitudinales, socioemocionales y de habilidades de trabajo en equipo; evaluación como miembro de tribu a cargo de los compañeros.	0.6
Autoevaluación por el propio alumno o alumna, valorando su actitud personal, esfuerzo, contribución al trabajo cooperativo, etc.	0.2

Tabla 6.- Calificación obtenida por un alumno: conceptos evaluables y puntuación máxima por concepto.

3.9.2. Instrumentos de evaluación

Las rúbricas, comúnmente utilizadas como instrumento de evaluación objetivador, permiten analizar, evaluar y calificar las actuaciones de los y las estudiantes y los productos resultantes de la realización de tareas, por lo que constituyen herramientas básicas para la evaluación por observación. De acuerdo con Nieto (2005), clarifican las expectativas del profesorado y enseñan a responder a dichas expectativas, ayudan a definir la calidad de los productos o las actuaciones dando a los estudiantes criterios para autoevaluarse y monitorizar su propio aprendizaje, al tiempo que les proporcionan retroinformación sobre sus habilidades y necesidades de mejora concretas. De esta manera “el alumno se habitúa a reflexionar sobre lo realizado […] Esta reflexión le compromete, le implica, le motiva… y facilita la comunicación y la confianza respecto del profesor. Crecen sus habilidades metacognitivas” (Nieto, 2005:60).

En el Anexo V se presentan sendas rúbricas diseñadas *ad hoc* para la evaluación de: los productos a incluir en los Portfolios, fichas de investigación (Tabla 12) y construcciones de juegos (Tabla 13)[19]; el funcionamiento de las tribus (Tabla 14); así como las actuaciones y habilidades socioemocionales de los escolares a nivel individual (Tabla 15); cubriendo el aspecto heteroevaluativo de los cuatro conceptos a evaluar reseñados en el apartado anterior. En ellas aparece una serie de criterios evaluables ordenados en filas, junto a sendos pesos sobre 10. Ordenadas en columnas se muestran las descripciones correspondientes a los niveles de calidad de cada criterio. El docente evaluará cada criterio asignando un nivel de calidad y una calificación sobre 10 de acuerdo con lo que más se ajuste a la realidad. Estas calificaciones, multiplicadas por el peso indicado para cada criterio, se sumarán para dar una calificación sobre 100, que a su vez se dividirá entre 10 para obtener una nota final sobre 10.

$$Nota = \frac{\sum p_i \cdot nota_i}{10}$$

donde $Nota$ es la nota final sobre 10 que recibe la evaluación del producto o actuación en cuestión, p_i representa el peso asignado al critero i-ésimo, y $nota_i$ es la calificación sobre 10 otorgada en el criterio i-ésimo. El Anexo V recoge dos ejemplos de uso de estas rúbricas.

Por otro lado, el control interno de la efectividad de las tribus que realizarán sus propios integrantes se llevará a cabo empleando la escala de calificación mostrada en la Tabla 9 (formativamente a mitad del proceso de trabajo en grupo, y sumativamente tras su disolución), que las tribus rellenarán en consenso. Para la homoevaluación sumativa que cada alumno y alumna hará de sus compañeros y compañeras de tribu se utilizará la escala de calificación mostrada en la Tabla 10. Por último, para la autoevaluación que cada estudiante debe hacer de sí mismo/a al final del trabajo con cada tribu, se empleará la rejilla de diferencial semántico mostrada en la Tabla 11. Estas dos últimas se cumplimentarán fuera de clase y se entregarán al/la profesor/a de manera privada, a fin de conservar la intimidad de las opiniones.

3.10. EVALUACIÓN DEL DOCENTE Y LA PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

La observación atenta de las conversaciones que se den en el seno de las tribus puede servir al docente para valorar el grado de avance de las investigaciones, así como si los alumnos y alumnas necesitan algún tipo de apoyo por su parte o por el contrario las tareas les resultan sencillas en exceso. La revisión de los Portfolios de tribu a medida que los grupos de aprendizaje cooperativo vayan desarrollando las investigaciones servirá asimismo para reorientar el ritmo de las clases, los contenidos del curso y otros aspectos técnicos de la programación. Mediante este método de evaluación continua el profesor puede diagnosticar posibles problemas en la programación y tomar las decisiones oportunas para subsanarlos. La

[19] La rúbrica presentada en la Tabla 13 se aplicará tanto a construcciones realizadas en las sesiones de taller, como fuera de clase. En caso de evaluar construcciones realizadas fuera de clase, se deberá estimar el grado de cumplimiento de los criterios que no se puedan aplicar mediante inspección visual directa, o bien redistribuir parcialmente el peso de la calificación prevista para dichos criterios.

rúbrica que se presenta en la Tabla 16 (Anexo V) servirá para efectuar el seguimiento, debiendo el docente cumplimentar reflexivamente una copia durante el desarrollo de cada unidad didáctica. Además de esta evaluación de diagnosis realizada en paralelo al desarrollo de las unidades didácticas, los campos de comentarios introducidos en las cuartillas destinadas a homoevaluación y autoevaluación (Tabla 10 y Tabla 11, Anexo V) proporcionarán información a posteriori del funcionamiento de las tribus o grupos de trabajo y de qué podría mejorarse en cuanto a contenidos, métodos, etc., respectivamente.

Por último, a final de curso, el docente pedirá a las y los estudiantes que, si lo desean, redacten un breve escrito en el que comenten sus impresiones con respecto a la asignatura y el papel del/la profesor/a, indicando qué les ha resultado interesante y qué no, qué les ha gustado más y qué menos, si el método de trabajo en tribus les ha parecido provechoso, si el sistema de portfolios les ha supuesto mucho trabajo y/o les ha permitido adquirir un conocimiento sólido, si creen que han realizado aprendizajes significativos que han aumentado sus competencias matemáticas y sus habilidades socioemocionales así como sus competencias para el trabajo en equipo…, además de todo aquello que quieran hacer saber al profesor o profesora. Este escrito voluntario complementará lo expresado oralmente en las sesiones de coloquio.

Este método de evaluación multimodal permitirá recoger suficiente información para mejorar la programación didáctica, haciendo una asignatura más fructífera e interesante para el alumnado y su aprendizaje.

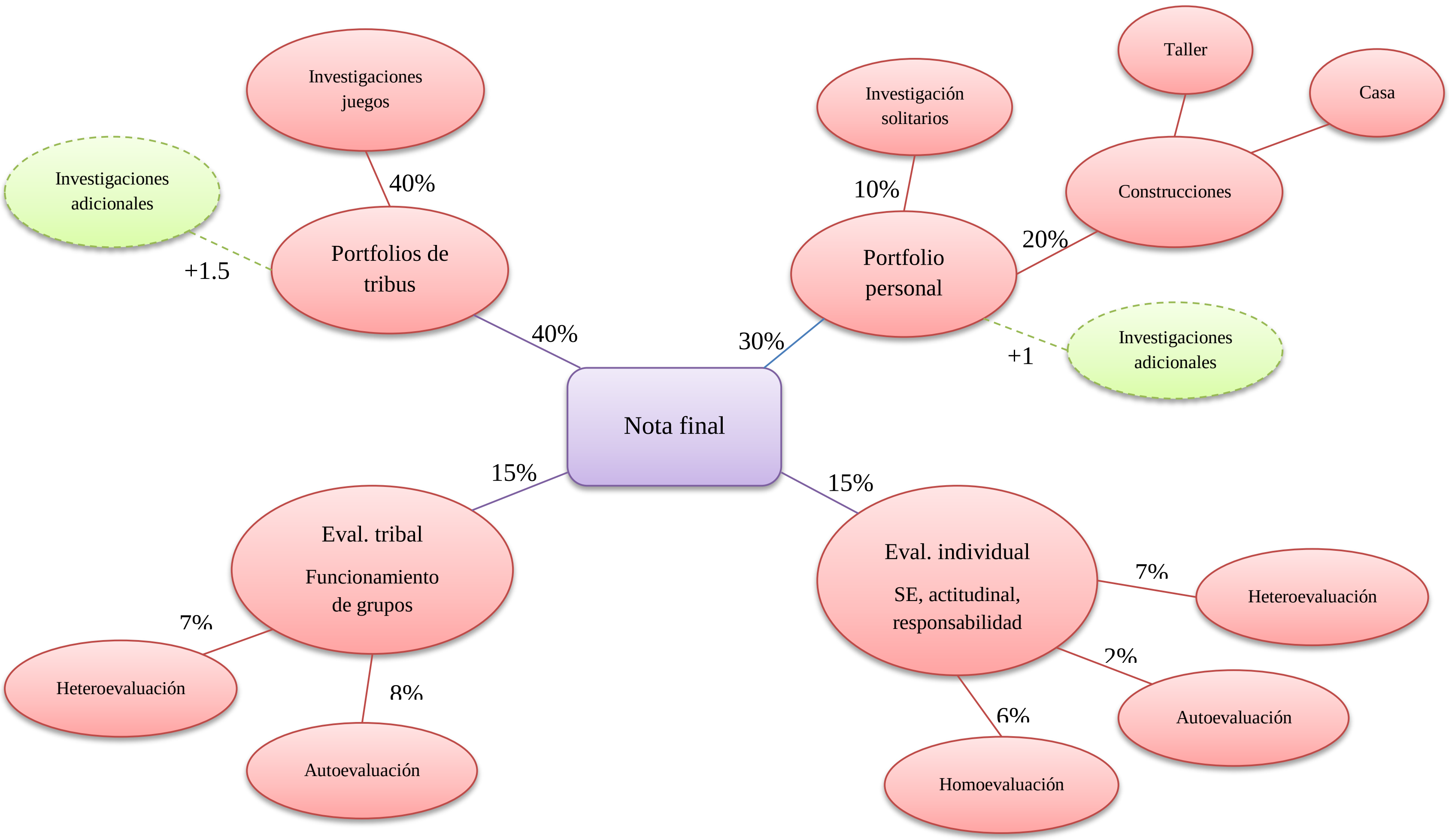


Figura 4.- Composición de la calificación final de un estudiante en cada evaluación.

<table>
<tr><th colspan="3">*1ª evaluación*</th><th colspan="3">*2ª evaluación*</th><th colspan="3">*3ª evaluación*</th></tr>
<tr><th>Portfolio</th><th colspan="2">Contenidos mínimos</th><th>Portfolio</th><th colspan="2">Contenidos mínimos</th><th>Portfolio</th><th colspan="2">Contenidos mínimos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Portfolio de tribu 1</td><td rowspan="2">U.1
(mín. 1)</td><td rowspan="2">*Lu-lu* y *ave victrix*
Piedra-papel-tijera y PPTLS[20]
Cara o cruz y los chinos y pares o nones</td><td rowspan="2">Portfolio de tribu 2</td><td>U.3
(mín. 1)</td><td>Juego real de Ur
Senet
Nyout
Pachisi</td><td rowspan="3">Portfolio de tribu 4</td><td rowspan="2">U.6
(mín. 1)</td><td rowspan="2">*Wari*
Kalaha</td></tr>
<tr><td>U.4
(mín. 1)</td><td>*Bagh chal*
La zorra y los gansos
Vacas y leopardos
Corderos y tigres</td></tr>
<tr><td>U.2
(mín. 1)</td><td>Danza de los 9 hombres
Pong hau k'i
Seega moderno
Mu torere
Sz'kwa</td><td>Portfolio de tribu 3</td><td>U.5
(mín. 2)</td><td>*Tablut*
Hnefatafl
Alquerque o *peralikatuma*
Fanorona o *kolowis awithlaknannai*
Asalto
Puluc</td><td>U.7</td><td>Othello
Abalone</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Portfolio personal</td><td>U.X
(mín. 1)</td><td>*Tangram*</td><td rowspan="2">Portfolio personal</td><td>U.X
(mín. 1)</td><td>Torres de Hanói
Solitario de la Bastilla</td><td rowspan="2">Portfolio personal</td><td>U.X
(mín. 1)</td><td>*Tchuka ruma*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construcciones (mín. 3)</td><td colspan="2">Construcciones (mín. 5)</td><td colspan="2">Construcciones (mín. 2)</td></tr>
</table>

Tabla 7.- Materiales mínimos a aportar como contenido de los portfolios en cada evaluación.

[20] Piedra-papel-tijera-lagarto-spock.

4. CONCLUSIONES

Hemos presentado una propuesta en el ámbito de la educación etnomatemática, que es novedosa por la perspectiva pedagógica adoptada así como por la combinación metodológica en cuanto a estructura de las relaciones sociales en el aula y sistema de evaluación, con la que tratamos de sentar unas bases que permitieran abordar la problemática señalada al inicio.

Se ha previsto que su puesta en práctica contribuya al desarrollo de las ocho competencias básicas contempladas para la etapa de educación secundaria, con especial énfasis en la competencia matemática, la competencia para aprender a aprender y la competencia social y ciudadana.

Los objetivos planteados reúnen, por un lado, los prescriptivos por la normativa legal vigente en relación con la asignatura Trabajo Monográfico de Investigación de 4º de ESO, y por otro, los específicos a nuestra propuesta, *Juegos de mesa del mundo y etnomatemáticas*: conocer diversos tipos de juegos de mesa y analizarlos desde una perspectiva investigadora y etnomatemática, elaborar portfolios que recojan los productos de las investigaciones y las construcciones de juegos realizadas, desarrollar habilidades de comunicación y socio-emocionales, aprender a trabajar en equipos cooperativos y participar de la educación inclusiva e intercultural. Los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales del curso cubren un amplio espectro que, en nuestra opinión, permitiría fomentar las competencias y alcanzar el cumplimiento de los objetivos señalados.

4.1. LIMITACIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

A pesar de no haber tenido oportunidad de implementar la programación abordada en este trabajo por tratarse de una propuesta de diseño curricular para una asignatura anual, y desconocer por tanto en qué medida exacta serviría verdaderamente a sus propósitos, pensamos que su diseño cumple los requisitos necesarios para poder ponerla en práctica de manera eficaz.

Como herramienta para el desarrollo de una asignatura, la programación constituye una planificación que trata de ordenar la docencia y anticipar lo inesperado, pero como todo plan, debe ser flexible y capaz de adaptarse de manera rápida e inocua en base a las necesidades. Los procesos de enseñanza y aprendizaje presentan muchas fuentes de incertidumbre e imprevistos, por lo que el personal docente debe continuamente tomar decisiones no consideradas en un principio, a fin de adecuar la docencia a dichas necesidades cambiantes. Por ello, las programaciones didácticas no deben considerarse normas a seguir a rajatabla, sino hojas de ruta que, seguidas de la mejor manera posible, sirvan como apoyo para orientar de la manera más oportuna los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin duda llevar a la práctica esta propuesta nos descubriría cuestiones equivocadas y aspectos a modificar o enriquecer que pudiéramos mejorar en una revisión del trabajo.

Nos habría gustado diseñar un método inspirado en el *Teams-Games-Tournament* creado por De Vries y Slavin (Gavilán y Alario, 2010) para aprovechar las ventajas de distintas formas de interrelación social en el aula, incorporando una situación cooperativa intragrupo junto con otra competitiva intergrupo, y, finalmente, dado el tránsito de cada alumno y alumna por varias tribus a lo largo del curso, una última pequeña competición a nivel individual que se habría resuelto a partir de las anteriores. En este modelo, la asignatura en sí habría sido un complejo *metajuego* complejo. Las numerosas fuentes de incertidumbre, la limitada experiencia del autor y las constricciones de tiempo y espacio impidieron que estas ideas pasaran de un bosquejo en un cuaderno.

Pendiente también queda la integración de esta propuesta en proyectos interdisciplinares más amplios, implicando al personal docente de otros departamentos didácticos. Pensamos por ejemplo en la posibilidad de abordar la variedad etimológica de gran parte del vocabulario propio del mundo de los juegos desde las asignaturas de lenguas e idiomas. Ajedrez, alfil, alquerque, arcidriche, azar, dado, enroque, jaque, mate, son palabras provenientes del árabe; amarraco, mus, órdago, provienen del euskera; numerosos términos habituales en el día a día tienen su origen en el inglés. De igual forma, los contenidos se podrían abordar junto a los departamentos de filosofía, educación física e historia. Al respecto del último, baste apuntar el soporte de evidencia que han dado los estudios étnico-culturales sobre juegos a las teorías, por ejemplo, sobre migraciones del nordeste asiático a Norteamérica, o intercambios comerciales y culturales a lo largo de la Ruta de la Seda.

No nos cabe duda del enorme potencial educativo del juego y de su valor para lograr la mejor formación integral posible de personas para su vida futura. Una posible solución para aumentarlo sería la implantación de ludotecas escolares que contribuyeran a paliar la actitud hostil de las instituciones y los educadores ante el juego, bajo un papel de mediación pedagógica entre la actividad lúdica y el ámbito académico, tal como apunta Payà (2008:79), que cita a Longo y Longo: "todo lo que tiene de positivo el juego puede ser transferido al proceso de enseñanza-aprendizaje". Pensamos, efectivamente, que es necesaria una apertura general de mira, con plazo urgente, por parte de las instituciones académicas en torno a diversas cuestiones: la practicidad de los diseños curriculares, la presencia del juego en las prácticas educativas no únicamente a nivel utilitarista, el reconocimiento del papel de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento y la puesta en valor de sus aportaciones, la consideración de otros discursos alternativos al eurocentrista en cuanto a posicionamientos y culturas matemáticas a fin de conseguir una educación verdaderamente intercultural…

Quienes son ahora estudiantes necesitarán mañana unas matemáticas cotidianas que provengan de aquello que recordamos cuando hemos olvidado lo aprendido, y supongan, pues, una traducción libre de las matemáticas que podamos mostrarles ahora pedagogos y educadores. Donde el discurso y metodología tradicional de la matemática académica ha fallado, en ocasiones, en conseguir aprendizajes prácticos aplicables al ámbito extraescolar, las premisas y perspectivas etnomatemáticas pueden ofrecer respuestas exitosas en el futuro.

Las etnomatemáticas se han aplicado poco, todavía, a la educación secundaria en España. Numerosos caminos de este campo están aún por descubrir, y muchos otros están descubiertos pero aún deben ser desbrozados. La matemática no es una; son muchas. No hay una cultura; hay muchas. Como muchas somos las tribus que hacemos matemáticas, jugamos, y poblamos la tierra. Nuestras matemáticas, nuestros juegos, nuestra tierra.

5. REFERENCIAS

Ballesteros, S. (2005). *Juegos de mesa del mundo*. Madrid: CCS. Col. Juegos.

Bell, R. C. (1979). *Board and Table Games from Many Civilizations*. Nueva York: Dover Publications.

Bell, R., y Cornelius, M. (1988). *Board Games round the world: A resource book for mathematical investigations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bikić, V., y Vuković, J. (2010). Board Games Reconsidered: Mancala in the Balkans [en línea]. *Issues in Ethnology and Anthropology, 1*(5), 183-209. Recuperado de: http://www.anthroserbia.org/Journals/Article/710

Bishop, A. J. (1998). El papel de los juegos en educación matemática [en línea]. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9-19 [fecha de consulta: mayo de 2014]. Recuperado de: http://dgespe.edutlixco.org/pdf/educa/pap_jueg.pdf

Blasco-Fontecilla, H., González, M., García-López, R., Poza, B., Álvarez-Ruiz, S., Pérez-Moreno, M. R., Otero, J., y Blasco, L. (2012). *El Proyecto Jaque Mate al TDAH (Fase I): un proyecto piloto* [en línea]. Proyecto Jaque Mate al TDAH [fecha de consulta: agosto de 2013]. Recuperado de: http://www.ajedrezdeataque.com/04%20Articulos/00%20Otros%20articulos/TDAH/jaque_mate.pdf

Caillois, R. (1961). *Man, Play and Games*. Chicago: University of Illinois Press.

Callejo, M. L. (2010). Disfrutar de y luchar por los derechos humanos: las matemáticas también cuentan. En Callejo, M. L., y Goñi, J. M. (Coords.), *Educación matemática y ciudadanía*, 103-127. Barcelona: Graó. Col. Biblioteca de Uno.

Celone, J. (2001). *Why play chess* [en línea]. Educational Technologies [fecha de consulta: abril de 2014]. Recuperado de: http://www.edutechchess.com/whychess.html

Claus, P. J. (1981). Cenne (Mancala) in Tuluva Myth and Cult [en línea]. En Pattanayak, D.P., y Claus, P. J. (Eds.), *Indian Folklore II*. Central Institute of Indian Languages, Mysore, La India [fecha de consulta: mayo de 2014]. Recuperado de: http://www.ciil-ebooks.net/html/folklore2/

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Corbalán, F. (1994). *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Corbalán, F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. *SUMA*, 23, 21-32.

Cuixart, Q. (Director) (2011, 21 de marzo). El ajedrez, un gran deporte [episodio de programa de televisión]. *Para Todos la 2*. Barcelona: La 2 de TVE. Recuperado de: http://www.rtve.es/alacarta/videos/para-todos-la-2/para-todos-2-ajedrez-gran-deporte/1050981/

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48. Montreal, Canadá: FLM Publishing Association.

Dauvergne, P. (2000). *The Case for Chess as a Tool to Develop Our Children's Minds* [en línea]. Universidad de Sidney, Australia [fecha de consulta: abril de 2014]. Recuperado de: http://www.auschess.org.au/articles/chessmind.htm

Delors, J. (1996). Los cuatro pilares de la educación. En Delors, J. (Pres.), *La Educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*. Madrid: Santillana – UNESCO.

Drummond, T. (2000). Harlem's Chess Kings. *Time*, *155*(5), 8.

Erickson, J. (1996). Sowing games [en línea]. En Nowakowski, R. J. (Ed.), *Games of No Chance, 29*, 287-297. Berkeley, California, Estados Unidos: Mathematical Sciences Research Institute Publications. Recuperado de: http://library.msri.org/ books/Book29/ files/ericsowing.pdf

Feito, R. (2011). Las dificultades para el cambio curricular en la escuela obligatoria. Una reflexión desde la práctica. *Investigación en la escuela*, 73, 27-40.

Ferguson, R. (1995). *Chess in Education Research Summary. A Review of Key Chess Research Studies* [en línea]. Ponencia presentada en la Conferencia de la Borough of Manhattan Community College "Chess in Education: A Wise Move", Nueva York [fecha de consulta: abril de 2014]. Recuperado de: http://uschesstrust.com/wp-content/uploads/ 2007/08/chess-in-education-research-summary-by-robert-ferguson.pdf

Friedland, R. P., Fritsch, T., Smyth, K. A., Koss, E., Lerner, A. J., Chen C. H., Petot, G. J., y Debanne, S. M. (2001): Patients with Alzheimer's disease have reduced activities in midlife compared with healthy control-group members. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *98*(6), 3440-3445, DOI: 10.1073/pnas.061002998

Garfella, P. R., López, R., y Rius, M. (1999). *El juego como recurso educativo. Guía antológica*. Valencia: Tirant lo Blanch. Col. Prosopopeya Manuales.

Gavilán, P., y Alario, R. (2010). *Aprendizaje Cooperativo: Una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*. Madrid: CCS. Col. Educar.

Gering, R. (s.f.). *Modular arithmetic of mancala games* [en línea]. Mancala World [fecha de consulta: agosto de 2013]. Recuperado de: http://mancala.wikia.com/wiki/ Modular_arithmetic_of_mancala_games

Goldstein, J. (1997). *El valor de los juguetes y el juego*. Madrid: Asociación Española de Fabricantes de Juguetes.

Goldstein, J. (2012). *Play in children's development, health and well-being*. Bruselas: Toy Industries of Europe.

Gómez, J. (2003). *Los productos humanos, instrumentos de cambio para la educación intercultural* [en línea]. Colectivo Amani, Aula Intercultural [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de: http://www.fongdcam.org/manuales/educacion intercultural/ datos/docs/ActoresyEscenarios/Escenarios/EdFormal/PRODUCTOS_HUMANOS.pdf

Goñi, J. M. (Coord.) (2006). *Matemáticas e interculturalidad*. Barcelona: Graó. Col. Biblioteca de Uno.

Gorgorió, N., Prat, M., y Santesteban, M. (2006). El aula de matemáticas multicultural: distancia cultural, normas y negociación. En Goñi, J. M. (Coord.), *Matemáticas e interculturalidad*, 7-24. Barcelona: Graó. Col. Biblioteca de Uno.

Herman, J. L., Aschbacher, y P. R., Winters, L. (1992). *A Practical Guide to Alternative Assessment*. Alexandria, Virginia, Estados Unidos: Association for Supervision and Curriculum Development.

Huizinga, J. (1949). *Homo Ludens: A study of the play-element in culture* [en línea]. Londres: Routledge & Kegan Paul Ltd [fecha de consulta: mayo de 2014]. Recuperado de: http://art.yale.edu/file_columns/0000/1474/homo_ludens_johan_ huizinga_routledge_ 1949_.pdf

Huylebrouck, D. (2006). Mathematics in (central) Africa before colonization. En *Anthropologica et Praehistorica*, 117, 135-162. Bruselas: Société Royale Belge d'Anthropologie et de Préhistoire.

Kennedy, M. (1998). More than a game: Eight transition lessons chess teaches [en línea]. *Reaching Today's Youth: The Community Circle of Caring Journal*, *2*(4), 17-19. Ciudad del Cabo, República de Sudáfrica: The International Child and Youth Care Network [fecha de consulta: abril de 2014]. Recuperado de: http://www.cyc-net.org/cyc-online/cycol-0804-chess.html

Margulies, S. (1991). *The Effect of Ches son Reading Scores: District Nine Chess Program, Second Year Report* [en línea]. Nueva York: The American Chess Foundation [fecha de consulta: mayo de 2014]. Recuperado de: http://files. givewell.org/files/Analysis/ margulies.pdf

Martín B., C., y Navarro G., J. I. (Coords.) (2011). *Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Pirámide.

Meyer, H.-D., y Zahedi, K. (2014): *Open letter to Andreas Schleicher, OECD, Paris* [en línea]. Autores [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de: http://oecdpisaletter.org

Negro, A., Torrego, J. C., y Zariquiey, F. (2012). Fundamentación del aprendizaje cooperativo. Resultados de las investigaciones sobre su impacto. En Torrego, J. C., y Negro, A. (Coords.), *Aprendizaje cooperativo en las aulas: Fundamentos y recursos para su implantación*, 47-73. Madrid: Alianza.

Nieto, J. M. (2005). *Evaluación sin exámenes: Medios alternativos para comprobar el aprendizaje*. Madrid: CCS. Col. Educar.

Olfos, R., y Villagrán, E. (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Revista Integra*, 5, 39-50.

Oller M., A. M., y Muñoz E., J. M. (2006). Euler jugando al dominó. *SUMA*, 53, 39-49.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas. De la multiculturalidad al mestizaje. En Goñi, J. M. (Coord.), *Matemáticas e interculturalidad*, 117-149. Barcelona: Graó. Col. Biblioteca de Uno.

ORDEN de 27 de mayo de 2008, de la Conselleria de Educación, por la que se regulan las materias optativas en la educación secundaria obligatoria [2008/7244]. Publicada en *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, Núm.5783, 12 de junio de 2008, pp.66482–66576. Conselleria de Educación, Cultura y Deporte, Generalitat Valenciana.

Payà R., A. (2008). *Aprender jugando: Una mirada histórico-educativa*. Valencia: Universidad de Valencia.

PISA (2012). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Resultados 2012* [en línea]. OCDE. What Students Know and Can do: Student Performance in Mathematics, Reading and Science (vol. I), recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-I.pdf y Creative Problem Solving: Students' skills in tackling real-life problems (vol. V), recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf Panorámica resumen resolución de problemas específica para España recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-PS-results-esp-SPAIN.pdf y panorámica resumen resolución de problemas internacional recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-PS-snapshot-performance.pdf

Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Prieto, M. A., y Medina, R. (2005). *El juego simbólico, agente de socialización en la educación infantil: Planteamientos teóricos y aplicaciones prácticas*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Col. Aula Abierta.

Provenzo, A. B., y Provenzo, E. F. (1990). *Favorite Board Games you can make and play*. Nueva York: Dover Publications.

Quintero, N., y Tion, R. (2012). Programa de rehabilitación neuropsicológica y estimulación cognitiva. *Rev. Argentina Alzheimer y otros trastornos cognitivos*, 5, 22-27. Asoc. Alzheimer Argentina [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de: http://www.alzheimer.org.ar/revista15.pdf

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Publicado en BOE, Núm.5, 5 de enero de 2007, pp. 677-773. Ref. BOE-A-2007-238, Ministerio de Educación y Ciencia.

Rius, M. (2011). Más juego, menos actividades extraescolares [artículo de prensa en línea]. ES, *La Vanguardia*, 16 de septiembre de 2011. Recuperado de: http://www.lavanguardia.com/estilos-de-vida/20110916/54216033596/mas-juego-menos-actividades-extraescolares.html

Saint-Exupéry, A. de (1946). *Le Petit Prince*. *Educational Edition*. Richardson, M., J. (Ed.), Houghton Mifflin Company. Massachusetts: The Riverside Press.

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E., y Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Murcia: Ediciones de la Universidad de Murcia.

Strauss, V. (2013). A teacher's troubling account of giving a 106-question standardized test to 11 year olds [artículo de prensa en línea]. The Answer Sheet, *The Washington Post*, 6 de octubre de 2013. Recuperado de: http://www.washington post.com/blogs/answer-sheet/wp/2013/10/06/a-teachers-troubling-account-of-giving-a-106-question-standardized-test-to-11-year-olds/

Sweller, J., Clark, R., y Kirschner, P. (2010). Teaching general problem-solving skills is not a substitute for, or a viable addition to, teaching mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, *57*(10), 1303-1304.

Vaello O., J. (2011). *Cómo dar clase a los que no quieren*. Barcelona: Graó. Col. Orientación y tutoría.

van Delft, K. (2010). Chess and autism. En van Delft, K., y van Delft, M., *Developing Chess Talent: How to create a chess culture by coaching, training, organization and communication*, 114-120. Apeldoorn, Países Bajos: KVDC.

Verghese, J., Lipton, R. B., Katz, M. J., Hall, C. B., Derby, C. A., Kuslansky, G., Ambrose, A. F., Sliwinski, M., y Buschke, H. (2003). Leisure Activities and the Risk of Dementia in the Elderly. *The New England Journal of Medicine*, *348*(25), 2508-2516, DOI: 10.1056/NEJMoa022252

Vilella, X. (2009). El diálogo en el aula de matemáticas como comunidad de prácticas. En Planas, N., y Alsina, À. (Coords.), *Educación matemática y buenas prácticas: Infantil, primaria, secundaria y educación superior*, 167-177. Barcelona: Graó. Col. Biblioteca de Aula.

Wells, D. (2012). *Games and Mathematics: Subtle Connections*. Nueva York: Cambridge University Press.

Whitebread, D. (2012). *The importance of play. A report on the value of children's play with a series of policy recommendations*. Bruselas: Toy Industries of Europe.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Las siguientes referencias bibliográficas se aportan como material de consulta adicional. Nos referimos a ellas en los anexos al trabajo, en concreto en el Anexo VII, y pueden servir a los/las interesados/as para ampliar información diversa.

Bandrés, J. (ca. 2009). *Historia del reversi* [en línea]. Autor [fecha de consulta: agosto de 2013]. Recuperado de: https://sites.google.com/site/elreversista/historia

Beasley, J. D. (1985). *The Ins and Outs of Peg Solitaire*. Oxford: Oxford University Press.

Best, E. (1976). *Games and Pastimes of the Maori: An account of various exercises, games, and pastimes of the natives of New Zealand, as practiced in former times; including some information concerning their vocal and instrumental music* [en línea]. Wellington, Nueva Zelanda: A. R. Shearer. The New Zealand Electronic Text Collection. Recuperado de: http://nzetc.victoria.ac.nz/tm/scholarly/tei-BesGame.html

Bialostocki, A. (1998). An Application of Elementary Group Theory to Central Solitaire [en línea]. *The College Mathematics Journal, 29*(3), 208-212 [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de: http://www.appstate.edu/~klimare/COLLEGEMATHJOURNALARTICLE.PDF

Campbell, P. J., y Chavey, D. P. (1995). Tchuka Ruma Solitaire. *UMAP Journal, 16*(4), 343-365.

