www.sapientia.uji.es | 81

UNIVERSITAT JAUME•I

Matemàtiques II

Ximo Gual Arnau

Matemàtiques II

Ximo Gual Arnau

UNIVERSITAT JAUME·I

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

■ Codi d'assignatura QU0907

 - ISBN: 978-84-695-7963-3

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 81
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2013

ISBN: 978-84-695-7963-3

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

ÍNDEX

Capítol 1

Introducció

Capítol 2

La integral de línia

Capítol 3

La integral múltiple

Capítol 4

La integral de superfície

Capítol 5

Equacions diferencials ordinàries

Capítol 6

Sèries de Fourier i transformades integrals

CAPÍTOL 1

Introducció

Contingut

Matemàtiques II (QU0907) del Grau en Química de l'Escola Superior de Tecnologia i Ciències Experimentals de la Universitat Jaume I és una assignatura de 6 crèdits ECTS que s'imparteix en el segon semestre del primer curs del grau.

L'ensenyament tradicional de les matemàtiques, que tenia com a objectiu prioritari l'assimilació memorística per part de l'estudiantat de conceptes, propietats i resultats, ha donat pas a un nou ensenyament més deductiu i raonat on l'estudiantat nés l'eix central. Per aquesta raó, a banda de les classes teòriques, hi ha classes de problemes i seminaris, on es plantegen qüestions i problemes que l'estudiantat haurà de treballar, una vegada analitzats els conceptes necessaris.

En l'assignatura *Matemàtiques I* (QU0904), l'estudiantat del Grau en Química té el primer contacte amb les matemàtiques superiors en una carrera de ciències. Els seus continguts s'estructuren en dos mòduls: el primer està dedicat a l'àlgebra lineal i el segon, al càlcul diferencial en una i diverses variables. L'assignatura *Matemàtiques II* constitueix la continuació de l'assignatura *Matemàtiques I* i completa els continguts de la matèria *Matemàtiques* del Grau en Química. Els seus continguts s'estructuren en tres mòduls: càlcul integral, equacions diferencials i sèries de Fourier.

El curs parteix del supòsit que l'estudiantat coneix el càlcul diferencial d'una i diverses variables, així com la teoria d'integració d'una variable, i que té coneixements elementals d'àlgebra lineal i de camps escalars i vectorials.

El document està estructurat en els següents capítols: "La integral de línia" (Capítol 2), "La integral múltiple" (Capítol 3), "La integral de superfície" (Capítol 4), "Equacions diferencials ordinàries" (Capítol 5), "Sèries de Fourier i transformades integrals" (Capítol 6), "Exemples de seminaris" (Capítol 7, on es presenten alguns exemples dels tipus de seminaris que l'estudiantat haurà de desenvolupar en les hores no presencials per a després presentar-los a classe) i "Connexions de les matemàtiques amb les àrees de química" (Capítol 8, en aquest capítol relacionem els coneixements proposats en les assignatures de contingut matemàtic amb altres assignatures del Grau en Química).

1.1 Continguts de l'assignatura Matemàtiques II

1.1.1 Presentació del programa

En la Taula 1.1 es presenta de manera esquematitzada el programa de l'assignatura *Matemàtiques II* del Grau en Química de la Universitat Jaume I de Castelló.

Taula 1.1: Programa proposat per a l'assignatura *Matemàtiques II* del Grau en Química

Programa de *Matemàtiques II*. Grau en Química
Bloc temàtic: Càlcul integral
Bloc temàtic: Equacions diferencials ordinàries
Bloc temàtic: Sèries de funcions i transformades integrals

1.1.2 Desenvolupament del bloc de càlcul integral

En aquest apartat desenvolupem, per capítols, les unitats que integren el bloc temàtic de Càlcul Integral i comentem, breument, el seu contingut i descripció.

Taula 1.2: Desenvolupament del bloc de càlcul integral.

Bloc temàtic: Càlcul integral	
Tema 2:	**La Integral de línia**
2.1	Integració de funcions d'una variable
2.2	Corbes en $\mathbb{R}^3$
2.3	Integrals curvilínies o de línia
2.4	Camps conservatius. Funció potencial
2.5	Problemes
Tema 3:	**La Integral múltiple**
3.1	La integral doble
3.2	Teorema de Green
3.3	La integral triple
3.4	Problemes
Tema 4:	**Integral de superfície**
4.1	Superfícies en $\mathbb{R}^3$
4.2	Integrals de superfície
4.3	Teorema de Stokes
4.4	Teorema de Gauss o de la divergència
4.5	Problemes

Pel que fa aquest bloc, l'estudiantat en l'etapa preuniversitària només obté coneixements relacionats amb el càlcul integral si prové del *Batxillerat de Tecnologia*, i aquests coneixements són: integrals i aplicacions de les integrals.

Per tant, una vegada que l'estudiantat ha adquirit els coneixements elementals d'àlgebra lineal i geometria i càlcul diferencial de diverses variables, i partint de la base que coneix la teoria d'integració d'una variable (teoria que es reforça mitjançant la resolució de problemes i exercicis proposats a l'estudiantat), el contingut d'aquest capítol presenta dues parts clarament diferenciades: càlcul integral vectorial i càlcul integral de diverses variables.

En el capítol segon s'introdueixen les integrals de funcions al llarg de corbes. Encara que els primers problemes sobre corbes van sorgir pràcticament de la mà dels primers problemes de càlcul, se sol considerar que el començament de la teoria de corbes en l'espai es deu a G. Monge (1746-1818). Iniciem el tema introduint el concepte de corba com a lloc geomètric de $\mathbb{R}^3$ i com a aplicació definida en un interval de $\mathbb{R}$. A continuació es defineixen les integrals de línia de camps escalars i vectorials i, finalment, s'estudien els camps conservatius i la funció potencial.

El tercer capítol es dedica al càlcul integral de dues i tres variables i les seues aplicacions. El principal objectiu és fonamentar, des d'un punt de vista intuïtiu i precís, el concepte d'integral múltiple, les seues propietats i el mètode de càlcul d'integrals mitjançant iteració. Tenint en compte l'existència de programes informàtics que permeten el càlcul d'integrals, considerem més important fer èmfasi en la definició d'integral i les seues aplicacions. Aquestes aplicacions són el càlcul d'àrees, volums, centres de massa i moments d'inèrcia. També s'introdueix la resolució d'integrals mitjançant un canvi de variables i es repassen les coordenades polars, cilíndriques i esfèriques. Finalment s'enuncia el primer teorema integral, que deu el seu nom a G. Green (1793-1841) i va sorgir en relació amb la teoria del potencial (elèctric i gravitacional). Aquest teorema relaciona una integral de línia d'un camp vectorial al llarg d'una corba tancada en el pla amb una integral doble sobre la regió tancada per aquesta corba.

En el capítol quart s'inicia l'estudi d'integrals de superfície. Encara que científics com Euler, Lagrange i Monge ja havien tractat problemes sobre superfícies, se sol considerar K. F. Gauss (1777-1855) com el primer a abordar l'estudi de superfícies en l'espai.

Igual que en el cas de corbes, l'objectiu de la definició de superfície es basa a formular, a través del càlcul diferencial en $\mathbb{R}^3$, la idea que prové de la intuïció geomètrica. Aquesta definició intuïtiva consisteix a considerar una superfície com un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ tal que cada punt seu té un entorn igual a un tros de pla doblegat suaument i sense autointerseccions en l'espai.

El pas següent consisteix en l'estudi de les integrals de superfície. L'esquema a seguir en aquest estudi és molt similar a l'utilitzat en les integrals de línia. Per tant, el concepte d'integral d'un camp escalar sobre una superfície regular S serà una generalització natural de l'àrea d'una superfície i el significat de la integral d'un camp vectorial s'interpreta utilitzant el camp vectorial velocitat d'un fluid; així, la seua integral de superfície representa la quantitat neta de fluid que flueix a través de la superfície per unitat de temps. Aquesta integral també es coneix com a flux del camp a través de la superfície.

Per finalitzar el capítol introduïm els teoremes de Stokes i Gauss. El teorema de Stokes, encara que deu el seu nom a G. Stokes (1819-1903), va ser realment suggerit a aquest mateix autor per Lord Kelvin en 1850. Aquest resultat relaciona la integral de línia d'un camp vectorial al voltant d'una corba tancada simple en $\mathbb{R}^3$ amb la integral sobre una superfície que té aquesta corba per frontera. L'últim teorema que es considera és el teorema de Gauss o teorema de la divergència de Gauss. El fet d'anomenar-se teorema de Gauss es deu a la seua estreta relació amb la llei de Gauss en electrostàtica. Aquest teorema suposa una generalització a $\mathbb{R}^3$ del teorema de Green i assegura que el flux d'un camp vectorial cap a fora d'una superfície tancada és igual a la integral de la divergència d'aquest camp vectorial sobre el volum tancat per la superfície.

La bibliografia dedicada a l'estudi del càlcul integral és molt abundant i també són moltes les obres de consulta a les quals es pot accedir a través de la biblioteca de la Universitat Jaume I. Alguns llibres que recomanem per a aquest bloc són:

- ▷ El llibre [3] presenta una anàlisi detallada dels continguts d'aquest bloc.
- ▷ Els llibres [12] i [28] s'utilitzen per introduir la geometria diferencial clàssica de corbes i ofereixen demostracions diferents dels mateixos resultats.
- ▷ Els llibres [11] i [23] presenten els resultats juntament amb exemples i algunes demostracions, acompanyades de proves instructives i heurístiques, que faciliten la seua comprensió.

- ▷ El llibre [4] presenta els enunciats teòrics i problemes resolts d'integrals dobles i triples i integrals de línia i superfície, així com exercicis relatius als teoremes del càlcul vectorial.
- ▷ Els llibres [5] i [40] ofereixen col·leccions de problemes resolts. El primer presenta problemes centrats en la integració d'una i diverses variables, integrals de línia i el teorema de Green, mentre que en el segon apareixen problemes de càlcul de diverses variables, amb especial recalcament en el càlcul integral.

1.1.3 Desenvolupament del bloc d'equacions diferencials

En aquest apartat desenvolupem, per capítols, les unitats que integren el bloc temàtic d'equacions diferencials i comentem, breument, el seu contingut i descripció.

Taula 1.3: Desenvolupament del bloc d'equacions diferencials.

Bloc temàtic: Equacions diferencials	
Tema 5:	**Equacions diferencials ordinàries**
5.1	Introducció i definició d'Equacions Diferencials
5.2	Equacions Diferencials Ordinàries de primer ordre
5.3	Equacions diferencials lineals d'ordre superior
5.4	Problemes

Les equacions diferencials ordinàries es presenten de manera molt natural en molts problemes de naturalesa química. Servisca com a exemple el problema de la desintegració radioactiva. La llei principal de la desintegració radioactiva, establida experimentalment, consisteix en el fet que la raó entre el nombre d'àtoms desintegrats en una unitat de temps és proporcional al nombre total d'àtoms, on la constant de proporcionalitat només depèn del tipus d'àtom. Si es disposa d'una quantitat inicial d'àtoms d'una substància i es desitja conèixer la quantitat d'àtoms no desintegrats en un instant de temps posterior, s'ha de resoldre una equació diferencial ordinària. La solució d'aquesta equació diferencial és la base d'un instrument científic important, ja que si es coneix el temps mitjà de vida d'àtoms radioactius presents en la naturalesa es poden assignar dates a esdeveniments que van tenir lloc fa milers de milions d'anys; per exemple, s'ha aconseguit estimar que l'home va creuar l'estret de Bering fa uns 11.500 anys (més detalls es troben en [36] i [42]).

En el primer apartat s'introdueixen alguns antecedents sobre les equacions diferencials, es diferencia entre equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials i s'explica el concepte de solució d'una equació diferencial ordinària i el problema de valor inicial.

La primera part del segon capítol es dedica a establir un teorema d'existència i unicitat de la solució per a un problema de valor inicial, definit a partir d'una equació diferencial de primer ordre. En lloc de detallar la demostració d'aquests teoremes es recorda a l'estudiantat que el mètode utilitzat per a la seua demostració és el de les aproximacions successives. El mètode de les aproximacions successives va ser publicat en primer lloc per J. Liouville en 1838 en connexió amb l'estudi de les equacions diferencials lineals de segon ordre. Més tard va ser estès per J. Caqué en 1864, L. Fuchs en 1870 i G. Peano en 1888, a l'estudi de les equacions lineals d'ordre n. En 1890, I. Picard va estendre el mètode en abastar les equacions diferencials no lineals.

A continuació es presenten diferents tipus d'equacions diferencials a partir de problemes de modelització, i es resolen mitjançant mètodes analítics. Finalment s'introdueixen algunes aplicacions geomètriques, a través de les trajectòries ortogonals i isogonals.

En el tercer apartat s'introdueixen les equacions diferencials ordinàries lineals d'ordre superior, a partir de problemes de modelització, i s'estudien alguns mètodes de resolució analítica.

La majoria de llibres dedicats a l'estudi d'un curs avançat de càlcul solen contenir, a més del bloc de càlcul integral, un apartat dedicat a l'estudi de les equacions diferencials ordinàries. A més, la bibliografia específica dedicada a l'estudi de les equacions diferencials ordinàries és també molt abundant i, entre les obres de consulta a les quals es pot accedir a través de la biblioteca de la Universitat Jaume I, destaquem:

- ▷ El llibre [37] presenta un estudi de les equacions diferencials (ordinàries i en derivades parcials) amb exemples, ressenyes i aplicacions.

- ▷ Els llibres [31] i [24] introdueixen la teoria de les equacions diferencials des de dues òptiques diferents. En el primer podem trobar la teoria detallada de les equacions diferencials ordinàries i sistemes d'equacions diferencials. En el segon s'introdueix la teoria de les equacions diferencials a través de diferents models i aplicacions.
- ▷ Els llibres [14] i [18] exposen exercicis resolts d'equacions diferencials. El primer se centra en les equacions diferencials ordinàries de primer ordre, mentre que el segon, després d'una breu exposició dels resultats teòrics, allista una sèrie de problemes d'equacions diferencials ordinàries amb les corresponents solucions detallades.
- ▷ Finalment, el llibre [29] conté la teoria bàsica, juntament amb aplicacions, de les equacions diferencials i inclou capítols relatius a problemes amb valors en la frontera.

1.1.4 Desenvolupament del bloc de sèries de Fourier i transformades

En aquest apartat desenvolupem, per capítols, les unitats que integren el bloc temàtic de sèries de Fourier i transformades Integrals i comentem, breument, el seu contingut i descripció.

Taula 1.4: Desenvolupament del bloc de sèries de Fourier i transformades

Bloc temàtic: Sèries de Fourier i transformades integrals	
Tema 6:	**Sèries de Fourier i transformades integrals**
6.1	Introducció
6.2	Periodicitat
6.3	Sistemes ortogonals de funcions
6.4	Sèrie trigonomètrica de Fourier
6.5	Transformada de Fourier
6.6	Transformada de Laplace
6.7	Problemes

Els successos que es repeteixen amb una certa periodicitat són relativament comuns en la naturalesa. Pensem, per exemple, en les ones en el mar, les estacions al llarg de l'any, la transmissió del so, el pèndol d'un rellotge, els senyals electromagnètics emesos per una antena, etc. També podem fixar-nos en fenòmens que depenen de més variables, com les ombres que es produeixen amb la difracció d'un parell de feixos de llum. Encara que tots aquests sistemes siguen més o menys cíclics, açò no vol dir que siguen fàcils de descriure o modelar.

Les sèries de Fourier, que han tingut un paper fonamental en l'estudi d'aquests problemes, van ser introduïdes per J. J. Fourier (1768-1830) en un treball publicat en 1822 en el qual va desenvolupar la teoria de la conducció de la calor. En el primer capítol s'introdueixen les sèries de Fourier a partir de la definició d'un sistema ortogonal de funcions.

La transformada de Fourier i, sobretot, la transformada de Laplace, que deu el seu nom a P. Simon, marquès de Laplace (1749-1827), s'introdueixen amb la finalitat de resoldre equacions diferencials ordinàries i, per extensió, sistemes d'equacions diferencials ordinàries i equacions diferencials parcials.

La majoria de llibres dedicats a l'estudi d'equacions diferencials solen contenir un apartat dedicat a l'estudi de les sèries de Fourier i transformades integrals de Fourier i de Laplace. A més, la bibliografia específica dedicada a l'estudi de les sèries de Fourier i transformades integrals és també molt abundant i, entre les obres de consulta a les quals es pot accedir a través de la biblioteca de la Universitat Jaume I, destaquem:

- ▷ El llibre [7] presenta una introducció elemental de les sèries de Fourier en una variable; i s'hi exposen diverses de les seues aplicacions, principalment les corresponents als problemes que es plantegen en física matemàtica. El text està estructurat entorn del plantejament i la solució d'exercicis, i en presenta cent, resolts amb tot detall.
- ▷ El llibre [1] resulta molt simple i fàcil de llegir, adequat per a l'estudiant que vulga una primera presa de contacte amb la transformada de Laplace.
- ▷ El llibre [19] és un típic text americà, escrit per un matemàtic i dedicat a les aplicacions avançades de les matemàtiques a les enginyeries. El material ací desenvolupat es troba en diferents capítols del llibre.

▷ Finalment, el llibre [33] és un text molt bo, aconsellable tant per al matemàtic aplicat com per al químic. Fa un pont entre la teoria i les aplicacions, i il·lustra a més els coneixements bàsics i necessaris per a poder treballar en aquest camp multidisciplinari.

CAPÍTOL 2

La integral de línia

Contingut

En molts processos de la química i la física és convenient modelitzar un cos de l'espai mitjancant una corba, de manera que el model siga més senzill que l'objecte original. Així, es tracta un filferro o un fil conductor com una línia. Tot i això, aquests models estan dotats d'una funció de densitat de massa. Si volem determinar la massa d'una línia material de l'espai $\mathbb{R}^3$ a partir de la seua funció de densitat, hem de fer una integral de línia.

Encara que se suposa que l'estudiantat coneix la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ per a funcions reals i fitades en intervals finits, comencarem el capítol fent un repàs d'aquesta integral, amb exemples que l'estudiantat treballarà en els seminaris de tutories. En les integrals de línia, l'interval $[a, b]$ de la integral definida es reemplaça per una corba en l'espai 3-dimensional.

El problema de definir el treball realitzat per una força variable aplicada a un punt material, quan aquest es desplaça per una corba donada, condueix de manera natural a les anomenades *integrals de línia o curvilínies*. Més enllà d'aquest exemple, les integrals de línia constitueixen una eina fonamental en diversos camps de la química. En múltiples ocasions es pot representar l'estat d'un sistema qualsevol, caracteritzat pel valor de diverses magnituds, per un punt en un espai. Quan el sistema evoluciona, canvia de manera contínua l'estat; aquesta evolució o aquest procés corresponen a una corba en l'espai dels estats. Moltes quantitats d'interès en un procés es poden calcular com la integral curvilínia, al llarg de la corba que descriu el procés, d'una funció de les variables que el caracteritzen. Aquest esquema s'aplica a un gran nombre de sistemes: microscòpics, termodinàmics, econòmics...

2.1 Integració de funcions d'una variable. Aplicacions

2.1.1 La integral definida d'una variable

En aquest apartat de caràcter introductori, repassarem succintament la definició d'integral de Riemann d'una variable. Siga $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció definida en un interval de la recta real. Si $f(x)$ és una funció positiva, el gràfic de f determina, amb l'eix d'abscisses, una àrea que volem calcular.

La idea de partida és simple; consisteix a aproximar l'àrea que es vol calcular per la suma de les àrees de certs rectangles, com il·lustra la figura 2.1. Per fer-ho, es subdivideix el segment $[a, b]$ en n intervals $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, de longitud $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; després escollim punts $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ i es defineix la suma

$$S(x_i, c_i) = f(c_0)\Delta x_0 + \cdots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

que s'anomena *la suma de Riemann associada a la partició*, i que correspon a la suma de les àrees dels rectangles que aproximen l'àrea sota el gràfic de f.

Les sumes de Riemann depenen de les subdivisions realitzades i dels punts c_i escollits (en la figura 2.1 tenim dues sumes que corresponen a valors de c_i diferents). Per formalitzar la definició d'integral s'ha de fer un pas al límit: es diu que f és integrable en l'interval $[a, b]$ d'integral I si, donat un nombre real qualsevol $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que per a tota partició de $[a, b]$ amb $\Delta x_i < \delta$, per a tot i, les sumes de Riemann associades satisfan que

$$|I - S(x_i, c_i)| < \epsilon,$$

independentment dels punts c_i escollits. Usualment s'escriu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

No totes les funcions són integrables. Si la funció no està fitada podem fer les sumes de Riemann tan grans com vulguem (escollint els c_i adequats) i, per tant, la funció no és integrable. La fitació d'una funció tampoc assegura integrabilitat, però sí la continuïtat o la monotonia a trossos, com és el cas de les funcions fitades que trobem en les aplicacions.

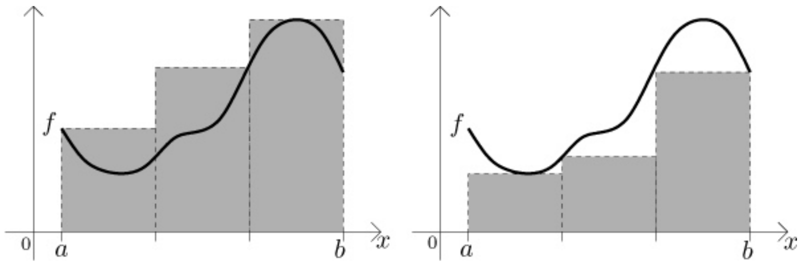


Fig. 2.1. Aproximació de l'àrea per les àrees de rectangles amb punts c_i diferents i intervals de la mateixa longitud Δx_i

2.1.2 Treballs tutoritzats

Calculeu les següents integrals, dibuixeu els gràfics i interpreteu el valor de les integrals en funció de la mesura de les àrees que determina el gràfic de la funció per dalt i per sota de l'eix de les abscisses:

a) $\int_{-1}^{5}(5.89 - 1.9x)dx$.

b) $\int_{1}^{4}(x^3 - 2x^2)dx$.

c) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9 - x^2}dx$.

d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x dx$.