Chorus, P. (2009). *Implementing a Computer Player for Abalone using Alpha-Beta and Monte-Carlo Search* [tesis de maestría]. Universidad de Maastricht, Países Bajos.

Contreras, M. (s.f.). *Taller: Haciendo matemáticas con el tangram* [en línea]. Autor [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de: http://www.mauriciocontreras.es/TALLER%20DE%20TANGRAM.pdf

Cook, R., Bird, G., Lünser, G., Huck, S., y Heyes, C. (2012). Automatic imitation in a strategic context: players of rock-paper-scissors imitate opponents' gestures. *Proceedings of the Royal Society B, 279*(1729), 780-786. doi:10.1098/rspb.2011.1024

Culin, S. (1899). Hawaiian Games [en línea]. *American Anthropologist (NS), 1*(2), 201-247, vía Elliott Avedon Virtual Museum of Games, University of Waterloo, Ontario, Canadá. Recuperado de: http://gamesmuseum.uwaterloo.ca/Archives/Culin/Hawaii1899/index.html

de Brujin, N. G. (1972). A solitaire game and its relation to a finite field [en línea]. *Journal of Recreational Mathematics, 5*, 133-137 [fecha de consulta: junio de 2014]. Recuperado de http://alexandria.tue.nl/repository/freearticles/598441.pdf

Diaconis, P., Holmes, S., y Montgomery, R. (2007). Dynamical Bias in the Coin Toss. *SIAM Review, 49*(2), 211-235, DOI: 10.1137/S0036144504446436

Elffers, J. (1976). *El Tangram: juego de formas chino*. Barcelona: Barral Editores.

Fang, R. (2003). *Othello: From Beginner to Master* [en línea]. Autor. Recuperado de: http://othello.federation.free.fr/livres/beginner-Randy-Fang.pdf

Flores, P. (2002). El puzzle de la pajarita. *Números*, 51, 3-18.

Hall, R. W. (2007). A course in multicultural mathematics. *PRIMUS, 17*(3), 209-227.

Hoffmann (Ed.) (1894). *The Book of Table Games*. Londres: George Routledge and Sons.

Jelliss, G. (1999). Mu Torere. *Games and Puzzles Journal, 2*(17), 302–303.

Landau, T. (1987). *Othello: Brief & Basic. An introduction to strategy & tactics for the game of Othello* [en línea]. Autor. Recuperado de: http://www.tlandau.com/files/Othello-B%26B.pdf

Lemmens, N. (2005). *Constructing an Abalone Game-Playing Agent* [tesis de licenciatura]. Universidad de Maastricht, Países Bajos.

McCoy, L. P. (2004). *Mathematics Activities from Diverse Cultures* [en línea]. Presentation at National Council of Teachers of Mathematics Conference. Anaheim, California. Recuperado de: http://users.wfu.edu/mccoy/mgames.pdf

McCoy, L. P., Buckner, S., y Munley, J. (2007). Probability Games from Diverse Cultures. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(7), 394-399. National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado de: http://www.math.wisc.edu/~skubak/132fall2012/Probability%20Games%20Article.pdf

MDI Entertainment, Inc. (2002). Othello®: The World's Best Selling Licensed Strategy Game Lands in MDI Entertainment's Portfolio of Lottery Game Properties [artículo de prensa en línea]. *Business Wire*, 4 de diciembre de 2002. Hartford, Connecticut, Estados Unidos. Recuperado de: http://www.beckerassoc.com/PR.htm

Ozcan, E., y Hulagu, B. (2004). A Simple Intelligent Agent for Playing Abalone Game: ABLA. *Proceedings of the 13th Turkish Symposium on Artificial Intelligence and Neural Networks*, 281-290.

Rose, B. (2005). *Othello: A Minute to Learn… A Lifetime to Master* [en línea]. Anjar Co. Recuperado de https://web.archive.org/web/20061209182837/http://othellogateway.strategicviewpoints.com/rose/book.pdf

Rupérez, J.A., y García, M. (2011). Juegos de siembra: juegos africanos con aplicación didáctica. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 157-166.

Serrano, A. (2006). *Análisis matemático del juego llamado Pong Hau K'i* [en línea]. Autor. Recuperado de http://olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/pong.html

Steigerwald, D. G. (2009). *The Coin Flip: A Fundamentally Unfair Proposition?* [en línea]. University of California, Santa Barbara. Recuperado de http://econ.ucsb.edu/~doug/240a/Coin%20Flip.htm

The New York Times (1895). Fine New Games and Toys; Now Ready for Distribution by the Agents of Santa Claus; In the Modern Wonderland [artículo de prensa en línea]. *The New York Times*, 1 de diciembre de 1895. Recuperado de: http://query.nytimes.com/mem/archive-free/pdf?res= 9F01EEDB1139E033A25752C0A9649D94649ED7CF

Wang, Z., Xu, B., y Zhou, H.-J. (2014). *Social cycling and conditional responses in the Rock-Paper-Scissors game* [en línea]. ArXiv e-prints. 1404.5199. Recuperado de http://arxiv.org/abs/1404.5199v1

Ward, C. (s.f.). *King's Table: Game of the Noble Scandinavians* [en línea]. Autor [fecha de consulta: mayo de 2014]. Recuperado de http://www.vikinganswerlady.com/games.shtml

6. ANEXOS

I. EXTRACTO DEL DOCV, NÚM. 5783

Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, Núm. 5783, publicado el 12 de junio de 2008, pp. 66482–66576.

ORDEN de 27 de mayo de 2008, de la Conselleria de Educación, por la que se regulan las materias optativas en la educación secundaria obligatoria. [2008/7244]

EXTRACTO de la p. 66486:

Artículo 13. Trabajo monográfico de investigación

1. Para la elección por el alumnado del Trabajo monográfico de investigación en cuarto curso, los centros realizarán una oferta que permita elegir de, entre al menos, tres campos de conocimiento.

2. El Trabajo monográfico de investigación tendrá carácter individual, aunque se pueda trabajar en grupo, y se podrá elaborar, además de los idiomas oficiales de la Comunitat Valenciana, en una lengua extranjera de las que oferte el centro.

3. El Trabajo monográfico de investigación se llevará a cabo, preferentemente, bajo la orientación de uno de los profesores del grupo, que se hará cargo también de su seguimiento y evaluación. El desarrollo del Trabajo monográfico de investigación y su evaluación se ajustarán a las especificaciones recogidas en el anexo I.

EXTRACTO de las pp. 66529 – 66531:

ANEXO I […]

TRABAJO MONOGRÁFICO DE INVESTIGACIÓN

Introducción

El trabajo monográfico de investigación se ocupará de desarrollar, aplicar, y poner en práctica las competencias básicas previstas para la educación secundaria obligatoria. Así mismo, será el mecanismo adecuado para que el alumnado pueda mostrar la consecución alcanzada de los objetivos generales de la etapa. El trabajo monográfico se concibe como una labor personal realizada durante un periodo largo de tiempo: un curso académico, aunque pueda tener varias fases o apartados coincidentes con las evaluaciones del curso. Su finalidad no es únicamente mostrar los conocimientos adquiridos sobre un determinado tema o materia, sino aplicar métodos y técnicas de trabajo a través de contenidos diversos que ilustren su asimilación. Por esta razón su planificación debería centrarse en la indagación, investigación y la propia creatividad, más que en la recopilación de datos o la simple acumulación de información. Se trata de acercar a los alumnos y alumnas a un modo de trabajar metódico donde poder aplicar los procedimientos y habilidades aprendidos, favoreciendo la curiosidad y el interés en su realización, y por supuesto su finalidad no es estudiar un nuevo temario o currículum.

La propuesta de trabajo monográfico de investigación que oferte el centro tendrá en cuenta para que el tema sea motivador: el perfil del profesorado, los recursos disponibles, la propuesta de contenidos que aporten los departamentos didácticos y las características del alumnado. Esta elección, Trabajo monográfico de investigación, cumplirá los siguientes principios:

– Que facilite, requiera y estimule la búsqueda de informaciones, la aplicación global del conocimiento, de los saberes prácticos, capacidades sociales y destrezas, no necesariamente relacionados con las materias del currículo, al menos no todos ellos.

– Que implique la realización de algo tangible (prototipos, objetos, intervenciones en el medio natural, social y cultural, inventarios, recopilaciones, exposiciones, digitalizaciones, planes, estudios de campo, encuestas, recuperación de tradiciones y de lugares de interés, publicaciones, etc.)

– Que contribuya a realizar actividades que de alguna forma conecten con el mundo real, los trabajos y ocupaciones de la vida real adulta y posterior a la escolarización.

– Que elija como núcleo vertebrador algo que tenga conexión con la realidad, que dé oportunidades para aplicar e integrar conocimientos diversos y dé motivos para actuar dentro y fuera de los centros docentes.

– Que los alumnos y alumnas sigan y vivan la autenticidad del trabajo real, siguiendo el desarrollo completo del proceso, desde su planificación, distintas fases de su realización y logro del resultado final.

– Que fomente la participación de todos y todas en las discusiones, toma de decisión y en la realización del proyecto, sin perjuicio de que puedan repartirse tareas y responsabilidades.

– Que considere las repercusiones del trabajo y de las acciones humanas en general, así como la utilización de cualquier tipo de recursos, las actuaciones sobre el medio natural, social, económico o cultural presentes y de las generaciones venideras.

Estos principios imprimen al trabajo un carácter fundamentalmente interdisciplinar y fomentan la combinación de los diferentes tipos de aprendizaje.

Objetivos

El proceso de elaboración tutelada y presentación del Trabajo monográfico tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Adquirir la disciplina intelectual más adecuada para realizar un trabajo de forma metódica, utilizando procedimientos y recursos coherentes con el fin perseguido, fomentando el sentido de la autonomía y la responsabilidad individual y colectiva.

2. Resolver problemas y tomar decisiones, incorporando el rigor y la satisfacción por el trabajo bien hecho, y la voluntad de corregirlo y perfeccionarlo.

3. Integrar y aplicar en la realidad personal los conocimientos adquiridos, mostrando iniciativa, interés y motivación por el tema.

4. Utilizar las tecnologías de la información y de la comunicación como herramienta de aprendizaje y de comunicación, valorando su uso para trabajar de forma autónoma, como instrumento de colaboración y de desarrollo de proyectos de trabajo cooperativo.

5. Expresar y comunicar experiencias, oralmente y por escrito, apreciando la necesidad de una utilización cuidadosa del lenguaje, de un vocabulario preciso y de un registro adecuado, interpretando y ajustando el discurso a las diversas situaciones comunicativas.

6. Participar activamente tanto en la realización y exposición oral del trabajo como en la realización de un pequeño resumen que valore la exposición de sus compañeros.

Contenidos

Vendrán dados fundamentalmente en la oferta hecha por el departamento o profesor. Un esquema general podría ser: […]

Criterios de evaluación

Los criterios que se utilicen habrán de tener en cuenta la evaluación del producto final, la del proceso seguido y la aportación de la autoevaluación por parte del alumno. Se presentan a continuación aquellos aspectos que habrán de valorarse:

– Adecuación del trabajo final a los objetivos y planteamientos marcados, así como a los plazos y fases previstos.

– Capacidad de síntesis, de análisis de las dificultades y valoración crítica del trabajo y de la aportación personal.

– Estructura adecuada del trabajo escrito (justificación, descripción del proyecto propuesto, explicación de los resultados y elaboración de conclusiones).

– Adecuación y variedad de fuentes y recursos, así como la adecuación del uso de las tecnologías de la información y de la comunicación en el desarrollo del proyecto, en la realización escrita y en la presentación oral.

– Riqueza y variedad de procedimientos utilizados en la búsqueda de información, en su tipología, así como la adecuación a los fines propuestos.

– Capacidad creativa y emprendedora y la capacidad para modificar y aplicar caminos y recursos alternativos.

– Iniciativa personal, el espíritu emprendedor, la autonomía y la confianza en sí mismo; además se considerarán los hábitos de disciplina, el esfuerzo y el trabajo individual y en grupo.

– Corrección de la expresión oral y escrita, incluyendo la utilización adecuada y variada de recursos gráficos o audiovisuales y la presentación de los materiales.

– Otros aspectos relacionados con el objeto o tema específico de trabajo.

Los criterios y los instrumentos de evaluación habrán de ser comunes para todos los alumnos que la cursen, independientemente del tema sobre el que trabajen o la modalidad de trabajo adoptada.

II. BREVE PANORÁMICA DE LA CONSIDERACIÓN DEL VALOR DEL JUEGO EN LA EDUCACIÓN EN LA HISTORIA ESPAÑOLA RECIENTE

Payà Rico, en “Aprender jugando: Una mirada histórico-educativa” (2008) argumenta la evolución de la relevancia concedida al juego en el ámbito de la educación a lo largo de la historia reciente de España, proporcionando abundantes e interesantes referencias que abarcan desde finales del s. XIX hasta la actualidad. Presentamos aquí una breve compilación de citas con sus respectivas referencias, extraídas de dicha obra, a modo de ilustración.

> *“El movimiento, el juego y el trabajo como primeras y naturales manifestaciones de la actividad del niño, son los elementos de que es menester valerse para estimular, disciplinar y secundar esta misma actividad, y en ellos deben fundarse los procedimientos de todo método racional de educación”.*
> Pedro de Alcántara García, 1879: *Manual teórico-práctico de educación de párvulos según el método de los jardines de la infancia de F. Fröebel*.

> *“Educar jugando es el ideal pedagógico, siempre que logre producir la enseñanza, reuniendo estas cuatro fundamentales exigencias: placer, libertad, belleza y utilidad moral”.*
> José Esteban García Fraguas (J. E. de Marchamalo), 1896: Tratado racional de gimnástica y de los ejercicios y juegos corporales practicables sin aparatos y con ellos (…). Tomo III. *Pedagogía general, Educación física y Juegos corporales*.

> *“El problema queda reducido a hacer del juego, que para el niño es un fin en sí mismo, el medio educativo por excelencia, el vehículo de la cultura, el instrumento por el cual los fines últimos de la educación quedan prendidos en el alma”.*
> Teodoro Causí, 1924: *Bosquejo de una teoría biológica del juego infantil*.

> *“El fin educativo debe ser el primer factor en la elección de un juego; es el más importante si pensamos que no debemos contentarnos con un vago papel de divertir a muchachos”.*
> G. Jacquin, 1958: *La educación por el juego*.

> *“[El juego es] un excelente medio de expansión del niño (...) todo educador, padre, Profesor, dirigente del movimiento educativo, debe hacer que se juegue y debe utilizarse la fuerza educadora del juego”.*
> G. Jacquin, 1960: El juego y el educador, en *Servicio*, nº 699.

> *“La importancia del juego tiene carácter múltiple: es física […]; intelectual […]; moral […]; educativa […]; pedagógica […], y científica”.*
> Antonio Onieva, 1967: *Metodología de Organización Escolar*.

"Ahora empieza a comprenderse que para lograr un humanismo integral, para el despliegue total del ser del hombre, y para mayor eficacia en su vida social, parece imprescindible reencontrar de nuevo el sentido del juego".
R. Marín, 1977: *Principios de la educación contemporánea*.

"El juego constituye un verdadero sistema educativo espontáneo que funciona antes de la escuela y paralelamente a ésta. Se presenta al mismo tiempo como medio pedagógico natural y barato, capaz de combinarse con medios más rigurosos y más tradicionales."
UNESCO, 1978: *El niño y el juego. Planteamientos teóricos y aplicaciones pedagógicas*.

"El juego actúa como una educación difusa, asistemática, fuera de la escuela y tiene muchas horas de influencia en la vida de cada individuo, por eso una pedagogía que busque la Educación integral no puede ignorar las posibilidades formativas de este sector de la vida y debe incorporarlo al ámbito educativo escolar".
E. Martínez, 1993: *El juego infantil. Análisis y aplicación escolar*.

"Aprender a jugar es ya de por sí un gran objetivo educativo y sobre todo en un mundo donde se está perdiendo el sentido lúdico de la vida (...) es importante recuperar ese sentido, ese juego inocuo y enseñar a jugar sin más. Todo el mundo del juego tradicional, del juego creativo, nos está esperando en esta grata aventura".
E. Trigo, 1994: *Aplicación del juego tradicional en el currículum de educación física*. Vol. I.

"La aplicación de los juegos para una educación integral en la escuela viene avalada por argumentos psicológicos como los de Piaget, el cual advierte que "el desarrollo de los niños no sólo es social, moral y cognoscitivo, sino que, a través de los juegos que comportan reglas, también se desarrollan política y emocionalmente"".
Andrés Payà Rico, 2008: *Aprender jugando: Una mirada histórico-educativa*. p.48.

III. PLANTILLAS PARA ACTAS DE TRIBU Y FICHA DE INVESTIGACIÓN

ACTA DE FUNDACIÓN DE TRIBU

Los y las estudiantes ____
____
____, aquí firmantes:

reunidos en fecha ___________________________ acordamos unánimemente en el día de hoy y en la ciudad de Castellón, la fundación de esta nuestra tribu de ____ con el motivo de conocer, explorar e investigar ____
____
_______________ , comprometiéndonos a hacerlo de la mejor manera posible, dentro del plazo asignado para ello, así como a construir cuantos juegos podamos, y a honrar a esta nuestra propia tribu dando lo mejor de nosotros/as mismos/as.

ACTA DE DISOLUCIÓN DE TRIBU

Los y las estudiantes ____
____
____, aquí firmantes:

que hemos trabajado juntos integrando hasta el momento la tribu de ____ , damos por concluida nuestra actividad investigadora sobre ____
____
_________________________ , en fecha _______________ y disolvemos así esta nuestra tribu.

Alumno/a o Tribu: ______

ORIGEN

NOMBRE DEL JUEGO

(otros nombres: ___, ___, ___)

Origen:

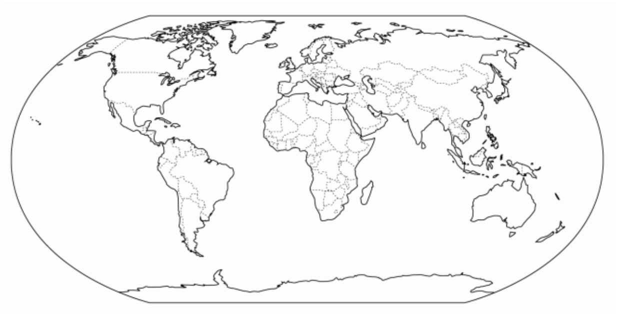
Antigüedad:

Núm. de jugadores:

Duración aproximada:

Familia o tipo de juego:

Juegos relacionados, variantes:

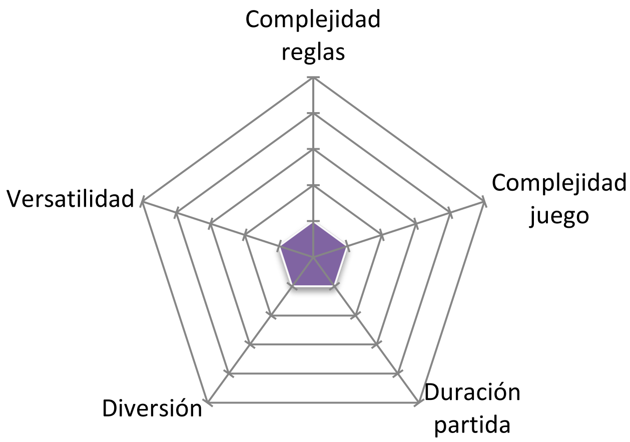


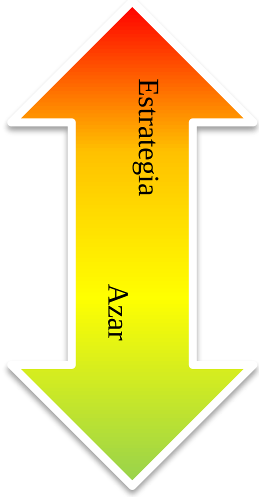
Componentes del juego (tablero, fichas, elementos de azar…) en posición inicial:

Reglas:

FAMILIA

Análisis técnico del juego





Estrategias ganadoras

Estrategias perdedoras

Otros descubrimientos (preguntas y respuestas, hipótesis…)

Matemáticas trabajadas

Valoración personal del juego

IV. ALGORITMO DE DECISIÓN PARA EL TAMAÑO DE LOS GRUPOS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO O TRIBUS

En la página 26 de este documento exponemos el algoritmo que, en nuestra opinión, proporciona la distribución de alumnos en tribus con mejor garantía de optimizar el rendimiento y las posibilidades de aprendizaje de acuerdo con la metodología propuesta.

Podríamos haber cubierto esta cuestión diciendo que el número ideal de personas por tribu es 4, sin entrar en detalle sobre cómo resolver la distribución en caso de que el número de matriculados no fuera múltiplo de 4. Sin embargo, hemos dedicado tiempo a pensar cuál sería la agrupación ideal de manera que se pudieran jugar partidas fluidas y la posibilidad de estar parado se minimizara, por lo que la solución obvia de formar cuantos más grupos de 4 sea posible y distribuir el exceso arbitrariamente no nos parece acertada. Así, preferimos dar la recomendación expuesta pese a su carácter cerrado y poco habitual.

Anteriormente presentamos el algoritmo de manera compacta y precisa, empleando notación matemática en su definición. Exponemos aquí de nuevo la solución, en forma tabulada y sin lenguaje matemático, para quien encontrara esta definición más conveniente:

Núm. de estudiantes matriculados	*Distribución de los estudiantes en tribus*
5 o menos	Una única tribu que englobe a todos los alumnos y alumnas matriculados.
Entre 6 y 10	Dos tribus, distribuidas lo más equitativamente posible en cuanto a número de miembros, i.e.: 6 alumnos: 3 y 3. 7 alumnos: 4 y 3. 8 alumnos: 4 y 4. 9 alumnos: 4 y 5. 10 alumnos: 5 y 5.
A partir de 11	Tantas tribus de 4 miembros como sea necesario, completándolas siempre que sea posible, si bien aceptando tribus de 3 miembros cuando falte una única persona para completar la última tribu de 4, y tribus de 5 si hay matriculados en exceso para mantener las tribus de 4 pero en defecto para conseguir otro trío, que sería la tribu más pequeña aceptable. Por ejemplo: 11 alumnos: tres tribus, 4, 4, 3. 12 alumnos: tres tribus: 4, 4, 4. 13 alumnos: tres tribus: 5, 4, 4. 14 alumnos: tres tribus: 5, 5, 4. 15 alumnos: cuatro tribus: 4, 4, 4, 3. 16 alumnos: cuatro tribus: 4, 4, 4, 4. 17 alumnos: cuatro tribus: 5, 4, 4, 4. 18 alumnos: cuatro tribus: 5, 5, 4, 4. 19 alumnos: cinco tribus: 4, 4, 4, 4, 3. 20 alumnos: cinco tribus: 4, 4, 4, 4, 4. etc.

Tabla 8.- Distribución de los estudiantes en tribus en función del número de matriculados.

V. RÚBRICAS DE EVALUACIÓN

En este anexo incluimos las rúbricas, escalas de calificación y rejilla de diferencial semántico preparados para la evaluación multimodal de la asignatura propuesta. Presentamos también un supuesto de uso de las rúbricas de evaluación de ficha de investigación y de construcción de tablero de juego:

Por ejemplo, supongamos que un alumno, Rashid, ha realizado una investigación sobre el *tangram* y presentado su correspondiente ficha de investigación en su portfolio personal. Tras revisarla, el docente la ha evaluado según la rúbrica ficticia indicada en la Figura 5. Puesto que los pesos de todos los criterios en la rúbrica de evaluación de fichas de investigación (Tabla 12) valen 1, la nota obtenida por Rashid será:

$$Nota = \frac{1 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 7}{10} = 7.5$$

Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Datos generales 1	Toda la información general del juego (origen, núm. de jugadores, duración, familia, etc.) es correcta. Se aportan variantes. 9	La mayor parte de la información de carácter general es correcta. Puede faltar algún ítem.	La información general sobre el juego es incorrecta o insuficiente.	Faltan muchos datos generales sobre el juego, o los que aparecen son en su mayoría erróneos.
Componentes del juego 1	Tablero, fichas y otros elementos están correctamente reseñados y dibujados. 8	El tablero aparece dibujado pero no explicado. Fichas y otros elementos correctamente reseñados.	El tablero aparece dibujado pero no explicado. Puede haber errores en las reseñas de los elementos del juego.	No hay dibujo del tablero. Hay abundantes errores u omisiones en las reseñas de los elementos del juego.
Reglas del juego 1	Las reglas están desarrolladas de manera completa y comprensiva.	Las reglas se explican de forma comprensible. Puede haber alguna omisión. 6	Las reglas no se explican bien, hay errores o bien no se entienden detalles de la mecánica del juego.	No se entienden aspectos capitales del funcionamiento del juego.
Análisis del juego 1	El análisis del juego es preciso y argumentado. El polígono es preciso y se corresponde con la exposición. 8	El análisis del juego es anecdótico o impreciso. El polígono no es preciso o no se corresponde con lo expuesto en el análisis.	El polígono no es correcto. El análisis no es correcto. La exposición se centra en intuiciones y no evidencia constatación de hechos.	No hay análisis de juego, o la exposición se limita a referenciar lo obvio.
Investigación 1	Las cuestiones analizadas son numerosas y diversas, y se tratan en profundidad. El producto final tiene interés.	Se analizan varias cuestiones, además de las sugeridas, con mayor o menor detalle. 7	Se analizan pocas cuestiones, mayoritariamente las sugeridas. El trato es superficial.	Apenas se analiza nada, limitándose a constatar lo obvio. No hay profundidad.
Exposición 1	El texto expone los resultados de la investigación con cohesión, de manera fluida e incluyendo explicaciones pertinentes. 8	En general las explicaciones funcionan de manera eficiente.	Se aprecian intentos de explicar las conclusiones obtenidas, pero los argumentos son insuficientes.	Hay abundantes incoherencias en las explicaciones, o no aparecen explicaciones.
Organización 1	Los diversos hallazgos, hipótesis, experimentos, conclusiones, etc., están correctamente organizados.	Se aprecia división entre diferentes cuestiones, medianamente organizadas. Hay distinción entre temas centrales y accesorios. 7	La organización es burda y aparecen solapamientos entre diferentes cuestiones.	No hay organización lógica en la exposición de las cuestiones.
Valoración personal 1	Es completa y detallada, proporcionando juicio y opinión sólidos.	Es sucinta pero proporciona juicio y opinión medianamente razonados. 5	No es completa ni detalla razones.	No aparece valoración personal.
Convenciones lingüísticas 1	Gramática, puntuación y ortografía correctas. Dos o menos errores. 10	Pocos errores (entre 3 y 6). Emplea correctamente, por regla general, las convenciones.	Tiene bastantes errores (entre 7 y 10) que distraen al lector del texto.	Numerosos errores (más de 10) dificultan la comprensión del texto.
Convenciones matemáticas 1	Uso impecable del lenguaje matemático.	La utilización de las convenciones matemáticas es, por lo general, correcta. 7	Bastantes elementos del lenguaje matemático se usan erróneamente o a la ligera.	No se emplea notación matemática en absoluto, o la que se emplea es incorrecta por completo.

Figura 5.- Ejemplo de uso de rúbrica para la evaluación de una ficha de investigación.

Supongamos ahora que Catalina ha fabricado un tablero y unas fichas de *nyout* para jugar en casa con su hermano, obteniendo las calificaciones mostradas en la rúbrica ficticia de la Figura 6. Vistos los pesos de los criterios considerados en la rúbrica de evaluación de construcción de juegos (Tabla 13), la nota de Catalina por este trabajo será:

$$Nota = \frac{2 \cdot 7 + 1.5 \cdot 9 + 2.5 \cdot 8 + 1.5 \cdot 5 + 2.5 \cdot 8}{10} = 7.5$$

Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Materiales 2	El uso de materiales es óptimo. Se emplean coherentemente, y no se desperdicia material.	Uso correcto. La elección no es óptima, pero sí acertada, en consideración con los materiales disponibles. 7	La elección de materiales no es acertada o no se hace un buen uso de ellos.	La elección y el uso de los materiales disponibles son despropositados.
Formato 1.5	El formato elegido es óptimo para representar el juego. Se aprecia intencionalidad en la elección. 9	El formato empleado es correcto, pero podría mejorarse.	No se ha elegido un buen formato o no hay justificación para una elección de formato dudosa.	El formato es inapropiado.
Diseño y creatividad 2.5	La construcción está resuelta de manera creativa, incorporando motivos artísticos y por iniciativa propia. Quizá aporta novedad o cierta reinterpretación a alguno de los componentes del juego. 8	La construcción no es excesivamente creativa, pero resulta válida. Los componentes no entrañan un gran elemento artístico, si bien mantienen la funcionalidad abstracta requerida.	La construcción carece de creatividad artística o interpretativa, si bien servirá para jugar. Necesitó ayuda para completar la implementación.	La implementación es burda y aburrida. Necesitó ayuda para completarla sin demostrar esfuerzo personal.
Aseo y acabado 1.5	El trabajo finalizado es impecable, durable y bello. Los componentes están cuidados y bien terminados. El producto resulta atractivo.	El trabajo se ha realizado de manera limpia en general. Los componentes están correctamente acabados sin ser de una manufactura excepcional. 5	No es un trabajo aseado. Hay fallas en el aspecto general del producto.	El aseo y el acabado de las piezas y tablero son pobres.
Preparación y organización 2.5	Se aprecia que el alumno o alumna había planificado la construcción del juego con anterioridad a la sesión, trayendo diseños o notas que facilitaran la tarea. El trabajo durante la sesión ha sido organizado e intencional. El tiempo se ha aprovechado bien. 8	El alumno o alumna tenía semi-planificado su trabajo durante la sesión. El aprovechamiento del tiempo ha sido correcto. Las ideas previas, quizá no escritas, han servido para agilizar la tarea.	El alumno o alumna no tenía demasiado claro qué quería hacer, si bien ha acabado produciendo alguna construcción. No se ha aprovechado bien el tiempo.	El tiempo se ha desperdiciado al no tener una hoja de ruta a seguir. El alumno o alumna se ha limitado a imitar a sus compañeros o a seguir las sugerencias del profesor o profesora.

Figura 6.- Ejemplo de uso de rúbrica para la evaluación de una construcción de tablero de juego.

REVISIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LA TRIBU

Nombre de la tribu:

Valora los siguientes aspectos sobre el trabajo cooperativo en tu tribu, marcando con una X donde corresponda (5: “siempre”, 4: “generalmente”, 3: “a veces”, 2: “raramente”, 1: “nunca”):

	Siempre	Generalmente	A veces	Raramente	Nunca
1. Vuestra tribu acoge a todos sus miembros, de manera que todos se sienten parte de ella y trabajan a gusto	5	4	3	2	1
2. La tribu trabaja como un equipo y no simplemente como un grupo	5	4	3	2	1
3. Todos los miembros participan en la actividad investigadora de la tribu	5	4	3	2	1
4. Hay respeto a todos los miembros y se valoran las opiniones de todos y todas	5	4	3	2	1
5. Compartís las ideas, hipótesis o preguntas que surgen en grupo, y entre todos tratáis de responderlas y darles solución	5	4	3	2	1
6. Os organizáis bien para trabajar y planificáis las tareas	5	4	3	2	1
7. Hay diálogo entre vosotros y la comunicación verbal es fluida	5	4	3	2	1
8. Mostráis un elevado compromiso con el trabajo de la tribu	5	4	3	2	1
9. Os esforzáis duro para cumplir los objetivos que os habéis marcado como tribu	5	4	3	2	1
10. Lleváis las investigaciones a buen ritmo y respetáis los plazos de entrega	5	4	3	2	1
11. Os dais ayuda los unos a los otros cuando la necesitáis	5	4	3	2	1
12. Os dais ánimos los unos a los otros cuando os bloqueáis en la tarea	5	4	3	2	1
13. Las decisiones que tienen que ver con la tribu completa se toman en grupo	5	4	3	2	1
14. Debatís, negociáis y consensuáis las distintas opiniones de los miembros para llegar a un acuerdo entre todos	5	4	3	2	1
15. Los conflictos que han podido surgir han sido resueltos positivamente y os han servido para mejorar vuestras capacidades de comunicación y socioemocionales	5	4	3	2	1

Comentarios:
(¿Queréis comentar algo acerca de vuestra tribu en general?)

Puntuación total:

- Entre 75 y 65: ¡Bravo! Estáis cumpliendo los propósitos del aprendizaje cooperativo. ¡Vuestra tribu es una gran tribu! ¡Será recordada durante siglos! Buen nivel de comunicación y rendimiento en la tarea. Seguid así.
- Entre 64 y 51: ¡Bien hecho! Vuestra tribu está funcionando bien. Habrá páginas para ella en los libros de historia. Revisad en qué aspectos podéis mejorar el trabajo en equipo y esforzaos por seguir adelante.
- Entre 50 y 35: Vuestra tribu no ha alcanzado todos los objetivos del aprendizaje cooperativo. Si queréis que se desarrolle y sea una tribu poderosa debéis analizar en qué aspectos conviene mejorar.
- Menos de 35: Vuestra tribu está al borde de la extinción, y si no mejoráis vuestro trabajo, nadie la recordará. Esforzaos más y ¡manos a la obra!

Tabla 9.- Escala de calificación para la revisión del funcionamiento de las tribus a nivel de autoevaluación por los propios miembros de cada tribu.

EVALUACIÓN DE LOS/AS COMPAÑEROS/AS DE TRIBU					
Alumno/a:					
Nombre de la tribu:					
Valora de 1 a 5 los siguientes aspectos sobre tus compañeros y compañeras, teniendo en cuenta que 5 es la máxima puntuación y 1 es la mínima (5: “siempre”, 4: “generalmente”, 3: “a veces”, 2: “raramente”, 1: “nunca”):					
Nombres de compañeros de tribu:					
1. Coopera en la tarea de investigación y ayuda a crear buen clima de trabajo					
2. Aporta ideas propias que promueven el avance en la tarea					
3. Se explica correctamente. Defiende sus ideas y las razona					
4. Trata bien a los compañeros y muestra interés en lo que dicen					
5. Respeta el turno de palabra de los compañeros					
6. Expresa y controla sus sentimientos. Admite bien que se le lleve la contraria					
7. Es constante en la tarea. Cuando os bloqueáis, anima a la tribu a seguir adelante					
8. Es capaz de reconducir lo que hacéis si no vais por buen camino					
9. Cuando no entiende algo lo pregunta y trata de aclarar sus dudas					
10. Cuando alguien le pide ayuda, la proporciona sin problema					
11. Trae preparado el material y los deberes acordados					
12. Me gusta trabajar con él/ella y le considero un/a buen/a compañero/a de tribu					
Comentarios: (¿Quieres comentar algo acerca de tus compañeros o compañeras?)					
¡Gracias por tu colaboración!					

Tabla 10.- Escala de calificación para homoevaluación de los compañeros y compañeras de tribu.

AUTOEVALUACIÓN						
Alumno/a:						
Nombre de la tribu:						
Valora de 1 a 5 los siguientes aspectos sobre tu contribución a la tribu, esfuerzo y experiencia en la asignatura, marcando con una X donde corresponda, teniendo en cuenta que 5 es la máxima puntuación y 1 es la mínima:						
	5	4	3	2	1	
1. Mi contribución ha sido valiosa en las tareas de investigación en tribu.						No he aportado nada en las tareas de investigación en tribu.
2. Cuando tengo ideas, las digo. Cuando tengo preguntas, las hago.						Me callo mis ideas y mis preguntas sin compartirlas con mi tribu.
3. Cuando un/a compañero/a de tribu hace preguntas, trato de ayudarle.						No me preocupo por ayudar a los compañeros de tribu.
4. Trato de asegurarme de que todos los miembros de la tribu seguimos y entendemos lo que hacemos.						No me preocupa si alguien no entiende lo que estamos haciendo y se descuelga.
5. Presto atención a que todos los miembros de la tribu se sientan incluidos.						Me da igual si los compañeros y compañeras se sienten incluidos o no.
6. He trabajado correctamente con mis compañeros y compañeras de tribu, respetando a todos.						No he trabajado de la manera más idónea con mis compañeros y compañeras.
7. He ayudado a preparar las fichas de investigación para el portfolio de mi tribu.						No he ayudado en la elaboración de las fichas de investigación finales.
8. Me he esforzado mucho en las tareas individuales.						No me he esforzado demasiado en las tareas individuales.
9. He construido juegos en cantidad y calidad satisfactorias entre los que he hecho en el taller y los de casa.						No he puesto mucho interés en la construcción de juegos en el taller ni en casa.
10. He puesto dedicación e interés en esta asignatura.						Prácticamente no he dedicado tiempo a esta asignatura fuera de clase.
11. He aprendido otra manera de hacer matemáticas y mis capacidades de análisis han aumentado.						Creo que no he aprendido matemáticas y sé lo mismo que sabía antes.
12. Creo que he sido un/a buen compañero/a y miembro de tribu.						No he sido buen/a compañero/a y miembro de tribu.
Comentarios: (¿Qué te ha parecido más interesante en esta evaluación? ¿Qué te ha parecido menos interesante? ¿Cómo podríamos mejorar la asignatura? ¿Qué pondrías y qué quitarías?)						
Puntuación total: - Entre 60 y 52: ¡Enhorabuena! Estás siendo un gran compañero de tribu. ¡Sigue así! - Entre 51 y 41: ¡Bien hecho! Estás trabajando bien. Hay aspectos en los que puedes mejorar. ¡Ánimo y sigue esforzándote! - Entre 40 y 29: Tienes que esforzarte más y mejorar en varios aspectos. Si quieres, puedes. - Menos de 29: Debes esforzarte mucho más para llegar a los objetivos marcados. Ponte manos a la obra.						
¡Gracias por tu colaboración!						

Tabla 11.- Rejilla de diferencial semántico para autoevaluación individual de los alumnos y alumnas.

RÚBRICA para evaluación de INVESTIGACIONES				
Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Datos generales 1	Toda la información general del juego (origen, núm. de jugadores, duración, familia, etc.) es correcta. Se aportan variantes.	La mayor parte de la información de carácter general es correcta. Puede faltar algún ítem.	La información general sobre el juego es incorrecta o insuficiente.	Faltan muchos datos generales sobre el juego, o los que aparecen son en su mayoría erróneos.
Elementos del juego 1	Tablero, fichas y otros componentes están correctamente reseñados y dibujados.	El tablero aparece dibujado pero no explicado. Fichas y otros elementos correctamente reseñados.	El tablero aparece dibujado pero no explicado. Puede haber errores en las reseñas de los elementos del juego.	No hay dibujo del tablero. Hay abundantes errores u omisiones en las reseñas de los elementos del juego.
Reglas del juego 1	Las reglas están desarrolladas de manera completa y comprensiva.	Las reglas se explican de forma comprensible. Puede haber alguna omisión.	Las reglas no se explican bien, hay errores o bien no se entienden detalles de la mecánica del juego.	No se entienden aspectos capitales del funcionamiento del juego.
Análisis del juego 1	El análisis del juego es preciso y argumentado. El polígono es preciso y se corresponde con la exposición.	El análisis del juego es anecdótico o impreciso. El polígono no es preciso o no se corresponde con lo expuesto en el análisis.	El polígono no es correcto. El análisis no es correcto. La exposición se centra en intuiciones y no evidencia constatación de hechos.	No hay análisis de juego, o la exposición se limita a referenciar lo obvio.
Investigación 1	Las cuestiones analizadas son numerosas y diversas, y se tratan en profundidad. El producto final tiene interés.	Se analizan varias cuestiones, además de las sugeridas, con mayor o menor detalle.	Se analizan pocas cuestiones, mayoritariamente las sugeridas. El trato es superficial.	Apenas se analiza nada, limitándose a constatar lo obvio. No hay profundidad.
Exposición 1	El texto expone los resultados de la investigación con cohesión, de manera fluida e incluyendo explicaciones pertinentes.	En general las explicaciones funcionan de manera eficiente.	Se aprecian intentos de explicar las conclusiones obtenidas, pero los argumentos son insuficientes.	Hay abundantes incoherencias en las explicaciones, o no aparecen explicaciones.
Organización 1	Los diversos hallazgos, hipótesis, experimentos, conclusiones, etc., están correctamente organizados.	Se aprecia división entre diferentes cuestiones, medianamente organizadas. Hay distinción entre temas centrales y accesorios.	La organización es burda y aparecen solapamientos entre diferentes cuestiones.	No hay organización lógica en la exposición de las cuestiones.
Valoración personal 1	Es completa y detallada, proporcionando juicio y opinión sólidos.	Es sucinta pero proporciona juicio y opinión medianamente razonados.	No es completa ni detalla razones.	No aparece valoración personal.
Convenciones lingüísticas 1	Gramática, puntuación y ortografía correctas. Dos o menos errores.	Pocos errores (entre 3 y 6). Emplea correctamente, por regla general, las convenciones.	Tiene bastantes errores (entre 7 y 10) que distraen al lector del texto.	Numerosos errores (más de 10) dificultan la comprensión del texto.
Convenciones matemáticas 1	Uso impecable del lenguaje matemático.	La utilización de las convenciones matemáticas es, por lo general, correcta.	Bastantes elementos del lenguaje matemático se usan erróneamente o a la ligera.	No se emplea notación matemática en absoluto, o la que se emplea es incorrecta por completo.

Tabla 12.- Rúbrica para evaluación de fichas de investigación como producto de los procesos de investigación.

RÚBRICA para evaluación de CONSTRUCCIONES				
Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Materiales 2	El uso de materiales es óptimo. Se emplean coherentemente, y no se desperdicia material.	Uso correcto. La elección no es óptima, pero sí acertada, en consideración con los materiales disponibles.	La elección de materiales no es acertada o no se hace un buen uso de ellos.	La elección y el uso de los materiales disponibles son despropositados.
Formato 1.5	El formato elegido es óptimo para representar el juego. Se aprecia intencionalidad en la elección.	El formato empleado es correcto, pero podría mejorarse.	No se ha elegido un buen formato o no hay justificación para una elección de formato dudosa.	El formato es inapropiado.
Diseño y creatividad 2.5	La construcción está resuelta de manera creativa, incorporando motivos artísticos o decoración, y por iniciativa propia. Quizá aporta novedad o cierta reinterpretación a alguno de los componentes del juego.	La construcción no es excesivamente creativa, pero resulta válida. La decoración es correcta. Los componentes no entrañan un gran elemento artístico, si bien mantienen la funcionalidad abstracta requerida.	La construcción carece de creatividad artística o interpretativa, si bien servirá para jugar. Poca decoración. Necesitó ayuda para completar la implementación.	La implementación es burda y aburrida. Necesitó ayuda para completarla sin demostrar esfuerzo personal. Uso del color deficiente.
Aseo y acabado 1.5	El trabajo finalizado es impecable, durable y bello. Los componentes están cuidados y bien terminados. El producto resulta atractivo.	El trabajo se ha realizado de manera limpia en general. Los componentes están correctamente acabados sin ser de una manufactura excepcional.	No es un trabajo aseado. Hay fallas en el aspecto general del producto.	El aseo y el acabado de las piezas y tablero son pobres.
Preparación y organización 2.5	Se aprecia que el alumno o alumna había planificado la construcción del juego con anterioridad a la sesión, trayendo diseños, esquemas o notas que facilitaran la tarea. El trabajo durante la sesión ha sido organizado e intencional. El tiempo se ha aprovechado bien.	El alumno o alumna tenía semi-planificado su trabajo durante la sesión. El aprovechamiento del tiempo ha sido correcto. Las ideas previas, quizá no escritas, han servido para agilizar la tarea.	El alumno o alumna no tenía demasiado claro qué quería hacer, si bien ha acabado produciendo alguna construcción. No se ha aprovechado del todo bien el tiempo.	El tiempo se ha desperdiciado al no tener una hoja de ruta a seguir. El alumno o alumna se ha limitado a imitar a sus compañeros o a seguir las sugerencias del profesor o profesora.

Tabla 13.- Rúbrica para la evaluación de construcciones de tableros, fichas y otros elementos de juego, como parte del Portfolio personal.

RÚBRICA para control de FUNCIONAMIENTO DE TRIBUS				
Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Cohesión de la tribu 2	La tribu acoge adecuadamente a sus miembros y forma una suerte de identidad tribal a partir de las contribuciones de todos los individuos. La tribu trabaja como equipo de aprendizaje cooperativo de forma excelente.	La tribu reúne a sus miembros, pero no está claro si se dan relaciones de verdadera sinergia. La tribu trabaja como grupo de aprendizaje cooperativo de manera correcta.	Los miembros de la tribu se sientan juntos pero no trabajan juntos. Aparecen parejas de trabajo que no interactúan en el seno de la tribu. La tribu trabaja como un grupo tradicional.	Los miembros de la tribu no actúan como compañeros. Se distraen los unos a los otros y pierden el tiempo, dificultándose mutuamente el aprendizaje. La tribu actúa como un grupo de pseudoaprendizaje.
Rol social de los miembros de la tribu 2	La tribu funciona mediante un paradigma de inclusión de sus miembros. Los papeles de tutor y tutorando se alternan. Hay cooperación.	La tribu funciona mediante un paradigma de integración de sus miembros. Los papeles de tutor y tutorando suelen ser persistentes, pero hay colaboración.	Los papeles de tutor y tutorando son permanentes. Hay más tutoría que colaboración. Algún miembro queda descolgado de vez en cuando.	La tribu excluye o segrega. Hay miembros permanentemente descolgados. Hay un factor elevado de holgazanería social.
Actitudes y habilidades socioemocionales en el seno de la tribu 2.5	Hay respeto y atención por todos los miembros. Se formulan preguntas y se presta ayuda adecuadamente. Los turnos de palabra son respetados y el diálogo es abundante y productivo.	Hay respeto y atención por todos los miembros prácticamente siempre. Se trata de responder las preguntas formuladas y prestar las ayudas solicitadas.	Se aprecian faltas de respeto frecuentes e interrupciones en los turnos de palabra. El diálogo no es tal, y a veces hay alboroto surgido del fallo de la negociación sociocognitiva.	Los miembros de la tribu discuten continuamente; no son capaces de mantener un orden que les permita funcionar como tribu.
Comportamiento general y aspectos formales 1.5	Comportamiento excelente. La tribu es puntual, cooperativa y facilitadora del aprendizaje. Se prepara rápidamente para trabajar al comienzo de las clases. Atiende a los plazos de entrega.	Comportamiento correcto. La tribu es puntual generalmente. Casi siempre respeta los plazos de entrega. Su agilidad al comenzar las clases varía entre diligente y sosegada.	El comportamiento de la tribu roza lo inapropiado. Alguno de los miembros es generalmente impuntual. La tribu no suele respetar los plazos de entrega y es perezosa al comenzar las clases.	Su comportamiento es inapropiado para el ámbito escolar. Alguno de los miembros es generalmente absentista. La tribu incumple los plazos persistentemente y es disruptiva al comenzar y durante el desarrollo de las sesiones.
Esfuerzos realizados 2	La tribu se esfuerza duramente por funcionar de manera correcta y progresar en sus investigaciones.	La tribu se esfuerza en funcionar como tal, pero podría hacerlo con mayor empeño.	Poco esfuerzo e interés general por el aprendizaje cooperativo.	Ningún esfuerzo, ni en casa ni en clase. Indiferencia total ante el fracaso del grupo.

Tabla 14.- Rúbrica para heteroevaluación tribal: control de funcionamiento de las tribus por parte del docente.

RÚBRICA para evaluación ACTITUDINAL Y S.E. INDIVIDUAL				
Criterios	Niveles de calidad			
	Superior 8 - 10	Correcto 5 - 8	Insuficiente 3 - 5	Deficiente 0 - 3
Actitudes hacia las tareas de investigación 2	Participa espontánea y activamente en las tareas de investigación. Toma la iniciativa. Demuestra un alto interés, motivación y compromiso y se corresponsabiliza de la investigación. Muestra curiosidad epistémica.	Muestra interés y participa espontáneamente o esporádicamente en la investigación. Sugiere posibilidades y formula hipótesis. Trabaja en la resolución de las cuestiones surgidas.	Participa anecdóticamente en el trabajo de investigación, pero no se implica lo suficiente como para realizar aportaciones significativas al aprendizaje. No hay asunción de responsabilidad.	No está interesado/a en el trabajo de investigación. Deja que sus compañeros/as hagan la mayor parte de la tarea cooperativa y apenas participa. No completa las investigaciones individuales.
Actitudes y habilidades sociales con sus compañeros/as de tribu 2.5	Respeta a sus compañeros/as y valora sus aportaciones, les invita a participar pertinentemente, promueve la interdependencia positiva y se corresponsabiliza del aprendizaje de la tribu.	Respeta a sus compañeros/as, colabora en la interacción, sigue adecuadamente el proceso de aprendizaje cooperativo y se preocupa de que sus compañeros/as también lo hagan.	Respeta a sus compañeros pero su actitud no es la idónea para generar una interdependencia positiva y un aprendizaje cooperativo verdadero.	No respeta a sus compañeros/as, su actitud dificulta persistentemente el aprendizaje.
Actitudes y habilidades sociales con el grupo-clase 1.5	Participa activamente en los coloquios y respeta y valora las intervenciones de compañeros/as. Proporciona ayuda espontáneamente, atiende a la diversidad de necesidades, opiniones y creencias y facilita el aprendizaje de la clase.	Participa en los coloquios y conversaciones grupales, si bien no toma la iniciativa generalmente. Respeta las opiniones de los demás.	Su interacción con el grupo-clase se centra en solicitar ayuda. No siempre respeta los turnos de palabra o las opiniones o creencias. La espiral del silencio le domina.	No participa en las conversaciones grupales, ni siquiera a requerimiento del profesor.
Comportamiento general y aspectos formales 1.5	Comportamiento excelente. Es puntual, coopera y respeta. Atiende a los plazos de entrega.	Comportamiento correcto. Es puntual generalmente. Casi siempre respeta los plazos de entrega.	Su comportamiento roza lo inapropiado. Es impuntual generalmente. Ocasionalmente absentista. No suele respetar los plazos.	Su comportamiento es inapropiado para el ámbito escolar. Su absentismo frecuente dificulta el avance de los aprendizajes. Falta a los plazos persistentemente.
Esfuerzos realizados 2.5	Independientemente de los resultados, el alumno o alumna se ha esforzado duramente en sus tareas.	El alumno o alumna ha demostrado un grado de esfuerzo medio.	Poco esfuerzo e interés en general.	Ningún esfuerzo, ni en casa ni en clase. Observación pasiva.

Tabla 15.- Rúbrica para heteroevaluación actitudinal y de habilidades socioemocionales individual.

RÚBRICA PARA EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN				
UNIDAD DIDÁCTICA:			**FECHA:**	
Criterios	Niveles de calidad			
	Excelente	Bien	Mediocre	Deficiente
Participación general de los alumnos en las conversaciones en tribu	Los miembros de todas las tribus participan permanentemente.	Casi todos los miembros de casi todas las tribus participan en las conversaciones.	Se detecta poca participación en algunas tribus.	Hay varias tribus en las que los miembros no conversan entre ellos.
Formalidad de las investigaciones	Las tribus formulan hipótesis, juegan partidas para validarlas y a la vista de los resultados infieren conclusiones empleando la deducción.	Las tribus establecen opiniones, juegan partidas, observan resultados e inducen generalidades.	Las tribus acuerdan creencias, juegan pocas partidas, observan resultados e indicen generalidades.	Las tribus no juegan partidas para validar o invalidar las creencias a priori, asumiendo juicios de valor.
Investigaciones avanzadas	Varias tribus crean variantes perfectamente consistentes de los juegos y notaciones abstractas eficientes para representar el desarrollo de las partidas.	Varias tribus crean variantes y notaciones abstractas, que funcionan de manera correcta.	Pocas tribus crean variantes y notaciones abstractas. Quizá las variantes son poco consistentes y las notaciones presentan deficiencias. Habría que ayudarles, u optar por otras soluciones.	No hay logros con respecto a variantes de los juegos y diseño de notaciones abstractas. Estos requerimientos están fuera de las posibilidades de esta clase.
Método de aprendizaje cooperativo	El trabajo en tribus permite que todos y todas aprendan y construyan un conocimiento social sólido.	El trabajo en tribus funciona mejor en unas que en otras. Algunos se distraen.	Hay más distracciones que interacciones que promocionen. Hay que revisar la formación de las tribus.	El trabajo en tribus hace que todos se distraigan, se limiten a jugar o a charlar, y no avancen en el aprendizaje. Hay que revisar el método.
Cumplimiento de objetivos	Se han cumplido ampliamente todos los objetivos planteados.	La mayoría de objetivos se han cumplido. Algunos eran poco realistas y convendría replantearlos.	Se han cumplido pocos objetivos. Necesitamos reestructurar la docencia o planificarla de otra manera.	No se han cumplido los objetivos. Necesitamos reestructurar la docencia o planificarla de otra manera.
Esfuerzos, actitudes y motivación	Los alumnos y alumnas se esfuerzan en general y muestran una alta motivación y actitud positiva hacia la asignatura.	La actitud es buena en general y se realizan esfuerzos considerables. Buena motivación.	Se aprecia poco esfuerzo e interés en general, y la actitud es patentemente mejorable.	No hay esfuerzos dignos de reseña y la actitud hacia la asignatura es negativa. La motivación decae.
Atención a la diversidad	Los elementos de atención a la diversidad resultan ricos, variados y suficientes.	Algunos elementos de atención a la diversidad se aprovechan y otros no.	Los elementos de at. a la diversidad son insuficientes o no están bien orientados.	No hay percepción de atención a la diversidad.

Tabla 16.- Rúbrica para evaluación de la programación didáctica por parte del docente.

VI. EJEMPLOS DE FICHAS DE INVESTIGACIÓN

Aquí presentamos tres fichas de investigación, totalmente ficticias, que podrían haber elaborado los alumnos y alumnas de la asignatura. No todo lo que estos estudiantes imaginarios habrían escrito en las fichas es correcto. Las incluimos simplemente como ejemplo de productos de diferentes calidades para ilustrar qué tipo de trabajos podríamos esperar. Hemos elegido para ello tres juegos con investigaciones "cortas" por razones de espacio.

- *Nyout*, por la tribu de los Otakus, investigación colectiva, como parte del Portfolio de tribu (juegos de carreras, U.3).
- Danza de los nueve hombres, por el alumno Auda Abu Tayi, investigación extra voluntaria, como parte de su Portfolio personal (juegos de posición, U.2).
- *Tchuka ruma*, por la alumna Leia Organa, como parte de su Portfolio personal (juegos solitarios, U.X).

Tribu “Otakus”

Nyout

(otros nombres: Nyout nol ki, Yut Nori, Yunnori)

Asia

Origen: Corea

Antigüedad: 3000 años (aprox.)

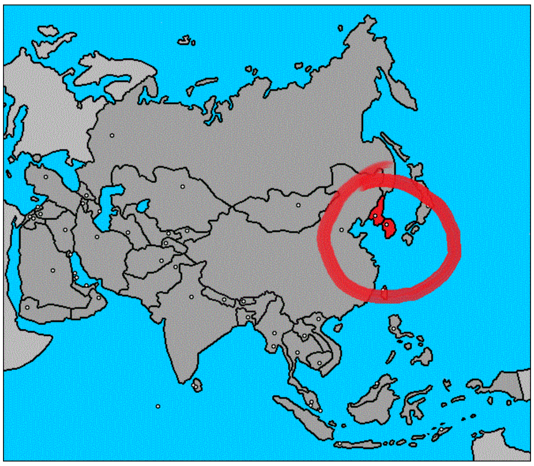
Núm. de jugadores: 2, 3 ó 4

Duración aproximada: 10-15 minutos

Familia o tipo de juego: de carreras, familia cruz y círculo

Juegos relacionados, variantes:

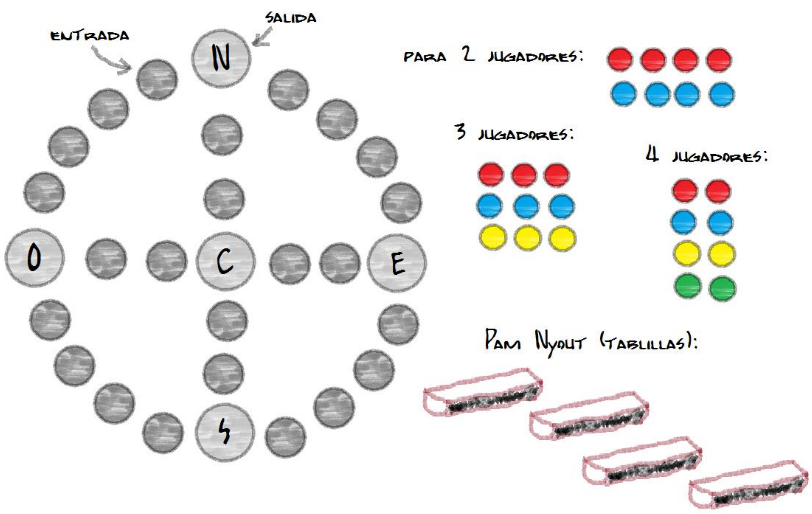
Parchís, Pachisi, Ludo



Componentes del juego:

Para jugar al Nyout hace falta:

- Tablero formado por 29 casillas puestas en forma de cruz y círculo. Las casillas de los cuatro puntos cardinales están marcadas con las letras N, S, E, O (de norte, sur, este y oeste), y la del centro con la letra C.
- 4 tablillas planas y blancas por un lado y curvadas y negras por el otro. Se llaman “Pam Nyout” y hacen la función de los dados de otros juegos.
- 4 fichas para cada jugador. Se llaman “Mal” y representan caballos. Si juegan 3 personas, 3 fichas para cada uno. Si juegan 4, sólo 2 cada uno y se juega por parejas.

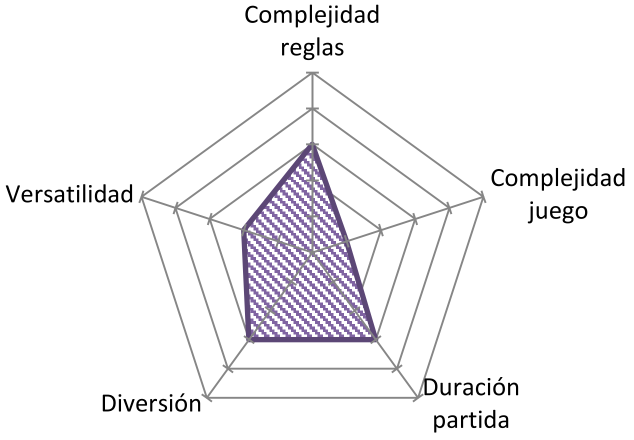


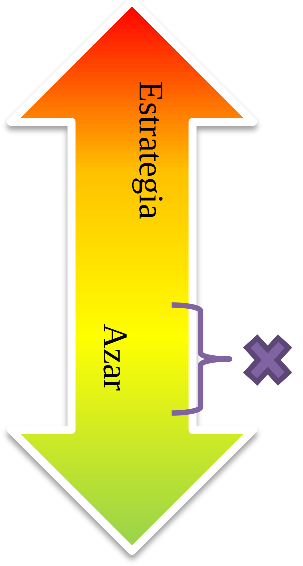
De Carreras

Reglas:

- Se tiran los Pam Nyout y el que saca más puntuación empieza.
- Las fichas empiezan por donde pone "Entrada" y tienen que dar la vuelta al tablero hasta llegar a donde pone "Salida", que es el Norte. Las fichas giran en el tablero en el sentido contrario a las agujas del reloj.
- Para saber cuánto mover, cuando tiras las Pam Nyout cuentas las que salen blancas hacia arriba y esa es la puntuación (desde 1 hasta 4). Excepción: Si sacas todas negras hacia arriba, mueves 5. Si sacas un 4 ó un 5, vuelves a tirar, y entonces puedes mover un caballo el total de puntos, o dividirlos entre dos caballos.
- Si caes en alguna casilla de las que pone N, S, E, O, puedes acortar usando el atajo del Centro, para no tener que dar la vuelta entera. Pero tienes que caer exacto.
- Si caes en una casilla en la que hay un caballo de otro jugador, le comes la ficha y tiene que volver a empezar, y vuelves a tirar. Si caes en una casilla en la que hay un caballo tuyo, los puedes juntar en una torre y a partir de ahora se mueven juntos. Si otro jugador cae en una casilla en la que hay una torre tuya, sólo te la puede comer si él cae con una torre de al menos las mismas fichas, si no no.
- Si se juega por parejas (4 personas), puedes mover tus fichas o las de tu compañero.
- Para salir por la casilla del Norte no hace falta que saques la puntuación exacta, te puedes pasar y no pasa nada.

Análisis técnico del juego





En el Nyout hay un poco de estrategia, porque tú tienes que elegir qué caballo mover, y tienes que elegir lo que más te convenga, pero la mayor parte del juego es azar, porque influye muchísimo la suerte que tengas en los puntos que te salgan en las Pam Nyout: puedes ganar turnos extra, puedes ir por los atajos, o si tienes mala suerte ir de uno en uno por la parte de fuera.

Estrategias ganadoras

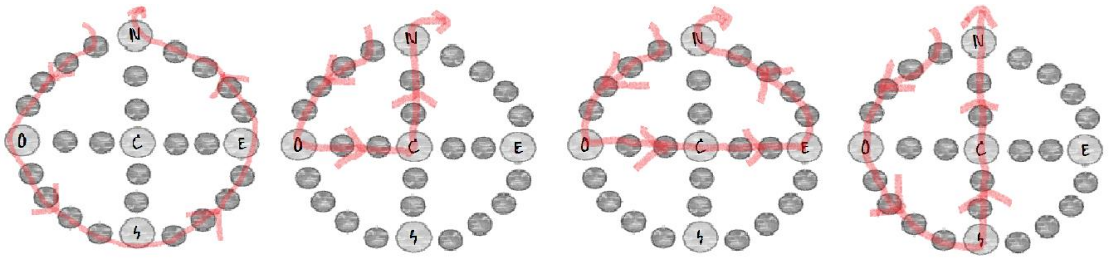
Para ganar al Nyout no hay mucho secreto: siempre que puedas, hay que apilar los caballos, para que sea más difícil que te los coman. Tratar de ir por el camino más corto, pero eso sólo lo puedes hacer si caes en las casillas que tocan, así que es sólo suerte. Y si te toca un 4 ó un 5 y puedes volver a tirar, a la hora de repartir la puntuación entre varios caballos, elegir siempre la mejor opción: si puedes comer, comer; si puedes apilar, apilar; y si puedes avanzar mucho con un caballo para llegar al Norte, pues hacer eso.

Estrategias perdedoras

No hay estrategias perdedoras, pero si tienes mucha mala suerte y no te tocan tiradas para acortar o para apilar fichas, perderás seguro.

Otros descubrimientos

- ¿Cuántos caminos posibles hay para un caballo en el nyout?
  Si no coge atajos, sería O-S-E-N. Si coge el atajo de la O, puede ser O-C-N, o bien O-C-E-N, según si cae en la casilla del centro o no. Y si cae en la casilla del atajo de la S sería O-S-C-N. Coger el camino alternativo de la E no tiene mucho sentido, porque no acortas camino: serían 6 casillas más si lo coges y 5 si no, o sea que es más corto si vas por fuera. Por tanto hay 4 caminos lógicos: el de fuera dando toda la vuelta al círculo, y 3 atajos recorriendo los brazos de la cruz.