Principi de Cavalieri.- Enuncia el principi de Cavalieri i utilitza'l per a calcular el volum d'una bola esfèrica de radi R.

2.1.3 La integral indefinida

Donada una funció, $f(x)$, cal trobar una funció, $F(x)$, tal que la seua derivada siga precisament la funció $f(x)$, és a dir,

$$F'(x) = f(x).$$

Una funció F s'anomena primitiva de f en $[a, b]$ si F és contínua en $[a, b]$ i es compleix que $F'(x) = f(x)$ per a tot punt $x \in]a, b[$.

Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$. Si $F_1(x)$ i $F_2(x)$ són dues primitives de $f(x)$ en $[a, b]$, aleshores la seua diferència és una constant,

$$F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Si una funció F és una primitiva de f, aleshores l'expressió $F(x) + C$, on $C \in \mathbb{R}$, s'anomena integral indefinida o integral de la funció $f(x)$, i ho escriurem com

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{on,} \quad F'(x) = f(x).$$

Nota. De la definició anterior es dedueix que si derivem una integral indefinida obtenim la funció que voliem integrar, és a dir,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' \; = F'(x) = f(x).$$

Aquesta és la raó per la qual a vegades es diu que integrar és "el contrari"de derivar.

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua, aleshores

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

defineix una primitiva de f, de manera que, si G és qualsevol altra primitiva, es té

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a),$$

ja que

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Nota. Una bona estratègia per tal de calcular una integral és fer primer una conjectura de quin ha de ser el resultat i després derivar aquesta funció conjecturada. Segons el resultat obtingut, es modifica o no la conjectura.

Siguen f i g funcions contínues; aleshores, es compleix que

$$i) \int k\; f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Exemple. Calcula les següents integrals:

$$\int 8x dx, \qquad \int (2x - x^3 + 2x^4) dx.$$

La regla de la cadena també apareix en el càlcul d'integrals senzilles.

Siguen f i u dues funcions tals que es pot definir la funció composició $(f \circ u)(x) = f(u(x))$. Aleshores,

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

on F és la primitiva de f.

Nota. Aquesta propietat s'utilitza per tal de resoldre integrals amb el mètode de substitució. La idea és definir una nova variable t igual a l'expressió $u(x)$, de manera que la derivada de $u'(x)$ aparega en calcular la derivada de la nova variable t, és a dir,

$$t = u(x), \quad \text{i} \quad dt = u'(x) dx.$$

Exemples. Calculeu les següents integrals:

$$\int (x^2 + 2)^2\, x dx, \qquad \int (\sin^2 x\ \cos x) dx.$$

A continuació presentem algunes de les integrals immediates més habituals:

$$\int dx = x + C, \qquad \int u'(x) dx = u(x) + C.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \int (u'(x))^n\, u'(x) dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1).$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad \int \frac{1}{u(x)} u'(x) dx = \ln|u(x)| + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int e^{u(x)}\, u'(x) dx = e^{u(x)} + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int a^{u(x)}\, u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C.$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \qquad \int \sin(u(x))\, u'(x) dx = -\cos(u(x)) + C.$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \qquad \int \cos(u(x))\, u'(x)dx = \sin(u(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C, \qquad \int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}dx = \tan(u(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C, \qquad \int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}dx = \arctan(u(x)) + C.$$

Integració per parts

Aquest és un tipus especial d'integrals que es poden calcular fàcilment utilitzant el següent resultat.

Siguen $u(x)$ i $v(x)$ dues funcions continues en $[a, b]$ amb derivades contínues; aleshores,

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx.$$

Exemples. Calculeu la següent integral:

$$\int x\, \sin(x)dx.$$

Nota. Per tal de comprovar si hem fet bé una integral, sempre podem derivar el resultat obtingut i veure si coincideix amb la funció que volíem integrar.

Nota. Aquest mètode d'integració per parts s'acostuma a utilitzar en integrals del tipus

$$\int x^k\, \sin(ax)\, dx, \quad \int x^k\, \cos(ax)\, dx, \quad \int x^k\, e^{ax}\, dx, \quad \int x^k\, \ln x\, dx.$$

2.1.4 Treballs tutoritzats: Exercicis d'integració

$$\int (x^2 - 2\sin x)dx, \qquad \int (x^2 - 2\cos x)dx, \qquad \int (a^x - e^x)dx,$$

$$\int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx, \qquad \int \left(1 - \sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx,$$

$$\int \cos 5x dx, \qquad \int \cos\left(\frac{3x}{4}\right) dx, \qquad \int \cos\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) dx,$$

$$\int x \ln x \, dx, \qquad \int x \cos x \, dx, \qquad \int x^2 \ln x \, dx,$$

$$\int x^2 \cos x \, dx, \qquad \int e^x \cos x \, dx, \qquad \int e^x \sin x \, dx,$$

$$\int \frac{\cos t}{3 + \sin t} dt, \qquad \int \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \qquad \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} dx,$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx, \qquad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x+3}} dx, \qquad \int \frac{x^{-1}}{1 + \ln^2 x} dx.$$

2.2 Corbes en $\mathbb{R}^3$

2.2.1 Definicions

Definició 2.1. S'anomena corba en $\mathbb{R}^3$ una funció contínua

$$\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), \quad \gamma_i : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Les funcions coordenades també solen representar-se com

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ o com } \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

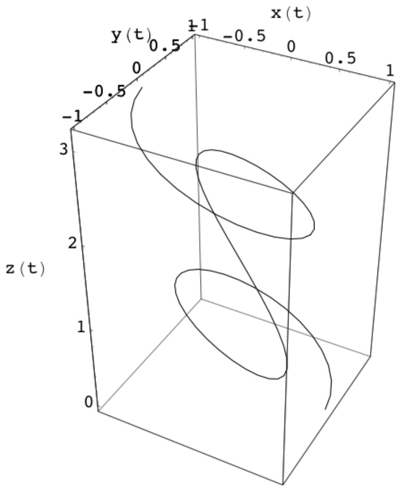
Dues corbes $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\beta : [c, d] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ són equivalents si es pot passar de l'una a l'altra per un canvi de variables $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$. En aquest cas es diu que α i β són dues parametritzacions d'una mateixa corba. És a dir, dues corbes distintes la imatge de les quals és la mateixa es diuen *corbes equivalents*.

Orientació de corbes.- Direm que α i β tenen la mateixa orientació si φ és creixent, de manera que $\alpha(a) = \beta(c)$ i $\alpha(b) = \beta(d)$. Si, per contra, $\alpha(a) = \beta(d)$ i $\alpha(b) = \beta(c)$, direm que α i β tenen l'orientació oposada o canviada.

Definició 2.2. La imatge de l'arc γ es denota per

$$\gamma^* = Im\gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad t \in [a, b]\}.$$

El punt inicial de la corba és $\gamma(a)$ i el punt final, $\gamma(b)$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, la corba s'anomena tancada. Si la corba no té autointerseccions s'anomena simple.



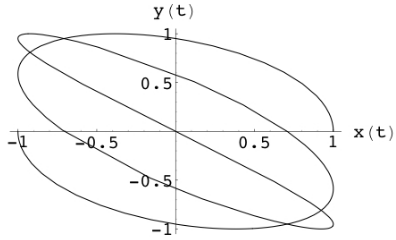


Fig. 2.2. Exemple de corba en $\mathbb{R}^3$ i de corba plana $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

2.2.2 Treballs tutoritzats

Considereu dues parametritzacions diferents α i β de la circumferència de radi r centrada a l'origen que tinguen la mateixa imatge $\alpha^* = \beta^*$ (dibuixeu α^* i β^*). Comproveu si les parametritzacions recorren la circumferència en el sentit de les agulles del rellotge (orientació *negativa*) o en el sentit contrari (orientació *positiva*). Considereu, a partir de α i β, dues noves parametritzacions que recórreguen la circumferència en sentit contrari a α i β.

Definició 2.3. Una corba $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és de classe C^1 si hi ha derivades de les funcions γ_i en $[a, b]$ i són funcions contínues.

Definició 2.4. Una corba de classe C^1, $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es diu que és regular o suau si

$$\gamma'(t) \neq 0, \qquad \forall t \in [a, b].$$

Definició 2.5. Siga $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba de classe C^1. S'anomena vector derivada o vector velocitat de γ en el punt $\gamma(t)$ el vector

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)), \qquad t \in [a, b].$$

El vector $\gamma'(t)$ és tangent a la corba en el punt corresponent $\gamma(t)$. La denominació de vector velocitat al·ludeix al sentit físic d'aquest quan γ representa la trajectòria d'un punt mòbil en funció del temps.

Si, a més, γ és regular, es defineix el vector tangent unitari en el punt $\gamma(t)$ com

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}. \tag{2.2}$$

2.2.3 Longitud d'una corba

La idea per a introduir el concepte de longitud d'una corba consisteix a aproximar la corba per mitjà de polígons inscrits. La intuïció ens diu que la longitud de qualsevol polígon inscrit no excedirà la de la corba (atès que la línia recta és el camí més curt entre dos punts); així, la longitud d'una corba és l'extrem superior de les longituds de tots els polígons inscrits possibles. Ara bé, hi ha corbes per a les quals no és finit aquest límit superior. Les corbes que tenen longitud finita s'anomenen *rectificables*; i n'hi ha prou d'exigir que la corba siga de classe C^1 perquè siga rectificable. A partir d'ara només considerarem corbes de classe C^1.

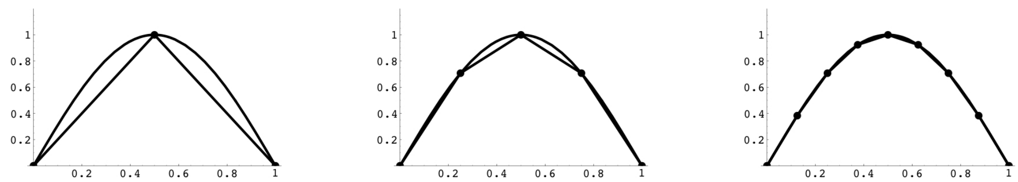


Fig. 2.3. Corba amb diferents polígons inscrits

Definició 2.6. Donada una corba $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1, es defineix la longitud de γ com

$$l(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)||\ dt. \tag{2.3}$$

Notem que cal pensar en la longitud $l(\gamma)$ com una suma (representada per la integral) d'elements consecutius d'arcs rectilinis de longituds $||\gamma'(t)||\ dt$, on $||\gamma'(t)||$ és el valor de la velocitat instantània i dt l'increment infinitesimal de temps.

2.2.4 Treballs tutoritzats

Calculeu les longituds de les corbes següents:

cc Ximo Gual Arnau - ISBN: 978-84-695-7963-3

Matemàtiques II - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia81

a) Una circumferència de radi r.

b) El gràfic d'una funció $f : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

c) Una hèlice circular donada per $\beta : [0, 2\pi] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ on $\beta(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$ (a i r són constants).

2.3 Integrals curvilínies o de línia

2.3.1 Integral de línia d'un camp escalar

Definició 2.7. Considerem un camp escalar $f : U \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continu i una corba $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\gamma^* \subset U$.

Es defineix la integral curvilínia del camp escalar f al llarg de la corba γ com

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\,dt. \tag{2.4}$$

Aquesta integral existeix perquè l'integrant $f(\gamma(t))||\gamma'(t)||$ és una funció contínua, per ser f contínua i γ de classe C^1.

2.3.2 Treballs tutoritzats

A partir de l'expressió (2.4) i l'anterior interpretació, expliqueu i expresseu la longitud d'una corba com la integral curvilínia d'un camp escalar.

Donada la funció escalar $f(x, y) = e^{x+y}$, calcula la integral de línia al llarg del segment que uneix els punts (1,1) i (4,5).

Algunes aplicacions.- Càlcul de centres de gravetat i moments d'inèrcia.
Siga $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Siga $f : \gamma^* \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció densitat (lineal) de γ^*.

Definició 2.8. Es defineix la massa total de γ^* com

$$M := \int_\gamma f\,ds.$$

Definició 2.9. Es defineix el centre de masses (o centre de gravetat) de la imatge d'una corba γ^* com el punt de coordenades (X, Y, Z) (no necessàriament sobre la

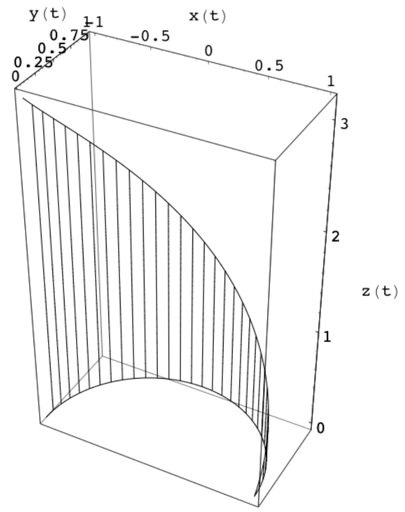


Fig. 2.4. Interpretació geomètrica de la integral curvilínia d'un camp escalar com una àrea

corba) donat per les integrals de línia:

$$X := \frac{1}{M}\int_\gamma x\, f\, ds, \quad Y := \frac{1}{M}\int_\gamma y\, f\, ds, \quad Z := \frac{1}{M}\int_\gamma z\, f\, ds.$$

Definició 2.10. Es defineix el moment d'inèrcia I de γ^* respecte d'un eix com

$$I := \int_\gamma r^2\, f\, ds,$$

sent $r(x, y, z)$ la distància del punt (x, y, z) de l'objecte γ^* a l'eix considerat.

Calcula la massa total, el centre de masses i el moment d'inèrcia respecte de l'eix OZ per al moll (hèlix) de densitat constant ρ

$$\gamma : [0, 8\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

2.3.3 Integral de línia d'un camp vectorial

Definició 2.11. Donats un camp vectorial continu $F : U \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i una corba $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\gamma^* \subset U$, es defineix la integral curvilínia del camp vectorial F al llarg de la corba γ com

$$\int_\gamma F\,ds := \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt, \tag{2.5}$$

on $u\cdot v$ representa el producte escalar de vectors de $\mathbb{R}^3$.

Aquesta integral existeix perquè l'integrant $F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ és una funció contínua, per ser F un camp continu i γ de classe C^1.

Interpretació física.- Suposem que $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ és un camp de força a l'espai. Suposem també que una partícula (per exemple una unitat de càrrega d'un camp elèctric) es mou al llarg d'una corba α. Aleshores, el treball realitzat per la força F al llarg de α és

$$\int_\gamma F\,ds.$$

Calculeu el treball realitzat per la força $F(x,y,z)=(f,f,f)$ on f és constant, al llarg del segment $\alpha:[0,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ on $\alpha(t)=(t,0,0)$.

Exemples on apareixen de manera natural les integrals de línia són el camp gravitatori en física newtoniana i l'electrostàtica (llei de Gauss).

2.3.4 Treballs tutoritzats

Calculeu les integrals de línia dels camps vectorials següents:

1.- $F(x,y,z)=(y^2+z^2,x^2+z^2,y^2+x^2)$ al llarg de la corba $\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $a,b>0$, $t\in[0,2\pi]$.

2.- $F(x,y,z)=(x,y,z)$ al llarg de la corba $\gamma(t)=(\sin t,\cos t,t)$, $t\in[0,2\pi]$.

3.- $F(x,y,z)=(x^2,xy,1)$ al llarg de la corba $\gamma(t)=(t,t^2,1)$, $t\in[0,1]$.

2.3.5 Propietats de les integrals de línia

Les integrals de línia es defineixen en funció d'integrals ordinàries; per tant, comparteixen moltes propietats, com són la propietat de linealitat respecte a l'integrant i la propietat additiva respecte al camí d'integració. Respecte al comportament de les integrals de línia en efectuar un canvi en la parametrització, resulta que la integral de línia té el mateix valor quan es calcula al llarg de corbes equivalents, sempre que no tinguen l'orientació canviada. En cas d'invertir l'orientació, tenim:

Proposició 2.1. Siguen $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dues corbes de classe C^1 i $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos camps continus en U, amb $\alpha^* \subset U$, $\beta^* \subset U$.

Si α i β tenen l'orientació canviada, tenim

$$\int_\alpha f\, ds = \int_\beta f\, ds, \qquad \int_\alpha F\, ds = -\int_\beta F\, ds.$$

2.3.6 Treballs tutoritzats

1.- Calculeu la integral dels camps definits en $\mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = xy$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$ al llarg de les corbes definides a l'interval $[0, 2]$, $\alpha(t) = (t, t, 0)$ i $\beta(t) = (2 - t, 2 - t, 0)$. Dibuixeu les corbes i comproveu la seua orientació.

2.- *TREBALL DE REPÀS:* Àlgebra vectorial (producte escalar, producte creu i base orientada (regla de la mà dreta)). Coordenades (polars, cilíndriques i esfèriques). Càlcul diferencial vectorial (gradient, divergència i rotacional (interpretació física)).

2.4 Camps conservatius. Funció potencial

En general, la integral de línia d'un camp vectorial depèn del camí (corba) que seguim i no tan sols dels punts inicial $\alpha(a)$ i final $\alpha(b)$ de la corba. No obstant això, estudiarem algunes condicions per a les quals la integral de línia d'un camp vectorial només depèn dels punts inicial i final de la corba.

Teorema 2.1. Siga $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar de classe C^1 i $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de classe C^1, $\alpha^* \subset U$. Aleshores,

$$\int_\alpha \nabla f\, ds = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)). \tag{2.6}$$

Per tant, si un camp vectorial $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es pot obtenir com el gradient $F = \nabla f$ d'un camp escalar $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tenim que

$$\int_\alpha F\, ds = \int_\alpha \nabla f\, ds = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Definició 2.12. Un camp vectorial continu $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es diu que és *conservatiu* si existeix un camp escalar $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, de manera que

$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in U$. La funció (camp escalar) f s'anomena funció potencial associada al camp vectorial F.

El teorema 2.1 generalitza el teorema fonamental del càlcul per a funcions reals d'una variable que estableix que per a una funció $f(x)$ amb derivada contínua en un interval es compleix

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

és a dir, la integral de $f'(x)$ depèn només dels valors de f als extrems de l'interval.

A continuació enunciarem un teorema de caracterització dels camps conservatius, encara que una demostració completa del resultat no es podrà obtenir fins que no arribem a l'estudi del teorema de Stokes (integrals de superfície).

Teorema 2.2. Siga $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camp vectorial on U és un domini simplement connex (sense forats). Les següents condicions són equivalents:

1.- Per a qualsevol corba tancada i simple $\int_\alpha F\,ds = 0$.

2.- Donades dues corbes α i β simples, igualment orientades i amb els mateixos punts inicial i final, tenim que $\int_\alpha F\,ds = \int_\beta F\,ds$.

3.- F és conservatiu ($F = \nabla f$).

4.- $rotF = 0$.

2.4.1 Treballs tutoritzats

1.- Repàs de la definició de l'operador vectorial rotacional ($rotF$).

Intenteu justificar equivalències del teorema anterior.

2.- Pels teoremes 2.1 i 2.2, les integrals d'un camp conservatiu són independents del camí i, si es coneix la funció potencial, molt fàcils de calcular.

Càlcul de la funció potencial

2.1. $F(x, y) = (3x^2y, x^3 + 1)$.

2.2. $F(x, y, z) = (y, x, 0)$.

2.3. $F(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$.

2.5 Problemes

1.- Trobeu la longitud de la corba donada per la parametrització $\alpha(t) = (t, \frac{4}{3}t^{3/2}, \frac{1}{2}t)$, $t \in [0, 2]$. (Sol. $\frac{1}{48}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})$).

2.- L'equació d'una corba és $y^2 = x^3$. Trobeu la longitud de l'arc que uneix (1,-1) a (1,1). (Sol. $\frac{1}{27}(26\sqrt{13} - 16)$).

3.- Calculeu $\int_\alpha F\, ds$, on $F(x,y) = (x^2 + y, xy)$ i α ve donada per la unió dels tres segments que uneixen (0,0) a (2,2), (2,2) a (2,6) i (2,6) a (3,9). (Sol. $\frac{661}{6}$).

4.- Calculeu $\int_\alpha f\, ds$, on $f(x,y) = x + y$, sent α un triangle de vèrtexs (0,0), (1,0) i (0,1). (Sol. $1 + \sqrt{2}$).

5.- Siga $F(x,y,z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$. Calculeu $\int_\alpha F\, ds$ des de (0,0,0) fins a (1,1,1) al llarg de les corbes:

a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$. (Sol. 5).

b) $\alpha(t)$ és un segment de recta. (Sol. $\frac{13}{3}$).

6.- Calculeu la integral del camp vectorial $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ al llarg de la paràbola $y = x^2$ des de (-1,1) a (1,1). (Sol. $-\frac{14}{15}$).

7.- Calculeu el treball que ha de realitzar una partícula per donar una volta al voltant d'una circumferència del pla (x,y), amb l'origen com a centre i radi 3, sabent que el camp de força ve donat per $F(x,y,z) = (2x - y + z, x + y - z^2, 3x - 2y + 4z)$. (Sol. 18π).

8.- Trobeu la funció potencial del camp vectorial $F(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. (Sol. $f(x,y,z) = x^2 yz - \cos x + K$).

9.- Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ el camp vectorial $F(x,y,z) = (axy - z^3, (a - 2)x^2, (1-a)xz^2)$ és el gradient d'una funció potencial? Per a aquests valors, calculeu la funció potencial. (Sol. $a = 4$, $f(x,y,z) = 2x^2 y - z^3 x + K$).