- ¿Qué probabilidades hay de obtener las puntuaciones entre el 1 y el 15? Como hay 4 tablillas, en cada tirada puedes sacar puntuación del 1 al 5, y si te sale 4 ó 5 vuelves a tirar. El árbol lo hemos hecho aparte y luego hemos multiplicado por 1/5 por cada rama, y las puntuaciones que aparecen repetidas en el árbol, hemos sumado sus probabilidades:

Sacar la puntuación…	Tiene una probabilidad…	Y un %
1	1/5	20%
2	1/5	20%
3	1/5	20%
4	0	0%
5	1/25	4%
6	2/25	8%
7	2/25	8%
8	1/25	4%
9	1/125	0.8%
10	3/125	2.4%
11	4/125	3.2%
12	3/125	2.4%
13	6/625	0.96%
14	4/625	0.64%
15	7/625	1.12%
…	…	…

Es imposible obtener una puntuación de 4, porque si sacas un 4 vuelves a tirar. El 5 sí que se puede sacar, porque puedes sacar un 4 y luego un 1. A medida que se tira más veces, es menos probable conseguirlo, porque tendrías que conseguir siempre un 4 ó un 5 para seguir tirando, así que los números más grandes es poco probable conseguirlos. La suma de todas las probabilidades tiene que dar 1, y la suma de todos los porcentajes tiene que dar 100%.

- ¿Cuál es el juego más rápido posible?
  Sería que el primer jugador gane sin dejar posibilidad de que juegue el otro. Para eso, si juegan con 4 fichas, tendría que sacar varios 5 seguidos para ir lo más rápido posible. Con el primer 5 lleva un caballo al Oeste. Con el segundo, lleva otro al Oeste. Con el tercero también y con el cuarto también. Ahora mueve sus 4 caballos a la vez apilados, con otro 5, hasta la casilla anterior al Este en el brazo de la cruz. Y con otro 5 llega a la casilla anterior al Norte. En la siguiente tirada da igual lo que saque, porque llega seguro. O sea que hacen falta 6 tiradas de 5 y una tirada cualquiera.

- Si un jugador saca 5, 4, 5, 4, 2, ¿cuál es el mejor movimiento?
  Puede apilar dos caballos en O y luego llegar a la casilla anterior a la salida por el círculo exterior, siguiendo la ruta O-C-E-N.

- Si un jugador saca 4, 5, 4, 5, 2, ¿cuál es el mejor movimiento?
  El mismo que arriba.

Matemáticas trabajadas

Para esta investigación hemos aplicado estos contenidos matemáticos: la lógica, el contar, la probabilidad y los porcentajes, el árbol de probabilidades y el análisis y el razonamiento matemático.

Valoración personal del juego

El juego no está mal para nuestro gusto. Se parece bastante al parchís, pero más corto. Lo malo es que depende mucho de la suerte que tengas al lanzar las Pam Nyout. No hay mucho que pensar, y entonces es un poco aburrido. A veces te comen cuando estás a punto de llegar con la última ficha y es bastante frustrante, porque al estar sola no la puedes apilar, y te la pueden volver a comer otra vez.

Alumno: Auda abu Tayi

DANZA DE LOS NUEVE HOMBRES

(otros nombres: Morris, Merreles, Nueve Hombres de Morris)

Origen: Desconocido

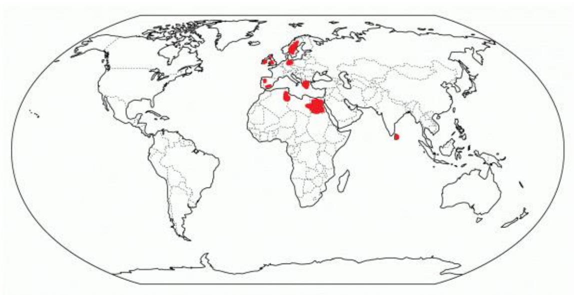
Antigüedad: Desconocido

Núm. de jugadores: 2

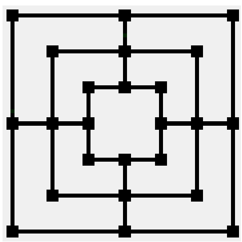
Duración aproximada: 5-10 minutos

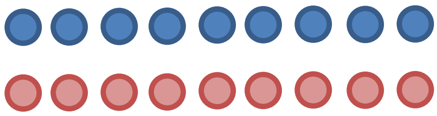
Familia o tipo de juego: Juegos de molino

Juegos relacionados, variantes: Danza de los cinco hombres, Danza de los doce hombres, Tres en raya...



Componentes del juego (tablero, fichas, elementos de azar...) en posición inicial:





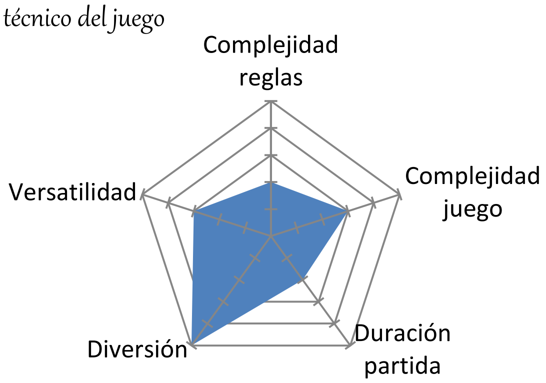
El tablero dibujado y 9 fichas para cada jugador

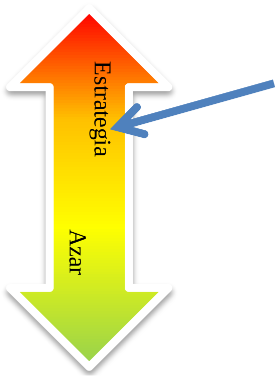
Reglas:

Cada jugador pone una ficha donde quiera, por turnos. El objetivo es poner tres en línea, que se llama "molino". Cuando alguien hace un molino, quita una ficha del rival, que la pierde. Cuando ya han metido las nueve fichas los dos, ya se pueden mover: las fichas se mueven por turnos, una casilla a lo largo de las líneas. El objetivo sigue siendo poner tres en línea para quitar una ficha del rival. Así se sigue hasta que uno consiga quitar todas las fichas del rival hasta dejarle sólo con dos, y como ése ya no podrá hacer más molinos, pierde, y gana el otro. También pierdes si en un turno no puedes mover ninguna de tus fichas.

JUEGOS DE MOLINO

Análisis técnico del juego

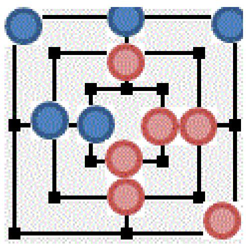




El primero que juega tiene bastante ventaja. En el juego domina la estrategia, pero también influye la suerte que tengas de los movimientos que haga el rival, que puede hacer que lo tengas muy difícil para ganar aunque seas bueno.

Estrategias ganadoras

Es muy bueno colocar tus fichas de forma que cuando abras un "molino" cierres otro; así en el turno siguiente lo deshaces y vuelves a hacer uno. Así en todos los turnos puedes eliminar una ficha de tu rival. Aquí por ejemplo el azul puede hacerlo moviendo la ficha de la esquina de arriba a la izquierda hacia abajo, en el siguiente turno hacia arriba, etc. y cada vez que mueva le quita una ficha al rojo.



Estrategias perdedoras

No hay que dejar que tu rival te haga lo que he dicho arriba, ni que te quiten fichas en la primera fase del juego, cuando aún no se pueden mover porque si lo hacen va a ser muy difícil ganar.

Otros descubrimientos (preguntas y respuestas, hipótesis...)

¿Puede ocurrir que los dos jugadores pongan sus nueve fichas cada uno y aún no se haya formado ningún molino? Sí. El juego se hace más difícil y hay menos huecos para mover.

¿El primer jugador tiene ventaja? Sí.

¿Dónde debería colocar su ficha el primer jugador? Yo siempre la pongo en alguna casilla del cuadrado de dentro. No sé seguro si es lo mejor, pero creo que sí porque así está más protegida.

¿Es posible un empate? No, porque siempre habrá un jugador que gane al otro dejándole sólo con dos fichas si tiene suficientes molinos para hacer y quitar fichas, o bien alguno se quedará bloqueado sin poder realizar movimientos.

¿Cuál es el máximo número de piezas que podrían colocarse en el tablero sin que se forme ningún molino? 18.

¿Se observa alguna regularidad en el tablero? Sí, mucho. El tablero es simétrico y está formado por tres cuadrados "concéntricos" unidos por la mitad.

¿Qué pasa si añadimos diagonales al tablero, uniendo los tres cuadrados en diagonal? Que aumentan las posibilidades de mover tus fichas. Y se puede jugar con más fichas porque es como el tablero de la danza de los doce hombres.

Matemáticas trabajadas en este juego

En el análisis de este juego hay que emplear:

- el razonamiento matemático y la lógica,
- la distribución espacial de las fichas en el tablero,
- hay que contar,
- las simetrías,
- la estrategia para jugar bien.

Valoración personal del juego

A mí me ha gustado. Ya conocía el tres en raya, y este es como el hermano mayor y es más divertido porque tiene más estrategia. Pero el juego es difícil porque en cuanto te despistas te quitan una ficha, y si pierdes varias fichas al principio ya es imposible ganar. Está bastante bien pero no es tan divertido como el ajedrez o alguno de esos.

Leia Organa, Tribu de los Bereberes

Tchuka Ruma

Origen: La India (Asia)

Antigüedad: Siglo XVIII

Núm. de jugadores: Solitario

Duración aproximada: 5 min.

Familia o tipo de juego:
Mancala

Juegos relacionados, variantes: wari, kalaha, ise-ozin-egbe, otros mancala

Asia

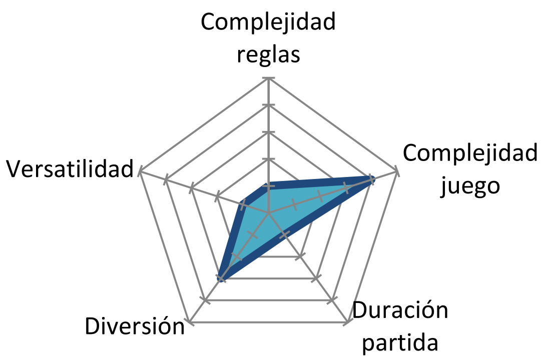
Componentes del juego (tablero, fichas, elementos de azar...) en posición inicial:

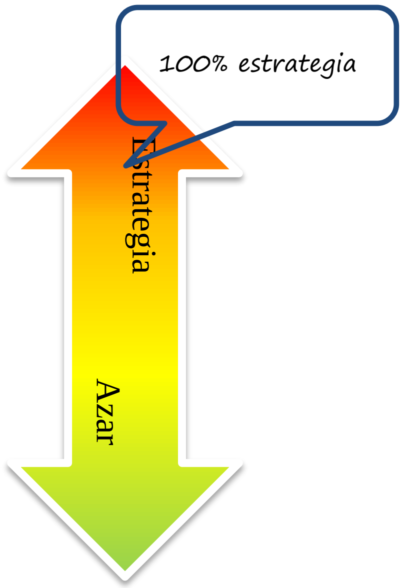
Dos semillas en cada uno de los cuatro agujeros, y el Ruma (agujero más grande) vacío al empezar.

Reglas:
Se escoge un agujero y se recogen las semillas, sembrándolas de una en una hacia la derecha. Si el último agujero en el que se cae es el Ruma, se vuelve a elegir un agujero y se sigue; si es otro agujero y está vacío, has perdido, si ya había semillas, se sigue jugando desde ese agujero.
Para ganar hay que acabar sembrando las ocho semillas en el ruma.

Mancala

Análisis técnico del juego





Estrategias ganadoras

Para resolverlo yo he usado el truco de empezar por el final, o sea, como si ya lo tuviera resuelto, y yendo hacia atrás he construido los movimientos que tendría que hacer desde el principio. Sí que tiene solución, y cuesta diez movimientos conseguirlo.

Estrategias perdedoras

Si empiezas a sembrar desde el primer, segundo o cuarto agujeros, pierdes automáticamente.

Otros descubrimientos (preguntas y respuestas, hipótesis…)

¿La solución es única? Sí que lo es, porque sólo hay una combinación de movimientos que te permita trasladar todas las semillas al Ruma sin perder antes.

Si se juega con cuatro agujeros además del Ruma, y sólo una semilla por agujero, ¿el juego tiene solución? No, pierdes siempre hagas lo que hagas.

Si se juega con cuatro agujeros además del Ruma, y tres semillas por agujero, ¿el juego tiene solución? No, pierdes siempre hagas lo que hagas.

Si se juega con cuatro agujeros además del Ruma, y seis semillas por agujero, ¿el juego tiene solución? Sí. Es difícil pero se puede llegar.

¿Qué sucede si se juega con sólo dos agujeros además del Ruma y diferente número de semillas por agujero? Si se pone una semilla en cada agujero, no tiene solución. Con dos tampoco, con tres tampoco. Con cuatro sí.

¿Por qué variando el número de semillas y agujeros, a veces hay solución y a veces no? No hemos conseguido averiguarlo, pero creemos que el número de agujeros y el número de semillas tienen que tener alguna relación para que haya solución. Sólo algunas combinaciones de agujeros con semillas tienen solución; la mayoría no tienen.

¿Se puede crear alguna notación matemática para este juego que permita resumir esquemáticamente una partida? Claro, podemos usar números para indicar el número de semillas que hay en cada agujero y en el Ruma:

2 2 2 2 0 Situación inicial
2 2 0 3 1
3 3 0 0 2
3 0 1 1 3
3 0 0 2 3

4 0 0 0 4
0 1 1 1 5
0 1 1 0 6
0 0 2 0 6
0 0 0 1 7
0 0 0 0 8 ¡Lo hemos conseguido!

En esta notación nos hemos fijado que los números de cada fila siempre suman 8 porque en total estamos usando 8 semillas.

Yo me he inventado una variante que sería jugar con un Ruma a la derecha, y otro a la izquierda. Puedes sembrar hacia los dos lados, pero en un movimiento todas las semillas hacia el mismo lado. Los Rumas cuentan como casillas los dos. Se trata de conseguir que todas las semillas acaben en los Rumas en la menor cantidad de movimientos posible. La solución sería:

0 2 2 2 2 0 Situación inicial
1 0 2 2 2 1 Sembrando hacia la izquierda
2 0 2 2 0 2 Sembrando hacia la derecha
3 1 0 2 0 2 Sembrando hacia la izquierda
3 1 0 0 1 3 Sembrando hacia la derecha
4 0 0 0 1 3 Sembrando hacia la izquierda
4 0 0 0 0 4 Sembrando hacia la derecha, ¡Lo hemos conseguido!

Igual que en el juego original, los números de cada fila siempre suman 8 porque también estamos utilizando 8 semillas. Además en este caso el número de semillas en cada movimiento va siendo simétrico.

Matemáticas trabajadas en esta investigación:

- Notaciones abstractas para representar una partida.
- Contar, o sea, aritmética.
- Técnica de resolución de problemas: empezar por el final.
- Análisis de variantes.

- Técnica de resolución de problemas: imaginar situaciones similares.

Valoración personal del juego

A mí me ha entretenido y me ha parecido bien. Es complicado al principio porque hay muchas opciones para probar, pero una vez consigues sacar la solución pierde la gracia porque ya sabes cómo se hace. Lo bueno es que puedes variarlo de muchas maneras distintas, pero no todas tienen solución.
En mi tribu todos lo hemos conseguido hacer cada uno por nuestra cuenta sin ayuda, así que al final es fácil. Pero hay que tener un poco de capacidad de cálculo.
Observación: Cuando lo hicimos en clase, al principio pensábamos que era de África, porque todos los mancala son de África, pero el Tchuka Ruma es de La India, por eso hay que ponerlo en la categoría de Mancala, pero en procedencia, Asia en lugar de África.

VII. APUNTES Y REGLAS DE JUEGOS

Se aporta este anexo como fuente de consulta sobre las reglas de los juegos tratados en la asignatura. A partir de su contenido, el o la docente podría elaborar las fichas explicativas a las que nos referimos en el apartado 3.8.1. Proporcionamos también algunos apuntes contextuales sobre el origen de los juegos, así como sugerencias para apoyar los análisis de los alumnos y alumnas en caso de no ocurrírseles de manera autónoma líneas en torno a las que investigar. Hemos tratado de mantener las referencias a lo largo de este anexo bajo el mínimo estrictamente necesario, entendiendo que lo esencial aquí no es realizar un compendio fundamentado, sino recopilar el material suficiente para poder poner en marcha la asignatura propuesta, y referimos a quien quisiera ampliar conocimientos a las lecturas recomendadas, cuyas referencias encontrará en el epígrafe de Bibliografía recomendada (pág. 55 y siguientes).

6.VII.1. Cara o Cruz

Origen: Antiguo. Probablemente Roma, aunque no hay acuerdo al respecto.

Hay constancia de que se jugaba en Roma (Bell, 1979, con el nombre *capita aut navim* o *caput aut navis*, cabeza o nave, por la acuñación habitual del momento, aunque a partir del siglo V, con la adopción de la cruz como nuevo símbolo cristiano, el emperador Teodosio II comenzó a acuñar monedas con cruces en el reverso), si bien el nombre de “cara o cruz” parece provenir de la época colonial del Imperio Español, cuando se acuñaban monedas con efigies imperiales en el anverso y cruces en el reverso, que circulaban por todo el Imperio.

Reglas:

Se arroja una moneda al aire intentando que gire rápidamente y, mientras la moneda está en el aire, o antes de lanzarla, uno de los jugadores dice el lado de su elección: cara, o cruz, tratando de adivinar qué lado quedará visible hacia arriba cuando la moneda caiga, bien en el suelo, bien sobre la mano de un jugador que la atrape. Si el resultado es el que adivinó quien hizo la elección, gana la ronda; si es el contrario, gana el oponente.

Se recomienda la consulta de Steigerwald (2009) y Diaconis, Holmes y Montgomery (2007).

6.VII.2. Lu-lu

Origen: Época indeterminada. Hawái.

La primera fuente bibliográfica sobre el *lu-lu*, cronológicamente hablando, son los escritos de Stewart Culin, etnógrafo americano (s. XIX-XX) que dio a conocer numerosos juegos tradicionales de distintas partes del mundo. A sus observaciones se debe también la transmisión de las reglas del juego.

Se juega con cuatro discos de piedra volcánica (llamados *u-lu*) de aproximadamente 2.5cm de diámetro. Los cuatro discos son indistintos y sin marcas por una cara, mientras que por la otra presentan una marca de una cruz central, y uno, dos, tres y cuatro puntos respectivamente.

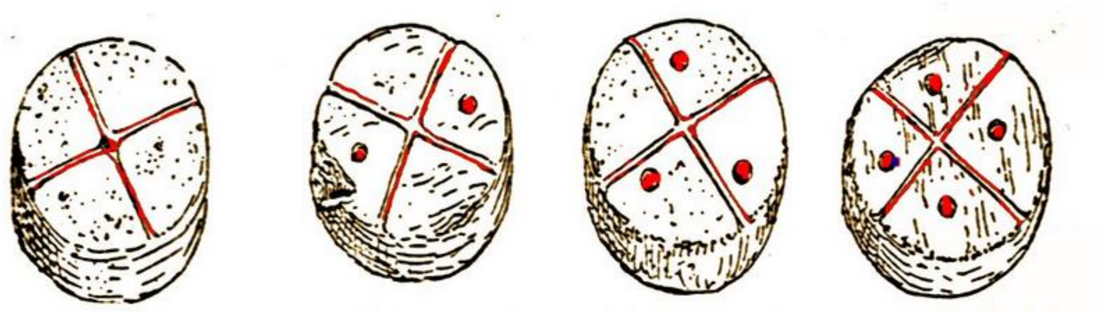


FIG. 7—*U-lu lu-lu*,—stone dice. (No. 21,444, Museum of Archeology, University of Pennsylvania.)

Figura 7.- Discos de piedra *u-lu lu-lu*. Museo Virtual de Juegos Elliott Avedon, Universidad de Waterloo, Canadá.

Reglas:[21]

Puede jugar cualquier número de jugadores. Por turnos, cada jugador sacude los cuatro discos entre sus manos (esta acción se llama *lu-lu* en hawaiano) y los lanza al aire. Los discos se dejan caer al suelo, y el jugador cuenta el número de puntos mostrados en la tirada. Si un jugador obtiene todos los discos boca arriba en un lanzamiento, puntúa 10 puntos y obtiene una tirada extra de los cuatro discos. Si no, vuelve a tirar únicamente los discos que cayeron hacia abajo, y puntúa el número de puntos mostrado. El juego se sucede en rondas, y el primero en alcanzar una puntuación predeterminada, típicamente 100, gana la partida. Una variante es hacer sólo una ronda, siendo el ganador el que obtenga mayor puntuación en esa tirada.

Las tiradas se llaman: *hu-li la-lo*, todas hacia abajo; *hu-ka-hi hu-1i i-lu-na*, una hacia arriba; *e-lu-a hu-li i-lu-na*, dos hacia arriba; *e-ko-lu hu-li i-lu-na*, tres hacia arriba; *e-ha hu-li i-lu-na*, cuatro hacia arriba (Culin, 1899).

Posibles líneas de investigación:

- Haciendo un lanzamiento, ¿cuál es el máximo número de puntos? ¿Qué otras puntuaciones son posibles? ¿De cuántas maneras se puede obtener cada puntaje? ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada puntaje? ¿Y haciendo dos lanzamientos?
- Sin lanzamientos extras, ¿de cuántas maneras se puede alcanzar una puntuación de 50 en exactamente seis lanzamientos?
- Si el primer jugador obtiene una puntuación total de 5, ¿qué probabilidad hay de que el segundo jugador le supere? ¿y de que quede por debajo? ¿Y si el primer jugador obtuvo 8 puntos?
- Considérese un juego más simple, con tres discos marcados con 1, 2 y 3 puntos. Considérese un juego más complejo, con cinco discos marcados del 1 al 5.

Se recomienda la consulta de Culin (1899), McCoy (2004), y McCoy, Buckner y Munley (2007).

[21] Las reglas dadas en Bell (1979, Vol.II, p. 78) y Bell, Cornelius (1988, p. 71) no son demasiado claras con respecto a los discos caídos boca abajo, y parecen desfavorecer al primer jugador, lo cual no acaba de ser del todo coherente en un juego de puro azar –si bien dicha consideración podría deberse a un problema de interpretación–. Las reglas aquí explicadas son las referidas por el Museo Virtual de Juegos Elliott Avedon, de la Universidad de Waterloo, Canadá, en base a las publicaciones de Stewart Culin.

6.VII.3. Ave victrix

Origen: Roma clásica.

Las reglas de este juego, cuyo nombre significa “Salve, vencedor”, han sido reconstruidas a partir de referencias dispersas obtenidas de escritos clásicos (Bell y Cornelius, 1988).

Se trata, probablemente, de uno de los primeros juegos de apuestas con “dados” jugados en Occidente. Como dados se utilizan tabas o astrágalos (huesos del tarso de carneros y animales similares), que presentan cuatro superficies “estables” al caer sobre una mesa o el suelo (o el dorso de la mano). Cada lado recibe el nombre de una tirada concreta y representa una puntuación (Bell y Cornelius, 1988):

Forma del lado	*Nombre latino de la tirada*	*Nombre de la tirada en castellano*	*Puntuación*
Plana	*Canis*	Perro	1 punto
Sinuosa	*Caesar*	Príncipe o César	6 puntos
Cóncava	*Volcanus*	Vulcano	3 puntos
Convexa	*Aquila*	Águila	4 puntos

Tabla 17.- Tiradas de tabas en el *ave victrix*.

Estos protodados, antecesores directos de los dados hexaedros que posteriormente tallarían los romanos en hueso, y llegarían hasta nuestros tiempos con la simple evolución de un balance perfeccionado, presentan el problema evidente de la falta de equiprobabilidad en sus caras, en cuanto a juego de azar desde la perspectiva contemporánea[22]; como elemento para este juego de apuestas y divinatorio en la época romana eran perfectamente válidos.

Reglas:

Juegan cualquier número de jugadores durante diez turnos, y el jugador con la mayor puntuación final acumulada gana la partida (y en la Roma clásica también el dinero de las apuestas). Hay algunas tiradas especiales:

- Obtener *Canis-Caesar-Volcanus-Aquila* da la victoria inmediatamente.
- Cuatro perros hace que el jugador quede eliminado de la partida.
- Cuatro Vulcanos, águilas o Césares puntúan cuatro veces el valor correspondiente, más un bonus de 20 puntos, es decir, 32, 36, 44 puntos, respectivamente.
- Un lanzamiento con tres tiradas iguales conlleva un bonus de 10 puntos.
- Un lanzamiento de dos parejas conlleva un bonus de 5 puntos.

Figura 8.- Astrágalos, mostrando de izquierda a derecha y de arriba a abajo, las caras plana, cóncava, convexa y sinuosa, respectivamente. Museo Pitt Rivers, Universidad de Oxford.

[22] Michael Paull, de Denver, Colorado, EEUU, nos revela en una comunicación personal que, de acuerdo con sus experimentos, las caras plana y sinuosa tienen una frecuencia relativa aproximada de 0.1, mientras que las caras cóncava y convexa tienen una frecuencia relativa aproximada de 0.4.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuáles son las puntuaciones posibles en una sola tirada?
- ¿Puede un jugador obtener exactamente 1000 puntos en diez lanzamientos?
- Suponiendo que las cuatro superficies fueran equiprobables, ¿cuál sería la probabilidad de obtener cuatro perros? ¿Y de obtener las cuatro caras diferentes? ¿Y de obtener tres caras iguales y una distinta? ¿Y de obtener dos parejas?

6.VII.4. Dados

Pese a que los romanos fueron la primera cultura occidental en perfeccionar la fabricación de dados hexaedros y producirlos en masa a raíz de la gran popularidad de los juegos de apuestas en la época, hay numerosos vestigios de dados anteriores. Entre los más antiguos se encuentran los dados tetraedros y ortoedros utilizados en Mesopotamia y Egipto.

Se han hallado también dados icosaedros (de veinte caras) que datan del s. I a.C. y II d.C., si bien se desconoce si su uso era lúdico. Los romanos emplearon dos tipos de dados fundamentalmente: los *tali*, directamente a partir de astrágalos, con sólo cuatro superficies estables marcadas 1/6 y 3/4, y las *tesserae*, con seis caras marcadas 1/6, 3/4 y 2/5, en las caras opuestas. La amplia popularidad de las apuestas utilizando dados hizo que, pese a ser una práctica prohibida en algunos momentos, las legiones romanas los transportaran consigo en sus campañas, extendiéndolos a lo largo y ancho del Imperio.

En el Libro de los Juegos de Alfonso X se dice que él mismo inventó dados de siete y ocho caras (prismas pentagonales y octaedros, respectivamente) para agilizar el juego de las variantes de ajedrez de la época.

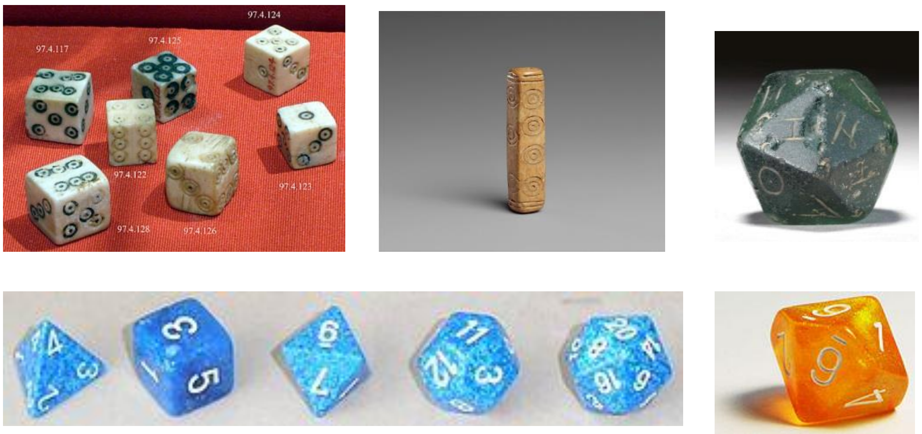


Figura 9.- Dados. De izquierda a derecha y de arriba abajo: *Tesserae* romanas de marfil, 30 a.C. – 330 d.C. Col. Metropolitan Museum of Art, Nueva York; Dado de tipo *tali* romano de marfil, s I-III d.C. Col. Metropolitan Museum of Art, Nueva York; Dado icosaedro romano de vidrio, ca. s. II d.C. Vendido en subasta por Christie's; Dados tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro basados en los sólidos platónicos. Dado trapezoedro pentagonal, D10.

En la segunda mitad del siglo XX los juegos de rol y los juegos de guerra de miniaturas y cartas popularizaron los dados no cúbicos basados en los sólidos platónicos: tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro (D4, D8, D10, D20, respectivamente, en la nomenclatura habitual en juegos de rol y similares), a los que se añadió el D10, un dado de diez caras con forma de trapezoedro pentagonal, usado normalmente en parejas para obtener distribuciones uniformes de números entre el 1 y el 100, considerando uno de ellos como el dígito de las decenas y el otro como el de las unidades.

6.VII.5. Los chinos

Origen: s. XVIII. España (probablemente).

No hay consenso científico acerca del origen de este juego, pero la teoría más extendida es que fue inventado en 1787 por un pastor leonés, Felipe Valdeón Triguero, de Bercianos del Real Camino, para pasar el rato con sus compañeros pastores mientras cuidaban del ganado; con el tiempo y la trashumancia, el juego se habría extendido a otras zonas de la geografía española. Los peregrinos del Camino de Santiago, que pasa por Bercianos, habrían contribuido a extenderlo por el norte de la península. No obstante, el juego existe en otros países, con diferentes números de monedas o chinas, y su versión generalizada a cualquier número de monedas fue objeto de estudio matemático durante el siglo XX.

El nombre debe su origen a los chinos, o chinas, piedrecitas empleadas para jugarlo. En España, en la actualidad, se emplea como fórmula para echar a suertes quién empieza un juego, quién recibe una prenda, quién paga una comida o una ronda de bebidas, etc.

Reglas:

Juegan cualquier número de jugadores y cada uno toma tres piedrecitas o chinas del suelo, pudiendo emplear también garbanzos, monedas pequeñas o cualquier otro elemento similar. En cada ronda los jugadores muestran un puño cerrado, conteniendo ninguna, una, dos o tres chinas, a su elección y en secreto. Los jugadores, por turno y sin poder repetir, intentan adivinar el número de chinas que contienen en total los puños de todos los jugadores; cuando el último ha formulado su apuesta, se abren las manos y se cuenta el total de chinas, ganando el que acertó.

Posibles líneas de investigación:

- Jugando dos jugadores, ¿cuáles son los posibles resultados, y de qué maneras pueden obtenerse? ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?
- Jugando tres jugadores, ¿cuáles son los posibles resultados, y de qué maneras pueden obtenerse? ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?

6.VII.6. Pares o nones

Origen: Desconocido.

Pares o nones es un juego de dedos derivado del antiquísimo juego de *morra*, que fue muy popular en la Roma clásica si bien pudo haber nacido en Egipto, y sigue jugándose actualmente en Cerdeña, Grecia, Teruel, Chipre, Dalmacia… Se suele usar como fórmula para echar a suertes algo.

Reglas:

Juegan dos jugadores. Uno elige “pares” y el otro, “nones”. A la cuenta de tres, ambos presentan su mano ágil mostrando bien el dedo índice extendido, bien el índice y el corazón. Se cuenta entonces el total de dedos mostrados, y si son dos o cuatro, gana el jugador que llevaba los pares, mientras que si son tres, gana el que llevaba los nones.

Una variante más extendida en España admite a los jugadores sacar la mano mostrando cualquier número de dedos o ninguno. Igualmente se recuentan los dedos y gana quien llevara la opción resultante. El juego de los chinos se puede considerar una versión de esta variante, en la que en lugar de utilizar dedos se emplean hasta un máximo de 3 chinas, y las apuestas son sobre el número concreto en lugar de sobre si es par o non.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuáles son los posibles números de dedos presentados? ¿De qué manera se puede llegar a ellos? ¿Tiene ventaja quien elige pares o quien elige nones?

Figura 10.- "Il giuoco della morra", "El juego de la morra". Hermanos Alinari. La fotografía, tomada en Nápoles en la década de 1890, muestra a unos niños callejeros jugando a morra por parejas.