10.- Proveu que el camp vectorial $F(x,y) = (xy^2 + 3x^2 y, (x+y)x^2)$ és irrotacional i calculeu $\int_\alpha F\, ds$ al llarg de la corba unió dels segments que uneixen (1,1) a (0,2) i (0,2) a (3,0). (Sol. $-\frac{3}{2}$).

11.- Proveu que la integral del camp vectorial $F(x,y) = (6xy^2 - y^3, 6x^2 y - 3xy^2)$ és independent del camí que uneix els punts (1,2) amb (3,4). Calculeu el valor de la integral

a) parametritzant el segment;

b) utilitzant la funció potencial. (Sol. 236).

12.- Calculeu la integral del camp vectorial $F(x,y,z) = (2xy, x^2 + 1, 6z^2)$ al llarg de qualsevol corba que uneix els punts (0,0,0) i (1,2,1). (Sol. 6).

CAPÍTOL 3

La integral múltiple

Contingut

En aquest tema s'estudia la generalització més natural de la integració en un interval $[a, b]$ d'una funció d'una variable real amb valors en $\mathbb{R}$. Ens interessarem només per integrals dobles i triples; per això, caldrà estendre a $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ i a funcions de dues i tres variables amb valors reals alguns conceptes relacionats amb la integració: intervals, partició, funció integrable, etc.

Com que la intuïció geomètrica és fonamental per a introduir de manera senzilla el concepte d'integral doble i la relació d'aquesta amb el càlcul d'àrees i volums, començarem amb l'estudi de la integració doble i després generalitzarem els resultats obtinguts per a la integració triple.

Entre els objectius que es persegueixen, es troben:

· Construir la integral de Riemann per a funcions de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

· Calcular integrals dobles i triples mitjançant integrals iterades (teorema de Fubini) i usant la fórmula de canvi de variable.

· Conèixer la fórmula de Green i algunes de les aplicacions que té.

3.1 La integral doble

3.1.1 Definició d'integral en un rectangle

Siga $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ i $f(x, y)$ una funció fitada definida en el rectangle R, $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Per a definir la integral de $f(x, y)$ en R seguirem el model indicat a l'apartat 2.1 del capítol anterior per al cas d'una variable.

Quan $f(x, y)$ siga una funció positiva, com passa a la figura 3.1, determinarà un volum amb el pla (x, y) que volem determinar. En general, si f no és necessàriament positiva, no podem parlar del volum determinat per f; en aquest cas volem determinar la integral de f en el rectangle R.

Donat un nombre natural n, definim la *partició regular d'ordre* n del rectangle R com la partició de R en subrectangles R_{ij} donats per

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

on

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad y_j = b + j\frac{d-c}{n}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

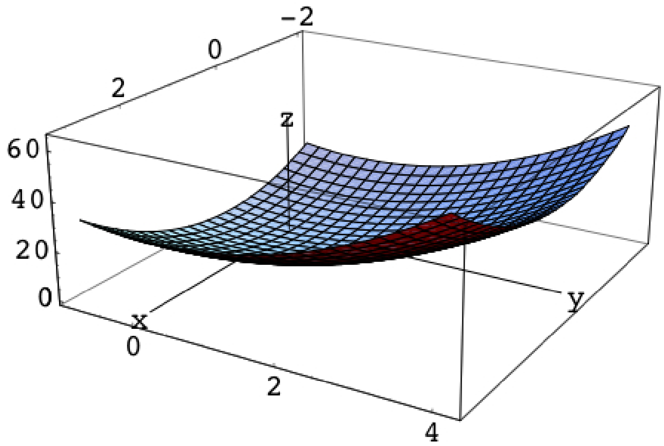


Fig. 3.1. Funció de dues variables definida al rectangle $[-2, 3] \times [-1, 4]$

La funció f està fitada sobre cadascun dels rectangles R_{ij}. Siguen

$$M_{ij} = \sup f(x, y), \quad m_{ij} = \inf f(x, y), \quad (x, y) \in R_{ij}.$$

Definició 3.1. Es defineix la suma superior $n-$èsima de f en el rectangle R com

$$S_n(f, R) = \sum_{i,j} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Anàlogament, es defineix la suma inferior $n-$èsima de f en el rectangle R com

$$s_n(f, R) = \sum_{i,j} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

En el cas d'una funció positiva, les sumes representen les sumes dels volums dels paral·lelepípedes de base R_{ij} i altures M_{ij} i m_{ij}, respectivament.

És clar que, per a tot n, se satisfà que $s_n(f, R) \leq S_n(f, R)$.

Definició 3.2. Per a una funció contínua f, existeixen i són iguals els límits de les successions $s_n(f, R)$ i $S_n(f, R)$ quan n tendeix a infinit; al valor comú d'aquests límits l'anomenem integral de f i escrivim

$$\int\int_R f(x, y)dx\, dy = \lim S_n(f, R) = \lim s_n(f, R).$$

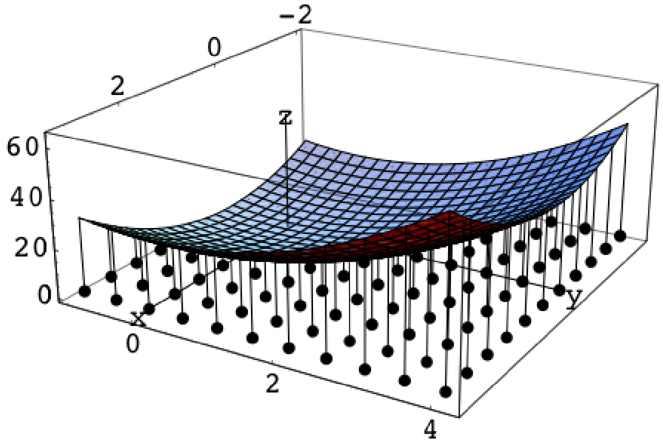


Fig. 3.2. Valors de la funció en els vèrtexs d'una partició del rectangle $[-2, 3] \times [-1, 4]$

3.1.2 Definició d'integral en dominis més generals

Siga f una funció fitada definida en un domini tancat i fitat D. Considerem un rectangle R que incloga a D, $D \subset R$. La extensió de f al rectangle R està definida com

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases} \tag{3.1}$$

Definició 3.3. Si f és contínua en D, definim la seua integral per

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int\int_R \hat{f}(x,y)dx\,dy.$$

3.1.3 Propietats de les funcions integrables

La definició d'integral doble no és el mètode natural de calcular les integrals ja que, en general, comporta moltes dificultats. En les següents seccions desenvoluparem tècniques que permeten reconèixer fàcilment les funcions integrables i realitzar el càlcul d'integrals.

Propietats 3.1. En aquest apartat, D serà un domini tancat i fitat del pla i f, g funcions contínues sobre D.

1.- *Linealitat:*

$$\int\int_D (f+g)\,dx\,dy = \int\int_D f\,dx\,dy + \int\int_D g\,dx\,dy.$$

2.- *Homogeneïtat:* si c és una constant se satisfà que

$$\int\int_D cf\,dx\,dy = c\int\int_D f\,dx\,dy.$$

Aplicant les dues propietats anteriors, si a i b són constants, tenim:

$$\int\int_D (af+bg)\,dx\,dy = a\int\int_D f\,dx\,dy + b\int\int_D g\,dx\,dy.$$

3.- *Monotonia:* si en tot punt de D es té que $f(x,y) \geq g(x,y)$, aleshores

$$\int\int_D f\,dx\,dy \geq \int\int_D g\,dx\,dy.$$

Aplicant aquesta desigualtat resulta

$$|\int\int_D f\,dx\,dy| \leq \int\int_D |f|\,dx\,dy.$$

4.- *Additivitat:* descomponem D en la forma $D = D_1 \cup D_2$, on D_1 i D_2 són dominis tancats i fitats disjunts o només tenen contacte a la frontera. Aleshores se satisfà que

$$\int\int_D f\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f\,dx\,dy.$$

5.- *Teorema del valor mitjà.* Denotem per

$$m = \min_{(x,y)\in D} f(x,y), \qquad M = \max_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

els valors mínim i màxim de f a D. Aleshores, si $A(D)$ és l'àrea de D, se satisfà que

$$m\,A(D) \leq \int\int_D f\,dx\,dy \leq M\,A(D).$$

El resultat anterior, quan D és connex, pot enunciar-se de la manera següent: si f és contínua en un domini tancat, fitat i connex D. Existeix un punt $(x_0, y_0) \in D$, tal que

$$\int\int_D f\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\,A(D).$$

3.1.4 Treballs tutoritzats

Justifiqueu les propietats anteriors a partir de les definicions d'integració.

3.1.5 Càlcul de la integral doble: Integrals iterades. Teorema de Fubini

Dominis rectangulars

Siga $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua; aleshores:

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy. \tag{3.2}$$

A més, si $f(x,y) \geq 0$, sabem que la integral doble representa el volum davall del gràfic de $f(x,y)$. Si ens preguntem què representa cada una de les integrals iterades, la resposta és senzilla: per exemple, per a un valor y fix, la integral $\int_a^b f(x,y)\,dx$ representa l'àrea de la secció del sòlid per al valor y considerat (vegeu les figures 3.3 i 3.4).

3.1.6 Treballs tutoritzats: Integrals sobre rectangles

Calculeu les següents integrals dobles:

1.- $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $R = [0,1] \times [0,1]$. (Sol. $\frac{2}{3}$).
2.- $f(x,y) = xy^2 - x^2$ en $R = [0,1] \times [-1,2]$. (Sol. $\frac{1}{2}$).
3.- $f(x,y) = xy$ en $R = [0,1] \times [0,2]$. (Sol. 1).
4.- $f(x,y) = xy^2 \cos(3x)$ en $R = [0,\pi] \times [0,1]$. (Sol. $-\frac{2}{27}$).
5.- $f(x,y) = x^2 + y$ en $R = [0,1] \times [0,1]$. (Sol. $\frac{5}{6}$).
6.- $f(x,y) = y(x^3 - 12x)$ en $R = [-2,1] \times [0,1]$. (Sol. $\frac{57}{8}$).
7.- $f(x,y) = e^{x+y}$ en $R = [0,3] \times [0,2]$. (Sol. $(e^3-1)(e^2-1)$).

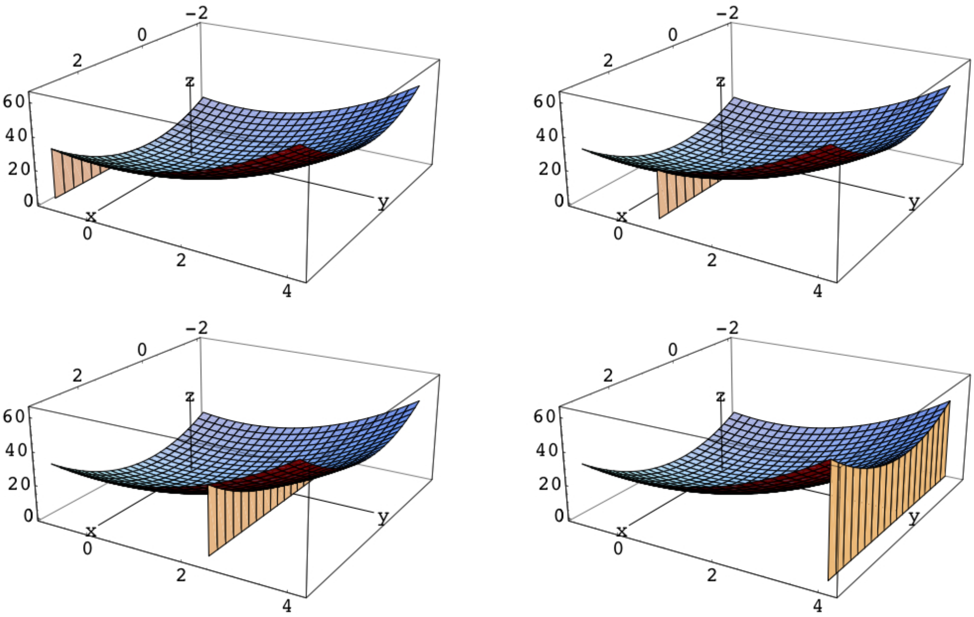


Fig. 3.3. Explicació del teorema de Fubini. Fixem quatre valors de $y \in [-1, 4]$ i calculem $\int_{-2}^{3} f(x,y)dx$

Dominis més generals

Direm que un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ és una regió de *tipus I* si es pot expressar amb la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in [a, b], \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \tag{3.3}$$

on g_1, g_2 són funcions contínues definides a l'interval $[a, b]$ (vegeu figura 3.5).

Si $f(x, y)$ és una funció contínua en una regió D de tipus I, es compleix

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx. \tag{3.4}$$

Direm que un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ és una regió de *tipus II* si es pot expressar amb la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \in [c, d], \ h_1(y) \leq y \leq h_2(y)\}, \tag{3.5}$$

on h_1, h_2 són funcions contínues definides a l'interval $[c, d]$ (vegeu figura 3.5).

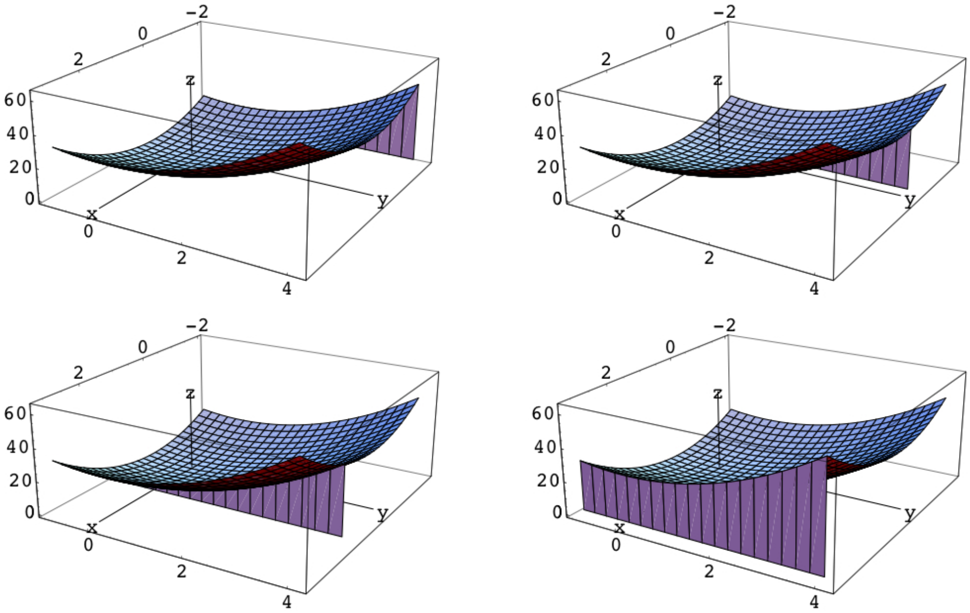


Fig. 3.4. Explicació del teorema de Fubini. Fixem quatre valors de $x \in [-2, 3]$ i calculem $\int_{-1}^{4} f(x,y)dy$.

Si $f(x,y)$ és una funció contínua en una regió D de tipus II, es compleix

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy. \tag{3.6}$$

Direm que un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ és una regió de *tipus III* si és a la vegada de tipus I i de tipus II. Si $f(x,y)$ és una funció contínua i fitada en una regió D de tipus III, es compleix

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy. \tag{3.7}$$

3.1.7 Treballs tutoritzats: Integrals sobre dominis més generals

Calculeu les següents integrals dobles:

1.- $f(x,y) = 2x - y + 3$ en el domini fitat per les corbes $y = x$ i $y = x^2$. (Sol. $\frac{3}{5}$).

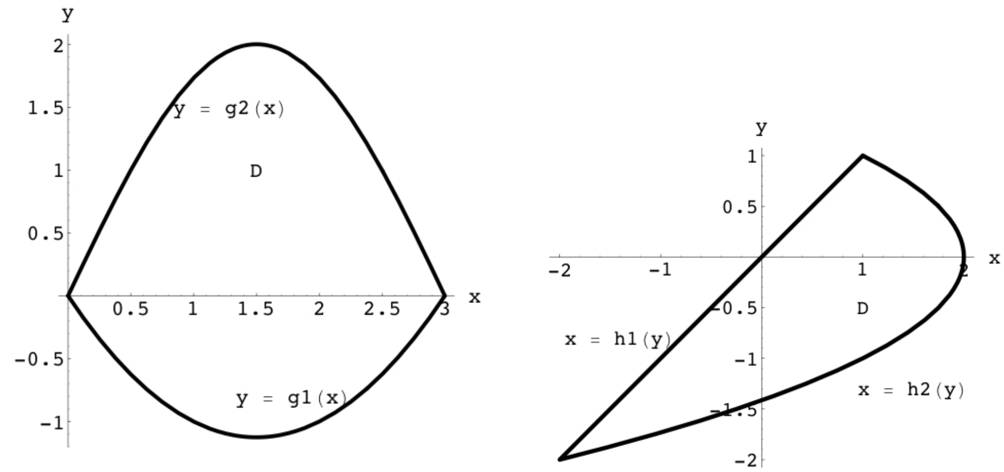


Fig. 3.5. Regió de tipus I ($x \in [0,3]$) i regió de tipus II ($y \in [-2,1]$)

2.- $f(x,y) = yx^3 + \cos x$ en el triangle $T = \{0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq x\}$. (Sol. $\frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$).

Trobeu el volum del tetraedre fitat pels tres plans coordenats i el pla $2x+y+z = 6$. (Sol. 18).

Trobeu el volum del tetraedre fitat pels tres plans coordenats i el pla $x+y+z = 1$. (Sol. $\frac{1}{6}$).

De vegades, si una regió és de tipus III, una de les integrals que apareixen en l'equació (3.7) es pot complicar molt i, aleshores, resulta convenient fer un canvi en l'ordre d'integració. Per exemple:

Calculeu: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dy\,dx$. (Sol. $\frac{2a^3}{3}$).

Calculeu $\int_0^1 \int_0^x x\,ydy\,dx$ de les dues maneres possibles fent un canvi en l'ordre d'integració. (Sol. $\frac{1}{8}$).

3.1.8 Canvi de variables per a integrals dobles

En la teoria unidimensional, el mètode de substitució o canvi de variable ens permet calcular integrals complicades transformant-les en altres que poden calcular-se més fàcilment. Concretament, si $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és C^1 i si f és continua, tenim

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

En aquest apartat s'estudia la manera de generalitzar aquesta fórmula a integrals de funcions de dues variables. El canvi de variables modifica l'integrant, així com la forma del recinte d'integració.

Encara que la definició de canvi de variable ha de ser entre conjunts oberts, en la següent definició considerem la restricció no rigorosa a conjunts tancats i fitats continguts en els oberts.

Definició 3.4. Siguen D i D^* dos conjunts del pla $\mathbb{R}^2$. Un canvi de variables de D^* a D és una aplicació contínua

$$\begin{aligned} T \ : \ D^* \quad &\longrightarrow \quad D \\ (u,v) &\longrightarrow T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \end{aligned} \tag{3.8}$$

que és bijectiva, és a dir, existeix l'aplicació inversa T^{-1}, i tant T com T^{-1} són derivables amb continuïtat (vegeu figura 3.6).

Definició 3.5. Si $T : D^* \longrightarrow D$ és un canvi de variables es defineix el *jacobià* de T en un punt de D^* com el determinant de la matriu jacobiana de T; és a dir,

$$J_T(u,v) := \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right|. \tag{3.9}$$

Teorema 3.1. *(Canvi de variables.)* Siguen D i D^* dos conjunts tancats i fitats en $\mathbb{R}^2$ i $T : D^* \longrightarrow D$ un canvi de variables. Siga $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores, se satisfà que

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J_T(u,v)|\,du\,dv. \tag{3.10}$$

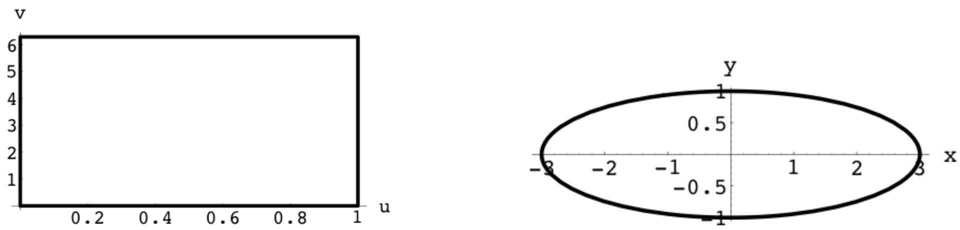


Fig. 3.6. Canvi de variable de l'el·lipse a un rectangle
$x(u,v) = 3u\cos v, \ y(u,v) = u\sin v$.

3.1.9 Treballs tutoritzats

Coordenades polars. Demostreu que, en el cas de les coordenades polars, el jacobià és igual a la distància del punt a l'origen r, i calculeu l'àrea del cercle de radi R.

Calculeu la integral

$$\int\int_D (x-y)^2 e^{x+y}\, dx\, dy,$$

sent D el quadrat de vèrtexs (1,0), (0,1), (-1,0) i (0,-1). (Sol. $(e-e^{-1})/3$).

3.2 Teorema de Green

En aquest apartat presentem el primer dels coneguts teoremes integrals del càlcul vectorial. Aquests teoremes sorgiren com a conseqüència d'algunes aplicacions físiques, com són l'estudi de l'electricitat, el magnetisme, l'hidrodinàmica, la conducció de la calor o la teoria del potencial. El teorema de Green relaciona la integral doble d'una funció de dues variables estesa a una regió $D \subset \mathbb{R}^2$ amb la integral de línia al llarg de la corba tancada γ que constitueix la frontera de D.

Definició 3.6. Una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tancada i simple, que es recorre en sentit positiu (contrari a les agulles del rellotge), s'anomena corba *de Jordan*.