- Si en lugar de extender únicamente el índice (obligatorio) y el corazón (opcional), se admite sacar la mano entera mostrando de 0 a 5 dedos, ¿cambia de alguna manera la proporción entre resultados pares y nones? ¿Alguna de las dos elecciones tiene ventaja?

6.VII.7. Piedra-papel-tijera

Origen: Antiguo. Asia Oriental

Este juego de dedos data, presumiblemente, de la Dinastía Han china (206 aC - 220 dC), si bien se extendió y popularizó de manera general desde Japón, con el nombre jan-ken-po (じゃんけんぽん). Marco Polo lo transportó a Europa, y la inmigración lo llevó de Asia al continente americano. Es conocido en la actualidad en diversas partes del planeta con multitud de nombres, pero todas las versiones siguen unas reglas únicas que han dado origen a numerosísimas mecánicas en distintos tipos de juegos. Se suele emplear como fórmula para decidir diferentes cuestiones.

Si bien a nivel infantil el juego se considera tan aleatorio como echar algo a suertes mediante cara o cruz, en el ámbito matemático se conoce tradicionalmente que el jugador óptimo es aquel cuya jugada es impredecible por completo, y por tanto juega de manera perfectamente aleatoria, siendo imposible obtener ventaja alguna sobre él. En este sentido el equilibrio de Nash ha sido un aspecto clave durante décadas. Enfoques contemporáneos han estudiado cómo vencer al jugador humano subóptimo, asumido que no juega de manera aleatoria, obteniendo interesantes resultados en torno a la repetición de patrones psicológicos, la imitación inconsciente de gestos, y otros. Por tanto, el juego podría no ser tan aleatorio como en principio parece.

Reglas:

Pueden jugar varios jugadores a la vez. Los jugadores dicen juntos "¡piedra, papel o tijera!" y al acabar muestran al tiempo una mano en la que indican, con el gesto, el arma que han elegido: piedra, con el puño cerrado, papel, con todos los dedos extendidos y la palma normalmente hacia abajo, o tijera, con los dedos índice y corazón extendidos y separados formando una "V" y el resto recogidos. El objetivo es vencer a los competidores utilizando un arma superior. La piedra vence a la tijera, rompiéndola; el papel vence a la piedra, envolviéndola; la tijera vence al papel, cortándolo. Entre dos jugadores se suele jugar al mejor de tres o cinco rondas.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuál es la probabilidad de ganar usando piedra? ¿Cuál es la de no ganar?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar usando tijeras? ¿Cuál es la de no ganar?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar usando papel? ¿Cuál es la de no ganar?
- ¿Cuáles son las probabilidades de victoria, derrota y empate, utilizando cada uno de los gestos?
- Construir un diagrama de barras que muestre las probabilidades de victoria, derrota y empate de cada uno de los gestos.

Recomendamos encarecidamente la lectura de Cook, Bird, Lünser, Huck y Heyes (2012) y Wang, Xu y Zhou (2014).

6.VII.8. Piedra-papel-tijera-lagarto-spock

Origen: Finales s. XX. EEUU.

En piedra-papel-tijera, las probabilidades de victoria, derrota y empate en enfrentamientos con jugadores óptimos (aleatorios) son de 1/3. Que la probabilidad de empate sea tan alta puede ser un "problema" en cuanto a juego decisorio, con lo que se han desarrollado diversas extensiones del juego básico. Añadir más gestos reduce la probabilidad de empate al tiempo que aumenta la complejidad del juego. Mientras el número total de gestos siga siendo impar y las reglas de decisión entre gestos estén correctamente definidas, el juego sigue estando bien balanceado.

Piedra-papel-tijera-lagarto-spock añade dos elementos: lagarto, con las yemas de los dedos juntas como manejando una marioneta de calcetín, y spock, realizando el saludo vulcaniano de la serie de ciencia ficción Star Trek, con los dedos en forma de V poniendo el meñique y el anular juntos, el índice y el corazón juntos, y el pulgar separado del resto[23]. Esta variante fue desarrollada por Sam Kass y Karen Bryla (como piedra-papel-tijera-spock-lagarto) en los años 90, y popularizada internacionalmente por la sitcom The Big Bang Theory en 2008. Al constar de cinco gestos la probabilidad de empate se reduce a 1/5, mientras que las probabilidades de victoria y derrota son de 2/5 cada una (y por tanto, la probabilidad de decisión en una ronda es de 4/5, frente a los 2/3 en piedra-papel-tijera). Esta es la extensión del juego clásico más conocida –y jugable, cuestión importante–.

Figura 11.- Piedra-papel-tijera-lagarto-spock: gestos y reglas de decisión.

David C. Lovelace es responsable del diseño de variantes con 7 gestos (añadiendo fuego, aire, agua y esponja al juego clásico), 9 gestos (añadiendo pistola y humano al anterior), 11 (añadiendo lobo y

[23] No todo el mundo es capaz de realizar el saludo vulcaniano de forma natural. Sin embargo, esta capacidad es entrenable.

demonio), 15 (rayo, dragón, árbol, serpiente) y 25. Por último, tras un año entero de dedicación al proyecto, publicó en 2006 la versión definitiva (esperamos) con 101 gestos, conocida como RPS-101. Si alguien fuera capaz de jugarla, la probabilidad de empate sería 1/101, lo cual es inferior al 1%; una gran ventaja… si bien recordar los 101 gestos manuales y las 5050 reglas de decisión se antoja demasiado complicado para el común de los mortales, aunque cierto es que los grafos son espectacularmente bellos (véase Anexo VIII).

Reglas:

Pueden jugar varios jugadores a la vez. Los jugadores dicen juntos "¡piedra, papel, tijera, lagarto, Spock!" y al acabar muestran al tiempo una mano en la que indican el gesto que han elegido. Gana el jugador cuyo gesto vence a los de los demás. Las reglas de decisión son: tijeras cortan papel, papel cubre piedra, piedra aplasta lagarto, lagarto envenena Spock, Spock rompe tijeras, tijeras decapitan lagarto, lagarto come papel, papel desautoriza Spock, Spock vaporiza piedra, y [como siempre ha hecho…] piedra destroza tijeras.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuáles son las probabilidades de victoria, derrota y empate, utilizando cada uno de los gestos? ¿Cuáles son las probabilidades de decisión (no empate)?
- Construir un diagrama de barras que muestre las probabilidades de victoria, derrota y empate de cada uno de los gestos.
- ¿Cuáles serían las probabilidades de victoria, derrota y empate en la extensión a 7 gestos? ¿Y a 9? ¿Y a 11? ¿Y a un número impar de gestos cualquiera? ¿Qué ventajas y qué inconvenientes presentan las extensiones con un número mayor de gestos? ¿Cuántas reglas de decisión hay en estas extensiones?

6.VII.9. Pong Hau K'i

Origen: China.

Este es un sencillo juego de posición similar al tres en raya, en el que si ambos jugadores juegan de manera óptima, no es posible la victoria. Aprender a jugar consiste por tanto en aprender a evitar los errores y a forzar el empate, pues sí hay una estrategia que evita perder (Hall, 2007). En Corea el juego es conocido como *ou-moul-ko-no*.

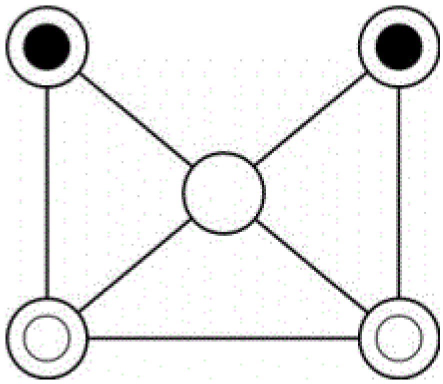


Figura 12.- Tablero y posición inicial de *pong hau k'i*.

Reglas:

Juegan dos jugadores, cada uno de los cuales maneja dos fichas. La situación inicial del tablero se muestra en la Figura 12. Los jugadores mueven, por turnos, una de sus fichas a lo largo de una línea a un espacio adyacente vacío, tratando de bloquear los movimientos del oponente.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es mejor jugar con las blancas o con las negras?
- ¿Es mejor empezar la partida, o ser el segundo?
- ¿Cuántas posiciones diferentes existen? ¿Cuáles son ganadoras? ¿Cuáles son perdedoras? ¿Cómo se llega a cada una de ellas?

- ¿Se puede forzar la victoria? Si es así, ¿cómo? ¿Se puede forzar la derrota? Si es así, ¿cómo? ¿Se puede forzar el empate? Si es así, ¿cómo?
- Diseña una notación abstracta que permita representar el estado de la partida y los movimientos que se hacen. Intenta escribir el árbol de todas las posiciones posibles.

Sugerimos la lectura de Hall (2007) y Serrano (2006).

6.VII.10. Mu torere

Origen: Nueva Zelanda.

Este es uno de los pocos juegos de mesa conocidos de Oceanía. No hay acuerdo acerca de si el *mu torere* era un juego original maorí o derivó de los juegos introducidos en las islas por los colonos europeos (Best, 1976). No obstante, es el único juego al que los maoríes jugaban durante la época colonial, aunque las damas han ido abriéndose paso lentamente. Es más popular en la costa este de la Isla Norte de Nueva Zelanda, donde reside la tribu Ngati Porou (Bell, 1979, Vol. II, p. 150).

El tablero consiste en una estrella de ocho puntas, cada una de las cuales es una casilla de juego, llamadas *kewai*, y una casilla central circular, llamada *putahi*. Los jugadores emplean cuatro piezas cada uno, llamadas *perepere*.

Como ocurre frecuentemente en los juegos de bloqueo, una vez un jugador conoce la estrategia y es capaz de jugar sin cometer errores, no es posible ganarle. Por ello, las partidas entre dos jugadores óptimos, siempre acaban en empate. La primera victoria de un colono sobre un jugador maorí está registrada en 1850.

Reglas:

Juegan dos jugadores. Inicialmente los cuatro *perepere* de un jugador se ubican en cuatro *kewai* adyacentes, y los cuatro del otro jugador, en los *kewai* restantes, como indica la Figura 13, dejando el *putahi* vacío. El objetivo es bloquear los movimientos del contrario. Los jugadores, por turnos, mueven uno de sus *perepere*; los posibles movimientos son:

- De un *kewai* a un *kewai* adyacente,
- Del *putahi* a un *kewai*,
- O de un *kewai* al *putahi*, siempre que uno de los *kewai* adyacentes, o ambos, esté(n) ocupado(s) por una pieza (o sendas) del rival.

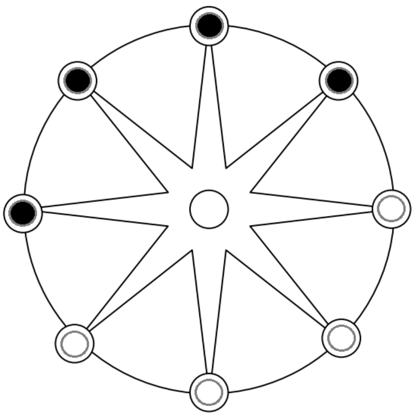


Figura 13.- Tablero y posición inicial de *mu torere*.

Una variante contempla que la restricción sobre la tercera posibilidad de los movimientos sólo se aplique durante los primeros dos turnos de la partida de cada jugador. Existen versiones del juego que emplean estrellas de nueve puntas como tablero.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es mejor empezar la partida, o ser el segundo? ¿Es mejor jugar con negras o con blancas?
- ¿Cuántos movimientos son posibles en cada turno?
- ¿Es mejor controlar el *putahi*, o que lo controle el rival?
- ¿Qué ocurre cuando un jugador controla dos *kewai* adyacentes y el *putahi* (formación en V)?

- ¿Qué conviene hacer cuando el rival ocupa el *putahi*?
- ¿Desde qué posiciones es posible conseguir una victoria? ¿Se puede forzar un empate?
- Diseña una notación abstracta que permita registrar el estado y el desarrollo de una partida y sus movimientos.
- Inventa juegos similares que empleen un tablero con forma de estrella de seis puntas y *putahi* con tres fichas para cada jugador, y estrella de cuatro puntas (un cuadrado) con dos fichas por jugador. ¿Se puede ganar a estos juegos?

Recomendamos consultar: Bell (1979), Best (1976) y Jelliss (1999).

6.VII.11. Juegos de molino

Origen: Extremadamente antiguo. Geográficamente indeterminado.

A esta familia pertenecen el tres en raya, la danza de los tres hombres, la variante africana *achi*, la danza de los cinco hombres, la danza de los seis hombres, la danza de los siete hombres, la danza de los nueve hombres y la danza de los doce hombres. Los tableros son morfológicamente semejantes, en orden creciente de complejidad, y se juega con diferente número de fichas, si bien las reglas y el objetivo son idénticos.

El más conocido de estos juegos, obviando el tres en raya o alquerque de tres, es la danza de los nueve hombres, también llamado alquerque de nueve, *mill*, *Morris*, *nine men's Morris*… Se trata de uno de los juegos más antiguos del mundo, habiéndose jugado durante miles de años en las más diversas culturas del mundo, desde la antigua China y Egipto hasta Roma, Troya y la Irlanda neolítica, si bien se desconoce su origen exacto. Se han encontrado numerosos tableros tallados en sillares y esculpidos en piedra en catedrales y abadías de Inglaterra, Gales, Castilla, etc. Algunos pueblos atribuyeron significado esotérico al símbolo de los cuadrados concéntricos. Parece que fueron los primeros comerciantes griegos y fenicios quienes lo introdujeron en Europa, donde no se extendió hasta el siglo XIV, si bien gozó de gran popularidad durante la Edad Media.

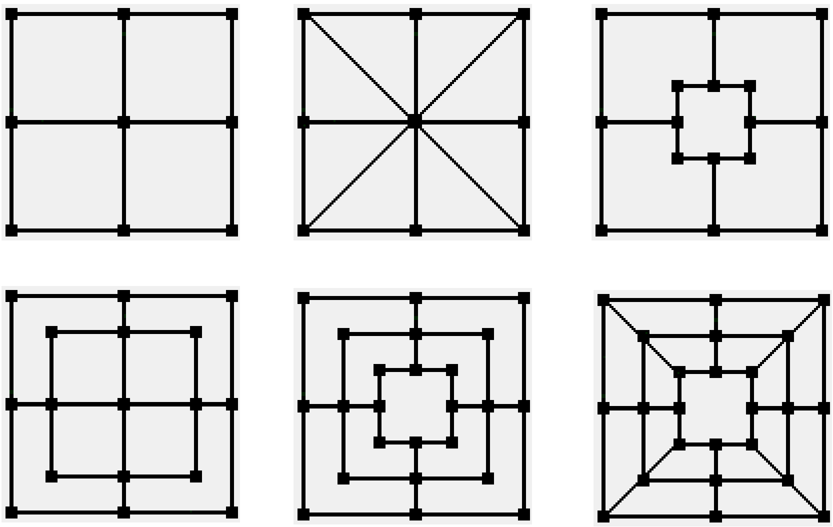


Figura 14.- Juegos de molino. De izquierda a derecha y de arriba a abajo, tableros para: danza de los tres hombres; tres en raya y *achi*; danza de los cinco y de los seis hombres; danza de los siete hombres; danza de los nueve hombres; danza de los doce hombres.

Reglas para la danza de los nueve hombres:

Juegan dos jugadores. Al inicio de la partida el tablero está vacío y cada jugador tiene sus nueve piezas a un lado.

Durante la primera fase del juego, los jugadores toman turnos para introducir una de sus piezas en cualquier casilla vacía. Una vez colocadas, las piezas no se pueden mover durante esta fase. En todo momento en que un jugador forme una alineación de tres piezas en casillas adyacentes conectadas por una línea (esto se llama *molino*, o *mill*), retirará una de las piezas de su rival a su elección; no podrá retirar una pieza del rival que esté formando un *molino*, salvo que no haya otra opción. En la danza de los nueve hombres los *molinos* no se pueden realizar en diagonal.

Una vez las nueve piezas de ambos jugadores están sobre el tablero, da comienzo la segunda fase del juego. En esta fase, también por turnos, los jugadores desplazan una de sus piezas a una casilla vacía adyacente conectada por una línea. De nuevo, cuando consigan formar un *molino*, podrán capturar una pieza del rival que no forme parte de un *molino* a su vez, salvo que no haya otra posibilidad. Los turnos se suceden de esta manera, y gana el jugador que consiga imposibilitar el movimiento de todas las piezas del rival, o bien logre capturar tantas piezas del oponente como para dejarle con sólo dos, de forma que ya no podría realizar ningún *molino*. Cuando a un jugador le quedan únicamente tres piezas, se suele aplicar la regla de que puede mover sus piezas a cualquier casilla vacía, sin la restricción de tener que hacerlo a una casilla adyacente conectada por una línea; esto ayuda a compensar la desventaja numérica.

Algunas variantes de las reglas impiden reformar *molinos* recién deshechos, de manera que hay que dejar pasar al menos un turno entre la ruptura de un *molino* y su reconstrucción. Nótese que el tres en raya, hermano menor de la familia, finaliza inmediatamente tras la primera vez en que uno de los jugadores completa un molino.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es mejor empezar la partida, o ser el segundo?
- ¿Cuál es la mejor posición para el primer jugador?
- ¿Cuántas posiciones diferentes hay tras el primer turno de cada jugador?
- ¿Cuántas fichas como máximo pueden estar en el tablero sin que ninguna forme un molino?
- ¿Se puede recorrer el patrón geométrico del tablero, a lo largo de las líneas, sin pasar dos veces por el mismo lugar? Si es así, ¿cómo?

6.VII.12. Seega moderno

Origen: Egipto.

El *seega* clásico es un juego con una larga tradición que se remonta al Antiguo Egipto. Emplea un tablero cuadrado con una cuadrícula de 5x5 casillas y 12 fichas por jugador, y constituye una variación curiosa de los juegos de cinco en línea habituales. Sigue jugándose en la actualidad en Somalia, Sudán y las zonas rurales de Egipto. Sin embargo se desarrolló una variante de este juego más simple, con un tablero menor, que rápidamente se extendió por el norte de África.

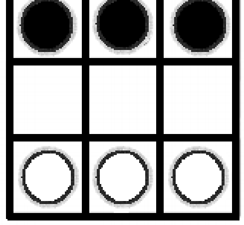


Figura 15.- Tablero y posición inicial del *seega* moderno.

Reglas:

Juegan dos jugadores, cada uno de los cuales controla tres fichas. La posición inicial en el tablero se muestra en la Figura 15. Por turnos, los jugadores mueven una de sus fichas en cualquier dirección ortogonal una o dos casillas, pero sin pasar por encima de otras fichas. Gana el primero que consiga alinear sus tres fichas horizontal, vertical o diagonalmente, excluyendo la línea horizontal de inicio propia.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuántos movimientos de apertura son posibles?
- ¿Cuántas posiciones diferentes hay tras dos turnos?
- ¿Existe un movimiento de apertura óptimo y una respuesta óptima?
- Diseña una notación matemática abstracta que permita describir el desarrollo de una partida.

6.VII.13. Sz'kwa

Origen: Taiwán

Este es un juego de bloqueo con captura muy popular entre los niños chinos, que lo suelen jugar trazando el tablero en el suelo, usando piedrecitas o judías como fichas. También se conoce como *juego de las cuatro direcciones*. El tablero de *sz'kwa* parece haber sido de un juego de cruz y círculo modificado para pasar de ser juego de carreras a juego de posición. Consta de dos circunferencias concéntricas divididas en cuadrantes, a lo que se añaden sendas semicircunferencias en los cuatro puntos cardinales de la circunferencia grande exterior; en total hay 21 intersecciones que sirven como casillas de juego.

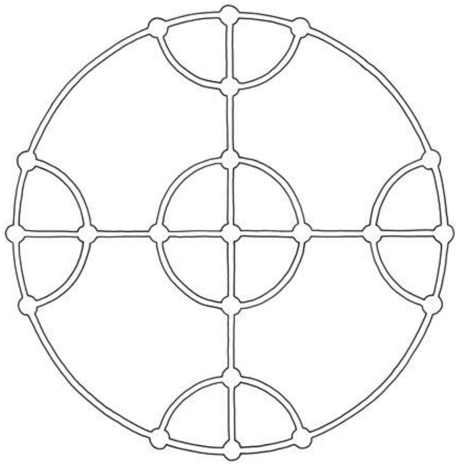


Figura 16.- Tablero de *sz'kwa*.

El *sz'kwa* guarda algunas similitudes con el *go*. Ambos son juegos de posición de origen chino, si bien en el *sz'kwa* el objetivo es capturar las fichas del oponente entre las propias mientras que en el *go* los jugadores despliegan sus fichas tratando de capturar territorio y no fichas rivales. Bell y Cornelius (1988) sugieren que el *sz'kwa* podría haber derivado de un juego de cruz y círculo (véase U.3), pasando de ser un juego de carreras, también populares en Asia desde tiempos remotos, a uno de posición.

Reglas:

Juegan dos jugadores. Al inicio de la partida el tablero está vacío (Figura 16) y cada jugador tiene sus 20 fichas junto a él. Por turnos, cada jugador introduce una de sus fichas en una de las intersecciones. Si una ficha queda totalmente rodeada por fichas del rival, es capturada. Si un grupo de fichas queda totalmente rodeado por fichas del rival, todo el grupo es capturado a la vez. Si un jugador introduce una ficha de forma que queda rodeada por fichas del rival, bien en solitario, bien como parte de un grupo, la ficha introducida o el grupo son capturados. El juego termina cuando uno de los jugadores no tiene más fichas para poner en el tablero, o cuando no hay ninguna intersección vacía en la que pueda introducir una ficha sin que ésta sea capturada. El ganador es el jugador que haya capturado más piezas del rival. Ninguna ficha puede moverse del tablero una vez ha sido colocada.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es mejor empezar la partida, o ser el segundo?
- ¿Existe un movimiento de apertura óptimo y una respuesta óptima?
- ¿Cuántas posiciones diferentes hay tras el primer turno de cada jugador?

- ¿Cuántas fichas como máximo pueden estar en el tablero sin que ninguna sea atrapada?
- ¿Se puede recorrer el patrón geométrico del tablero, a lo largo de las líneas, sin pasar dos veces por el mismo lugar? Si es así, ¿cómo?

6.VII.14. Juego real de Ur

Origen: Mesopotamia. 3000 a.C. aproximadamente.

Este juego fue hallado en las Tumbas Reales de Ur (en la actualidad Irak). No sobrevivió registro de sus reglas, así que las que conocemos en la actualidad son reconstrucciones especulativas realizadas a partir de cómo se jugaba un juego similar en el s. II a.C. Según los expertos, se trataría de un juego de carreras desarrollado en el tablero de la Figura 17, en el que cada jugador manejaría siete peones en base al resultado del lanzamiento de tres dados tetraedros especiales.

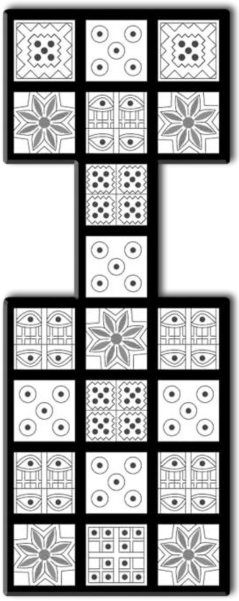


Figura 17.- Tablero de Juego real de Ur.

Reglas:

Juegan dos jugadores, que, por turnos, lanzan los dados piramidales para ver cuántas casillas pueden mover. Éstos tienen dos vértices marcados, y dos sin marcar. Tres vértices sin marcar hacia arriba valen 4 puntos; un vértice son marcar, 1 punto; tres vértices marcados, 5 puntos; en estos tres casos se obtiene un turno extra; dos vértices sin marcar hacia arriba, 0 puntos y se acaba el turno. Todos los peones comienzan el juego fuera del tablero, y sólo pueden entrar en un lanzamiento de 5 puntos, moviendo tantas casillas como indique el siguiente lanzamiento. Cada jugador tiene un recorrido propio, de forma que sus peones sólo pueden coincidir con los del rival en unas casillas determinadas (diferentes fuentes proporcionan diferentes versiones de los recorridos, ver Figura 18). Cuando un jugador tiene varios peones sobre el tablero, decide cuál desea mover con cada lanzamiento. Un jugador no puede mover un peón a una casilla ocupada por otro peón suyo; si mueve uno de sus peones a una casilla ocupada por un peón rival, éste es capturado y debe recomenzar el recorrido. Esta restricción y regla de captura, no aplican a las casillas marcadas con rosetas ni a la última casilla, que se consideran seguras. La última casilla debe alcanzarse con una tirada exacta, y a continuación un peón que se encuentre en ella podrá abandonar el tablero con una tirada de 4 ó 5 puntos. Gana el primer jugador que haga pasar sus siete peones por todo el tablero alcanzando la meta.

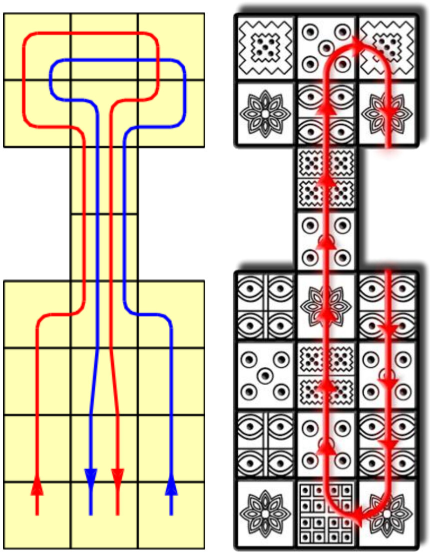


Figura 18.- Dos posibles interpretaciones del recorrido de las fichas en el Juego real de Ur.

Posibles líneas de investigación:

- Análisis del árbol de posibilidad de los dados tetraedros. Diferentes puntajes, tablas de frecuencias y probabilidades de obtenerlos.

6.VII.15. Senet

Origen: Egipto. 3500 a.C. aproximadamente.

El *senet* también es conocido como juego de las treinta casillas. Se hallaron tableros y fichas en las tumbas de faraones de distintas dinastías, pero no registros escritos de reglas, por lo cual las diferentes reglas que conocemos actualmente son reconstrucciones realizadas a partir de estudios. Cada jugador maneja entre cinco y diez peones y como elemento de azar se utilizan tablillas planas o bien dados en forma de ortoedro, como los *tali* romanos. En el *senet* se perciben similitudes con los juegos de carreras romanos posteriores con los que se relaciona al *backgammon*. El *senet* se ha considerado un juego mágico, y a causa de la creencia egipcia en el determinismo, se consideraba que los jugadores exitosos contaban con la protección de los dioses. Algunos autores encuentran en el juego referencias al Libro de los Muertos, representando el Juicio de Osiris.

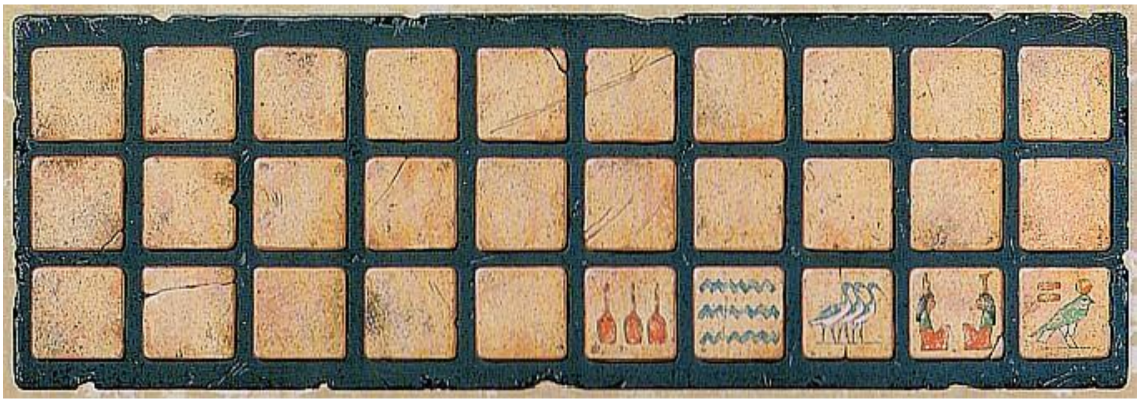


Figura 19.- Tablero de *senet*.

Reglas:

Presentamos una de las variadas y muy diferentes reconstrucciones.

Juegan dos jugadores, cada uno de los cuales maneja 5 peones. El orden de las casillas en el tablero es del 1 al 10 de izquierda a derecha en la fila superior, del 11 al 20 de derecha a izquierda en la fila intermedia, y del 21 al 30 de izquierda a derecha en la fila inferior, siendo éste el recorrido que deben realizar las fichas. Gana el jugador que consiga sacar a sus peones del tablero en primer lugar. Inicialmente se disponen los peones alternados en las diez casillas de la fila superior.

Por turnos, los jugadores lanzan cuatro tablillas planas, negras por un lado y blancas por el otro. El número de caras blancas caídas hacia arriba indica el número de casillas que se puede mover un peón; si se obtienen todas las caras negras hacia arriba, el resultado es de 6. Siempre que se obtenga 1, 3 ó 6, el jugador retiene el turno y tras mover realiza otra tirada, sucesivamente hasta obtener 2 ó 4.

Un jugador no puede mover uno de sus peones a una casilla ya ocupada por un peón suyo. Sí puede hacerlo a una casilla ocupada por un peón del rival, en cuyo caso se produce una captura, que consiste en intercambiar la posición de las fichas captora y capturada. Si dos fichas de un mismo jugador están en casillas consecutivas, se protegen mutuamente y no pueden ser capturadas por el rival; cuando son tres las fichas consecutivas del mismo jugador, forman una barrera que el rival no puede atravesar con sus fichas, pero el propio jugador sí. Cuando no es posible avanzar hacia adelante, bien porque alguna barrera lo impida, bien porque el destino esté ocupado por un peón propio o por un peón ajeno que se encuentra protegido, se deberá mover obligatoriamente hacia atrás, si es posible.

Las casillas 26, 28, 29 y 30 son especiales: los peones que se encuentren en ellas están protegidos y no pueden ser capturados; los que se encuentren en las tres últimas casillas necesitan una tirada exacta para salir del tablero; un peón que se encuentre en la casilla 26 debe moverse tan pronto le sea posible. Si un peón cae en la casilla 27, es inmediatamente trasladado a la 15.

Posibles líneas de investigación:

- Análisis del árbol de posibilidad de los resultados de las tablillas. Diferentes puntajes, tablas de frecuencias y probabilidades de obtenerlos.

6.VII.16. Nyout

Origen: Corea. Antiguo.

El *nyout* o *yut nori* es un juego de carreras de cruz y círculo de origen coreano que combina azar y decisiones tácticas. Fue descrito por primera vez por el etnógrafo Stewart Culin. Probablemente se jugaba ya antes de 1100 a.C. (Bell, Cornelius, 1988). Antiguamente se utilizaba como instrumento de adivinación, pero en la actualidad es un juego de tablero tradicional, jugado especialmente durante las celebraciones del año nuevo coreano y unido a las apuestas. El tablero consiste en 29 casillas dispuestas en forma de cruz y círculo, con los cuatro puntos cardinales y el centro marcados distintivamente. El Norte tiene la marca *Ch'ut* (salida). Las piezas, fabricadas tradicionalmente en madera, piedra o marfil, se llaman *mal* y representan caballos. Como dados se utilizan cuatro tablillas de madera llamadas *pam-nyout* de unos 2cm de largo, planas y blancas por un lado y convexas y ennegrecidas por el otro.

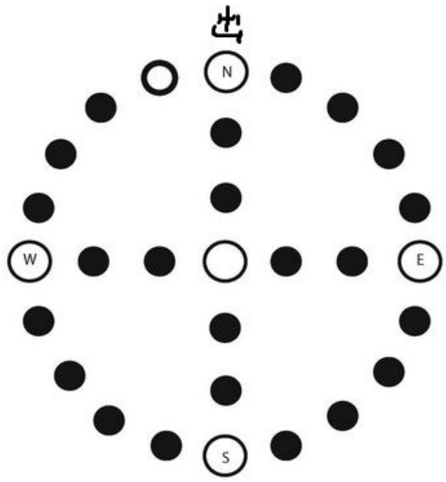


Figura 20.- Tablero de *nyout*.

Entre los indios norteamericanos era popular un juego similar llamado *owasakut*, o *zohn ahl*, derivado del *nyout*, que habría sido llevado al continente por tribus asiáticas a través del estrecho de Bering, de acuerdo con los historiadores. Los mayas también jugaron variantes de cruz y círculo.

Reglas:

Si juegan dos jugadores, cada uno controla cuatro *mal* o caballos. Si juegan tres, cada uno controla tres caballos. Si juegan cuatro, cada uno controla dos, los que se sientan enfrentados son compañeros y pueden mover indistintamente sus piezas o las de su compañero. Todas las piezas entrarán al tablero por la casilla siguiente al Norte en sentido antihorario, y acabarán saliendo por la casilla del Norte.

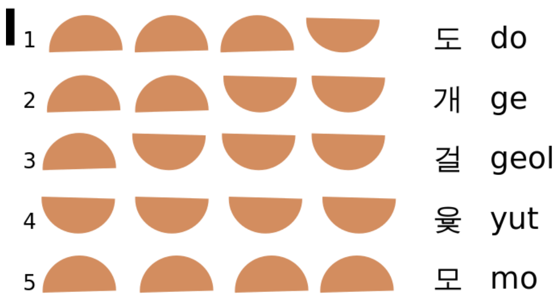


Figura 21.- Nombre de las tiradas y puntajes en el lanzamiento de las *pam-nyout*.

Por turnos, los jugadores lanzan las tablillas: el número de *pam-nyout* que queden con la cara plana hacia arriba será el número de casillas que un jugador puede mover una de sus piezas, siempre en sentido antihorario. La figura contigua indica el nombre de los lanzamientos. Si todas caen con la cara plana hacia abajo, se pueden mover 5 casillas. Si se obtiene un 4 ó un 5, el jugador vuelve a tirar antes de mover, y dispondrá de las puntuaciones para repartirlas como quiera entre varias fichas, o acumularlas para mover la misma (un jugador que obtenga 4, 5, 1, puede mover un caballo diez casillas, o bien un caballo nueve casillas y otro una, o bien seis y cuatro, o bien cinco y cinco, o bien 4, 5 y 1). El jugador puede elegir si mueve una pieza (o piezas) que ya esté en el tablero, o introduce una pieza nueva por la casilla de entrada. Si un caballo acaba un movimiento en uno de los tres puntos cardinales W, S, E, el jugador puede decidir tomar el camino alternativo a través de la casilla central, como atajo o para evitar caballos rivales, si bien no está obligado a ello.

Cuando un caballo acaba un movimiento sobre una casilla en la que ya hay un caballo del mismo jugador (o su compañero), los dos se pueden unir y a partir de ese momento moverse como una sola pieza; igualmente se pueden unir tres o cuatro caballos. Si una pieza acaba un movimiento en una casilla ocupada por una pieza rival, ésta es sacada del tablero y deberá volver a empezar el recorrido siempre que la pieza recién llegada esté compuesta por al menos tantos caballos como la que ya estaba en la casilla, y el jugador actual recibe un turno extra; una pieza no puede acabar su movimiento en una casilla que esté ocupada por un rival con una pieza de orden superior. Gana el primer jugador que consiga sacar todos sus caballos por la casilla Norte tras haber recorrido el tablero.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuáles son todos los caminos posibles para una pieza? ¿Cuáles son sus longitudes?
- ¿Cuál sería la partida más rápida posible?
- Jugando solo, ¿cuántas secuencias de tiradas se pueden hacer sin que ninguna pieza acabe en la casilla W?
- Estudia de qué manera se pueden obtener cada una de las puntuaciones: *do*, *ge*, *geol*, *yut* y *mo*. Asumiendo equiprobabilidad entre lado plano y lado curvado, realiza una tabla de frecuencias y un diagrama de barras para representar la frecuencia de aparición de cada tirada.
- Suponiendo que el jugador inicial tire 4, 5, 4, 5, 4, 2, ¿cuántas elecciones posibles de movimientos tiene? ¿Alguna de ellas es óptima?

6.VII.17. Pachisi

Origen: La India. En torno al siglo IX.

El *pachisi* es un juego antiguo del grupo de cruz y círculo, considerado el juego de mesa nacional de La India y Pakistán, en el que el tablero ha perdido su círculo para dar paso a un espacio cuadrado central. Deriva del *chaupar*, un juego similar más antiguo, al que el emperador mogol Akbar el Grande (reinado 1556-1605) jugaba sentado en medio de un tablero gigante con esclavas de su harén haciendo de fichas[24]. En el siglo XIX surgieron versiones occidentalizadas con los nombres de *parcheesi* en Estados Unidos, *ludo* en Reino Unido y Escandinavia, parqués en Colombia, parchís en España… El *patolli* es un juego íntimamente relacionado (camino doble en cada brazo en lugar de triple), jugado por los aztecas y otros pobladores precolombinos. Todos estos juegos combinan táctica (juicio y pericia) con azar.

[24] El patio del palacio de Akbar I el Grande en Fatehpur Sikri, Agra, en el que se jugaba al *chaupar* y al *pachisi*, tiene, por cierto, una evocativa similitud con el Patio de Los Leones de La Alhambra de Granada.

Los tableros de *pachisi*, habitualmente fabricados en tela, tienen forma de cruz dividida en 96 casillas dispuestas en caminos triples de 8 a lo largo de los cuatro brazos, con un espacio central cuadrado llamado *char-koni* (trono). Doce de estas casillas están marcadas como “castillos”, y en ellas una ficha está libre de peligro. Cada jugador emplea cuatro fichas, que tradicionalmente tienen forma de colmena y son de color negro, verde, rojo y amarillo. Se utilizan seis cauris para determinar los movimientos: el número de bocas hacia arriba indica las casillas que es posible mover una ficha: de 2 a 5 bocas, de 2 a 5 casillas, respectivamente; 6 bocas hacia arriba, 6 casillas y tirada extra; 1 o ninguna boca, 10 y 25 casillas respectivamente y tirada extra en ambos casos. El nombre del juego, *pachisi*, deriva de la palabra para veinticinco en hindi.

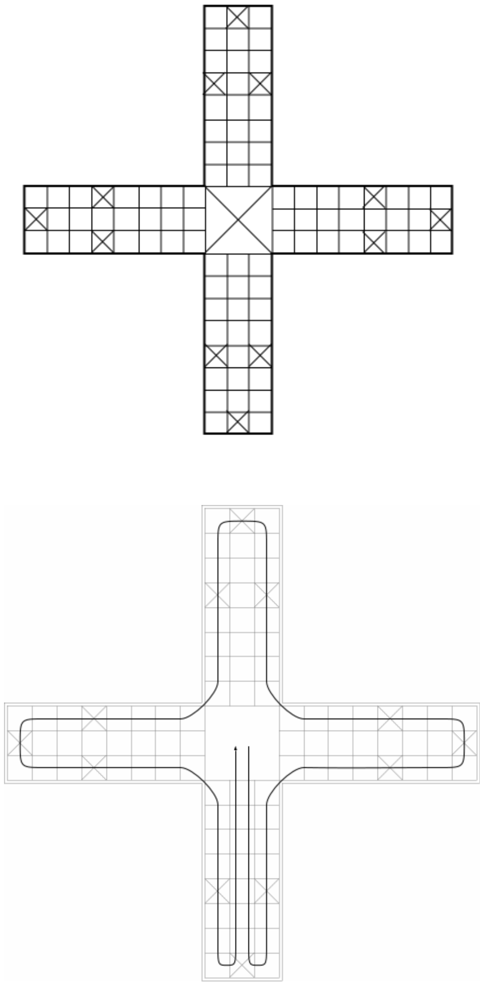


Figura 22.- Tablero de *pachisi* y recorrido de las fichas del jugador sur.

Reglas:

Juegan habitualmente cuatro jugadores en equipos de dos, situados enfrentados, aunque también pueden jugar dos únicamente. El objetivo de cada jugador es llevar sus cuatro fichas desde el *char-koni*, bajando por el camino central de su brazo, a lo largo del tablero en sentido antihorario a través de los caminos laterales de los otros tres brazos, hasta alcanzar de nuevo el propio brazo y subir por el camino central hasta el *char-koni*. Gana el equipo cuyas fichas completen el recorrido en primer lugar.

Los jugadores, por turnos, tiran los cauris y mueven una de sus fichas. Cuando un jugador no tiene fichas fuera del *char-koni*, su primera ficha puede entrar al tablero con cualquier tirada, pero las siguientes sólo pueden hacerlo con las tiradas de 6, 10 ó 25. Cuando un jugador ya tiene más de una ficha en el tablero, puede decidir cuál mover. En caso de obtener tiradas extras, se pueden mover fichas diferentes a la movida en primer lugar. Se puede decidir renunciar a mover en cualquier caso, por razones tácticas. Si la ficha de un jugador acaba en una casilla ocupada por una ficha rival que no sea castillo, ésta es capturada y devuelta al *char-koni*, y el captor recibe una tirada extra. Una ficha no puede acabar en un castillo ocupado por una ficha rival.

Si la ficha de un jugador acaba en una casilla ocupada por una ficha propia o del compañero, ambas se apilan y forman un bloqueo, que a partir de ese momento se puede mover conjuntamente, o ser roto en cualquier momento; de igual forma se pueden apilar tres o cuatro fichas. Ningún jugador podrá mover una sola pieza por encima del bloqueo, y el bloqueo sólo puede ser capturado por el rival utilizando una pila de al menos el mismo orden. Si el bloqueo está en un castillo no puede ser capturado.

Cuando un jugador alcanza de vuelta su propio brazo, puede decidir subirlo y completar su recorrido (sólo es posible volver a entrar al *char-koni* con una tirada exacta), o bien dar otra vuelta, por razones tácticas. Gana el equipo que consiga devolver todas sus fichas al *char-koni*.

Posibles líneas de investigación:

- Analiza probabilísticamente el resultado de las tiradas de los cauris suponiendo equiprobabilidad entre caer boca arriba y boca abajo. ¿De qué maneras se puede obtener cada puntuación? ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada puntuación? ¿Y si se utilizaran sólo cinco cauris? ¿Y si se utilizaran cuatro? ¿Y si se utilizaran seis?
- Suponiendo una partida en la que sólo jugara una persona, ¿cuál es el mínimo número de tiradas de cauris necesarias para llevar las cuatro fichas a su destino?
- Investiga qué sucedería con una pieza que, partiendo del *char-koni*, se mueve siempre obteniendo 10 puntos en los cauris. ¿Y si siempre se obtuviera 25?
- Considera la situación en la que una ficha queda detenida en el castillo del tercer brazo del tablero. ¿Es favorable para un jugador?

6.VII.18. La zorra y los gansos

Origen: Escandinavo. *Ca*. 1300.

La descripción de este juego aparece en la saga islandesa de Grettir (s. XIII-XIV) bajo el nombre de *halatafl*. Se juega en Inglaterra con el nombre de *fox and geese* (fue favorito de Eduardo VI, la Reina Victoria y el Príncipe Alberto, quienes lo popularizaron), y en Japón con el de *juroku musashi* ("dieciséis soldados", con otro tablero). En Norteamérica diferentes tribus indias lo contextualizan con un coyote contra gallinas, un conejo contra cazadores indios, etc. (Provenzo y Provenzo, 1990).

La zorra y los gansos se trata de un juego de caza asimétrico que se desarrolla en un tablero en forma de cruz, en el que 13 ó 17 presas, según la versión (véase Figura 23), tratan de acorralar a un único cazador, mientras éste intenta diezmar el rebaño. Si juegan estratégicamente, sin cometer errores, las presas deberían poder ganar todas las partidas.

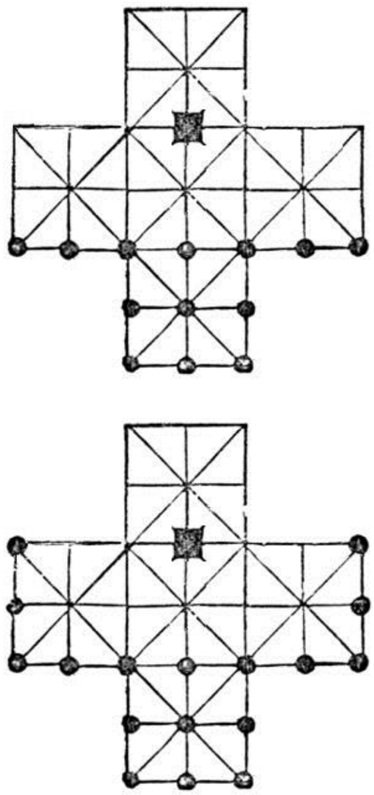


Figura 23.- Tableros y posición inicial para la zorra y los gansos, con 13 y 17 gansos respectivamente.

Reglas:

Juegan dos jugadores: uno maneja los gansos, y el otro, la zorra, que siempre empieza la partida. Mueven por turnos, una casilla a lo largo de las líneas en cualquier dirección ortogonal o diagonal (tipo el rey del ajedrez). La zorra puede capturar un ganso si salta por encima de él a una casilla vacía a lo largo de una línea. Puede capturar más de un ganso en un mismo movimiento siempre que haya las casillas vacías necesarias al otro lado de los gansos capturados. Los gansos capturados son eliminados del juego. Ganan los gansos si consiguen bloquear los movimientos de la zorra (que no puede saltar por encima de dos gansos a la vez, ni moverse si no es a lo largo de las líneas), y ésta gana a su vez si consigue capturar tantos gansos como para que no puedan acorralarla (normalmente se considera que comidos cinco o seis gansos, la victoria es de la zorra).

En la versión con 17 gansos, más tardía, diseñada para aumentar las probabilidades de victoria del zorro, los gansos no pueden moverse hacia atrás. En ella la zorra también puede ganar si fuerza a todos los gansos a trasladarse al otro lado del tablero sin que la hayan acorralado.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuál es el mínimo número de gansos necesarios para atrapar a la zorra?
- Si empiezan los gansos, ¿cuál es el mejor movimiento de apertura, y por qué?
- ¿De cuántas maneras podría colocarse la zorra en un tablero vacío? Habiendo colocado la zorra, ¿de cuántas maneras podría colocarse un único ganso?
- ¿Cuántas posiciones con la zorra y sólo seis gansos en el tablero se pueden dar? ¿En cuáles de ellas quedaría atrapada la zorra?
- Invéntese una notación que permita describir una partida.
- ¿Cuál es la estrategia ganadora para los gansos? ¿Cuál es la estrategia favorecedora para la zorra?

6.VII.19. Vacas y leopardos

Origen: Sudeste asiático.

En el sur de Asa existe una familia de juegos de caza (o juegos de guerra con fuerzas desiguales) que agrupa a juegos de tigres y juegos de leopardos, cuyo origen parece independiente de los juegos *tafl* de origen nórdico[25]. Vacas y leopardos, *hasu chirate ata* en kannada, es uno de sus mayores exponentes, enfrentando a veinticuatro vacas con dos leopardos. Como es habitual en estos juegos, si las vacas juegan de manera perfecta ganan la partida.

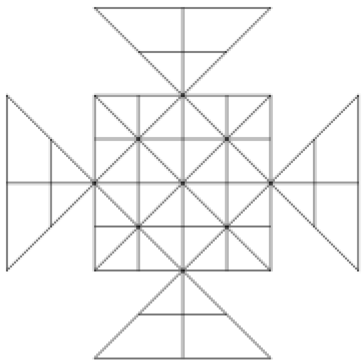


Figura 24.- Tablero de vacas y leopardos.

Reglas:

Juegan dos jugadores: uno con las vacas y otro con los leopardos. Comienzan los leopardos introduciendo una pieza en cualquier intersección, habitualmente la central. En turnos alternativos, los jugadores introducen una pieza en el lugar que deseen, tras lo cual pueden comenzar su fase de movimiento, en la que las piezas pueden moverse ortogonal o diagonalmente una casilla a lo largo de las líneas (tipo el rey del ajedrez). Los leopardos pueden capturar las vacas saltando por encima de ellas a una casilla vacía, incluso varias en un movimiento si la disposición de las piezas lo permite. Si una vaca es susceptible de ser capturada, el jugador que maneja los leopardos está obligado a hacerlo. Ganan las vacas si consiguen bloquear los movimientos de los leopardos, que ganan a su vez en el momento en que capturen ocho vacas.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuál es el mínimo número de vacas necesarias para atrapar a los dos leopardos?
- ¿De cuántas maneras podría colocarse un único leopardo en un tablero vacío? ¿Cuántas posiciones con todas las piezas en el tablero son posibles?
- ¿Cuál es la colocación óptima inicial de los leopardos? ¿Por qué?
- Invéntese una notación que permita describir una partida.
- ¿Cuál es la estrategia ganadora para las vacas? ¿Cuál es la estrategia favorecedora para los leopardos?

[25] Usualmente, en estos juegos las piezas comienzan fuera del tablero, mientras que en los *tafl* las piezas comienzan en una disposición inicial determinada.

6.VII.20. Bagh chal

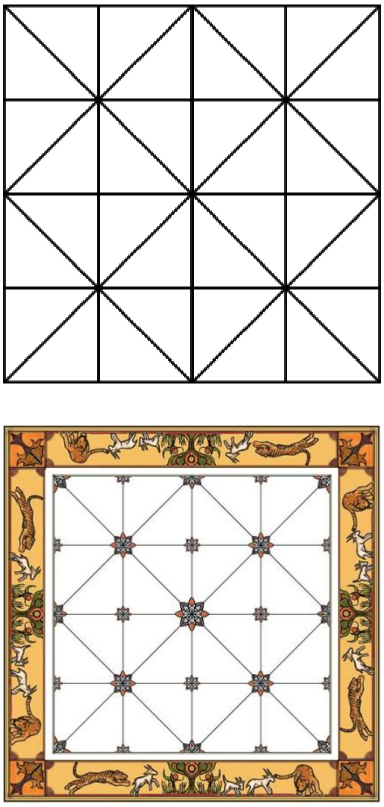


Figura 25.- Tableros abstracto y decorado de *bagh chal*.

Origen: Nepal

El *bagh chal* ("el tigre se mueve") es el juego nacional de Nepal. Las reglas originales dicen que es "ideal para jugar cuando el sol de las mañanas de verano es demasiado fuerte". Es uno de los juegos de caza más sencillos y elegantes que existen, y enfrenta a cuatro tigres y veinte cabras en un tablero cuadrado como el del alquerque. La tradición nepalí cuenta que el juego fue creado por Mandodari, hija de Mayasura, Rey de los Asuras, y Reina consorte de Ravana, Rey de Lanka.

Si las cabras juegan de manera óptima, ganan la partida. Si varias de ellas son eliminadas durante la primera fase del juego, sin embargo, sus opciones se reducen drásticamente.

Reglas:

Juegan dos jugadores en turnos alternativos: uno maneja cuatro tigres, que comienzan la partida en las esquinas del tablero, y el otro controla veinte cabras, inicialmente fuera del tablero. Comienzan las cabras, introduciendo una pieza en cualquier intersección. Los tigres se mueven (igual que, posteriormente, las cabras) a lo largo de las líneas marcadas ortogonal o diagonalmente a una casilla adyacente vacía. Las cabras no pueden ser movidas durante la primera fase, hasta que las veinte hayan sido introducidas en el tablero. Un tigre puede capturar una cabra saltando por encima de ella a una casilla vacía al otro lado. Una vez introducidas todas las cabras, comienza su fase de movimiento, en la que pueden moverse de la misma manera que los tigres, pero sin la opción de realizar capturas. Ganan los tigres si consiguen capturar cinco cabras, que ganan a su vez si bloquean por completo los movimientos de los tigres.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Hay alguna colocación óptima para las cabras en el turno inicial? ¿Y alguna pésima?
- ¿En cuántas casillas diferentes puede introducirse la primera cabra? Una vez introducida ésta, ¿en cuántas casillas diferentes puede colocarse la segunda?
- ¿Cuál es la estrategia ganadora para las cabras? ¿Cuál puede ser una estrategia favorecedora para los tigres?
- Invéntese una notación abstracta que permita describir una partida.
- ¿De cuántas maneras distintas puede un tigre hacer una captura, en función del lugar en el que esté colocado?
- ¿Cambiaría el juego si aumenta o disminuye el número de cabras que concretan la condición de victoria de los tigres?
- Análisis de la situación producida cuando se alcanza la fase de movimiento de las cabras sin que se haya capturado ninguna. Ídem para el caso en que se hayan capturado una, dos, tres, o cuatro.

6.VII.21. Corderos y tigres

Origen: La India

Este es un juego de caza similar a los dos anteriores y es jugado por los niños hindúes. Las posibles investigaciones son análogas a las descritas para el *bagh chal* y vacas y leopardos.

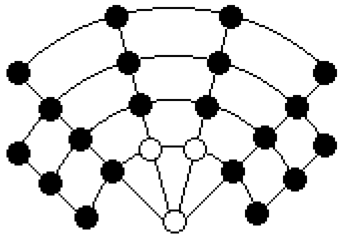


Figura 26.- Tablero de corderos y tigres.

Reglas:

Juegan dos jugadores: uno con tres tigres y otro con quince corderos, en turnos alternos. Comienzan los tigres, que en sus tres primeros turnos deben introducir una pieza en una de las casillas marcadas en blanco en la Figura 26; a partir de entonces, los tigres moverán a cualquier intersección adyacente vacía. Los corderos, en la primera fase del juego, son introducidos uno a uno en cualquier intersección, sin posibilidad de movimiento; una vez se han introducido los quince, pueden moverse a cualquier intersección adyacente vacía, igual que los tigres. Los tigres pueden capturar un cordero saltando por encima de él a una casilla vacía, siendo posible la captura múltiple en un mismo turno si hay casillas vacías que lo permitan. El jugador de los tigres gana si acaba con el rebaño, mientras que el que maneja los corderos gana si bloquea por completo el movimiento de los tigres.

6.VII.22. Alquerque

Origen: Probablemente, Egipto, *ca*. 1400 a.C.

El alquerque es un juego de guerra entre fuerzas simétricas muy antiguo, con probable origen egipcio de acuerdo con los hallazgos arqueológicos. Durante la Edad Media se extendió en Al-Ándalus con el nombre de *el-quirkat*, y Alfonso X el Sabio recogió abundante información sobre él y sus variantes conocidas en el momento en su Libro de los Juegos. Los españoles lo introdujeron en América durante la época del Descubrimiento, donde arraigó entre varias tribus indias, y también se hizo popular en la Europa continental.

Se trata de uno de los juegos con mayor recorrido histórico: sus variantes alquerque de tres y alquerque de nueve (juegos de molino) fueron muy populares hasta el advenimiento del ajedrez, con el que el alquerque de doce se fusionó para dar lugar al juego de las damas. Es el patriarca de una gran familia de juegos derivados que incluyen las damas y todas sus variantes, el *dzamet* saharaui, el *peralikatuma* de Sri Lanka, el *surakarta* indonesio, el *yoté* senegalés, el *awithlaknannai* y relacionados, el *lau kati kata* bengalí, el *fanorona* de Madagascar, etc.

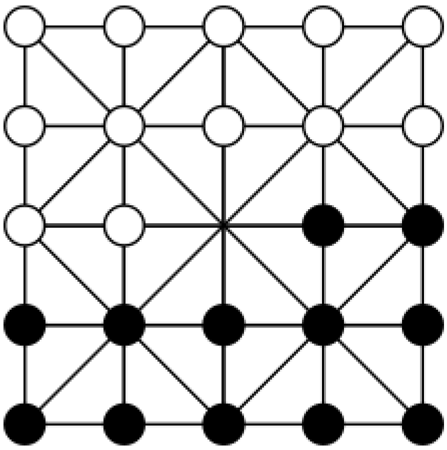


Figura 27.- Tablero y posición inicial para el alquerque de doce.

Reglas para el alquerque de doce:

Juegan dos jugadores, cada uno con doce fichas, que toman turnos alternativos. El tablero y la posición inicial se muestran en la Figura 27. Durante su turno cada jugador debe mover una de sus fichas a lo largo de una línea marcada a una casilla adyacente, ortogonal o diagonalmente. Si existe la posibilidad de saltar por encima de una ficha del rival hasta una casilla vacía al otro lado a lo largo de una línea recta marcada, es obligatorio hacerlo, quedando capturada la ficha del rival sobre la que se salta; si no se hace, la ficha propia en omisión puede ser retirada por el rival. Es posible realizar múltiples capturas en un único movimiento si hay casillas vacías que lo permitan. Gana el jugador que consiga capturar todas las fichas del oponente, o bien bloquee sus movimientos. Una regla adicional que se introduce en ocasiones es el impedimento de mover hacia atrás.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Tiene ventaja el jugador que comienza la partida? ¿Y el segundo?
- ¿Es posible un empate en este juego?
- ¿Cuál puede ser una estrategia favorecedora?
- Invéntese una notación que permita describir una partida.

6.VII.23. Peralikatuma

Origen: Ceilán (Sri Lanka).

Se trata de una variante del alquerque con las mismas reglas pero jugada en un tablero muy diferente, igual que el de vacas y leopardos. Cada jugador maneja 23 fichas en lugar de 12, con lo que hay tres huecos libres al inicio de la partida. Existe una variante llamada *kotu ellima* en la que cada jugador controla 24 fichas.

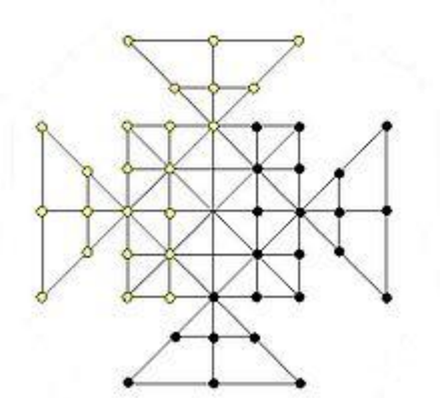


Figura 28.- Tablero y posicion inicial para el *peralikatuma*.

6.VII.24. Fanorona

Origen: Madagascar. S. XVI - XVII.

Su tablero es un doble tablero de alquerque y se considera habitualmente una variante de éste, si bien el mecanismo de captura es diferente y único en su especie, haciéndolo un juego complejo y muy interesante.

Es muy popular en Madagascar, donde se le atribuyeron poderes mágicos y adivinatorios. Se dice que durante el ataque francés a Antananarivo en 1895, la reina, los sacerdotes y consejeros jugaron al *fanorona* concentrando sus esfuerzos, en la creencia de que el resultado de la partida podía influir en, o anticipar, el resultado de la batalla. Otra leyenda local cuenta que el Rey Ralambo (1575-1610), aconsejado por un astrólogo, fingió una enfermedad estando ausentes sus hijos, urgiendo su regreso con intención de elegir como heredero al que llegara primero a la capital. Se dice que cuando el mensajero real llegó donde estaba el hijo mayor, éste se encontraba jugando una partida de *fanorona* en una situación de 3 contra 5 (*telo noho dimy*), considerablemente complicada; como resultado el príncipe menor llegó primero y heredó el trono.

Reglas:[26]

Juegan dos jugadores, cada uno de los cuales controla 22 peones o *vatos*, y toman turnos alternos. Comienzan las blancas. Los peones se pueden mover un número cualquiera de posiciones a lo largo de las líneas marcadas, ortogonal o diagonalmente (una variante de las reglas limita el movimiento a

---

[26] De acuerdo con Ballesteros (2005).

sólo posiciones adyacentes). Obligatoriamente los movimientos deben ser de captura en todos los turnos, si es posible. Hay dos tipos de mecanismos de captura: por aproximación, que ocurre cuando un peón se mueve hasta quedar contiguo a una sucesión ininterrumpida de peones rivales alineados en la misma línea de movimiento, capturando todos ellos; y por alejamiento, que sucede cuando un peón que se encuentra contiguo a una sucesión ininterrumpida de peones rivales alineados, se aleja a lo largo de esa misma línea, capturando todos ellos. No se permite repetir en turnos sucesivos movimientos a lo largo de la misma dirección y mismo sentido; sí se puede mantener la dirección pero variar el sentido, o bien cambiar la dirección por completo. Hacia el final de la partida, cuando no todos los movimientos puedan ser de captura, se admite mover un peón a una casilla adyacente a lo largo de una línea sin efectuar captura alguna (jugada *paika*). Gana quien consigue capturar todas las fichas del rival.

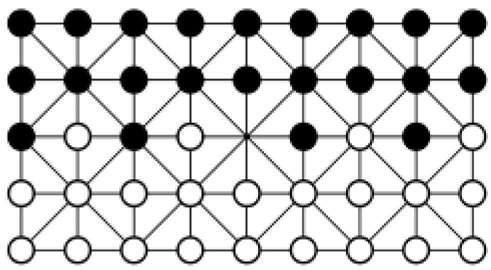


Figura 29.- Tablero y posición inicial para el *fanorona*.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Tiene ventaja el jugador que comienza la partida? ¿Y el segundo?
- ¿Cuál puede ser una estrategia favorecedora?
- Invéntese una notación que permita describir una partida.

6.VII.25. Kolowis Awithlaknannai

Origen: Nuevo México. Era de los Descubrimientos, s. XVI.

Cuando los conquistadores hispanos llevaron el alquerque a las costas americanas, los indios Zuni de Nuevo México adoptaron una versión desarrollada sobre un curioso tablero alargado formado por rombos a partir de un alquerque cuádruple. El juego fue descrito por primera vez por Stewart Culin. *Kolowis* es una serpiente mitológica, y *awithlaknannai* significa "piedras que matan". Los tableros se solían tallar en losas de piedra o en los tejados de arcilla de las casas, donde los Zuni jugaban.

Reglas:

Juegan dos jugadores, cada uno con 23 fichas, que toman turnos alternos. Inicialmente quedan libres la casilla central y las dos de los extremos. Los movimientos siempre se hacen a una casilla adyacente contigua a lo largo de las líneas; si es posible la captura, ésta es obligatoria, y se realiza saltando por encima de una ficha rival a lo largo de una línea recta hasta una casilla vacía al otro lado. Se pueden capturar varias fichas en un mismo movimiento siguiendo líneas quebradas, pero no se permite la captura a lo largo de las líneas curvas de los extremos. Gana el jugador que capture todos los peones del oponente. Una variante de las reglas consiste en que el jugador inicial no puede elegir mover a las casillas en los extremos del tablero en su primer turno, estando obligado a mover una ficha a la casilla central, que inevitablemente será capturada.

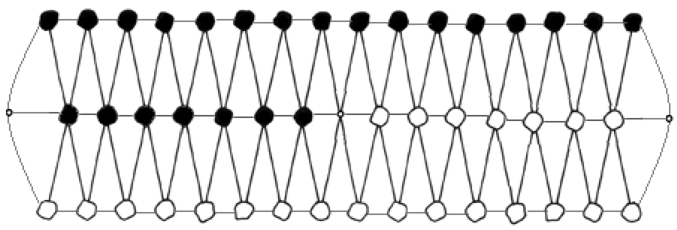


Figura 30.- Tablero y posición inicial para *kolowis awithlaknannai*.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Tiene ventaja el jugador que comienza la partida? ¿Y el segundo?
- ¿Cuál puede ser una estrategia favorecedora?
- Invéntese una notación que permita describir una partida.

6.VII.26. Hnefatafl

Origen: Escandinavo. *Ca*. s. IV.

Los juegos *tafl* escandinavos, que derivan probablemente del *ludus latrunculorum* romano, son una variada familia de juegos de estrategia para dos personas, en los que se representa el final de una batalla entre un ejército atacante más numeroso, y un ejército defensor diezmado cuyo objetivo es salvar a su rey.

Figura 31.- Detalle de una de las Piedras Rúnicas de Sigurd. Arriba, izquierda, jugadores de *tafl*. Gs 19, Pr2, *ca*. 1020-1050. Iglesia de Ockelbo, Suecia.