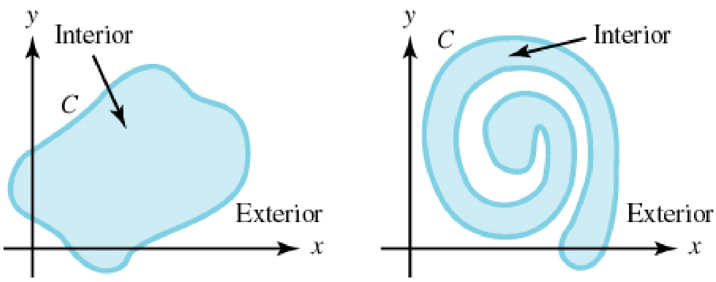


Fig. 3.7. Regions limitades per una corba de Jordan

En aquest apartat considerarem només regions $D \subset \mathbb{R}^2$ limitades per corbes de Jordan (sense forats) com les de la figura 3.7.

Teorema 3.2. *(Teorema de Green.)* Siga γ una corba de Jordan de classe C^1. Siga $D \subset \mathbb{R}^2$ la regió limitada per γ. Si $F = (P,Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és un camp vectorial derivable amb continuïtat en D, aleshores se satisfà

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\gamma F\, ds. \tag{3.11}$$

3.2.1 Treballs tutoritzats

1.- Siga R un disc de radi 1 i $F(x,y) = (y^2 - 7y,\, 2xy + 2x)$ un camp vectorial definit en $\mathbb{R}^2$. Comproveu que es verifique el teorema de Green. (Sol. 9π).

2.- Utilitzeu el teorema de Green per a calcular l'àrea d'un domini mitjançant la integral al llarg de la seua frontera i calculeu l'àrea tancada per l'el·lipse $\gamma(t) = (a\cos t,\, b\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

3.- Verifiqueu el teorema de Green en la regió següent: D és el semicercle definit per $x^2 + y^2 \leq 1$ i $y \geq 0$, considerant el camp vectorial $F(x,y) = (x+y,\, xy)$. (Sol. 2/3 - $\pi/2$).

3.3 La integral triple

Totes les definicions i resultats que hem establert per a integrals dobles admeten una extensió natural per a tres (o més) variables. A continuació indicarem l'extensió del teorema de Fubini per a tres variables a través d'un exemple.

Siga $D \subset \mathbb{R}^3$ una regió que pot expressar-se amb la forma

$$a \leq x \leq b,\ \Psi_1(x) \leq y \leq \Psi_2(x),\ \Phi_1(x,y) \leq z \leq \Phi_2(x,y),$$

per a certes funcions contínues Ψ_1 i Ψ_2 definides a l'interval $[a,b]$, i Φ_1, Φ_2 dues funcions contínues definides sobre la regió $W = \{a \leq x \leq y,\, \Psi_1(x) \leq y \leq \Psi_2(x)\}$. Aleshores, el teorema de Fubini en aquesta situació estableix que la integral d'un camp escalar continu $f(x,y,z)$ sobre D pot calcular-se mitjançant la integral iterada

$$\int\int\int_D f dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx. \tag{3.12}$$

Els parèntesis indiquen l'ordre d'integració a l'hora de fer els càlculs, és a dir, primer integrem la funció $f(x,y,z)$ respecte de la variable z entre els límits $\Phi_1(x,y)$ i $\Phi_2(x,y)$, i obtenim una funció contínua que depèn de x i y. En segon lloc integrem aquesta funció respecte de la variable y entre els límits $\Psi_1(x)$ i $\Psi_2(x)$, i obtenim una funció contínua que depèn de x, i finalment integrem aquesta funció respecte de la variable x entre els límits constants a i b. El resultat que obtenim és una constant.

3.3.1 Treballs tutoritzats: Teorema de Fubini

1.- Intercanviant els papers de les variables x, y i z en la descripció del domini D s'obtenen les altres cinc possibles integrals iterades a l'hora d'aplicar el teorema de Fubini. Escriviu aquestes cinc expressions.

2.- Calculeu la integral de la funció $y\, e^{-xy}$ en el cub $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. (Sol. $1/e$).

3.- Calculeu la integral de la funció $x^2 \cos z$ en la regió fitada pels plans $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ i $x + y = 1$. (Sol. 0).

L'extensió del teorema 3.1 de canvi de variable a tres variables tampoc presenta dificultats. Siga $T : D^* \longrightarrow D$ un canvi de variables entre dos dominis de l'espai $\mathbb{R}^3$;

$$\begin{aligned} T \ : \ D^* \qquad & \longrightarrow \qquad D \\ (u,v,w) & \longrightarrow T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

El jacobià és ara:

$$J_T(u,v,w) := \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right|. \tag{3.14}$$

La fòrmula de canvi de variables per a integrals triples s'escriu:

$$\begin{aligned} & \int\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy\, dz = \\ & \qquad \int\int\int_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(x,y,z))\, |J_T(u,v,w)|\, du\, dv\, dw. \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.2 Treballs tutoritzats: Canvi de variables

Coordenades cilíndriques. Calculeu el jacobià de les coordenades cilíndriques i utilitzeu-lo per a calcular la integral de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ sobre el domini $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

Coordenades esfèriques. Calculeu el jacobià de les coordenades esfèriques i utilitzeu-lo per a calcular el volum de l'esfera de radi R, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

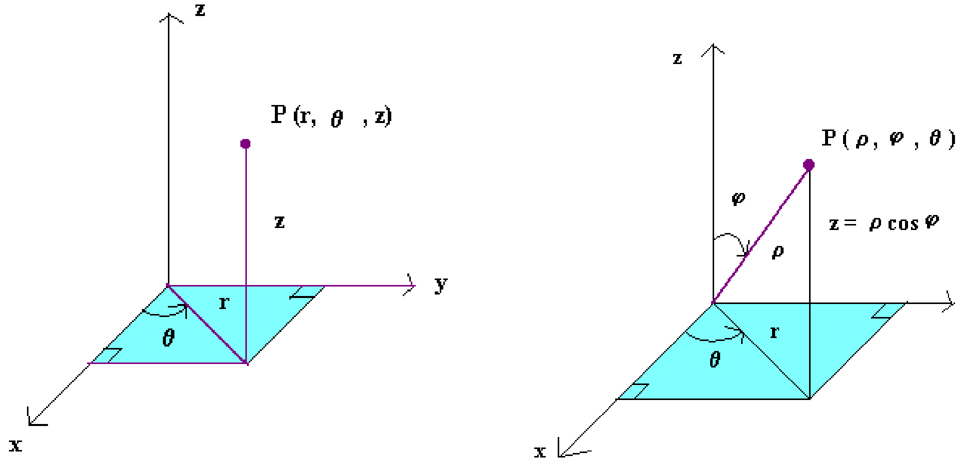


Fig. 3.8. Coordenades cilíndriques i coordenades esfèriques

3.4 Problemes

1.- Calculeu la integral de la funció $f(x, y) = (x+y)^{-2}$ sobre la regió $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2x\}$. (Sol. (1/6)log 2).

2.- Comproveu el teorema de Green si $F(x, y) = (xy + y^2, x^2)$ i C és la corba que limita la regió fitada per les corbes $y = x$ i $y = x^2$. (Sol. -1/20).

3.- Demostreu que $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + 1, 6z^2)$ és un camp conservatiu i trobeu el camp escalar de manera que $\nabla f = F$. (Sol. $f(x, y, z) = 2z^3 + x^2y + y + C$).

4.- Demostreu que $F(x, y) = (xy^2 + 3x^2y, (x + y)x^2)$ és un camp irrotacional i calculeu la integral de F al llarg de la corba unió dels segments de recta que uneixen (1,1) amb (0,2) i (0,2) amb (3,0). (Sol. -3/2).

5.- Demostreu que $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ és un camp conservatiu i trobeu el camp escalar de manera que $\nabla f = F$. (Sol. $f(x, y, z) = xyz + C$).

6.- Verifiqueu el teorema de Green si $F(x, y) = (x, xy)$ i C és la corba que limita la regió fitada per les corbes $y = x^2$, $x = 0$ i $y = 1$. (Sol. 2/5).

7.- Calculeu $\int\int\int_D z\, dx\, dy\, dz$, sent D la regió que ve donada per les condicions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq xy$. (Sol. 1/18).

8.- Calculeu $\int\int\int_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz$, sent D la bola unitària.
(Sol. $(4/3)\pi(e - 1)$).

9.- Calculeu $\int\int_D (x^2 + 5y^2)\, dx\, dy$ estesa a la regió del pla $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0,\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. (Sol. 180π).

10.- Calculeu $\int\int\int_D xyz\, dx\, dy\, dz$, sent $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. (Sol. 1/48).

11.- Calculeu el volum del cos limitat per les superfícies $z = x^2 + y^2$ i $z = 2 - x^2 - y^2$. (Sol. π).

CAPÍTOL 4

La integral de superfície

Contingut

La integral de superfície pot considerar-se com l'equivalent en dues dimensions a la integral de línia, sent el domini d'integració una superfície en compte d'una corba. La funció que integrarem (integrant) serà un camp escalar o un camp vectorial.

En integració de superfícies s'obtenen dos resultats fonamentals des del punt de vista de les aplicacions que presenten: el teorema de Stokes i el teorema de Gauss (també anomenat de la *divergència*).

Alguns dels objectius que es persegueixen en aquest tema són:

· Entendre el concepte de superfície en $\mathbb{R}^3$.

· Adquirir pràctica en el càlcul d'integrals sobre superfícies prèviament parametritzades.

· Conèixer els teoremes de Stokes i de Gauss.

4.1 Superfícies en $\mathbb{R}^3$

Intuïtivament, una superfície és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ que, localment, és com un pla. El gràfic d'una funció contínua $z = f(x, y)$ o una esfera responen a aquesta idea. Parlant sense precisió, una superfície també es pot interpretar com el lloc d'un punt que es mou en l'espai amb un parell de graus de llibertat. Nosaltres, com en el cas de corbes, definirem les superfícies utilitzant parametritzacions, és a dir, com a aplicacions i no com a subconjunts de $\mathbb{R}^3$. La imatge d'aquestes aplicacions ens donarà les superfícies com a subconjunts de $\mathbb{R}^3$.

4.1.1 Representació paramètrica d'una superfície

Definició 4.1. Una superfície parametritzada és una aplicació de classe C^1

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ D \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

on D és un domini elemental de $\mathbb{R}^2$; és a dir, limitat per una corba tancada i simple de $\mathbb{R}^3$, i tal que φ és injectiva a l'interior de D (no hi ha autointerseccions).

La imatge $S = \varphi(D)$ l'anomenarem la superfície associada a la parametrització φ. Les variables u, v reben el nom de paràmetres o coordenades de la superfície.

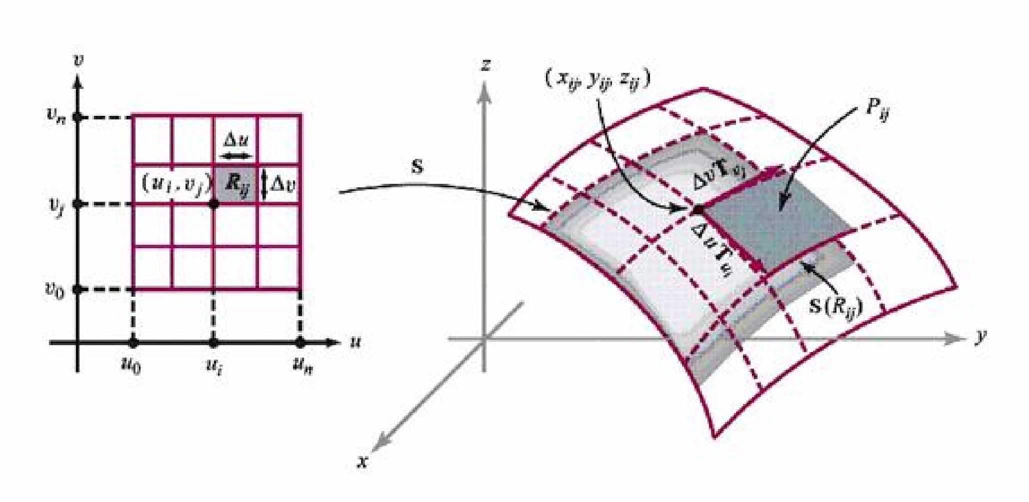


Fig. 4.1. Superfície paramètrica i corbes coordenades

4.1.2 Vectors tangents i vector normal a una superfície

Donat un punt $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$, s'anomenen *corbes coordenades* de la parametrització φ les corbes que són les imatges, per φ, de les rectes de $\mathbb{R}^2$ $u = u_0$ i $v = v_0$ (vegeu la figura 4.1).

Els vectors tangents en p_0 a les corbes coordenades són els vectors

$$\begin{aligned} \varphi_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0, v_0), \\ \varphi_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0, v_0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aquests vectors generen el pla tangent $T_{p_0}S$ a la superfície S en p_0. El vector

$$N(p_0) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \tag{4.3}$$

és un vector normal a la superfície en el punt p_0 (perpendicular al pla tangent $T_{p_0}S$).

Direm que la superfície S és *regular* o suau si els vectors φ_u i φ_v són linealment independents en tot punt de la superfície. Aquesta condició és equivalent a dir que el vector normal N no s'anul·le en cap punt de la superfície.

La condició de regularitat equival, intuïtivament, al fet que la superfície S no tingue "punxes"ni "arestes".

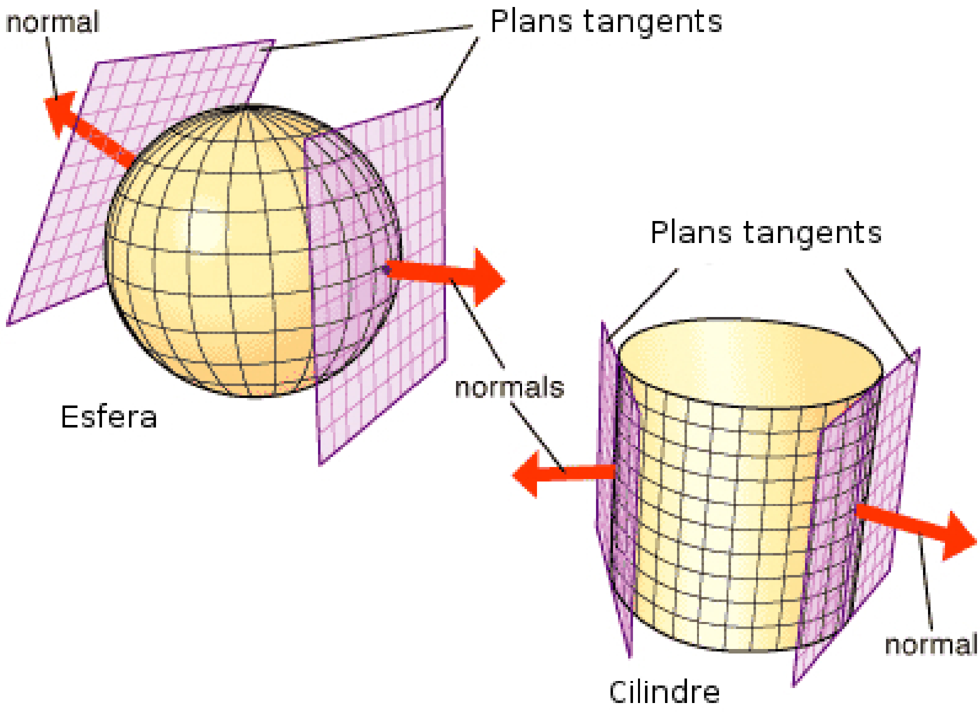


Fig. 4.2. Plans tangents i vectors normals a l'esfera i el cilindre

4.1.3 Treballs tutoritzats

Utilitzant coordenades esfèriques i cilíndriques, obteniu les parametritzacions d'una esfera de radi R i un cilindre de radi 1 i altura h, així com els vectors tangents a les corbes coordenades i els vectors normals.

Siga la superfície parametritzada

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longrightarrow \varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2+v^2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comproveu si existeix el pla tangent per a tots els punts de $\mathbb{R}^2$.

Ximo Gual Arnau - ISBN: 978-84-695-7963-3

Matemàtiques II - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia81

4.1.4 Àrea d'una superfície

Donada una superfície parametritzada $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la norma del vector normal $N(p)$ pot interpretar-se com un factor de proporcionalitat d'àrees. Un rectangle en D d'àrea $\Delta u\, \Delta v$ és aplicat per φ sobre un paral·lelogram curvilini en S amb àrea aproximadament igual a $||N(p)||\Delta u\, \Delta v$ (vegeu la figura 4.1).

Aquesta observació suggereix la següent definició d'àrea d'una superfície.

Definició 4.2. Es defineix l'àrea de la superfície parametritzada $S = \varphi(D)$ per la integral

$$A(S) := \int\int_D ||\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}||\, du\, dv. \tag{4.5}$$

Com que solament hem considerat superfícies parametritzades de classe C^1 i sobre dominis elementals, totes les superfícies considerades tenen àrea finita.

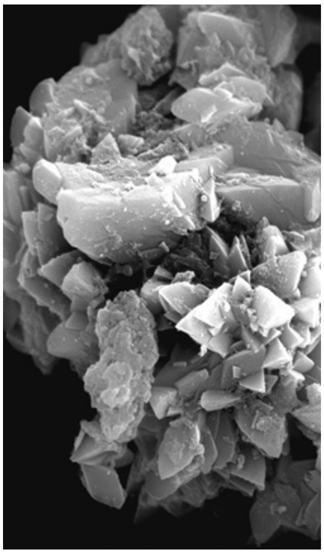


Fig. 4.3. Micrografia electrònica d'un nanomaterial que te una enorme àrea de superfície, la qual cosa fa que siga molt eficient en la captura i destrucció de substàncies químiques tòxiques. Tan sols 25 grams de material tenen l'àrea de superfície de prop de tres camps de futbol. Crèdit: NanoScale Materials, Inc.

4.1.5 Treballs tutoritzats

Si notem $E =< \varphi_u, \varphi_u >$, $F =< \varphi_u, \varphi_v >$ i $G =< \varphi_v, \varphi_v >$, comproveu que

$$||\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}|| = ||\varphi_u \times \varphi_v|| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Calculeu l'àrea de la superfície parametritzada

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r\ ,\ \theta) & \longrightarrow & \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0). \end{array} \tag{4.6}$$

4.2 Integrals de superfície

En molts aspectes, les integrals de superfície són anàlogues a les integrals de línia. Definim la integral curvilínia utilitzant una parametrització de la corba; de manera anàloga, definirem les integrals de superfície fent ús d'una representació paramètrica de la superfície.

4.2.1 Integral de superfície d'un camp escalar

Definició 4.3. Siga $\varphi : D \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada i f un camp escalar continu definit en S. Es defineix la integral de superfície de f sobre S com

$$\int_S f\, dS := \int\int_D f(\varphi(u,v))\, ||\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}||\, du\, dv. \tag{4.7}$$

Hi ha un gran nombre de magnituds que es calculen mitjançant una integral de superfície d'un camp escalar; per exemple, l'àrea d'una superfície, el centre de gravetat d'una làmina prima plana o bombada o el moment d'inèrcia d'una làmina prima al voltant d'un eix.

4.2.2 Integral de superfície d'un camp vectorial

Definició 4.4. Siga $\varphi : D \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada i F un camp vectorial continu definit en S. Definirem la integral de superfície de F sobre S com

$$\int_S F\, dS := \int\int_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du\, dv. \tag{4.8}$$

La integral de superfície d'un camp vectorial pot interpretar-se com el *flux* del camp vectorial a través de la superfície. Intuïtivament, el flux d'un camp de vectors a través d'una superfície és la part d'aquest camp que travessa la superfície. Com que en cada punt de la superfície el vector pot descompondre's en components tangent i normal a la superfície, és clar que la part del vector que travessa la superfície és la component normal del vector. Per tant, el flux del camp vectorial a través d'una superfície es defineix com la integral de superfície del camp escalar donat per la component normal a la superfície; és a dir,

$$\begin{aligned}\int_S F\, dS &:= \int\int_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du\, dv = \\ &= \int\int_D (F(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v)) \; ||\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}||\, du\, dv = \int_S (F \cdot N)\, dS.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Noteu que el flux del camp a través d'una superfície depèn del sentit del vector normal N, que a la vegada depèn de la parametrització utilitzada.

4.2.3 Treballs tutoritzats

1.- Donada la superfície parametritzada

$$\begin{array}{rcl}\varphi \;:\; [0,1]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r\;,\;\theta) & \longrightarrow & \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta),\end{array} \tag{4.10}$$

calculeu la integral del camp escalar $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ sobre aquesta superfície. (Sol. $8\pi/3$).

2.- Calcula el flux a través de l'esfera unitària $\mathbb{S}^2$ del camp vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Utilitza la parametrització donada per les coordenades esfèriques:

$$\begin{array}{rcl}\varphi \;:\; [0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\phi\;,\;\theta) & \longrightarrow & \varphi(\phi,\theta) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta).\end{array} \tag{4.11}$$

(Sol. -4π).

Calcula el vector $\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ en el punt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i interpreta el fet pel qual el valor anterior del flux és negatiu.

4.3 Teorema de Stokes

El teorema de Stokes, també conegut com a *teorema del rotacional*, és un resultat que expressa la relació entre les integrals de línia i les integrals de superfície. El teorema de Stokes conté, com a cas particular, el teorema de Green que ja hem estudiat.

La idea intuïtiva de què és una superfície limitada per una corba (superfície amb vora) és clara. Per exemple, un disc està limitat per una circumferència. Així, donada una superfície parametritzada $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $S = \varphi(D)$ és una superfície amb vora, limitada per la corba, $\varphi(\partial D)$.

A més a més, suposem que la vora $C = \varphi(\partial D)$ de S està orientada positivament respecte al vector normal N; és a dir, situant-nos sobre C segons el vector normal N, la superfície S queda a l'esquerra (vegeu la figura 4.4).

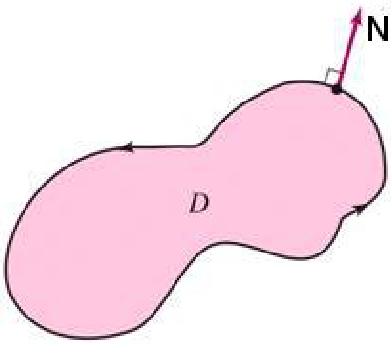


Fig. 4.4. Orientació de la vora recorreguda en sentit positiu

Teorema 4.1. Siga $\varphi : D \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície amb vora i $C = \partial S$ la corba que la limita, que està orientada positivament respecte al vector normal a la superfície N; i siga F un camp vectorial definit en S. Aleshores,

$$\int_C F\,ds = \int_S rotF\,dS. \tag{4.12}$$

Interpretació física del teorema de Stokes. El teorema de Stokes dóna una interpretació del rotacional d'un camp vectorial en termes de la circulació d'un fluid al llarg d'una corba. Si F representa la velocitat d'un fluid, aleshores $\int_C F\,ds$ és la mesura de la quantitat neta de fluid que gira al voltant de C en direcció positiva (circulació de F al voltant de C). Pel teorema de Stokes, $rotF \cdot N$ mesura la circulació de fluid per unitat d'àrea (circulació microscòpica). Si $rotF = 0$, no hi ha circulació de F al voltant de C.

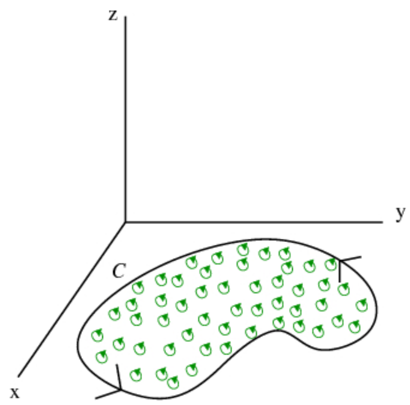


Fig. 4.5. Circulació microscòpica

4.4 Teorema de Gauss o de la divergència

En aquesta secció presentem el darrer dels teoremes integrals del càlcul vectorial, l'anomenat teorema de Gauss, de Gauss-Ostrogradsky o de la divergència, que relaciona una integral de volum amb una integral de superfície. En concret, el teorema de Gauss permet calcular el flux d'un camp vectorial cap a l'exterior d'una superfície de $\mathbb{R}^3$ com la integral triple del camp escalar donat per la divergència del camp vectorial sobre la regió limitada per aquesta superfície. De fet, aquest teorema presenta una estreta relació amb la llei de Gauss en l'electrostàtica, la qual estableix que el flux a través d'una superfície tancada és proporcional a la càrrega tancada per la superfície.

La divergència d'un camp vectorial diferenciable continu $F = (F_x, F_y, F_z)$ es defineix com la funció de valor escalar

$$divF = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Teorema 4.2. Siga R una regió de $\mathbb{R}^3$ tancada i fitada, i $S = \partial R$ la superfície que l'envolta (frontera de R). Siga F un camp vectorial continu amb derivades parcials contínues en R. Aleshores,

$$\int\int\int_R divF\, dx\, dy\, dz = \int_S F\, dS. \tag{4.13}$$

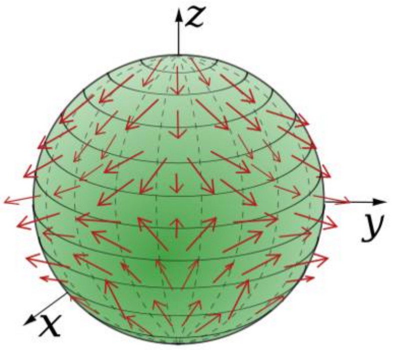


Fig. 4.6. Camp vectorial definit en una bola tancada per una esfera

Interpretació física del teorema de Gauss. Si $divF = 0$, el camp s'anomena *solenoïdal.* Si F és un camp solenoïdal que representa la velocitat d'un gas o fluid, com que $\int_S F\,dS = 0$, aquest gas o fluid no s'expandeix, ja que la taxa de fluid o gas que flueix a través de S és zero. A més a més, pel teorema de Gauss, la divergència de F en un punt p és el mateix que el flux sortint a través d'una xicoteta superfície que envolte p. Per tant, si $divF(p) > 0$, el flux que surt de p és positiu i el punt p es diu que és una font; mentre que si $divF(p) < 0$, el flux que surt de p és negatiu i el punt p es diu que és un pou (vegeu figura 4.7).

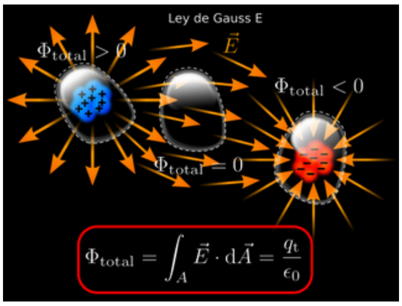


Fig. 4.7. Relació del teorema amb la llei de Gauss en electrostàtica

4.4.1 Treballs tutoritzats

- A partir del teorema de Stokes, completa la demostració del teorema 2.2.

- Utilitzeu el teorema de Stokes per a calcular la integral de línia de $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ al llarg de la corba intersecció entre el cilindre $x^2 + y^2 = 1$ i el pla $x + y + z = 1$. (Sol. $3\pi/2$).

- Utilitzeu el teorema de Gauss per a calcular $\int_S F\,dS$, on $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ i S és la superfície del cilindre $x^2 + y^2 \leq 1$, fitat pels plans $z = 1$ i $z = -1$. (Sol. π).

4.5 Problemes

1.- Siga $F(x,y,z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$. Demostreu que la integral de línia de F al llarg d'una corba tancada, simple i orientada C que és la frontera d'una superfície és zero.

2.- Proveu que el camp vectorial $F(x,y,z) = (y, z\cos(yz) + x, y\cos(yz))$ és irrotacional i trobeu el camp escalar f de manera que $\nabla f = F$.
(Sol. $f(x,y,z) = xy + \sin(yz) + K$).

3.- Utilitzeu el teorema de Gauss per a calcular $\int_S F\,dS$, on $F(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$ i S és la esfera unitària $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Sol. $8\pi/3$).

CAPÍTOL 5

Equacions diferencials ordinàries

Contingut

5.1 *Introducció i definició d'equacions diferencials*

Una gran quantitat de processos de tot tipus (físics, químics, biològics, etc.) es modelitzen matemàticament mitjançant equacions diferencials. La mecànica newtoniana o l'electromagnetisme de Maxwell són exemples de teories fonamentades en equacions diferencials. De la mateixa manera, la dinàmica de poblacions o el desenvolupament d'un tumor es poden descriure utilitzant equacions diferencials.

Recordem que les derivades d'una funció expressen la variació del canvi d'una magnitud respecte d'una altra; per això, les equacions diferencials constitueixen una eina essencial per a representar les relacions existents entre les magnituds/variables d'un fenomen i els seus canvis.

Analitzem les dues paraules que formen el títol d'aquest apartat: equacions diferencials.

Equació: una igualtat en la que intervé com a mínim una incògnita. En aquest cas, la incògnita és una funció. *Diferencial:* En l'equació intervenen la/les derivada/es de la funció buscada.

Per tant, en una equació diferencial es relacionen les variables i les derivades d'una funció desconeguda amb altres funcions. Alguns exemples d'equacions diferencials són:

1.- $y' - x\sin x = 1$;

2.- $y'' + (x^1 - 1)y' + 3y\cos x - 4x = 2$;

3.- $\sqrt{(y')^2 + \sin^2 x + 1} + \log(1 + (y')^2) = 1 + \sin(yy') + e^{x^2}$;

4.- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + 4xy$.

En les equacions 1, 2 i 3, la funció incògnita és la y i la variable independent la x. En l'equació 4, la funció incògnita és la z i les variables independents són x i y.

Si en una equació diferencial només intervé una funció d'una variable independent, es diu que l'equació és una **equació diferencial ordinària (EDO)**. Si la funció incògnita depèn de diverses variables independents, s'anomena **equació en derivades parcials (EDP)**.

Definició 5.1. Entenem per equació diferencial ordinària una equació on intervenen una funció desconeguda $y(x)$, la variable independent x i les seues derivades

$y'(x)$, $y''(x)$, etc.

Simbòlicament ho escrivim com

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

o, més explicitament,

$$F\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Anomenem **ordre de l'equació diferencial** l'ordre de la derivada superior que apareix a l'equació. Si en una equació només apareixen primeres derivades direm que és una equació de primer ordre. En aquest cas, l'expressió general és $F(x, y, y') = 0$.

5.1.1 Solucions d'una equació diferencial ordinària

Solen distingir-se tres tipus de solucions d'una equació diferencial.

a. La **solució general** d'una EDO d'ordre n és una solució en la qual, a més de la variable independent, s'inclouen n paràmetres constants $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

b. Les **solucions particulars** que s'obtenen a partir de la solució general per a valors específics dels paràmetres.

c. Les **solucions singulars** són solucions particulars que no es dedueixen de la solució general.

Exemples.-

1. Les funcions $y = e^{2x}$, $y = e^{3x}$ són ambdues solucions de l'equació diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

i, més generalment, $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ també ho és per a qualsevol elecció de constants c_1, c_2.

2. L'equació diferencial $(y')^2 = y$ té com a solució general $y = (\frac{x+c}{2})^2$. Fent $c = 0$, obtenim la solució particular $y = x^2/4$, mentre que la solució $y = 0$ és una solució singular (Vegeu fig. 5.1).

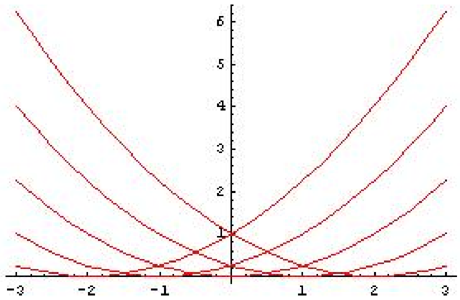


Fig. 5.1. Família de solucions de l'EDO

5.1.2 Problemes de valor inicial. Condicions de contorn

Amb freqüència interessa obtenir la solució d'una EDO que verifica unes determinades condicions. Quan les condicions que han de complir la solució i les seues derivades s'especifiquen per a un únic valor de la variable independent, aquestes condicions s'anomenen *condicions inicials* i constitueixen un *problema de valors inicials*. Si les condicions donades es refereixen a diversos valors de la variable independent, aquestes condicions s'anomenen *condicions de contorn*.

Per a una EDOd'ordre n en la seua forma general

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{n)}) = 0,$$

un problema de valors inicials consisteix a considerar les condicions del tipus

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Exemple.- El problema de valors inicials

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \sin x \\ y'(0) = 1,\ y(0) = -1 \end{cases}$$

té com a solució $y(x) = \frac{1}{2}(-3e^x + 5xe^x + \cos x)$.

5.1.3 Treballs tutoritzats

Creixement de poblacions. Siga $N(t)$ el nombre d'individus, per exemple bacteris, a temps t. En primer ordre, el creixement d'una població es pot considerar com a proporcional a la pròpia població, és a dir:

$$\frac{dN}{dt} = r\,N, \qquad r = \beta - \mu = naixements - morts,$$

on r és la taxa de creixement (*per capita*) intrínseca. Aquesta primera formulació matemàtica va ser deguda a Thomas Malthus (1766 -1834).

Trobeu la solució general i la solució particular si suposem que $N(t_0) = N_0$. Calculeu el temps per doblar la població en funció de r, per al cas $r > 0$. Suposant que una població segueix el model malthusià

$$\frac{dN}{dt} = r\,N, \qquad r > 0,$$

i que $A(t)$, l'índex dels recursos disponibles per la població, segueix el model

$$\frac{dA}{dt} = k\,N, \qquad k > 0,$$

aleshores demostreu que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{A(t)}{N(t)} = \frac{k}{r}.$$

Equació logística. L'equació de Malthus no és realista a llarg termini, ja que no té en compte que els recursos són limitats. Per incorporar aquest fet, podem modificar l'equació considerant que la taxa de creixement ve regulada per la pròpia població. En el cas més senzill tenim l'equació logística:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \qquad r > 0,$$

on r és la taxa de creixement (*per capita*) intrínseca i K la capacitat de càrrega del medi. Per a poblacions xicotetes, el creixement és aproximadament exponencial. L'equació va ser introduïda pel matemàtic i biòleg holandès P. F. Verhulst (1804-1849).

Calculeu la solució d'aquesta equació per al valor inicial $N(0) = N_0$. Analitzeu el comportament de la població per a valors molt grans de t i comproveu que la població tendeix a estabilitzar-se en el valor K (independentment del valor N_0).

Desintegració radioactiva. La quantitat d'una substància radioactiva evoluciona en el temps segons la següent equació:

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0,$$

on k és la constant de desintegració (o coeficient de radioactivitat). En aquest model s'ha suposat que la taxa de desintegració és proporcional a la quantitat de material present.

Convé representar el ritme de desintegració radioactiva d'un element en termes del seu *període de semi-desintegració*, T, és a dir, el temps requerit perquè la quantitat de substància es redueïsca a la meitat. Demostreu que

$$T = \frac{\log 2}{k}.$$

El radiocarboni de la fusta d'un arbre viu es desintegra a un ritme de 15,3 desintegracions per minut (dpm) per gram de carboni. Considerant com 5.600 anys el període de semidesintegració del radiocarboni, estimeu l'antiguitat dels següents objectes descoberts pels arqueòlegs i analitzats per radioactivitat:

a) Un fragment de pota de cadira de la tomba de Tutankamon: 10,14 dpm.

b) Un tros de biga d'una casa construïda a Babilònia durant el regnat d'Hammurabi: 9,52 dpm.

c) Una fletxa trobada a Atapuerca: 6,42 dpm.

5.2 Equacions diferencials ordinàries de primer ordre

Estudiarem en aquesta secció les equacions diferencials de la forma $F(x, y, y') = 0$. Veurem que hi ha dos mètodes bàsics per solucionar les equacions de primer ordre i primer grau: convertir-les en equacions de variables separades o en el que anomenarem una diferencial exacta. D'altra banda, si l'equació de primer ordre és de grau superior, la seua solució no sol ser tan senzilla.

5.2.1 Teorema d'existència i unicitat

Donada l'equació diferencial $F(x, y, y') = 0$, resoldre el problema de valors inicials és determinar la funció $y(x)$ solució de l'equació diferencial i que verifique $y(x_0) = y_0$. Hi ha un tipus d'equacions diferencials de primer ordre per a les quals és possible establir alguns teoremes i mètodes generals per solucionar-les. Es tracta de les equacions que es poden escriure amb la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

cas particular de l'equació de primer ordre i primer grau. Per a aquestes equacions podem establir el següent teorema, conegut com a *teorema de Picard*.

Teorema 5.1. Si $f(x, y)$ i $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ són funcions definides en un rectangle tancat R, per a cada punt (x_0, y_0) de l'interior de R existeix un interval I centrat en x_0 i una única funció $y(x)$ solució de l'equació $y' = f(x, y)$, que satisfà el problema de valors inicials $y(x_0) = y_0$.

Si fallen les hipòtesis del teorema anterior, pot haver-hi més d'una o cap solució per a algun punt. Per exemple, per a l'equació

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

tenim $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ i $\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$, que no està definida quan $y = 0$. La solució general d'aquesta equació diferencial és $y = (x-a)^3$, però a més a més tenim la solució $y = 0$. Per tant, pels punts amb segona coordenada igual a 0 passen dues solucions.

En les condicions detallades al teorema 5.1, la solució general d'una equació diferencial ordinària de primer ordre és una família de funcions (o de corbes) que depenen d'un paràmetre. Per exemple,

$$y' = 2x \quad \longrightarrow \quad y = x^2 + C \qquad \text{i} \qquad y' = y \quad \longrightarrow \quad y = Ce^x.$$

Recíprocament, ens pot interessar trobar l'equació diferencial que té com a solucions una família de corbes que depenen d'un paràmetre. Per a trobar l'equació diferencial utilitzem la família de corbes i la seua derivada. Per exemple, si considerem la família de corbes

$$x + Cy = 0,$$

derivant s'obté $1 + Cy' = 0$ i de les dues equacions obtenim l'equació diferencial $y' = y/x$.

Per tant, si considerem una família de corbes expressada en forma implícita,

$$h(x, y) = C,$$

l'equació diferencial que té com a solució aquesta família de corbes és

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y) dx + \frac{\partial}{\partial y} h(x, y) dy = 0.$$

5.2.2 Equacions diferencials de variables separables

Una equació diferencial és de variables separables si i només si es pot escriure com

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q(y)y' = -P(x).$$

Com que, $y' = \frac{dy}{dx}$ aïllant es té

$$\int Q(y)dy = -\int P(x)dx + C.$$

Exemples.- Siga l'equació diferencial $y' = 2xy$. Aplicant la tècnica anterior podem escriure

$$\frac{dy}{y} = 2xdx,$$

equació que es pot integrar separadament, de manera que obtindrem

$$\ln y = x^2 + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{x^2+C} = ke^{x^2}.$$

Exercici.- Resoleu l'equació diferencial $y' = -x/y$ i dibuixeu-ne algunes solucions.

5.2.3 Treballs tutoritzats

1. Calcula la velocitat crítica de fuita de la Terra d'un objecte de massa m, suposant que l'única força que actua sobre aquest cos és l'atracció gravitatòria (valor del radi terrestre R = 6.371 km).

2. La corba *catenària* és la forma que pren un cable penjant sota l'acció de la gravetat (per exemple, els cables de l'estesa elèctrica). Determina l'equació d'aquesta corba.

3. *Llei de refredament de Newton.* Suposem que un cos calent es refreda a un ritme proporcional a la diferència de la seua temperatura respecte de l'ambient. Un cos es calfa a 110^0 C i es col·loca en l'aire a 10^0 C. Després d'una hora la seua temperatura és de 60^0 C. Quant tardarà a aconseguir els 30^0 C?

4. La sala de dissecció d'un forense es manté freda a una temperatura constant de 5^0 C. Mentre es trobava fent l'autòpsia de la víctima d'un assassinat, el propi forense és assassinat. A les 10 a. m. l'ajudant del forense descobreix el seu cadàver a una temperatura de 23^0 C. Al migdia, la seua temperatura és de $18,5^0$ C. Tenint en compte que el forense tenia en vida la temperatura normal de 37^0 C, a quina hora va ser assassinat?

5.2.4 Equacions homogènies

Una funció $f(x, y)$ es diu homogènia de *grau* n si verifica $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Una equació diferencial del tipus $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ on les funcions $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ són funcions homogènies del mateix grau és reduïble a una equació de variables separades mitjançant el canvi de variables $y = ux$.

Exemple.- Resoleu l'equació diferencial

$$(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0.$$

Es tracta d'una equació diferencial homogènia de grau 1. Canvi suggerit: $y = ux$; per tant, $dy = udx + xdu$, i tenim

$$(2\sqrt{ux^2} - xu)dx - x(udx + xdu) = 0,$$

$$(2x\sqrt{u} - 2xu)dx - x^2du = 0.$$

Podem dividir l'equació per x i obtenim una equació a variables separables

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{2(\sqrt{u} - u)}.$$

La segona integral es resol fàcilment fent el canvi de variables $t = \sqrt{u}$ i la solució final és

$$y = \frac{(x + c)^2}{x}.$$

5.2.5 Equacions diferencials exactes

Una equació diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ direm que és una equació diferencial exacta si en una regió R del pla existeix una funció $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y);$$

aleshores podem escriure l'equació com

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{d}F(x, y) = 0.$$

Aleshores la solució general de l'EDO és $F(x, y) = C$.

Una condició per determinar si una equació diferencial és exacta ens la proporciona el següent resultat.

Teorema 5.2. Siguen $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ funcions contínues amb derivades parcials contínues en una regió R del pla. Una condició necessària i suficient perquè $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ siga equació diferencial exacta és que per a tot $(x,y) \in R$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Exemple.- Resoleu l'equació diferencial $y^3dx + 3xy^2dy = 0$.

Es tracta d'una equació diferencial exacta, ja que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3y^2.$$

Per a resoldre l'equació busquem una funció $F(x,y)$, de manera que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y^3, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3xy^2.$$

De la primera condició tenim

$$F(x,y) = \int y^3dx + c(y) = xy^3 + c(y).$$

Per trobar $g(y)$ utilitzem la segona condició

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 \quad \Longrightarrow \quad 3xy^2 + c'(y) = 3xy^2 \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 0.$$

Per tant, $c(y) = c_1$ és una funció constant i la solució general ve donada per

$$xy^3 = C.$$

Exercici.- Trobeu la solució general de l'equació $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$. (Sol. $y = C/(x^2 - 1)$).

5.2.6 Factors integrants

Donada una equació diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ que no és exacta, és possible, de vegades, trobar una funció tal que l'equació multiplicada per aquesta funció, és a dir,

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y) = 0,$$

siga una equació diferencial exacta. En aquest cas es diu que la funció $\mu(x,y)$ és un *factor integrant* de l'equació diferencial. Si $f(x,y)=c$ és solució de l'equació diferencial exacta també ho serà de l'equació original, excepte els casos en els quals el factor integrant s'anul·le.

La condició perquè l'equació completa siga diferencial exacta ens dóna una equació diferencial de derivades parcials

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y))$$

que es pot transformar en *l'equació del factor integrant*

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Aquesta equació diferencial és, en general, una equació en derivades parcials; ara bé, hi haurà casos en els quals el factor integrant dependrà només d'una de les dues variables. En aquests casos, l'equació del factor integrant serà una EDO.