El *tafl* más presente en la literatura nórdica antigua es el *hnefatafl*. Aparecen referencias a él en la Edda poética y en las sagas Hervarar (s. XIII, fuente abundante de inspiración para J. R. R. Tolkien en su creación de la Tierra Media), de Frithiof (s. XII) y Orkneyinga (*ca*. 1200), en la que el Earl Rögnvaldr Kali Kolsson expone las habilidades del noble de la Edad Vikinga Escandinava: “Puedo jugar al *Tafl*, nueve destrezas sé, rara vez olvido las runas, sé de libros y herrería, sé cómo deslizarme sobre esquíes, disparar y remar bastante bien; cada una de las dos artes que sé, tocar el arpa y decir poesía.”

Las expediciones vikingas introdujeron esta familia de juegos en Groenlandia, Islandia, Irlanda, Gran Bretaña, Gales, Ucrania… donde se desarrollaron variantes propias. Las reglas de los juegos *tafl* originales no fueron registradas, que se sepa, y no sobrevivieron el advenimiento del ajedrez (llamado *skak-tafl* por los nórdicos), si bien abundantes hallazgos arqueológicos y fuentes literarias han permitido reconstruir unas posibles reglas para varios de ellos, jugados en tableros de 9x9, 11x11 y 13x13 casillas.

Reglas:

Juegan dos jugadores: el defensor, tradicionalmente con las blancas, que controla al *hnefi* o rey y 12 *hunns* (“botones”) o *tæflor* (“hombres del tablero”) que representan su guardia de honor, y el atacante, con las negras, que maneja 24 *tæflor*. El tablero es una cuadrícula de 11x11 casillas; las cuatro de las esquinas representan los castillos y sólo el *hnefi* puede ocuparlas; la casilla central representa el trono del rey, y sólo él puede ocuparla, si bien otras fichas pueden cruzar por encima.

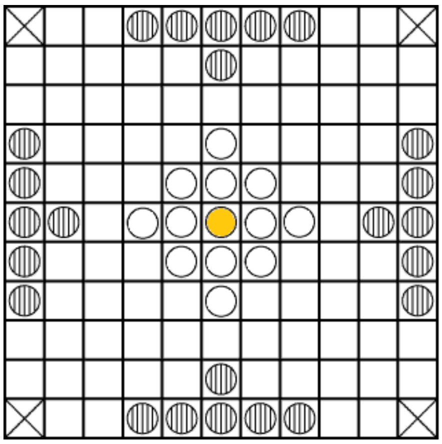


Figura 32.- Tablero y posición inicial para *hnefatafl*.

Comienza la partida el jugador atacante y se sucederán turnos alternos. Todas las piezas mueven como la torre del ajedrez: ortogonalmente, cualquier número de casillas despejadas en línea recta; tanto las piezas amigas como las enemigas interrumpen la capacidad de movimiento. No se pueden saltar piezas. Las capturas se realizan mediante el mecanismo de custodia: una pieza amiga es retirada del tablero cuando otra del oponente se detiene junto a ella, dejándola apresada entre dos piezas enemigas estando las tres alineadas a lo largo de una fila o columna del tablero. Sin embargo, una pieza amiga puede voluntariamente, en su turno, introducirse entre dos piezas enemigas sin ser retirada. Así, sólo son posibles las capturas por parte del jugador cuyo turno esté en juego. Las capturas no son obligatorias. Se pueden capturar hasta tres piezas enemigas en un movimiento siempre que al hacerlo éstas queden rodeadas por piezas rivales, formando una T (también dos, formando una L).

Este mecanismo afecta a todos los *tæflor*, atacantes o defensores, pero el *hnefi* debe ser rodeado ortogonalmente por cuatro enemigos para ser capturado; si ocupa una casilla junto al límite del tablero, bastará con que tres enemigos lo rodeen completamente bloqueando su movimiento para capturarlo; en caso de que el jugador defensor coloque una de sus piezas contigua al *hnefi*, el bando atacante puede hacer efectiva la captura rodeando e inmovilizando a las dos piezas defensoras con suficientes piezas atacantes.

En cuanto a efectos de captura, la casilla del trono, cuando esté vacía, se comporta como una pieza defensora. Los castillos de las esquinas actúan a este respecto como piezas enemigas de cualquiera que se encuentre en adyacencia. Es decir, el jugador defensor puede capturar piezas enemigas acorralándolas contra el trono, pero no así el atacante; ambos jugadores pueden capturar piezas enemigas acorralándolas contra uno de los castillos.

Gana el jugador defensor si consigue hacer huir a su *hnefi* a cualquiera de los castillos. Cuando tenga disponible una ruta de escape libre, debe obligatoriamente anunciarlo diciendo "*raichi*", o "*tuichi*" si tiene dos o más, en cuyo caso habrá ganado la partida. No es legal escapar por una ruta que no hubiera sido anunciada en el turno anterior. Gana el jugador atacante en caso de que capture al rey. Una variante de las reglas contempla al rey desarmado, de forma que no puede participar en las capturas.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Favorecen las reglas a uno de los dos jugadores?
- ¿Cuál es una estrategia favorecedora para los defensores?
- ¿Cuál es una estrategia favorecedora para los atacantes?
- ¿Cuántos movimientos posibles de apertura tienen los atacantes? ¿Y los defensores? ¿Alguno de estos movimientos es óptimo para cada bando?
- ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que necesitaría el rey para escapar si los atacantes no movieran sus piezas?
- Desarróllese una notación abstracta que permita registrar una partida.
- Considérense variantes aumentando y disminuyendo el número de soldados de la guardia real, llegando a los casos extremos. ¿En qué casos el bando defensor tiene más ventaja, y en cuáles menos?

Se recomienda la lectura de Ward (s.f.).

6.VII.27. Tablut

Origen: Finlandia

El tablut es un juego *tafl* que arraigó en la cultura Sami. Su descripción fue realizada por el botánico sueco Carl Linnaeus a partir de observaciones anotadas en su diario de expedición a Laponia en 1732. Esta es la principal fuente utilizada para la reconstrucción de las reglas de los juegos *tafl* en general. En el tablut se enfrentan 16 moscovitas contra 8 soldados suecos y su rey, en un tablero de 9x9 casillas.

Reglas:

Juegan dos jugadores: el atacante, con 16 piezas que representan invasores moscovitas, y el defensor, con el rey sueco y su guardia de honor formada por 8 hombres. La casilla central, *konakis*, representa el trono del rey, y sólo él puede ocuparla, si bien las demás piezas pueden cruzarla. Ambos jugadores toman turnos alternos. Todas las piezas se mueven como la torre en el ajedrez, y el sistema de captura es el de custodia descrito en las reglas del *hnefatafl*. De nuevo, para capturar al rey hace falta rodearlo con cuatro piezas, mientras que alcanza con dos para capturar cualquier otra pieza. El rey también es capturado si es acorralado contra el *konakis* por tres enemigos. En algunas versiones, ganan los suecos si el rey si consigue llegar a un lado del tablero (lo cual le da excesiva ventaja al bando defensor), mientras que en otras es necesario que alcance una de las esquinas. El bando atacante gana cuando captura al rey. Las reglas de *raichi* y *tuichi* también se aplican en este juego.

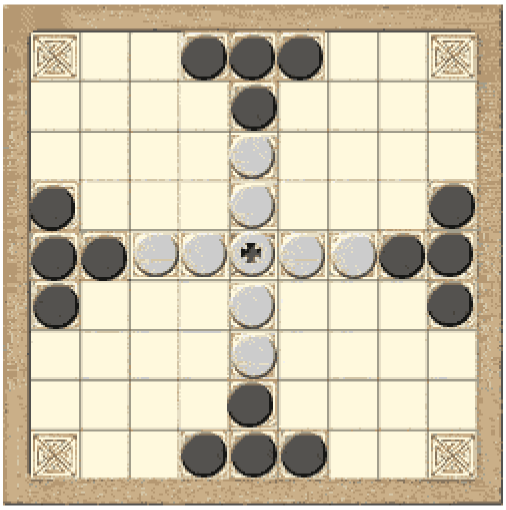


Figura 33.- Tablero y posición inicial en el *tablut*.

6.VII.28. Damas del perdedor

Origen: Rusia, ca. 1700.

Esta variante, conocida en Rusia como *poddavki*, surgió en los inicios del s. XVIII como versión *misère* de las damas rusas (llamadas *shashki*).

Reglas:

Se juega en un arcidriche normal de 8x8 y cada jugador maneja 12 piezas, colocadas inicialmente en la misma posición que en las damas. Las reglas de movimiento (a casilla diagonal adyacente, siempre hacia adelante) y captura (saltando por encima de una pieza rival, diagonalmente, a una casilla vacía al otro lado, pudiendo realizar múltiples capturas en un turno) son las mismas que en las damas rusas, pero en este caso el jugador ganador es aquel que consigue colocar sus piezas de manera que el rival tiene que saltar por encima de todas ellas y capturarlas. Si en un turno se pueden realizar capturas, es obligatorio hacerlo. También se consigue la victoria al colocar las piezas de manera que sea imposible moverse. Si una pieza alcanza el borde opuesto del tablero se convierte en *damka* y adquiere la capacidad de mover y capturar hacia adelante y hacia atrás.

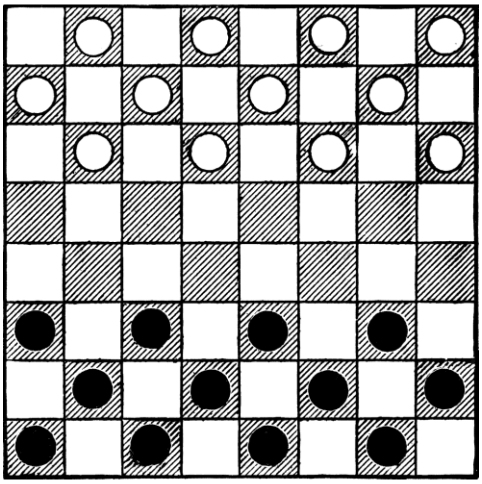


Figura 34.- Tablero y posición inicial para las damas del perdedor o *poddavki*.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuál es, si la hay, la estrategia ganadora (perdedora)?
- ¿Cuántos movimientos puede hacer una pieza normal en función de en qué casilla esté ubicada? ¿Cuántos puede hacer una *damka*? Considérense movimientos con y sin captura.
- ¿Cuántos turnos podrían llegar a pasar sin que ninguna pieza fuera capturada?

6.VII.29. Halma

Origen: EEUU, finales s. XIX.

El *halma*, patentado por George H. Monks en 1888, es un juego de damas para dos, tres o cuatro personas, cuyo nombre deriva de la palabra griega para *saltar*. Sus reglas son muy sencillas, pero es un juego con unas posibilidades estratégicas interesantes. Se trata del único juego estadounidense del s. XIX ampliamente conocido, y se relaciona con las damas diagonales, jugadas en un arcidriche de 8x8 escaques, y las damas chinas, jugadas en un tablero en forma de estrella, ambos con reglas prácticamente idénticas al *halma*.

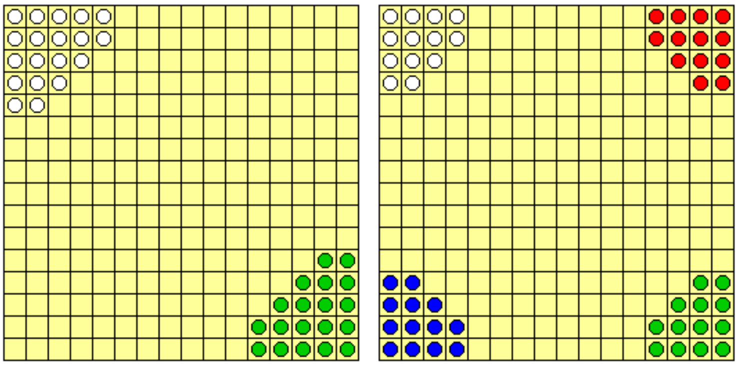


Figura 35.- Tablero y posiciones iniciales para el *halma*. A la izquierda, dispuesto para dos jugadores; a la derecha, para tres o cuatro.

Reglas:

Si juegan dos jugadores cada uno maneja 19 fichas; si juegan tres o cuatro, manejan 13 cada uno. Las posiciones iniciales sobre el tablero cuadrado de 16x16 casillas se indican en la Figura 35. Por turnos alternativos en sentido horario, cada jugador puede realizar un movimiento de uno los siguientes tipos: una ficha a una casilla adyacente, horizontal, vertical o diagonalmente; o bien, una ficha saltando por encima de otra de cualquier color, horizontal, vertical o diagonalmente hasta una casilla vacía en el otro lado (la misma ficha puede realizar varios saltos en el mismo turno si hay casillas vacías y fichas que lo permitan). Las fichas sobre las que se salta no son capturadas ni retiradas de ninguna manera, y desde luego se puede saltar sobre fichas propias. Gana el jugador que consiga mover todas las fichas de su rincón al rincón opuesto.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Existe una estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿en qué consistiría?
- En una partida entre dos personas, ¿cuántos movimientos tendría que hacer un bando para llevar todas sus fichas hasta el rincón opuesto si sólo hiciera uso del primer tipo de movimiento, y suponiendo que las fichas del otro jugador no entorpecieran ni favorecieran el desarrollo?

6.VII.30. Asalto

Origen: s. XIX, europeo.

Asalto es un juego derivado de la zorra y los gansos, y por tanto del *halatafl* escandinavo. A pesar de involucrar a fuerzas desiguales, como todos los juegos *tafl*, lo consideramos juego de guerra y no de caza en base al criterio simbólico (véase apartado 3.6.7). Se le atribuye origen francés, inglés y español, en el último caso probablemente por la razón del nombre, pero no se conocen pruebas que fundamenten la teoría. Se cree que la variante surgió a partir de la Rebelión de los Cipayos (1857), en la que oficiales y civiles indios se rebelaron contra la autoridad de la Compañía Británica de las Indias Orientales, extendiéndose y dando lugar a una prolífica corriente: oficiales y cipayos, el nuevo juego militar de la táctica alemana (ca. 1870, en referencia a la Guerra Francoprusiana), *transvaal* (versión inglesa que recrea el asedio de Ladysmith, Sudáfrica, en la Guerra de los Bóeres, 1899-1902 (Ballesteros, 2005)), y otras versiones, con ligeras modificaciones del tablero, reglas y/o el número de fichas.

El asalto se juega en un tablero basado en el de la zorra y los gansos, en el que los nueve puntos de uno de los brazos de la cruz están resaltados para denotar una fortaleza. En ella se protegen dos tiradores del asedio de 24 soldados de campo (cipayos) que ocupan inicialmente el resto de posiciones.

Reglas:

Juegan dos jugadores, uno con dos tiradores, situados inicialmente en cualesquiera dos casillas de la fortaleza, y el otro con 24 soldados de campo que ocupan el resto del tablero. Comienzan los tiradores, y en turnos alternos los jugadores mueven una de sus fichas. Los soldados de campo pueden mover a una casilla adyacente hacia adelante, hacia los lados o en diagonal, nunca hacia atrás. Los tiradores pueden mover en cualquier dirección a una casilla adyacente, y además, capturar a los soldados de campo saltando por encima de ellos a una casilla vacía en el otro lado. Se permiten las capturas múltiples en un mismo turno. La captura es obligatoria si es posible, y en el caso de que un tirador omita una captura, es eliminado del juego. Ganan los tiradores si capturan a ocho soldados, o los soldados si consiguen bloquear por completo el movimiento de los tiradores o bien ocupar las nueve posiciones de la fortaleza.

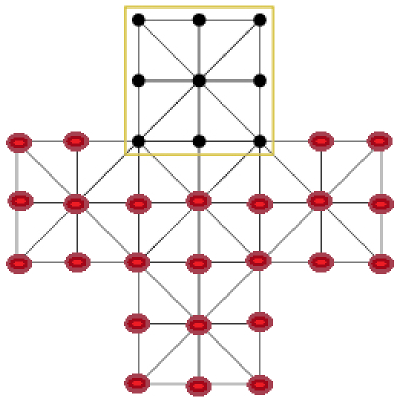


Figura 36.- Tablero y posición inicial de los soldados de campo en el asalto.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Cuál es el mínimo número de soldados necesarios para bloquear el movimiento de los tiradores?
- ¿Cuál es la posición inicial óptima para los tiradores en la fortaleza? ¿Hay varias elecciones óptimas?
- ¿Cuáles son las mejores estrategias para el bando de los tiradores y para el de los soldados de campo?
- ¿Cuántas disposiciones del tablero son posibles tras un movimiento de los soldados?
- Invéntense variantes del juego con menos o más soldados, con menos o más tiradores, variando o no el tamaño del tablero.
- Invéntese una notación que permita describir una partida.

6.VII.31. Puluc

Origen: probablemente maya.

Este es un juego de guerra de la subfamilia carrera y pelea, jugado por los indios Kekchi de América Central, descendientes de los Mayas. No está documentado si el origen del juego es en efecto maya o posterior, pero S. Culin lo excluyó de un catálogo de juegos influenciados por los conquistadores europeos, lo cual sugiere que el juego podría ser anterior al Descubrimiento. También recibe el nombre de carrera o carretera o camino del maíz, a causa de los componentes usados tradicionalmente.

La descripción que damos se basa en un escrito alemán de 1906 (Bell, 1979). El “tablero” es un camino unidimensional formado por diez mazorcas de maíz dispuestas transversalmente, formando así once espacios. Los jugadores compiten con cinco fichas cada uno, originalmente trocitos de madera, y los protodados binarios empleados son grandes granos de maíz tostados por una cara.

Reglas:

Cada jugador ocupa un extremo del camino del maíz de forma que los nueve espacios centrales están libres inicialmente, y en turnos alternativos, introducen nuevas fichas en él o bien mueven las que ya estuvieran en juego, siempre hacia adelante. Para ello tiran los granos de maíz, que indican el número de espacios que es posible mover: de dos a cuatro caras tostadas hacia arriba, 2 a 4 espacios, respectivamente; una cara tostada, no se puede mover; todas las caras al natural hacia arriba, 5 espacios. Los jugadores pueden tener cualquier número de fichas en juego, pero no se puede mover a una casilla ya ocupada por una ficha propia. Cuando un jugador mueve una de sus fichas a un espacio ocupado por una ficha del rival, ésta resulta capturada y se coloca bajo la ficha que realiza la captura; desde ese momento, queda prisionera y viajará junto con la que la capturó en su camino hacia la meta (el espacio opuesto a donde inició el camino), fuera del control de su propietario. Esta pila de fichas puede a su vez ser capturada nuevamente, en cuyo caso la ficha que realice la nueva captura será la encargada de guardar (permaneciendo visible, con las demás por debajo de sí) el grupo. Así, el control de la pila puede cambiar de manos, como también cambiará el sentido de su recorrido a lo largo del camino del maíz. Una ficha sola puede capturar tanto a otra ficha como a una pila; igualmente, una pila puede capturar a una ficha solitaria y a otra pila, siempre que la unidad capturada sea en efecto controlada por el oponente. Cuando una ficha alcanza la meta (undécimo espacio del camino), ella y todas las fichas amigas que viajaran juntas bajo ella recomienzan el camino para hacer otro recorrido, mientras que todas las enemigas prisioneras custodiadas por ella, son eliminadas de la partida. Si una ficha alcanza la meta en solitario, simplemente recomienza el camino. Gana el jugador que consiga eliminar de la partida todas las fichas del rival.

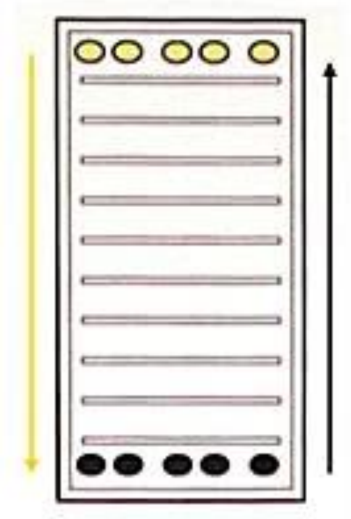


Figura 37.- Tablero abstracto de *puluc*, con la posición inicial y el recorrido de las fichas.

Posibles líneas de investigación:

- Analícese la frecuencia relativa de cada tirada en los dados de maíz. De cada 16 veces que tiramos, ¿cuántas veces obtenemos cada valor, aproximadamente?
- A la vista de los resultados anteriores, ¿conviene tener algo en cuenta de cara a desarrollar la estrategia? ¿Se trata de un juego más de azar, o táctico?
- Notaciones abstractas para representar una partida.
- Construcción de estructuras geométricas utilizables como tablero.

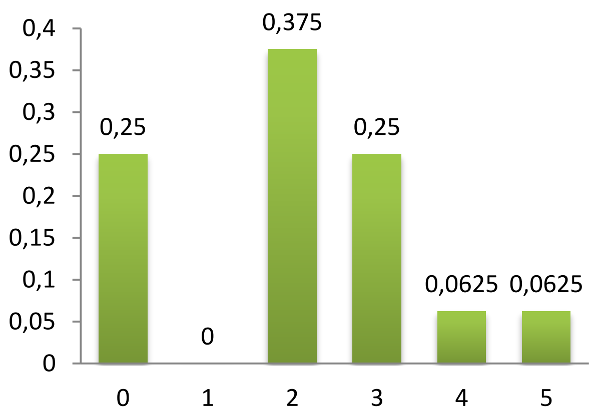


Figura 38.- Distribución de probabilidad del número de espacios a mover en el *puluc*.

6.VII.32. Kalaha

Origen: Egipto. Ca. 5000 aC

El *kalaha* se considera uno de los *mancala* más antiguos, con aproximadamente 7000 años de historia, y es también uno de los más simples en cuanto a reglas. Se han encontrado tallas de tableros en la base de las columnas del Templo de Amón en Karnak, así como en diferentes puntos a lo largo de las rutas comerciales del mundo antiguo. Quizá la simplicidad de los tableros de los *mancala*, que se pueden excavar en el barro o en la tierra improvisadamente, explica la extensión de su popularidad en África, Asia y América. El juego conocido como *kalaha* utiliza un tablero de dos filas, con seis campos por fila y tres semillas por campo inicialmente, al que se añaden dos receptáculos adicionales (llamados *kalaha*) para almacenar las semillas capturadas por cada jugador, uno a cada lado del tablero.

Reglas:

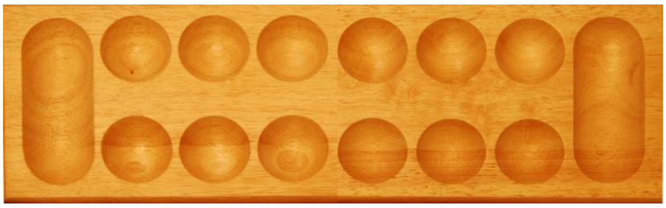


Figura 39.- Tablero de *kalaha*.

En turnos alternos, cada uno de los dos jugadores elige uno de sus propios campos, lo vacía completamente, y siembra las semillas una a una en sentido antihorario a partir del campo siguiente al que ha vaciado, depositando también una en su propio *kalaha* (el situado a su derecha); si hay suficientes semillas, se alcanzan los campos del rival, sembrándolos también. Si la última semilla cae en el propio *kalaha*, el jugador obtiene otro turno. Si la siembra acaba en un campo propio que estuviera vacío, el jugador puede capturar todas las semillas del campo opuesto del oponente, almacenándolas junto a la última semilla que sembró y provocó la captura, en su propio *kalaha*. La partida acaba en el momento en que los seis campos de uno de los dos jugadores estén vacíos. El otro jugador puede entonces recoger todas las semillas que permanezcan en sus campos y añadirlas a su cuenta. Gana quien más semillas tenga en su *kalaha*.

Posibles líneas de investigación:

- Análisis de las posibles situaciones tras un movimiento por parte de cada jugador.
- ¿En qué medida influye la estrategia en el juego? ¿Es posible determinar una secuencia de movimientos ganadora para cada jugador?
- Notación que permita describir una partida.
- Consideración de versiones simples para análisis completo y determinación de estrategia ganadora. Por ejemplo, dos filas, tres campos por fila, dos semillas por campo. Si se utilizan dos filas, tres campos por fila y tres semillas por campo, Bell y Cornelius (1988) señalan que ganará quien primero acumule siete semillas en cualquier campo; si se utilizan cuatro semillas por campo, quien acumule nueve.

Recomendamos la lectura sobre aplicación didáctica de los *mancala* de Rupérez y García (2011).

6.VII.33. Wari

Origen: Golfo de Guinea.

El *wari* es otro *mancala* II, también uno de los más antiguos, originario de África occidental desde donde se extendió a varios países del continente y a las Antillas. Se juega en un tablero idéntico al del *kalaha*, de dos filas y seis campos en cada una, si bien es más frecuente ver tableros de *wari*, *awalé* u *oware*, sin receptáculos laterales. Cada campo contiene inicialmente cuatro semillas en lugar de tres.

Reglas:

Los dos jugadores, en turnos alternos, eligen uno de sus campos y lo vacían por completo para sembrar las semillas que contuviera, una a una, en campos adyacentes en sentido antihorario. No se siembra en los *kalaha* (receptáculos laterales), si el tablero los tiene; en este juego, sirven únicamente de almacén. Es obligatorio que la siembra alcance a, al menos, uno de los campos del oponente. Se pueden capturar semillas de los campos del oponente cuando la última es sembrada en un campo en el que quedan tras la siembra dos o tres semillas, en cuyo casi se recogen todas y se almacenan en el propio *kalaha*, si lo hay (si el tablero no incluye *kalahas* se mantienen aparte para el recuento final). Si al efectuar una captura, el campo adyacente al implicado anterior en el sentido de la siembra también contiene dos o tres semillas, estas son capturadas "por contagio", efecto que se extiende hasta que algún campo contenga una semilla, o cuatro o más, o hasta llegar a cubrir los campos del oponente. Un jugador no puede capturar todas las semillas de los campos de su oponente. Si un jugador recoge 12 o más semillas de un campo, al hacer la siembra deberá, tras dar la vuelta al tablero, saltar el campo que vació dejándolo vacío, y seguir sembrando a continuación. Cuando todos los campos de un jugador están vacíos, el oponente debe, si es posible, hacer un movimiento que proporcione al menos una semilla a su rival para que pueda jugar en su siguiente turno; si no lo hace, deberá entregar todas las semillas de sus campos a su rival; si no es posible hacerlo, finaliza la partida y el jugador que todavía tenía semillas en sus campos, las añade a su cuenta. La partida acaba cuando no es posible realizar más capturas. Entonces los jugadores añaden las semillas que queden en su lado del tablero a su *kalaha*, y se hace el recuento, ganando quien más semillas haya recolectado.

Posibles líneas de investigación:

- Las mismas que para el *kalaha*, si bien este juego es más complejo.
- Análisis de las situaciones en las que algún campo contiene 12 o más semillas.

6.VII.34. Othello

Origen: Inglaterra, finales s. XIX (*reversi*). Japón, década de los 70 s. XX (Othello).

El juego registrado comercialmente como Othello, fue "inventado" por Goro Hasegawa, japonés, en 1971, sin que la compañía que lo publicó admitiera abiertamente antecedentes (MDI, 2002). No obstante, su patente es una revisión con nuevo nombre y reglas más estables del juego conocido como *reversi*, inventado en 1883 por Lewis Waterman, inglés (hay cierta polémica al respecto de su originalidad en disputa con otro inglés, John W. Mollet, quien publicó anteriormente un juego similar (Bandrés, ca. 2009; Hoffmann, 1894)). Hay constancia de la aparición del juego en prensa londinense en 1886, de acuerdo con la Fédération Française d'Othello[27]; en 1895 aparece en prensa neoyorquina (The New York Times, 1895), habiendo sido incluido ya en algunos libros de juegos (Hoffmann, 1894.). Al principio del siglo XX la popularidad del *reversi* se desplomó, extinguiéndose prácticamente tras la Primera Guerra Mundial, para resurgir en los años 70 en Japón, rebautizado como Othello y marca registrada. El nombre se eligió probablemente como referencia al drama entre Otelo y Desdémona, o bien al conflicto entre Otelo y Iago, en "La Tragedia de Otelo, el Moro de Venecia" de Shakespeare.

El juego se desarrolla en un tablero cuadriculado de 8x8 casillas sin escaques, y utiliza unas fichas planas en forma de disco, blancas por un lado y negras por el otro. Las reglas son excepcionalmente sencillas, pero sus implicaciones y estrategias subyacentes resultan sorprendentemente complejas. Ha sido objeto de numerosos estudios de inteligencia artificial, con autómatas obteniendo victorias sobre los mejores jugadores humanos desde los años 80, a raíz del carácter arborescente de la estrategia y la enorme variabilidad de la situación de la partida de un turno a otro.

[27] http://www.ffothello.org/jeu/historique.php . Fecha de consulta: mayo de 2014.

Reglas:

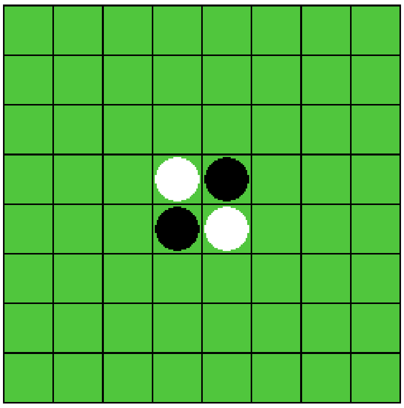


Figura 40.- Tablero y posición inicial para el Othello.

La posición inicial en el tablero se muestra en la Figura 40. Empiezan las negras. En turnos alternos los jugadores colocan una ficha en el tablero, con la cara de su color hacia arriba, en una casilla vacía adyacente a al menos una ficha ya colocada, vertical, horizontal o diagonalmente. Al colocarla, debe necesariamente dejar una línea ininterrumpida de fichas del rival flanqueada por ella y otra pieza propia. Las fichas ajenas de esta línea, que puede ser vertical, horizontal o diagonal, se dan la vuelta para pasar a mostrar su reverso, cambiando el color y la propiedad de las mismas. Una misma ficha puede provocar el flanqueo en diferentes direcciones y sentidos; cuando ello ocurra se da la vuelta a todas las líneas ininterrumpidas de fichas rivales que quedaran flanqueadas entre la nueva ficha y cualquier otra ficha propia. Si un jugador no puede realizar ningún movimiento que le haga revertir fichas rivales, pierde su turno. Una vez colocadas las 64 fichas (o en cualquier situación en la que ninguno de los jugadores pueda realizar un turno legal, por no poder girar fichas rivales), gana la partida aquél cuyo color se muestre en más fichas. Si quedan casillas vacías, si número se añade a la cuenta del ganador.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es buena estrategia elegir siempre el movimiento que gira más fichas a nuestro color?
- ¿Todas las casillas son igual de valiosas, o hay algunas que sea más conveniente controlar? ¿Es igual de difícil "capturar" todas las casillas?
- ¿Cuáles son buenas estrategias para ganar?
- ¿Cuántas posibilidades tienen las negras en el primer movimiento? ¿Alguna de ellas es mejor o peor que las demás?
- ¿Cuántas distribuciones de fichas diferentes hay para el final de la partida, con las 64 fichas colocadas sobre el tablero?
- Planteamiento de situaciones muy cercanas al empate que se desequilibran en el último o los últimos movimientos.
- Notación para describir una partida.
- Análisis de un juego más simple: tablero de 6x6, 5x5 ó 4x4. En estas versiones, ¿es mejor empezar, o ser el segundo jugador?

Para un análisis profundo del juego, recomendamos Rose (2005); para uno casual, Fang (2003) o Landau (1987).

6.VII.35. Abalone

Origen: Francia, finales s. XX.

El Abalone, un juego reciente, fue inventado en 1987 por Laurent Levi y Michel Lalet (Chorus, 2009). La estructura del tablero y algunos de los movimientos posibles, evocan el deporte del sumo (Lemmens, 2005); en particular, los ataques frontales *sumito*, que puede realizar un jugador en ventaja numérica. Etimológicamente el nombre del juego parece recoger su mayor esencia estratégica: *ab*, nunca, *alone*, solo (Ozcan y Hulagu, 2004); dicho de otra manera, en el Abalone la unión hace la fuerza. Este juego se considera una obra maestra de los juegos abstractos modernos, a la altura del Hex de Piet Hein y John Nash y el Othello, si bien queda levemente oscurecido por los desarrollos lentos de partidas en las que algún jugador opta por un conservadurismo excesivo. Vendió tras su publicación más de cuatro millones de copias en más de treinta países (Ballesteros, 2005).