Exemples.- Resoleu l'equació

$$6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0.$$

Comprovem, primer, si és exacta: $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 18x$. No és diferencial exacta. L'equació del factor integrant serà:

$$\mu_y 6xy - \mu_x(4y + 9x^2) = \mu(18x - 6x) = \mu 12x.$$

Ens podem adonar fàcilment que si $\mu_x = 0$, l'equació queda

$$\mu_y 6xy = \mu 12x \quad \Longrightarrow \quad \mu_y y = 2\mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = 2\frac{dy}{y},$$

que ens dóna

$$\log\mu = 2\log y \quad \Longrightarrow \quad \mu = y^2,$$

que és el factor integrant. No hem considerat la solució general perquè només ens interessa un factor integrant, no tota la família de solucions. Multiplicant pel factor integrant tenim la diferencial exacta

$$y^2(6xydx + (4y + 9x^2)dy) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P = 6xy^3; \qquad Q = 4y^3 + 9x^2y^2.$$

Si resolem aquesta equació, la solució general és $f(x,y) = 3x^2y^3 + y^4 = c$.

Resoleu:

1. $(x^2 - \sin^2 y) + x\sin(2y)y' = 0$.

2. $(x^3/y + 5xy)y' + (x^2 + y^2) = 0$.

5.2.7 Equacions diferencials lineals de primer ordre

Una equació lineal de primer ordre es pot escriure amb la forma

$$y' + a(x)y = b(x),$$

on $a(x)$ i $b(x)$ són funcions que suposarem contínues en un cert interval.

Resolució mitjançant factor integrant

Si escrivim l'equació diferencial lineal anterior amb la forma $(a(x)y - b(x))dx + dy = 0$ i, per tant, $P(x,y) = a(x)y - b(x)$ i $Q(x,y) = 1$, podem demostrar fàcilment que admet un factor integrant que depèn només de la variable x i que ens dóna

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$$

com a factor integrant.

Per resoldre l'equació lineal, o bé utilitzem aquest factor integrant i procedim com amb totes les equacions diferencials exactes o bé seguim una mica més i podrem obtindre una fórmula tancada per a la solució.

$$y'e^{\int a(x)dx} + e^{\int a(x)dx}a(x)y = e^{\int a(x)dx}b(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int a(x)dx}\right) = e^{\int a(x)dx}b(x),$$

$$ye^{\int a(x)dx} = \int e^{\int a(x)dx}b(x)dx + c.$$

Per tant, la solució general és

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx + c\right). \tag{5.1}$$

5.2.8 Treballs tutoritzats: Aplicacions a la geometria de corbes

En general, integrar una equació diferencial de la forma $F(x, y, y') = 0$ ens donarà com a solució una família de corbes que depenen d'un paràmetre (una constant). Recíprocament, si considerem una família de corbes en forma implícita

$$h(x, y) = c,$$

el seu diferencial val

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y}h(x, y)dy = 0;$$

és a dir, tenim una equació diferencial que té per solució general $h(x, y) = c$.

Exemple.- La família de cercles de diferents radis centrats en el punt $(2, 3)$ en forma implícita ve donada per $h(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = c$ i l'equació diferencial associada a la família serà

$$(x - 2)dx + (y - 3)dy = 0.$$

Isoclines i camps de direccions

L'equació diferencial $y' = f(x, y)$ estableix una dependència entre les coordenades (x, y) d'un punt i el pendent de la corba solució que passa per aqueix punt.

Per exemple, l'equació $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ens diu que al llarg de la corba $x^2 + y^2 = 1$, les corbes solució de l'equació tenen pendent 1; és a dir, creuen la circumferència de radi 1 amb un angle de 45^0.

Per tant, donant valors constants c a la derivada, $y' = f(x, y) = c$, podem trobar les corbes $f(x, y) = c$, on les solucions de l'equació passen amb un mateix angle d'inclinació. Aquestes corbes s'anomenen *isoclines*.

Les isoclines ajuden a dibuixar el camp de direccions de l'equació diferencial i per tant les seues solucions (vegeu la figura 5.2).

Trajectòries ortogonals

Com hem vist a l'apartat anterior, si tenim en compte el significat geomètric de la derivada d'una funció com a pendent de la recta tangent, podem determinar cor-

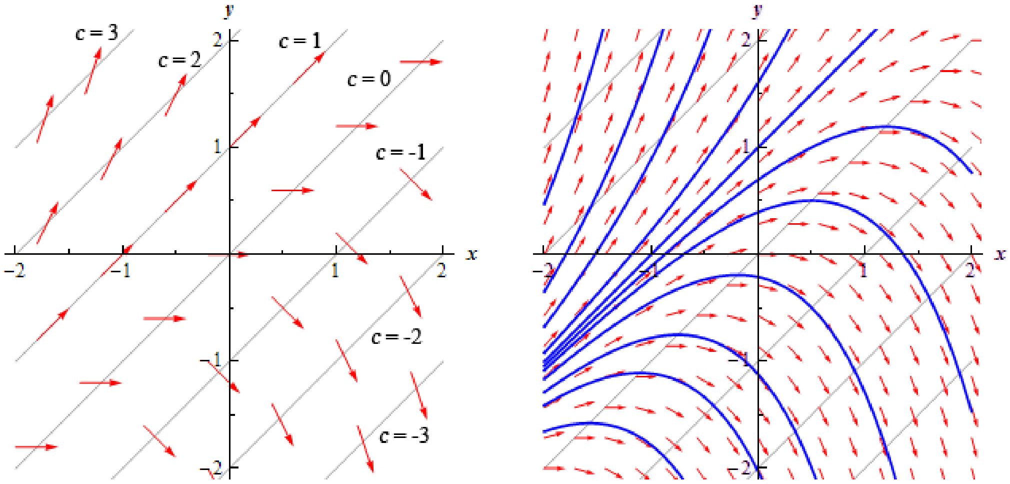


Fig. 5.2. (a) Isoclines de l'equació $y' = y - x$. (b) Isoclines i corbes

bes quan el seu pendent verifique alguna condició. En la figura 5.3 es poden veure dibuixades la recta tangent a una corba en un punt (x, y), el radi-vector i la recta perpendicular (normal) a la tangent en aquest punt.

Donada una família de corbes, s'anomenen trajectòries ortogonals les corbes que en cada punt tallen ortogonalment les corbes de la família. Si ens adonem que el pendent de la recta normal és el de la recta tangent més 90 graus, aleshores una simple anàlisi trigonomètrica ens diu que el pendent de la recta normal és $-dx/dy$.

Si coneixem l'equació diferencial de la família de corbes $F(x, y, y') = 0$, l'equació diferencial de la família de trajectòries ortogonals la podem obtindre substituint $y' \longrightarrow -1/y'$; és a dir, l'equació de la família de trajectòries ortogonals serà

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0.$$

Exemple.- Trobeu les trajectòries ortogonals a la família d'hipèrboles $xy = c$.

5.3 Equacions diferencials lineals d'ordre superior

Les equacions diferencials d'ordre superior presenten una sèrie de característiques noves pel que fa a mètodes de solució i als problemes de condicions inicials. Ens limita-

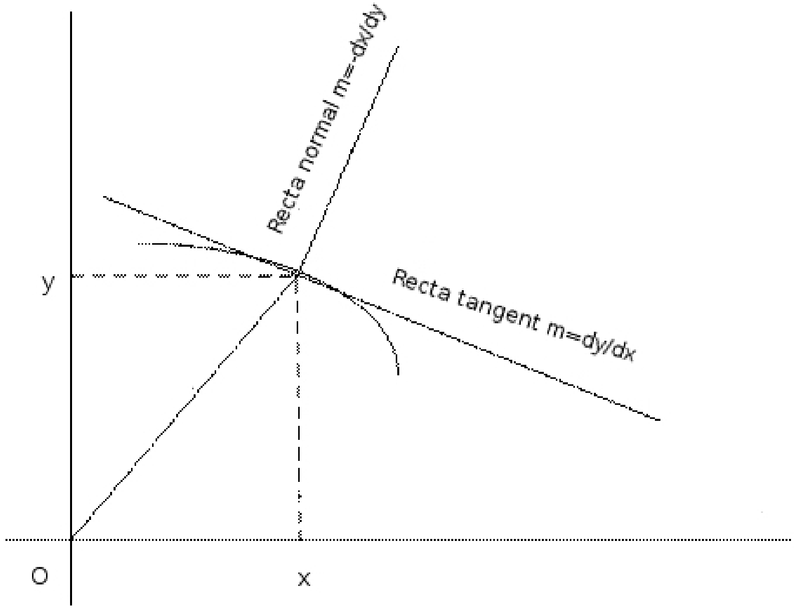


Fig. 5.3. Rectes tangent i normal a la corba en un punt (x, y)

rem exclusivament a les equacions diferencials lineals que tenen importants aplicacions en la física i estudiarem principalment les equacions lineals amb coeficients constants.

Una equació diferencial lineal d'ordre n és del tipus

$$y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{5.2}$$

on $b(x), a_j(x),\ j = 0, \ldots, n-1$ són funcions contínues en un interval $I \in \mathbb{R}$.

Com ja hem vist a l'apartat 5.1.2, en el cas d'una equació de segon ordre, la solució general presenta dues constants i per a resoldre el problema de valors inicials necessitarem dues condicions inicials, corresponents al valor de la funció i de la seua derivada en un punt.

Si pensem en el cas de les equacions de Newton arribem a un concepte molt familiar. En efecte, considerem l'equació del moviment rectilini uniformement accelerat.

La segona llei de Newton ens diu, per al cas d'una força constant,

$$F = ma = m\frac{d^2}{dx^2}x(t),$$

que podem reescriure com

$$\frac{d}{dx}v(t) = a \longrightarrow v(t) = at + c_1.$$

Integrant aquesta equació tenim

$$\frac{d}{dx}x(t) = at + c_1 \longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_1 t + c_2,$$

funció que té dues constants d'integració desconegudes. Si coneixem el valor de la posició en l'instant inicial $x(0) = x_0$ i coneixem el valor de la velocitat inicial $v(0) = v_0$, obtenim l'expressió del moviment uniformement accelerat

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

5.3.1 Equacions homogènies amb coeficients constants

Quan els coeficients de l'equació 5.2 són coeficients constants, és a dir, $a_0, a_1, \ldots,$ a_{n-1} són nombres reals, diem que l'equació diferencial és una equació diferencial lineal amb coeficients constants. Les equacions homogènies amb coeficients constants (el coeficient $b(x) = 0$) tenen un mètode de solució que ens portarà a trobar la solució general.

Considerem l'equació homogènia amb coeficients constants

$$y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{5.3}$$

Buscarem solucions d'aquesta equació de tipus exponencial $y = e^{\lambda x}$ on λ és un paràmetre desconegut real o complex. Així, substituint la funció $y = e^{\lambda x}$ a l'equació 5.3, obtenim

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = 0.$$

Per tant, la funció $y = e^{\lambda x}$ és solució de l'equació diferencial si i solament si

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

El polinomi $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ s'anomena *polinomi característic* de l'equació diferencial lineal d'ordre n i les arrels del polinomi poden ser valors reals diferents, valors complexos conjugats o arrels amb multiplicitat.

Teorema 5.3. Si μ és una arrel (real o complexa) amb multiplicitat k del polinomi característic $P(\lambda)$, aleshores, les funcions

$$e^{\mu x},\ xe^{\mu x},\ x^2 e^{\mu x}, \cdots, x^{k-1}e^{\mu x}$$

són solucions de l'equació homogènia.

Per tant, si $\mu_1, \ldots, \mu_m$ són les arrels distintes (reals o complexes) del polinomi característic $P(\lambda)$, amb multiplicitats respectives $k_1, \ldots, k_m$ $(k_1 + \cdots + k_m = n)$, i a cada arrel μ_j li associem les k_j solucions

$$e^{\mu_j x},\ xe^{\mu_j x},\ x^2 e^{\mu_j x}, \cdots, x^{k_j-1}e^{\mu_j x},$$

obtenim el conjunt de n solucions de l'equació diferencial homogènia.

Arrels complexes

Si apareixen parelles d'arrels complexes conjugades, és a dir, arrels de $P(\lambda)$ del tipus $\mu = \alpha + i\beta$ i $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$ (ambdues tenen la mateixa multiplicitat), encara que puga semblar que "eixim" de les funcions reals on sempre ens estem movent, podem veure com encara tenim una manera de resoldre la situació i trobar dues funcions reals linealment independents.

Considerem la fórmula d'Euler que ve donada per $e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$, on γ és un nombre real. Així obtenim

$$\begin{array}{rcl} x^k e^{\mu x} + x^k e^{\overline{\mu}x} & = & x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ i(x^k e^{\mu x} - x^k e^{\overline{\mu}x}) & = & x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x), \end{array}$$

de tal manera que per a cada arrel complexa $\mu = \alpha + i\beta$ amb multiplicitat k obtenim $2k$ solucions de l'equació diferencial homogènia

$$x^{j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^{j-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Teorema 5.4. Si $\mu_1, \ldots, \mu_m$ són les arrels distintes (reals o complexes) del polinomi característic $P(\lambda)$, amb multiplicitats respectives $k_1, \ldots, k_m$ $(k_1 + \cdots + k_m = n)$, aleshores, a cada arrel real μ_j li associem les k_j solucions de l'equació diferencial homogènia

$$e^{\mu_j x},\ xe^{\mu_j x},\ x^2 e^{\mu_j x}, \cdots, x^{k_j - 1} e^{\mu_j x}.$$

A cada arrel complexa $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ amb multiplicitat k_j li associem les $2k_j$ solucions de l'equació diferencial homogènia

$$x^{j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),\ x^{j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \quad 1 \leq j \leq k_j.$$

Així obtenim el conjunt de n solucions de l'equació diferencial homogènia.

La solució general d'aquesta equació diferencial homogènia, on apareixen els n paràmetres, ve donada per la combinació lineal de les n solucions del teorema anterior.

Treballs tutoritzats: Repàs de nombres complexos

Hi ha moltes equacions, com ara $x^2 = -1$, que no tenen solució en el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$. El motiu és que les solucions haurien de ser $x = \pm\sqrt{-1}$ i l'arrel quadrada de -1 no existeix dins $\mathbb{R}$. Així, es defineix el conjunt dels nombres complexos com

$$\mathbb{C} = \{a + b\,i \ /\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

on el símbol i representa l'arrel $\sqrt{-1}$.

Donat un nombre complex $z = a + b\,i$, direm que a és la part real, $a = \mathrm{Re}(z)$, i b la part imaginària, $b = \mathrm{Im}(z)$. Dos nombres complexos són iguals si tenen la mateixa part real i la mateixa part imaginària.

Dins $\mathbb{C}$ tenim les següents operacions:

Suma:

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i.$$

Producte:

$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + cb)\,i.$$

Comproveu que $\mathbb{C}$ amb aquestes operacions de suma i producte és un *cos commutatiu* que inclou $\mathbb{R}$.

Conjugació: Si $z = a + b\,i$, el seu conjugat és $\overline{z} = a - b\,i$.
Divisió: Si $c + d\,i \neq 0$, aleshores

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Us recomanem que no us aprengueu de memòria la fórmula de la divisió, sinó el procediment d'efectuar divisions multiplicant numerador i denominador pel conjugat del denominador.

Interpretació geomètrica dels nombres complexos

El fet que tot nombre complex $z = a + b\,i$ es puga pensar com un punt (a, b) del pla cartesià $\mathbb{R}^2$ permet associar a cada nombre complex dues magnituds geomètriques que el caracteritzen.

El *mòdul* de z, que indicarem amb $|z|$, és la distància euclidiana de $(0, 0)$ a (a, b) dins $\mathbb{R}^2$. Aleshores

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $z = 0$, el seu mòdul és 0, i l'únic nombre complex de mòdul 0 és el 0.

L'*argument* de z (per a $z \neq 0$), que indicarem amb θ_z, és l'angle que forma el vector que va de $(0, 0)$ a (a, b) amb l'eix de les x. Aleshores, aquest angle està determinat per

$$\cos\theta_z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\theta_z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Fórmula d'Euler

La fórmula d'Euler estableix, per a $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x.$$

És a dir, si $z = a + b\,i$, tenim

$$e^z = e^{a+b\,i} = e^a(\cos b + i\,\sin b).$$

La demostració es por fer utilitzant sèries de Taylor.

5.3.2 Equacions completes amb coeficients constants

Donada una equació lineal completa, el primer pas per a la seua resolució serà trobar la solució general de l'equació homogènia associada i afegir després una solució particular de l'equació completa. En el cas de tindre una equació amb coeficients constants, trobem la solució general de l'homogènia mitjançant les tècniques de l'apartat anterior, i ens falta només trobar una solució particular de l'equació completa.

Per tant, donada una equació diferencial lineal amb coeficients constants

$$y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \tag{5.4}$$

estudiarem com obtindre'n una solució particular, una vegada obtinguda la solució general de l'equació homogènia.

Encara que hi ha diversos mètodes per a obtindre la solució particular, nosaltres presentarem el mètode de *variació de paràmetres*. És important destacar que aquest mètode no està limitat al cas de les equacions amb coeficients constants, sinó que es pot aplicar a trobar solucions particulars d'equacions lineals amb coeficients variables, sempre que s'haja trobat prèviament la solució general de l'equació homogènia.

Donades les n solucions independents $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'equació homogènia d'ordre n, que ens donen la seua solució general, en el mètode de variació de paràmetres se suposa que la solució particular de l'equació completa és de la forma

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots C_n(x)y_n(x), \tag{5.5}$$

on $C_1, C_2, \ldots, C_n$ són funcions derivables que es determinen a partir de les següents condicions:

$$\begin{array}{rcl} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n & = & 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' & = & 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & & \cdots \\ C_1'y_1^{n-2} + C_2'y_2^{n-2} + \cdots + C_n'y_n^{n-2} & = & 0, \\ C_1'y_1^{n-1} + C_2'y_2^{n-1} + \cdots + C_n'y_n^{n-1} & = & b(x). \end{array}$$

Demostreu que si se satisfan aquestes n equacions, aleshores la funció $y_p(x)$ és solució de l'equació completa (5.4).

Exemple.- Resoleu l'equació $y'' - y = e^{2x}$.

5.4 Problemes

Definició d'equacions diferencials

Comproveu que les següents funcions són solucions de les corresponents equacions:

1. $y = x^2 + c, \qquad y' = 2x.$
2. $y = cx^2, \qquad xy' = 2y.$
3. $y^2 = e^{2x} + c, \qquad yy' = e^{2x}.$
4. $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x, \qquad y'' + 4y = 0.$
5. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \qquad y'' - 4y = 0.$
6. $y = x \tan x, \qquad xy' = y + x^2 + y^2.$

Problemes d'equacions de variables separables

Trobeu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$
2. $y' = xy(y + 2).$
3. $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0.$
4. $y' = 1 - x + y^2 - xy^2.$
5. $(xy + y)y' + e^{y^2}(x^2 + 2x + 1) = 0.$

Problemes d'equacions homogènies

Trobeu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0.$
2. $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0.$
3. $x \sin(\frac{y}{x})y' = y \sin(\frac{y}{x}) + x.$

4. $xy' = y + 2xe^{-y/x}$.

5. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $(x - y)dx - (x + y)dy = 0$.

7. $x^2y' = y^2 + 2xy$.

Problemes d'equacions exactes i factors integrants

Problema. Trobeu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $(3y^2 + 2xy + 2x) + (6xy + x^2 + 3)y' = 0$.

2. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) - \sqrt{x^2 - y}y' = 0$.

3. $2xy + (x^2 - y^2)y' = 0$.

4. $3x^2(1 + \log y) - (2y - x^3/y)y' = 0$.

5. $(x^2 + y^2 + x) + yy' = 0$.

Problema. Trobeu la solució particular de les següents equacions diferencials:

1. $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0, \quad y(1) = 1$.

2. $3x^2 + 4xy + 2(y + x^2)y' = 0, \quad y(0) = 1$.

3. $xy' - y - y^2 = 0, \quad y(2) = 1$.

Problema. Resoleu les següents equacions diferencials, trobant un factor integrant de la forma $\mu(x, y) = x^n y^m$.

1. $2ydx + (3y - 2x)dy = 0$.

2. $ydx + (x^2y^2 - x)dy = 0$.

Problemes d'EDO lineals

Problema. Trobeu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $y' + y\cos x = 0$.

2. $y' + y\sqrt{x} = 0$.

3. $y' + 2yx = x$.

4. $y' + y = xe^x$.

5. $y' + yx^2 = x^2$.

6. $xy' + y = x^3$.

7. $y' + 2y = 3e^{-2x}$.

8. $xy' + y = x \sin x$.

Problema. Trobeu la solució particular de les següents equacions diferencials:

1. $y' = 3y + e^{5x}, \quad y(1) = 0$.

2. $y' = 6y + x^2, \quad y(0) = 2$.

3. $y' = y + e^{-x} \sin(2x), \quad y(0) = 1$.

4. $(1 + x^2)y' + 4xy = x, \quad y(1) = 1/4$.

Aplicacions a la geometria de corbes

Cadascuna de les figures 5.4 representa un camp de pendents associat a una equació diferencial.

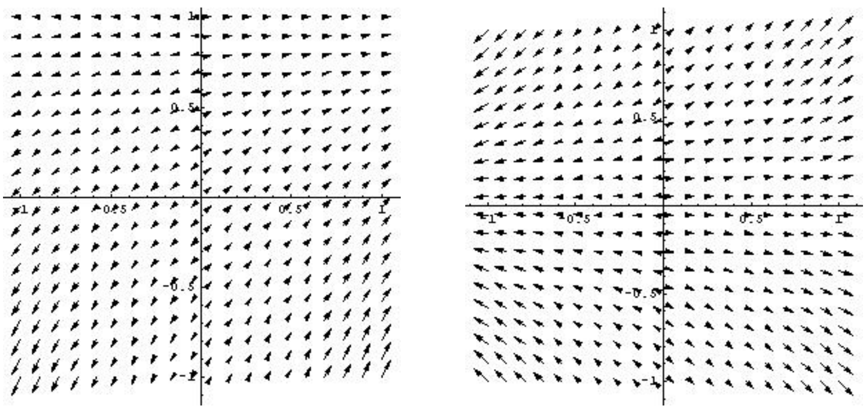


Fig. 5.4. Camps de pendents

Considereu els següents problemes de valors inicials:

$$\begin{cases} y' = x(1-y), \\ y(0) = 0.4, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = -0.5. \end{cases}$$

▷ Identifiqueu el camp de pendents de cada equació.

▷ Sobre les figures 5.4, traceu de manera aproximada la solució dels problemes.

Problema. Trobeu les famílies de corbes que satisfan cadascuna de les següents condicions:

1. La tangent al gràfic de la corba en cada punt (x, y) talla l'eix OX en el punt $(x + 2, 0)$.
2. La tangent al gràfic de la corba en cada punt (x, y) sempre passa per l'origen.
3. El segment de la tangent limitat pels eixos de coordenades té com a punt mitjà el punt de tangència.

Problema. Trobeu la família de corbes tal que el punt mitjà del segment de la normal entre la corba i l'eix OY es troba en l'eix OX. Trobeu la corba que passa pel punt $(4, 2)$.

Equacions que es redueixen a primer ordre

Les següents equacions diferencials de segon ordre poden reduir-se a equacions de primer ordre mitjançant un canvi de variables.

1. $xy'' - y' = 3x^2$. Com que en l'equació no apareix la variable y, mitjançant el canvi
$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dx}$$
es redueix a una equació de primer ordre.
2. $y'' + k^2 y = 0$. Com que en l'equació no apareix la variable x, mitjançant el canvi
$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$
es redueix a una equació de primer ordre.
3. $yy'' + (y')^2 = 0$.

4. $xy'' = y' + (y')^3$.

5. $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.

6. $2yy'' = 1 + (y')^2$.

Altres problemes

Problema. Un conill parteix de l'origen i corre per l'eix OY en sentit positiu amb velocitat constant v. Al mateix temps, un gos que corre amb velocitat constant w ix del punt $(p, 0)$ i persegueix el conill. Quina trajectòria segueix el gos?

Problema. Un dia va començar a nevar al matí i va seguir caent neu de manera constant tot el dia. Al migdia una màquina llevaneu va començar a netejar la carretera a un ritme constant, en termes de la quantitat de neu retirada cada hora. La llevaneu va netejar 2 km fins a les 2 p. m. i un quilòmetre més fins a les 4 p. m. A quina hora va començar a nevar?

Equacions lineals d'ordre superior

Problema. Trobeu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

2. $y''' + 6y'' + 10y' = 0$.

3. $y''' + 2y'' = 0$.

4. $y^{IV} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$.

Problema. Trobeu la solució particular de les següents equacions diferencials:

1. $y'' - y' - 6y = 0,\ y(2) = 0,\ y'(2) = 1$.

2. $y'' + 12y' + 36y = 0,\ y(0) = y'(0) = 2$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Problema. Resoleu les següents equacions diferencials:

1. $y'' + 2y' = 36\cos x$.

2. $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x$.

3. $y'' - 2y + y' = -e^x$.

4. $y'' - y = x^2e^x,\ y(0) = y'(0) = 0$.

5. $y''' - y'' - 9y' + 9y = 2x + 3$.

CAPÍTOL 6

Sèries de Fourier i transformades integrals

Contingut

6.1 Introducció

Els successos que es repeteixen amb una certa periodicitat són relativament comuns en la naturalesa. Pensem, per exemple, en les ones en el mar, les estacions al llarg de l'any, la transmissió del so, el pèndol d'un rellotge, els senyals electromagnètics emesos per una antena, etc. També podem fixar-nos en fenòmens que depenen de més variables, com les ombres que es produeixen amb la difracció d'un parell de feixos de llum. Encara que tots aquests sistemes siguen més o menys cíclics, açò no vol dir que siguen fàcils de descriure o modelar.

Les sèries de Fourier i la transformada de Fourier han tingut i continuen tenint un paper fonamental en l'estudi d'aquests problemes i el desenvolupament de les matemàtiques tal com avui les coneixem. El problema de la representació d'una funció mitjançant una suma, possiblement infinita, de funcions sinusoïdals sorgeix en el segle XVIII de la mà de nombrosos científics com D'Alembert, D. Bernoulli o Fourier entre d'altres, per a intentar resoldre equacions diferencials associades a fenòmens físics com el moviment d'una corda o la transmissió de la calor.

A més, la transformada de Laplace és una eina de gran utilitat per a resoldre problemes de valors inicials d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants. Guiats per aquest objectiu, en aquest capítol es presenta una introducció molt elemental a aquesta transformada.

6.2 Periodicitat

Comencem el capítol donant la definició de periodicitat d'una funció definida en $-\infty < x < \infty$.

Definició 6.1. Donada una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, direm que és periòdica si existeix un nombre real $T > 0$, anomenat període, de manera que $f(x+T) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

A més, si la funció f és integrable sobre tot l'interval $[0, T]$ es verifica

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \tag{6.1}$$

per a qualsevol valor $a \in \mathbb{R}$.

6.3 Sistemes ortogonals de funcions

Donades dues funcions f i g integrables en l'interval real $[a, b]$, definim el *producte interior* de f i g com la integral

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

i ho representarem com $< f, g >$. Així mateix, definim la *norma* de la funció f com a l'arrel quadrada del producte interior de f amb si mateixa, i ho representarem com $||f||$. És a dir,

$$||f|| = \sqrt{< f, f >}.$$

Considerem un conjunt de funcions $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$, totes elles integrables a l'interval $[a, b]$.

Definició 6.2. Direm que el conjunt S és un conjunt *ortogonal* de funcions definides en $[a, b]$ si

$$\begin{cases} < \phi_i, \phi_j > & = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \\ < \phi_i, \phi_j > & \neq 0 \quad \text{si} \quad i = j. \end{cases} \tag{6.2}$$

Si a més es compleix que per a qualsevol $\phi_i \in S$

$$< \phi_i, \phi_i >= 1,$$

aleshores direm que el conjunt S és *ortonormal*. Es demostra fàcilment que tot sistema ortogonal de funcions es pot convertir en ortonormal dividint cada funció ϕ_i per la seua norma.

La idea que plantegem a continuació és semblant al que coneixem per a espais vectorials generals. És a dir, donat un espai vectorial V de dimensió n i donada una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ d'aquest espai, podem expressar qualsevol vector $v \in V$ com a combinació lineal dels vectors de la base; és a dir:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

on $(a_1, \ldots, a_n)$ són els coeficients del vector v en aquesta base.

Aleshores, donada una funció f integrable a l'interval real $[a, b]$ i un conjunt ortonormal S de funcions definides en $[a, b]$, volem expressar f com a combinació lineal de les funcions que constitueixen el conjunt S. D'aquesta manera,

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x), \tag{6.3}$$

per a tot $x \in [a, b]$.

Per a calcular els coeficients a_i, procedirem de la manera següent. Multipliquem els dos costats de l'equació 6.3 per la funció ϕ_i; així tenim:

$$\phi_i(x)f(x) = a_0\phi_i(x)\phi_0(x) + a_1\phi_i(x)\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_i(x)\phi_n(x).$$

Ara integrem els dos costats de la igualtat anterior a l'interval $[a, b]$; aleshores, tenint en compte la definició de producte interior de funcions, obtenim

$$\begin{aligned} &\int_a^b \phi_i(x)f(x)dx \\ &\quad = a_0 < \phi_i(x), \phi_0(x) > +a_1 < \phi_i(x), \phi_1(x) > + \cdots + a_n < \phi_i(x), \phi_n(x) > . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Com que S és un sistema ortonormal de funcions, podem concloure que

$$a_i = \int_a^b \phi_i(x)f(x)dx. \tag{6.5}$$

Demostreu que el conjunt de funcions següent és un sistema ortogonal de funcions a l'interval $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{2}, \\ \phi_{2n-1}(x) &= \cos(nx), \\ \phi_{2n}(x) &= \sin(nx), \end{aligned} \tag{6.6}$$

per a $n = 1, 2, 3 \ldots$

6.4 Sèrie trigonomètrica de Fourier

Siga $f(x)$ una funció periòdica de període 2π. Sota condicions molt generals tenim que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{6.7}$$

on els diferents coeficients a_n i b_n els podem calcular de la mateixa manera que ho hem fet abans; és a dir,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \tag{6.8}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \tag{6.9}$$

$n = 1, 2 \ldots$

La identitat (6.7) és satisfeta en tot punt de continuïtat de f, si f és fitada i monòtona a trossos. Açò vol dir que $[0, 2\pi]$ té una partició en intervals sobre cada un dels quals f és creixent o decreixent.

Exemple.- Donada la funció periòdica de període 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{si} \quad \pi < x \leq 2\pi, \end{cases} \tag{6.10}$$

la seua sèrie de Fourier ve donada per

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right).$$

Considerem les sumes parcials

$$S_2 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3}\right), \qquad S_5 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9}\right),$$

i en la figura 6.1 visualitzem com la sèrie de Fourier de f convergeix a f en cada punt de continuïtat.

Si considerem funcions periòdiques $f(x)$ de període arbitrari T, podem adaptar la sèrie anterior simplement fent un escalat horitzontal; és a dir, multiplicant x pel factor

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

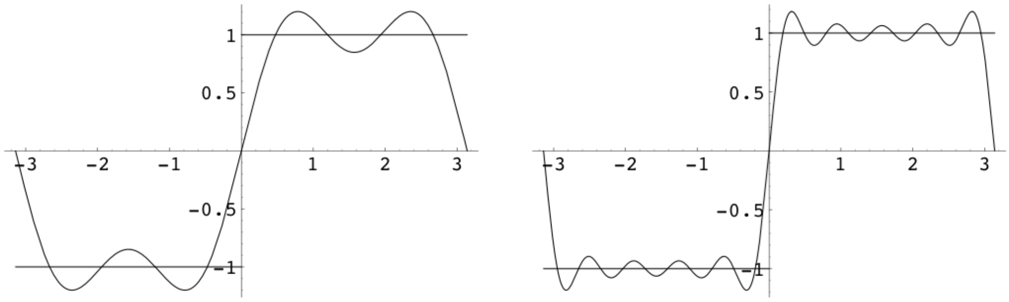


Fig. 6.1. (a) Suma parcial S_2. (b) Suma parcial S_5

D'aquesta manera, si $f(x)$ és una funció periòdica de període arbitrari T, tenim

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\right), \tag{6.11}$$

on els diferents coeficients a_n i b_n vénen ara donats per

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \, dx, \tag{6.12}$$

$n = 0, 1, 2 \dots$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \, dx, \tag{6.13}$$

$n = 1, 2 \dots$

6.4.1 Treballs tutoritzats: funcions parelles i imparelles

Siga $I \subset \mathbb{R}$ un interval simètric respecte de l'origen i siga $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Direm que f és una funció parella si $f(x) = f(-x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i direm que f és imparella si $f(x) = -f(-x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Trobeu la sèrie de Fourier per a funcions periòdiques parelles i imparelles.

6.4.2 Afegint "complexitat"

Veurem ara la notació complexa de les sèries de Fourier. Per la identitat d'Euler sabem:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

A partir d'aquesta identitat, podem extraure les següents:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

i

$$\sin nx = \frac{i(e^{-inx} - e^{inx})}{2};$$

per tant, substituint en la sèrie (6.7) tenim:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{i(e^{-inx} - e^{inx})}{2} \right). \tag{6.14}$$

Reagrupant en l'expressió anterior tenim:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right). \tag{6.15}$$

Si denotem

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

(c_{-n} és el conjugat de c_n), obtenim:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right). \tag{6.16}$$

Per tant, la sèrie de Fourier es pot expressar com:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{6.17}$$

on els coeficients vénen donats per:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx. \tag{6.18}$$

6.5 Transformada de Fourier

Les sèries de Fourier poden "reconstruir" funcions periòdiques integrables. La pregunta que sorgeix ara és si es poden ampliar les sèries de Fourier per a abastar també funcions sobre $\mathbb{R}$ no periòdiques. La resposta és sí, a través de la transformada de Fourier.

Considerem la representació complexa de les sèries de Fourier de funcions periòdiques de període arbitrari T,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}, \tag{6.19}$$

on els coeficients vénen donats per:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx. \tag{6.20}$$

Denotem per $\omega_n = (2\pi/T)n$ i considerem

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T};$$

aleshores, substituint els coeficients en la sèrie (6.19) i considerant aquestes notacions, obtenim

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{i\omega_n x}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)\Delta\omega. \tag{6.21}$$

La idea ara és fer tendir el període T de la funció $f(x)$ a infinit per a aconseguir, d'aquesta manera, una funció no periòdica (definida en tota la recta real). Per tant, $\Delta\omega$ tendirà a zero i el sumatori en la igualtat (6.21) es convertirà en la integral impròpia:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right)d\omega. \tag{6.22}$$

La integral impròpia es defineix com el límit d'una integral sobre $[a, b]$ quan $a \to \infty$ i $b \to \infty$.

És a dir, en augmentar la longitud del període es redueix l'espai entre les diferents freqüències de les funcions base fins a convertir-se en un continu. Els coeficients c_n s'han transformat en una funció $\mathcal{F}(\omega)$.

Definició 6.3. Donada una funció $f(x)$ definida en la recta real, definim la *transformada de Fourier* de $f(x)$ com la integral

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \tag{6.23}$$

i la *transformada de Fourier inversa* com la integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \tag{6.24}$$

6.6 Transformada de Laplace

A partir de la transformada de Fourier resulta fàcil introduir una nova transformada integral, com és la transformada de Laplace, que té gran importància com a mètode alternatiu per a resoldre problemes de valors inicials per a equacions diferencials lineals amb coeficients constants. Aquest operador ens permet reduir una equació diferencial lineal per a una funció a una equació algebraica per a la seua transformada de Laplace. La transformada de Laplace se sol aplicar a processos que depenen del temps i de fet s'aplica sobre funcions definides en $[0, \infty[$.

Definició 6.4. La transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ definida per a $t \geq 0$, és una funció

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \left(= \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt \right), \tag{6.25}$$

on $\mathcal{L}[f](s)$ està definida per a tot $s \in \mathbb{R}$ per al qual la integral anterior siga convergent.

Exercicis.- Si $f(t) = c$, $t \geq 0$, amb c constant, proveu que $\mathcal{L}[f](s) = c/s$, per a $s > 0$.

Si $f(t) = t$, $t \geq 0$ proveu que $\mathcal{L}[f](s) = 1/s^2$, per a $s > 0$.

6.6.1 Propietats de la transformada de Laplace

1. Siguen $\mathcal{L}[f](s)$ i $\mathcal{L}[g](s)$ les transformades de Laplace de f i g, respectivament, i a i b dues constants; aleshores

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s).$$

2. Si $L(s) = \mathcal{L}[f](s)$, tenim

$$\mathcal{L}[e^{at} f](s) = L(s - a).$$

3. Siga f una funció i $\mathcal{L}[f](s)$ la seua transformada de Laplace; aleshores

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Repetint el procés, tenim

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

4. Si $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, tenim que $f = g$. Aleshores definim l'operador *transformada inversa de Laplace*, $\mathcal{L}^{-1}$, com $\mathcal{L}^{-1}(L) = f$.

6.6.2 Taula de transformades de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{n-1}] &= \frac{(n-1)!}{s^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s > 0.\\
\mathcal{L}[t^{n-1}e^{at}] &= \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s > a.\\
\mathcal{L}[\sin bt] &= \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.\\
\mathcal{L}[\cos bt] &= \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0.\\
\mathcal{L}[\sinh bt] &= \frac{b}{s^2-b^2}, \quad s > b.\\
\mathcal{L}[\cosh bt] &= \frac{s}{s^2-b^2}, \quad s > b.\\
\mathcal{L}[e^{at}\sin bt] &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.\\
\mathcal{L}[e^{at}\cos bt] &= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

6.6.3 Treballs tutoritzats: Resolució de problemes de valors inicials

Per resoldre un problema de valors inicials pel mètode de la transformada de Laplace, en primer lloc es pren la transformada de Laplace als dos costats de l'equació. Usant les propietats de la transformada i les condicions inicials s'obté una equació algebraica per a la transformada de Laplace de la solució, $L(s)$, i d'aquesta equació s'aïlla $L(s)$. A continuació es determina la transformada inversa de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}(L)$, utilitzant la taula anterior.

Demostreu que la transformada de la solució del problema de valors inicials $y'(t) - 3y(t) = e^{2t}$, $y(0) = 1$ ve donada per

$$L(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

i descomponeu en fraccions simples $L(s)$ per a demostrar que la solució és $y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$.

6.7 Problemes

1.- Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica de període 2π

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{si} \quad \pi < x \leq 2\pi. \end{cases} \tag{6.27}$$

(Sol. $\frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \dots)$.

2.- Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$.
(Sol. $2(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \dots)$.

3.- Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica $f(x) = -2x$, $-\pi \leq x < \pi$.
(Sol. $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$).

4.- Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica de període 2π

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad -\pi < x \leq 0, \\ -x, & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi. \end{cases} \tag{6.28}$$

(Sol. $-\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$).

5.- Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica $f(x) = -x + \pi$, $-\pi \leq x < 0$.
(Sol. $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin 2nx}{n}$).

6.- Resoleu, utilitzant la transformada de Laplace, el problema de valors inicials $y''(t) - y(t) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Sol. $y(t) = (1/2)(e^t + e^{-t}) - 1 = \cosh t - 1$).

7.- Resoleu, utilitzant la transformada de Laplace, el problema de valors inicials $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Sol. $y(t) = e^{3t}/2 - 2e^{2t} + 5e^t/2$).

CAPÍTOL 7

Exemples de seminaris

Contingut

7.1 Vectors en el pla i en l'espai

En aquest seminari proposem l'inici de l'estudi de l'àlgebra vectorial a partir de conceptes propers a la intuició com són els vectors del pla i de l'espai. Açò ens permetrà seguir amb l'estudi axiomàtic de l'estructura d'espai vectorial i les seues propietats.

Formulació matemàtica

▷ Vectors en el pla.

Eixos coordenats. Abscisses: X. Ordenades: Y.

P_1 i P_2 punts en $\mathbb{R}^2$.

Definició de vector fix: Fletxa $v = \vec{P_1 P_2}$. Origen: $P_1(x_1, y_1)$. Extrem: $P_2(x_2, y_2)$.

Projeccions eixos: $v = (a, b) \Longrightarrow a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1$.

Component horitzontal, a, i component vertical, b.

Pendent: $m = b/a$. Inclinació: $\alpha = \arctan m$.

Vectors fixos equivalents són els que tenen les mateixes components:
$v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$, $v_1 \approx v_2 \iff a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$.

Conjunt de vectors lliures: $V = \{(a, b), \forall a, b \in \mathbb{R}\}$. Un vector serà un vector lliure, o element de V.

▷ Vectors en l'espai.

Eixos coordenats. X, Y, Z. Origen: O.

Projeccions eixos: $v = (a, b, c) \Longrightarrow a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = z_2 - z_1$.

Inclinacions: (Si $L = P_1P_2$)

$$\alpha = \arccos(a/L),\ \beta = \arccos(b/L),\ \gamma = \arccos(c/L).$$

Vectors fixos equivalents són els que tenen les mateixes components:

$$v_1 = (a_1, b_1, c_1),\ v_2 = (a_2, b_2, c_2),\ v_1 \approx v_2 \iff a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2.$$

Conjunt de vectors lliures: $V = \{(a, b, c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Un vector serà un vector lliure, o element de V.

▷ Suma de vectors.

Suma en funció de les components:

En el pla: $v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

En l'espai: $v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$.

(Doneu una interpretació geomètrica (dibuix) de la suma de vectors.)

Demostreu que la suma de vectors dota el conjunt V d'estructura de grup abelià: (associativa, commutativa, element neutre i element oposat).

▷ Producte d'un escalar per un vector.

Producte en funció de les components:

En el pla: $k\,v = (k\,a, k\,b)$. En l'espai: $k\,v = (k\,a, k\,b, k\,c)$.

(Doneu una interpretació geomètrica (dibuix) del producte.)

Demostreu que el producte verifica les propietats: (associativa escalar, distributiva escalar, distributiva vectorial i element unitat escalar).

- ▷ Norma d'un vector.

  $||v||$ = longitud del vector $\longrightarrow ||v|| = d(P_1, P_2)$.

  Norma en funció de les components:

  En el pla: $||v|| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En l'espai: $||v|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

  Tipus de vectors: Expliqueu que són vectors unitaris, ortogonals, ortonormals i canònics (i, j, k).

- ▷ Producte escalar de vectors.

$$v_1 \cdot v_2 = ||v_1||\,||v_2|| \cos \alpha.$$

  (Doneu una interpretació geomètrica (dibuix) del producte de vectors.)

  Producte escalar en funció de les components:

  En el pla: $v_1 \cdot v_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2)$. En l'espai: $v_1 \cdot v_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$.

  Demostreu que el producte escalar verifica les propietats: associativa i commutativa.

- ▷ Angle entre dos vectors no nuls.

$$\alpha = \arccos \left(\frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1||\,||v_2||} \right).$$

  Estudieu paral·lelisme i perpendicularitat de vectors en funció de l'angle.

Problema.- Tenim dos triangles rectangles $O_1 M_1 P_1$ i $O_2 M_2 P_2$ que tenen per catets respectius $O_1 M_1 = 4\,\text{cm}$, $M_1 P_1 = 3\,\text{cm}$, $O_2 M_2 = 7\,\text{cm}$, $M_2 P_2 = 24\,\text{cm}$. Calculeu quantes vegades és més gran l'àrea del segon triangle que la del primer. Feu el mateix per a les longituds dels vectors hipotenusa i també per a les seues inclinacions en els vèrtexs O_1 i O_2.

(Sol. 14, 5 i 2, respectivament).

Problema.- L'origen d'un vector és $P_1(2, 3)$ i el seu extrem és $P_2(4, 1)$. Un altre vector equivalent a l'anterior té el seu origen en $Q_1(-6, 5)$. Calculeu les coordenades del seu extrem Q_2 i també els seus pendents i inclinacions. Dibuixeu-ho.

(Sol. $Q_2(-4,3)$, $m=-1$, $\alpha=-45^{o}$).