El tablero tiene forma de hexágono regular, con 61 posiciones, 5 por lado, y se utilizan 14 bolas blancas y 14 bolas negras. Al igual que en el Othello, las reglas son muy simples, pero las estrategias que se derivan de ellas son de un nivel de profundidad considerable.

Como entretenimiento matemático formal, a lo largo de los años han surgido diversas variantes del juego, algunas de ellas suponiendo modificaciones significativas de las reglas y la mecánica.

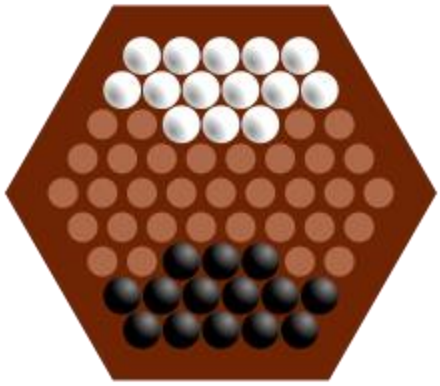


Figura 41.- Tablero y posición inicial para el Abalone.

Reglas:

Empiezan las negras. En turnos alternos los jugadores realizan un movimiento por turno, con el objetivo de expulsar del tablero las fichas del oponente. Hay dos tipos de movimiento posibles: los movimientos en línea, en los que se avanza en cualquier dirección una columna formada por 1, 2, ó 3 canicas a lo largo de una línea, y los movimientos en paralelo, en los que se avanzan en cualquier dirección 1, 2, ó 3 canicas en bloque desplazándolas hasta ocupar una posición "paralela" a la que ocupaban antes del movimiento. La Figura 42.- Movimientos en paralelo y en línea en una apertura de Abalone. ilustra estas posibilidades en el primer turno de cada jugador.

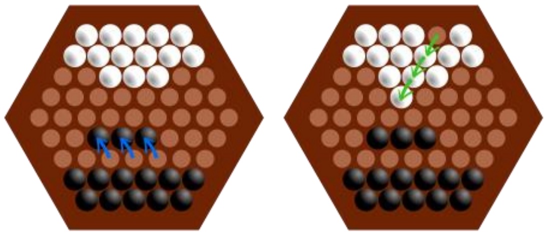


Figura 42.- Movimientos en paralelo y en línea en una apertura de Abalone.

No se permite mover más de 3 canicas en un turno. Con los movimientos en línea (no con los en paralelo), un jugador puede empujar con su columna de canicas otra columna de canicas del rival, siempre que esté en posición de *sumito*, esto es, en superioridad numérica (3 contra 2, 3 contra 1, 2 contra 1) y con casilla vacía al otro lado, o bien el borde del tablero. No es posible el *sumito* en caso de empate. Cuando una bola es empujada fuera del tablero, queda eliminada de la partida. Así, gana el jugador que consiga sacar del tablero 6 canicas del adversario.

Posibles líneas de investigación:

- ¿Es buena estrategia empujar canicas del rival siempre que podamos?
- ¿Todas las posiciones son igual de beneficiosas, o hay algunas que convenga controlar y otras que convenga evitar?
- ¿Cuáles son buenas estrategias para ganar?
- ¿Cuántas posibilidades de movimiento tienen las negras en el primer movimiento?
- Notación para describir una partida.
- Análisis de un juego desarrollado en un tablero más reducido, con menos canicas.

6.VII.36. Tangram

Origen: China, época indeterminada.

El *tangram* es el enlace entre juegos de tablero y puzzles. Se trata de un rompecabezas chino cuyo nombre original es *Chi'i shiso pan* (puzle de la sabiduría) o *Ch'i Ch'ae pan* (juego de los siete elementos), compuesto por siete piezas diferentes que permiten formar multitud de figuras geométricas, abstractas y evocativas de animales, personas, objetos, letras, números, etc. Estas siete piezas (*tans*) son: dos triángulos grandes, uno mediano y dos pequeños, todos ellos isósceles, un cuadrado y un romboide, todas ellas con ángulos rectos, de 45º o combinaciones lineales de ellos.

Su utilización como recurso manipulativo permite adquirir conciencia de la representación espacial, resolver problemas métricos, y trabajar el significado de las fracciones aritméticas como expresión de la parte de un todo. No se conoce a ciencia cierta de qué época data el *tangram*, pero sí que cuando aparecieron los primeros libros chinos sobre la materia (ca. 1810), el juego era ampliamente conocido entre la población. En Europa se fue introduciendo a lo largo del siglo XIX a través de la publicación de algunos libros y la importación de juegos de tangram, más como divertimento que como recurso educativo. Con los años han surgido diferentes variantes, pero ninguna con el delicado equilibrio entre sencillez y versatilidad como el *tangram* original.

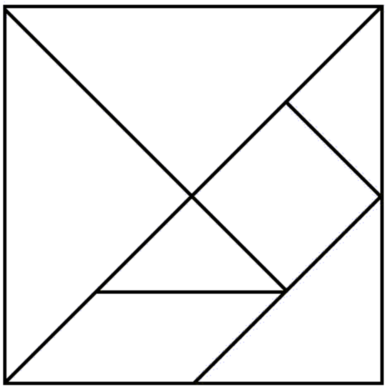


Figura 43.- *Tangram*.

Posibles líneas de investigación:

Figura 44.- Algunas posibles figuras construídas con el *tangram*.

- Construcción de variedad de figuras abstractas, geométricas y representativas (catálogos disponibles en línea y en las referencias).
- Trazado de los *tans* que forman el cuadrado básico como ejercicio geométrico de dibujo.
- Problemas métricos de cálculo de áreas y perímetros de figuras formadas con el *tangram* a partir del dato, por ejemplo, de que el lado del cuadrado formado por las siete figuras mide 1dm.
- Problemas de determinación de qué fracción del total representan ciertas figuras formadas por menos de siete piezas del tangram, y viceversa: construcción con los *tans* de figuras que representen diferentes fracciones, 1/16, 4/16, 5/16, 8/16, 11/16, 12/16, 14/16…
- Construcción de todos los pentágonos posibles empleando las siete piezas del *tangram* (de acuerdo con Contreras (s.f.) son 53).

Recomendamos la lectura de los artículos de Flores (2002), sobre el muy interesante puzzle de la pajarita, y Contreras (s.f.), con apuntes didácticos sobre el *tangram*, así como la obra de Elffers (1976).

6.VII.37. Torres de Hanói

Origen: 1883, Francia.

Este es un pasatiempo matemático inventado por Édouard Lucas, responsable también del test de primalidad que lleva su nombre. Es un ejercicio típico en los cursos de programación y algoritmia, donde se empieza estudiando el caso para tres discos. La definición original de Lucas contempla ocho discos, pero puesto que el problema se puede resolver por recursividad, no entraña más dificultad, sino sólo mayor número de movimientos. Otro enfoque de análisis formal es la aproximación mediante búsqueda de caminos hamiltonianos, fuera del alcance del alumnado de 4º de ESO.

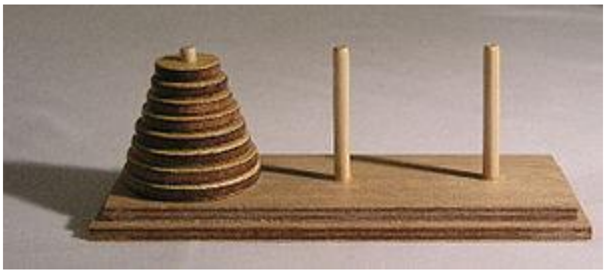


Figura 45.- Torres de Hanói con ocho discos.

Reglas para tres discos:

Se dispone de tres varitas, y en la de la izquierda descansan tres discos concéntricos de diferente diámetro, el mayor en la parte inferior y el menor en la cima de la torre. Se trata de trasladar los tres discos a la varita de la derecha siguiendo las reglas de movimiento siguientes: a) en cada movimiento sólo se permite trasladar un disco; b) no se puede colocar nunca un disco mayor sobre otro menor; c) provisionalmente se pueden colocar discos en la varita auxiliar central de acuerdo con las dos reglas anteriores. El juego finaliza con la reconstrucción de la torre, con el disco mayor en la parte inferior, y el menor en la cima, en la varita de la derecha. Las reglas del juego son las mismas aunque se varíe el número de discos.

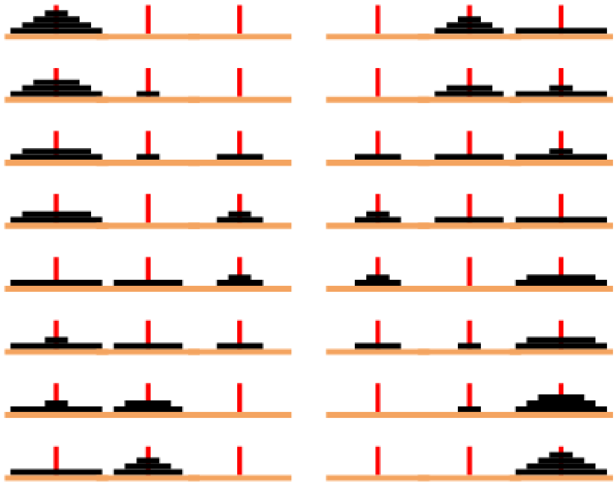


Figura 46.- Representación esquemática de la solución en 15 movimientos al problema de las Torres de Hanói con 4 discos.

Posibles líneas de investigación:

Una vez resuelto el problema de encontrar la estrategia óptima para cualquier número de discos (es diferente para el caso par y el caso impar), se pueden plantear las siguientes cuestiones:

- Construcción de una tabla en la que se indique el número de movimientos requeridos por la estrategia óptima en función del número de discos que interviene.
- A la vista de la tabla anterior, encontrar la fórmula analítica que da el número de movimientos en función del número de discos. Esta es $2^n - 1$, siendo n el número de discos.
- Cuenta la leyenda que en la ciudad de Benarés existe un templo en el cual el dios hindú Brahma, al crear el mundo, colocó verticalmente tres varas de diamantes, colocando en la primera 64 anillos de oro: el más grande en la parte inferior, y los demás por orden de tamaño uno encima de otro hasta llegar al más pequeño situado en la parte superior. Los monjes del templo debían, trabajando noche y día sin descanso, trasladar todos los anillos de una vara a otra, utilizando la tercera como auxiliar, observando las reglas antes comentadas: cambiar sólo un anillo cada vez, y no colocar un anillo mayor sobre otro menor. La leyenda cuenta que cuando los 64 anillos

estuvieran trasladados llegaría el final del mundo. Suponiendo que sean capaces de realizar un movimiento por segundo, sea cual sea el disco movido y sea cual sea su posición de origen y su posición de destino, y asumiendo que siempre hay monjes para llevar a cabo la tarea, porque se turnan y hacen relevos, ¿cuánto tardan los monjes en completar su tarea? La respuesta: dado que $2^{64} – 1$ = 18.446.744.073.709.551.615, por lo que para trasladar 64 discos siguiendo la estrategia óptima se necesitarían dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince movimientos. Que a una velocidad de un movimiento por segundo quedarían cubiertos en 18.446.744.073.709.551.615 segundos, o lo que es lo mismo, unos 585.000 millones de años.

6.VII.38. Solitario inglés o de la Bastilla

Origen: Europeo, s. XVII.

La primera referencia documental sobre este juego data de 1697, en la corte de Luis XIV. Se dice que el juego pudo haber sido inventado anteriormente por un noble preso en la Bastilla para matar el aburrimiento. Hay dos versiones ampliamente extendidas del solitario que difieren en el número de casillas: el llamado solitario inglés, con 33 casillas y un tablero como el del *halatafl* (la zorra y los gansos), y el llamado solitario europeo o de la Bastilla, con 37 casillas. Posteriormente surgieron muchas otras variantes que modifican la estructura del tablero, el número de fichas, y otras características, dando lugar a problemas relacionados. El juego también se conoce como *senku* y como *peg solitaire*.

Las investigaciones sobre el problema central de este solitario y diversas variantes son sorprendentes, profundamente interesantes, y recientemente han gozado de cierta popularidad. La teoría de grupos ha sido aplicada al análisis de variantes, demostrando la insolubilidad de algunos problemas. Por ejemplo, con el tablero de 37 casillas el juego no tiene solución dejando la casilla central vacía. Sí la tiene si se parte de una casilla vacía adyacente a la central, y el objetivo es dejar una pieza en la casilla opuesta.

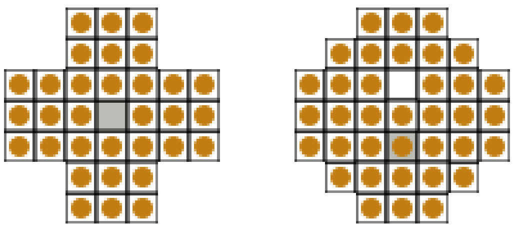


Figura 47.- Tableros y posición inicial para el solitario inglés y el solitario de la Bastilla, respectivamente. En gris, la posición en la que debe quedar la última ficha.

Reglas para el solitario inglés (33 casillas, 32 piezas, problema clásico central)

El objetivo de este solitario es quedarse con una sola ficha en la casilla central, que es la única vacía inicialmente. Para ello, hay que ir capturando fichas de manera adecuada, saltando por encima de ellas en dirección horizontal o vertical, único movimiento permitido.

Posibles líneas de investigación:

- Análisis de la estrategia ganadora.
- ¿Cuántas posibilidades de movimiento hay en el primer turno? ¿Y tras dos turnos? ¿Y tras cuatro?

Sugerimos a los lectores muy interesados en este solitario: Beasley (1985), de Brujin (1972), Bialostocki (1998).

6.VII.39. Tchuka ruma

Origen: La India.

El *tchuka ruma* indio es el único mancala solitario conocido además del *ise-ozin-egbe* nigeriano (2 filas, tres campos por fila). En él, sólo hay una fila de campos, terminada en un receptáculo mayor, llamado *ruma*.

Figura 48.- Receptáculos y posición inicial para el *tchuka ruma*.

Reglas:

En este solitario el jugador debe elegir qué campo vaciar, y sembrar su contenido, semilla a semilla, hacia la derecha. Si se alcanza el *ruma* y quedan semillas por sembrar, se sigue sembrando empezando por el primer receptáculo de la izquierda. Si una siembra acaba en un campo que estuviera vacío, se pierde la partida; si no, se sigue sembrando vaciando el campo en el que acabó la siembra anterior y sembrando a partir de él. Si la siembra acaba en el *ruma*, se puede elegir desde dónde continuar. El objetivo es trasladar todas las semillas al *ruma*.

Posibles líneas de investigación:

- Determinación de la estrategia ganadora.
- Notación abstracta para representar el juego.
- Considerar variantes aumentando el número de semillas iniciales por agujero, y variando el número de receptáculos.

Sugerimos a los interesados la consulta de Campbell y Chavey (1995), donde se analiza la solubilidad de las variantes de *n* agujeros y *k* semillas por agujero.

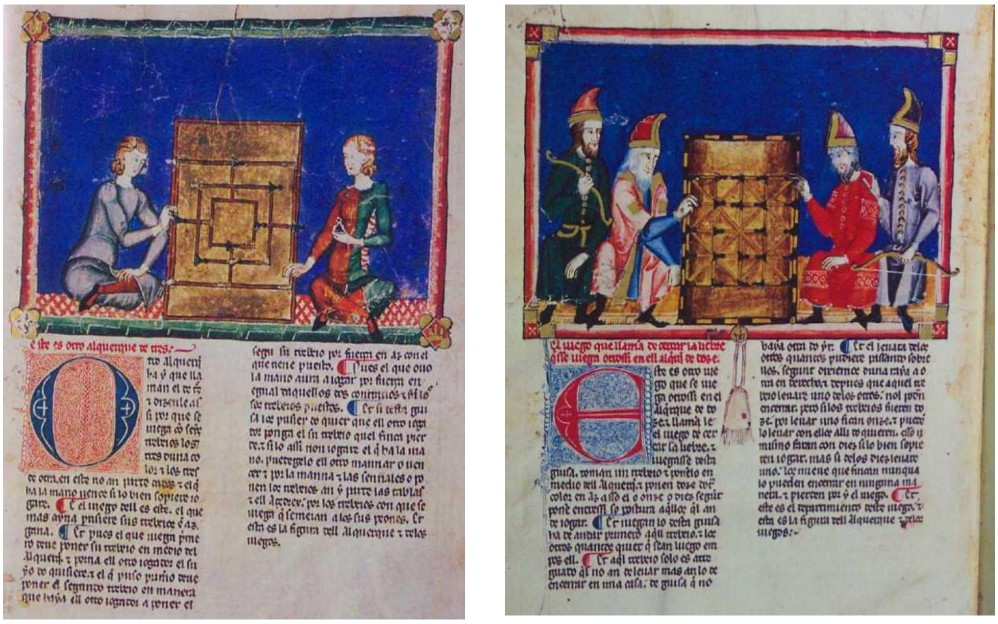


Figura 49.- Detalles de miniaturas de El Libro de los Juegos, de Alfonso X el Sabio. A la izquierda, dos jugadores jugando al Alquerque de Nueve, o Danza de los nueve hombres. A la derecha, Alquerque de Doce. Edición facsímil del manuscrito T.I.6 de la Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, Madrid. http://historicgames.com/alphonso/

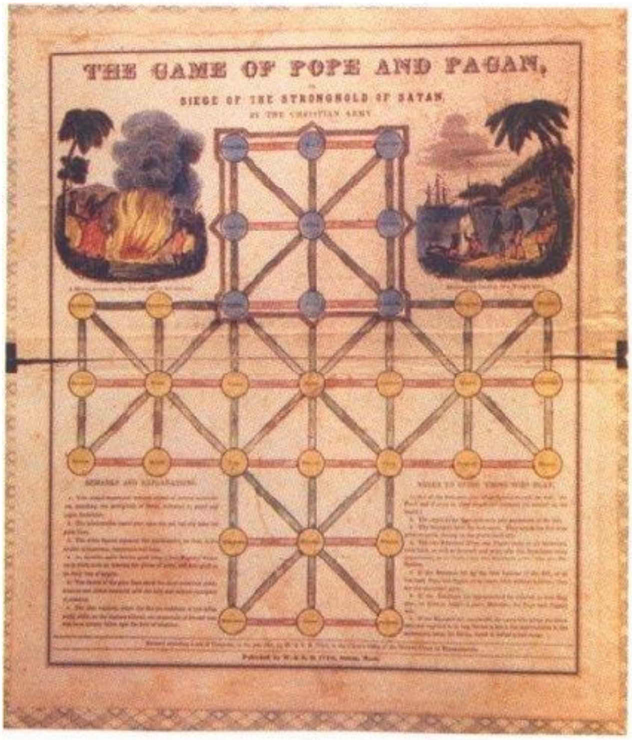


Figura 50.- "El juego del Papa y los herejes, o el Asedio de la Fortaleza de Satán por el Ejército Cristiano", una de las versiones del Asalto, comercializada en EEUU a partir de 1844 inspirada por las controversias entre el movimiento puritano de Nueva Inglaterra y la iglesia católica.

Figura 51.- Grabado “Madame la Princesse de Soubize joüant au jeu de Solitaire”, Claude-Auguste Berey, 1697. Se muestra un tablero de solitario con 37 casillas, probablemente el llamado de la Bastilla.

VIII. GRAFOS DE PIEDRA-PAPEL-TIJERA Y EXTENSIONES

En este anexo mostramos los grafos de los juegos de dedos tipo piedra-papel-tijera tratados en la Unidad 1 de la programación didáctica objeto de este trabajo y las extensiones a diferentes números de gestos reseñadas en el Anexo VII. Incluimos el piedra-papel-tijera clásico, la extensión a 5 gestos piedra-papel-tijera-lagarto-spock diseñada por Sam Kass y Karen Bryla, y las extensiones a 7, 9, 11, 15 y 25 gestos diseñadas por David C. Lovelace[28].

Los siguientes grafos han sido generados por el autor de este trabajo empleando GVEdit (v.1.02) para Graphviz (v.2.38.0), un software de código abierto para visualización de grafos, a partir de código DOT (lenguaje de programación descriptivo en texto plano utilizado para describir grafos) preparado por el mismo autor. No incluimos los ficheros .DOT por razones de espacio y considerar que el código no sería de interés para la gran mayoría de lectores.

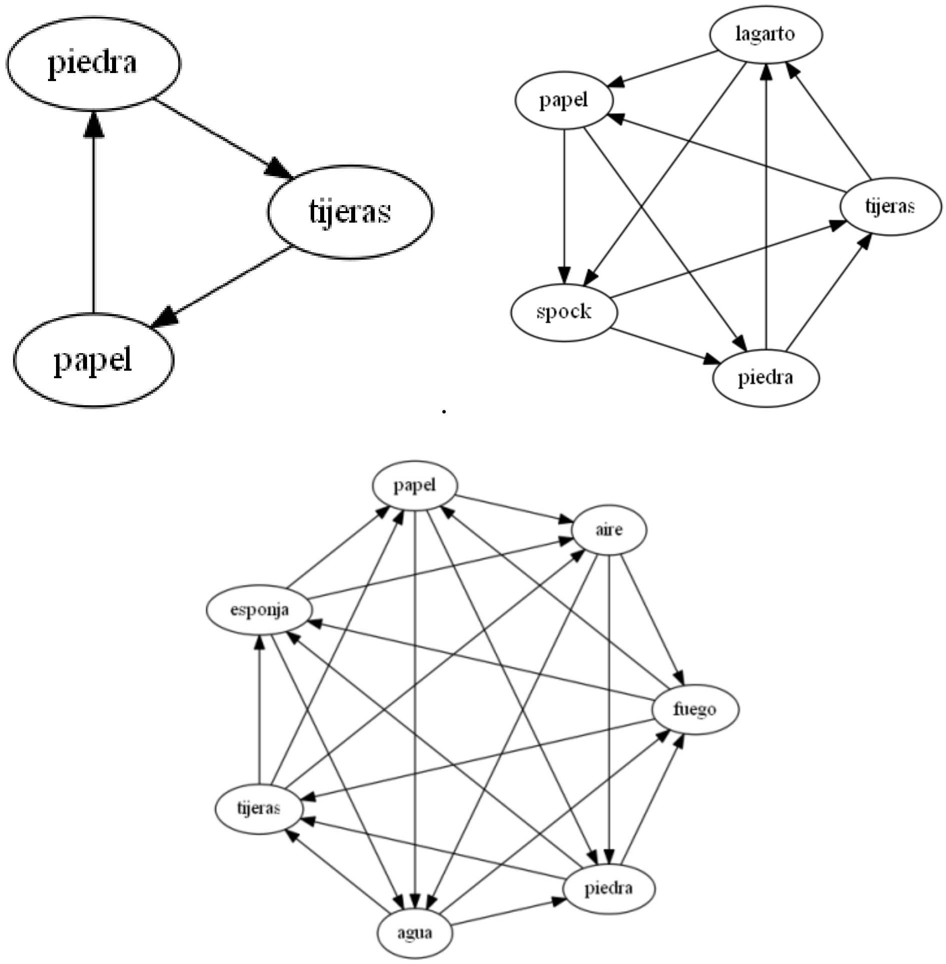


Figura 52.- Grafos para piedra-papel-tijera, piedra-papel-tijera-lagarto-spock, y RPS-7.

[28] Los interesados pueden encontrar un gráfico interactivo de la extensión a 101 gestos en la página web del propio Lovelace: http://www.umop.com/rps101/rps101chart.html Fecha de consulta: junio de 2014.

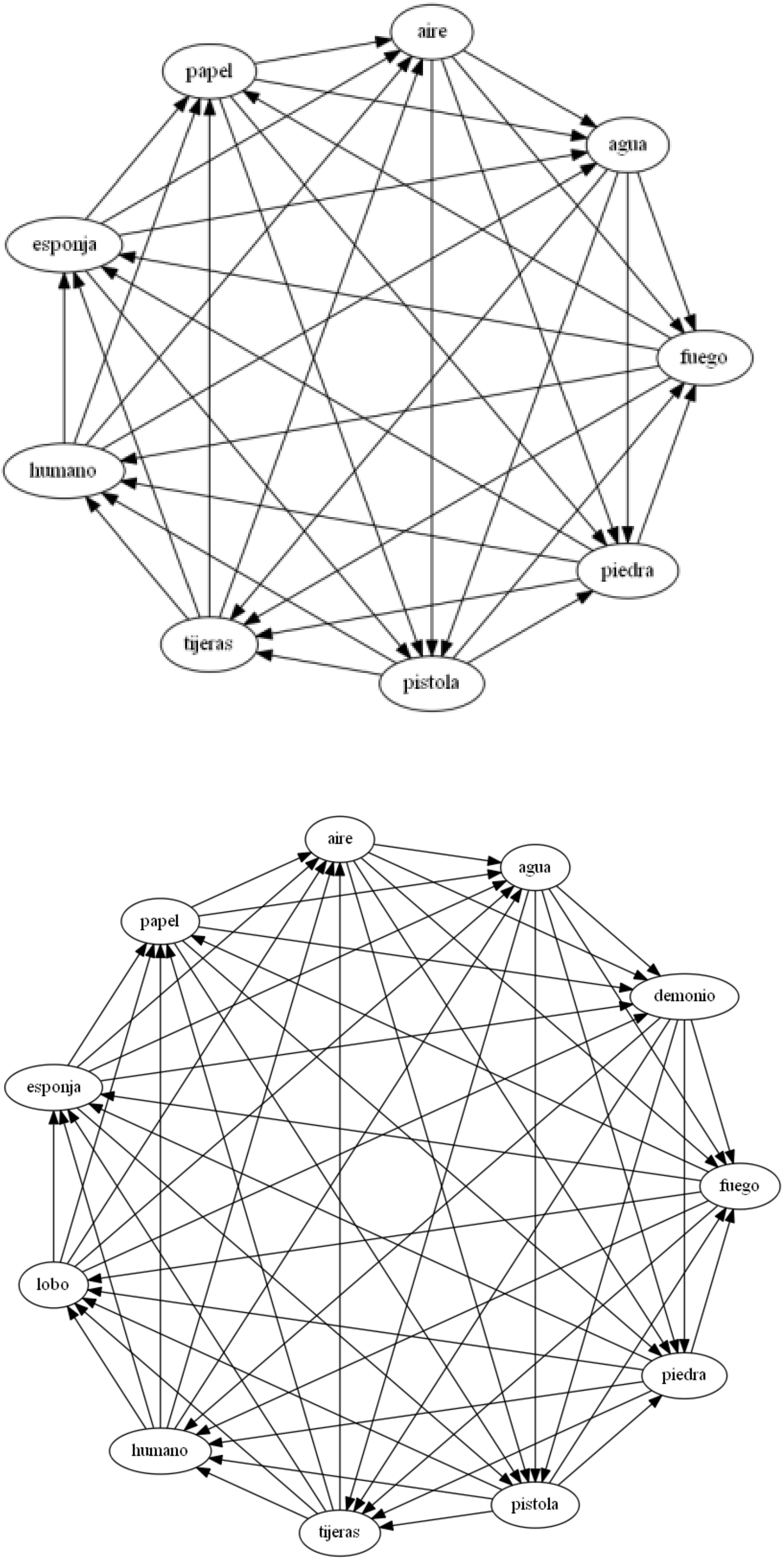
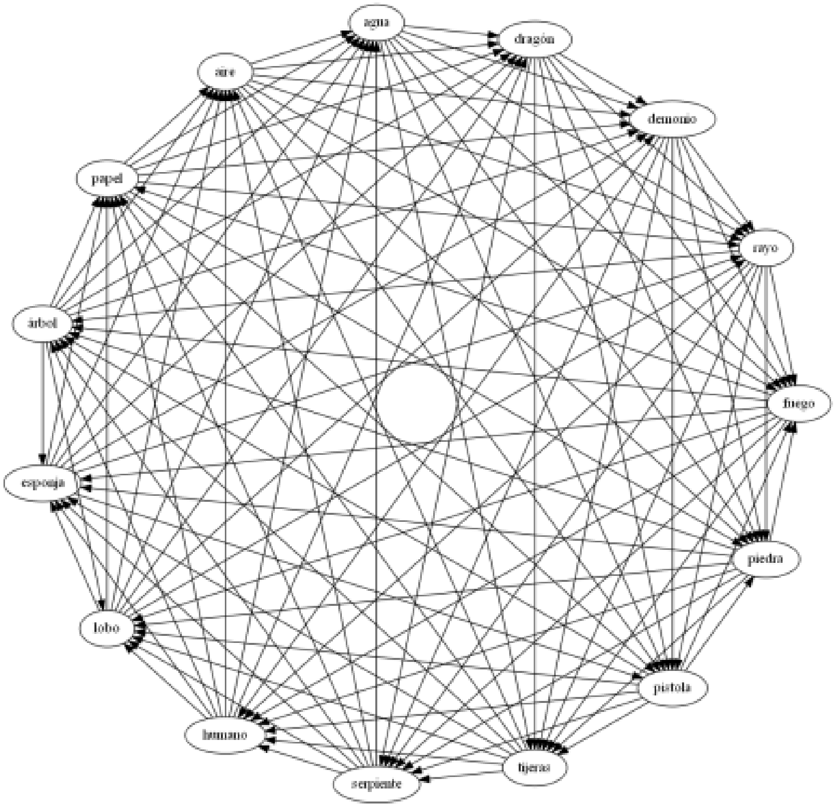


Figura 53.- Grafos para RPS-9 y RPS-11.



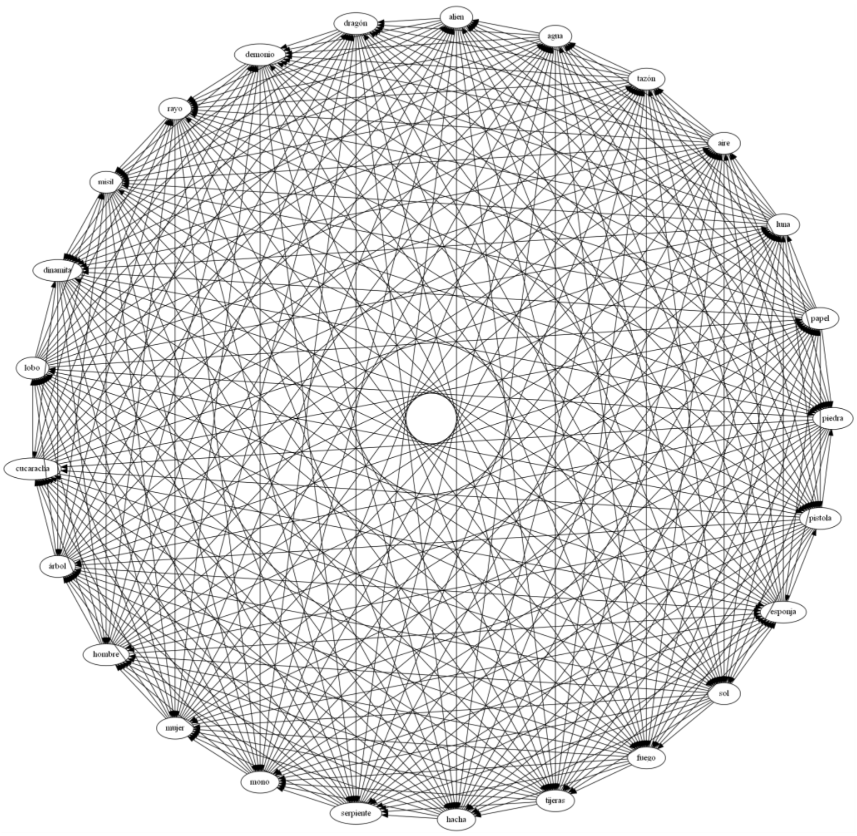


Figura 54.- Grafos para RPS-15 y RPS-25.