Problema.- Determineu un vector w paral·lel al vector $v=\{16,-15,12\}$, però de sentit oposat i de mòdul 75 unitats.

(Sol. $w=-3\{16,-15,12\}$).

Problema.- Trobant les longituds dels seus costats, analitzeu si el triangle de vèrtexs $A(-1,-4)$, $B(3,-1)$ i $C(-3,7)$ és un triangle rectangle.

Problema.- Determineu les cordenades x i y d'un punt P que equidiste dels punts $A(1,7)$, $B(8,6)$ i $C(7,-1)$. Sabríeu dir la propietat que té? (Sol. $P(4,3)$).

Problema.- Dos vectors del pla v_1 i v_2 tenen per normes 2 i 5 unitats, respectivament. Si l'angle format per aquests vectors és 120^{o}, calculeu el producte escalar dels vectors $w_1=3v_1+2v_2$ i $w_2=2v_1-v_2$. (Sol. -31).

7.2 Estudi general d'una funció

Donada una funció real de variable real, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)$, l'estudi local d'aquesta funció en un punt $x=a$ consisteix a obtindre informació de la funció en un entorn $B_\epsilon(a)$ de centre a i radi ϵ del punt. Si la funció f és de classe C^∞ en $B_\epsilon(a)$, bona part de la informació s'obté a partir de l'aproximació de la funció per un polinomi de grau n a partir de la fórmula de Taylor. En aquest seminari pretenem repassar l'estudi general d'una funció a partir d'una anàlisi del càlcul de les asímptotes, el creixement i decreixement, els punts extrems, la concavitat i convexitat i també els punts d'inflexió. En els problemes proposats aplicarem aquest estudi a funcions polinòmiques, racionals, exponencials, logarítmiques, trigonomètriques i irracionals.

Formulació matemàtica

Donada una funció real de variable real $y=f(x)$ tenim:

▷ Domini: $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \exists f(x)\}$ (conjunt d'existència).

▷ Recorregut: $R(f)=\{f(x)\ /\ x\in D(f)\}$ (conjunt imatge).

▷ Simetries i periodicitat.

- Simetria respecte de l'eix Y: $f(x)=f(-x)$ (funció parella).

– Simetria respecte de l'origen O: $-f(x) = f(-x)$ (funció imparella).

– Funció periòdica: $f(x+p) = f(x)$. Període: p (mínim valor).

▷ Asímptotes verticals (A.V.).

Equació $x = a$. Condició: $y \to \infty$. Tipus: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

▷ Asímptotes horitzontals.

Equació $y = b$. Condició: $x \to \infty$. Tipus: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

▷ Asímptotes obliqües.

Equació $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\infty} f'(x), \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$

▷ Punts angulosos: $f'(a^+) \neq f'(a^-)$ (punt no derivable).

▷ Punts de tall amb els eixos. Amb l'eix X: Substituir $y = 0$ en la funció. Amb l'eix Y: Substituir $x = 0$ en la funció.

▷ Signe de la funció (cal tenir en compte els punts de tall i A.V.).

Positiva: $(+) = \{x \ / \ f(x) > 0\}$. Negativa: $(-) = \{x \ / \ f(x) < 0\}$.

▷ Punts extrems (separen creixement i decreixement).

Màxim: Creix$\longrightarrow$ *Decreix*. Mínim: Decreix$\longrightarrow$ *Creix*.

▷ Punts crítics de segona espècie: $f''(a) = 0$ + Punts no derivables.

▷ Concavitat i convexitat (trobar punts crítics de segona espècie i A.V.).

Concavitat: $f''(a) > 0$. Convexitat: $f''(a) < 0$.

▷ Punts d'inflexió (separen concavitat i convexitat).

Problema.- Determineu una funció polinòmica de quart grau de manera que tinga un punt crític en $P_1(1,3)$ i un punt crític de segona espècie, amb tangent de pendent 2, en el punt $P_2(0,0)$. Té altres punts crítics? Estudia el creixement/decreixement i els extrems. Estudia la concavitat/convexitat i els punts d'inflexió. En quin punt, diferent de l'origen, es tallen la tangent donada i la funció? Feu-ne el gràfic.

Problema.- El gràfic de la funció:

$$f(x) = \frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$$

té un màxim i un mínim. Determineu-los per mitjà dels punts crítics i de l'estudi del creixement/decreixement. Trobeu també l'asímptota horitzontal, els punts de tall amb els eixos i el signe de la funció. Dibuixeu el gràfic i assenyaleu el recorregut.

Problema.- Considereu la funció exponencial $f(x) = e^{2/x}$. Estudieu el domini, el recorregut a partir de la funció inversa, les asímptotes paral·leles als eixos, el punt no derivable, el creixement/decreixement, els extrems, la concavitat/convexitat i els punts d'inflexió. Resumiu totes les característiques anteriors en un gràfic.

Problema.- Calculeu el domini de la funció

$$f(x) = 3 \ln \frac{x^3 - 4x^2 - 11x + 30}{15}$$

i les asímptotes verticals. Comproveu que talla l'eix X en $x = 1.06$ i trobeu els altres punts de tall amb els eixos. Estudieu els extrems per mitjà del creixement/decreixement. Si se sap que no hi ha cap punt d'inflexió, estudieu la concavitat/convexitat. Feu-ne el gràfic.

Problema.- En l'interval $[-4\pi, 4\pi]$, siga la funció

$$f(x) = \frac{\pi x}{4} - 3 \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right).$$

Estudieu la simetria. Quins són els quatre extrems? I els cinc punts d'inflexió? Feu-ne el gràfic. Observeu que els punts d'inflexió estan alineats i calculeu l'equació de la recta que hi passa.

Problema.- Partint de la funció

$$f(x) = +\sqrt{\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}},$$

estudieu el domini, la simetria, les asímptotes horitzontals i verticals, els punts de tall amb els eixos, el creixement/decreixement i els extrems. Feu-ne el gràfic i apunteu la concavitat/convexitat i els punts d'inflexió. Suposant ara que la funció és multiforme, quin tipus nou de simetria hi haurà? Feu la nova gràfica i apunteu el recorregut.

7.3 Corbes en coordenades polars

Un punt del pla $\mathbb{R}^2$ el sabem representar mitjançant coordenades cartesianes $P(x, y)$ respecte d'un sistema de coordenades: l'origen de les coordenades O, l'eix d'abscisses X i l'eix d'ordenades Y. A partir d'aquesta representació hem estudiat funcions (corbes) $y = f(x)$ i hem interpretat els seus gràfics. En aquest seminari treballarem una altra representació de punts en $\mathbb{R}^2$ utilitzant coordenades polars.

Coordenades polars

Partim d'un *pol*, O, que coincideix amb l'origen de les coordenades cartesianes, i d'una semirecta, l'*eix polar*, X, que coincideix amb l'eix d'abscisses X. D'aquesta manera, les coordenades polars d'un punt P vénen donades per la distància ρ del pol O al punt P i per l'argument θ, que és l'angle format per l'eix polar i el radi OP, on considerem com a sentit positiu d'arguments el contrari al moviment de les agulles del rellotge.

Representeu un mateix punt $P \in \mathbb{R}^2$ en coordenades cartesianes $P(x, y)$ i en coordenades polars $P(\theta, \rho)$ i demostreu que les relacions que hi ha entre les coordenades cartesianes i les polars, que es poden establir de la representació anterior, són:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Notem que les dues primeres ens permetran passar de polars a cartesianes, i les segones, de cartesianes a polars.

Corbes en coordenades polars

Una corba en coordenades polars s'expressarà amb la forma

$$\rho = f(\theta). \tag{7.2}$$

Abans de representar una corba en polars heu de dibuixar en $\mathbb{R}^2$ un feix de rectes que passen pel pol amb inclinacions de 30º en 30º, i després una família de circumferències concèntriques amb el pol com a centre i de radis 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Representeu en la figura resultant els punts $P_1(30^{\circ}, 3)$, $P_2(180^{\circ}, 1)$, $P_3(240^{\circ}, 5)$, $P_4(330^{\circ}, 6)$, $P_5(300^{\circ}, 4)$ i $P_6(210^{\circ}, 2)$.

Problema.- Donada la corba en coordenades polars $\rho = 4\sin^2(\theta/3)$, feu una taula de valors, donant a l'argument els angles 0º, 30º, 60º... fins que el mòdul es repetisca i dibuixeu els valors en el feix de rectes anterior. Comproveu que el període de la funció és $[0^{\text{o}}, 540^{\text{o}}]$, perquè si continuem donant més valors a l'argument, aleshores la corba passarà sobre ella mateixa.

Demostreu que els extems de la funció donada són: $P_1(0^{\text{o}}, 0)$ (mínim) i $P_2(270^{\text{o}}, 4)$ (màxim).

En l'exemple anterior, l'argument θ s'ha expressat en graus sexagesimals, però si aquest no és l'angle d'una funció trigonomètrica, s'haurà d'expressar en radians, perquè el mòdul, com que és una longitud, no pot expressar-se en graus.

Recordem, de passada, l'equivalència entre les dues mesures angulars: π rad $=$ 180º.

Problema.- Dibuixeu la corba en polars $\rho = 2\pi^2/\theta$ en l'interval $[360^{\text{o}}, 1800^{\text{o}}]$ i comproveu que es tracta d'una espiral que després d'infinites voltes arribaria al pol.

Donada una corba en polars $\rho = f(\theta)$, tenint en compte les relacions $x = \rho\cos\theta$ i $y = \rho\sin\theta$, podem expressar $x = f(\theta)\cos\theta$ i $y = f(\theta)\sin\theta$. Si ara posem $t = \theta$, tindrem el que s'anomenen *equacions paramètriques* de la corba

$$x(t) = f(t)\cos t, \qquad y(t) = f(t)\sin t. \tag{7.3}$$

Anomenarem *extrems horitzontals* els punts màxims i mínims de la corba on la recta tangent és vertical. Els trobarem calculant els valors de t que anul·len la derivada de x respecte de t. Anàlogament, els *extrems verticals* seran els punts màxims i mínims on la recta tangent és horitzontal. Haurà de passar que $\mathrm{d}\, y/\,\mathrm{d}\, t = 0$.

Problema.- Donada la cardioide $\rho = 5(1 - \sin\theta)$, calculeu els màxims i mínims d'aquesta corba en coordenades polars. Passeu-la després a paramètriques i deduïu els seus extems horitzontals i verticals. Feu-ne el gràfic i comproveu les dades anteriors.

(Sol. $Q_1(90^{\text{o}}, 0)$ (mínim) i $Q_2(270^{\text{o}}, 10)$ (màxim). Extrems horitzontals expressats en cartesianes: $P_1(0,0)$, $P_2(-15\sqrt{3}/4, -15/4)$ i $P_3(15\sqrt{3}/4, -15/4)$. Extrems verticals expressats en cartesianes: $P_4(0,0)$, $P_5(0,-10)$, $P_6(5\sqrt{3}/4, 5/4)$ i $P_7(-5\sqrt{3}/4, 5/4)$. Finalment, veiem que la corba té forma de cor, per la qual cosa s'anomena cardioide).

Problema.- Dibuixeu les corbes $\rho = 5$ i $\rho = 10\sin(3\theta)$ per mitjà d'una taula de valors i calculeu analíticament els sis punts de tall. Calculeu el radi de la circumferència que és tangent a la segona corba.

(Sol. Punts de tall: $P_1(10^o, 5)$, $P_2(50^o, 5)$, $P_3(130^o, 5)$, $P_4(170^o, 5)$, $P_5(250^o, 5)$ i $P_6(290^o, 5)$. Radi: $\rho = 10$).

Problema.- Dibuixeu la corba $\rho = 9/(5 + 4\cos\theta)$ utilitzant una taula de valors. Comproveu que es tracta d'una el·lipse passant-la a coordenades cartesianes. Quin és el centre? I els semieixos? Dibuixeu també la recta $\rho = 16/(5\sin\theta - 4\cos\theta)$. En quins punts es tallen les dues corbes?

(Sol. $C(-4, 0)$, $a = 5$, $b = 4$. $P_1(-1, 2.4)$, $P_2(-7, -2.4)$).

7.4 Curvatura d'una corba

En les classes teòriques s'estudien els polinomis de Taylor o polinomis osculadors, que són les funcions polinòmiques que s'aproximen més en un punt a una corba $y = f(x)$. En particular, quan el polinomi de Taylor es de grau 1, tenim la recta osculadora $p(x) = mx + n$ que més s'aproxima a la funció $y = f(x)$ en un punt $(a, f(a))$. Més tècnicament, direm que és la recta que representa un ajustament de primer ordre amb la funció donada en el punt $(a, f(a))$. S'haurà de complir per tant que $p(a) = f(a)$ i $p'(a) = f'(a)$. L'equació de la recta osculadora és:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{7.4}$$

De manera similar, quan el polinomi de Taylor es de grau 2 tenim la paràbola osculadora $p(x) = mx^2 + nx + q$, que representa un ajustament de segon ordre amb la funció $y = f(x)$ en un punt $(a, f(a))$. Haurà de verificar que $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$ i $p''(a) = f''(a)$, i l'equació queda:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2. \tag{7.5}$$

Curvatura d'una corba

Anomenarem *circumferència osculadora* la circumferència de centre $C(m, n)$ i radi R; és a dir, la que té per equació $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$, que més s'aproxima a la corba $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$. Demostreu que el centre de la circumferència osculadora $C(m, n)$, anomenat també *centre de curvatura*, té per coordenades

$$m = a - \frac{f'(a)(1 + (f'(a))^2)}{f''(a)}, \qquad n = f(a) + \frac{(1 + (f'(a))^2)}{f''(a)}, \tag{7.6}$$

i que el seu radi, R, anomenat *radi de curvatura*, és

$$R = \frac{(1 + (f'(a))^2)^{3/2}}{f''(a)}. \tag{7.7}$$

Exemple.- Demostreu que la circumferència osculadora de la funció parabòlica $f(x) = x^2/4$ en el punt $(-2, 1)$ ve donada per

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (4\sqrt{2})^2. \tag{7.8}$$

Dibuixeu els dos gràfics i comproveu que la circumferència osculadora i la paràbola són dues corbes tangents en $P(-2, 1)$.

Calculeu l'altre punt Q d'intersecció entre la paràbola $f(x) = x^2/4$ i la circumferència osculadora $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 32$. Resolent el sistema format per ambdues equacions, comproveu també que P és un punt triple i que l'altre punt és el $Q(6, 9)$.

El valor invers del radi de curvatura, $\kappa = 1/R$, s'anomena *curvatura* de la corba. En un punt qualsevol $(x, f(x))$ d'una funció $y = f(x)$ s'expressarà per

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \tag{7.9}$$

Si la funció és una recta $y = ax + b$, la curvatura és evidentment $\kappa = 0$ en tots els punts. És a dir, les rectes són corbes de curvatura nul·la.

Exemple.- Amb la mateixa funció de l'exemple anterior, $y = x^2/4$, demostreu que la curvatura ve donada per l'expressió

$$\kappa = \frac{4}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}. \tag{7.10}$$

Dibuixeu el gràfic de la funció i la seua curvatura i expliqueu el seu comportament.

Si en cada punt d'una corba $y = f(x)$ trobàrem els centres de curvatura $C(m, n)$ i els dibuixàrem, ens quedaria una corba que és coneguda amb el nom d'*evoluta*. Matemàticament ho expressarem dient que l'evoluta d'una corba és el lloc geomètric dels seus centres de curvatura.

Per determinar l'equació de l'evoluta eliminarem x en les coordenades del centre $m = m(x)$ i $n = n(x)$, i posarem la n en funció de la m, $n = g(m)$, que, canviant variables $m \longrightarrow x$ i $n \longrightarrow y$, quedarà en la forma més corrent $y = g(x)$.

Exemple.- Demostreu que l'equació de l'evoluta de la corba $y = x^2/4$ ve donada per

$$y = \frac{3\sqrt[3]{2x^2} + 4}{2} \tag{7.11}$$

i dibuixeu en un mateix gràfic la corba i la seua evoluta.

Problema.- Determineu el radi i el centre de curvatura de la corba racional

$$f(x) = \frac{3(2x-5)}{2(x^2-7)} \tag{7.12}$$

en el punt d'abscissa $x = 3$. Quina és la curvatura en aquest punt? Què es pot deduir de la curvatura quan $x \to \infty$? Quin significat té? (Sol. $\kappa = 1.92$, $\lim_{x\to\infty} \kappa(x) = 0$).

CAPÍTOL 8

Connexions de les matemàtiques amb les àrees de química

En aquest capítol relacionem els coneixements proposats en les assignatures de contingut matemàtic amb altres assignatures del Grau en Química. Encara que aquest capítol s'haja detallat en la part final del llibre, es tracta en realitat d'un capítol essencial, ja que justifica els motius pels quals s'introdueixen determinats conceptes matemàtics.

A l'hora de mostrar connexions entre les matemàtiques i les branques de la química, considerem les àrees bàsiques que componen la docència en el Grau en Química: química física, química analítica, química orgànica, química inorgànica i enginyeria química, a les quals hem afegit la química computacional [41].

8.1 Química física

La química física aplica els mètodes de la física a l'estudi dels sistemes químics. Algunes de les principals àrees que s'hi estudien són: mecànica clàssica, termodinàmica, electromagnetisme, electrònica, mecànica quàntica i cinètica.

A continuació comentarem alguns exemples que il·lustren la necessitat d'un bon coneixement de l'aparell matemàtic inclòs en el programa de la matèria de matemàtiques:

- ▷ Els primers temes de l'assignatura de física versen sobre mecànica clàssica. Així, els vectors s'utilitzen en els conceptes d'equilibri de cossos sota l'acció de les forces i els vectors i funcions de diverses variables en cinemàtica, per a l'estudi de la geometria del moviment dels cossos en l'espai en funció del temps. Més endavant, en la mateixa assignatura i dins de la mecànica clàssica, s'utilitzen les integrals dobles i triples per al càlcul de moments i centres de massa. Finalment, en hidrostàtica o estàtica de fluids, s'utilitzen funcions vectorials i equacions diferencials, per a l'estudi del comportament dels fluids en condicions d'equilibri. Vegeu [9].

- ▷ La termodinàmica s'introdueix en l'assignatura de física i es detalla en els primers capítols de química física. La termodinàmica estudia els efectes dels canvis de la temperatura, pressió i volum dels sistemes físics a una escala macroscòpica. Les funcions de diverses variables s'utilitzen en caracteritzar qualsevol equilibri, però també apareixen el càlcul diferencial i integral de manera natural, en caracteritzar les variacions dels sistemes termodinàmics. Per exemple, el matemàtic Constantin Carathéodory va donar una formulació de la primera llei de la termodinàmica a través d'integrals de línia. Aquesta formulació apareix en els llibres de text actuals; vegeu, per exemple, [21].

  A més de conceptes d'àlgebra i anàlisi matemàtica, també són necessàries tècniques estadístiques en termodinàmica. Per exemple, l'entropia d'un sistema té una interpretació estadística. Va ser Ludwig Boltzmann (1972) qui va introduir la definició d'entropia d'un sistema com la mesura del seu nivell de desordre. L'entropia pot interpretar-se com una mesura de la distribució aleatòria d'un sistema. Es diu que un sistema distribuït a l'atzar té gran entropia. De fet, van ser Boltzmann i altres els qui van desenvolupar les idees del que avui es coneix com a mecànica estadística, teoria profundament influenciada pel concepte d'entropia.

  La mecànica estadística és la part de la física que tracta de determinar el comportament agregat termodinàmic de sistemes macroscòpics a partir de consideracions microscòpiques, utilitzant per a açò eines estadístiques al costat de lleis mecàniques. Així, per exemple, per a predir el comportament d'un gas, la mecànica exigirà calcular la trajectòria exacta de cadascuna de les partícules que el componen (la qual cosa és un problema impossible d'abordar). La termodinàmica fa una cosa radicalment oposada: estableix uns principis qualitativament diferents dels mecànics per a estudiar una sèrie de propietats macroscòpiques sense preguntar-se en absolut per la naturalesa real de la matèria d'estudi. La mecànica estadística intervé entre ambdues aproximacions: ignora els comportaments individuals de les partícules, i en comptes d'açò, es preocupa de mitjanes. D'aquesta forma podem calcular les propietats termodinàmiques d'un gas a partir del nostre coneixement genèric de les molècules que el componen aplicant lleis mecàniques.

Finalment, si considerem l'energia com una variable que depèn, entre altres paràmetres, de l'entropia, la seua representació es realitza a través d'equacions diferencials.

▷ L'electromagnetisme estudia i unifica els fenòmens elèctrics i magnètics en una sola teoria. De fet, els conceptes fonamentals del càlcul vectorial (els camps, la integral de flux) van ser construïts *a posteriori* per a donar resposta a les necessitats de formalització requerides per a descriure i quantificar cert tipus de fenòmens naturals, entre ells, els relacionats amb els corrents d'electrons. D'altra banda, certes propietats dels camps electromagnètics poden "descobrir-se"(o justificar-se) sense recórrer a l'experimentació, ja que sorgeixen com a conseqüència formal de la manipulació dels conceptes matemàtics involucrats.

▷ Les molècules i les partícules que les componen (electrons i nuclis) no obeeixen a la mecànica clàssica (newtoniana). Els nuclis actuen com a punts atractors immersos en un núvol de càrrega negativa la densitat de la qual és la densitat electrònica. Els moviments d'aquestes partícules estan governats per les lleis de la **mecànica quàntica**, i la seua aplicació a l'estructura atòmica, enllaç molecular i espectroscòpia s'anomena **química quàntica**. Aquestes afirmacions que hem fet comporten la necessitat de l'estudi de funcions de diverses variables i de la seua representació en dues dimensions a través de corbes de nivell.

En mecànica quàntica es defineix un àtom com la regió de l'espai fitada per la superfície on el flux del gradient de la densitat electrònica és zero. Per tant, la superfície atòmica verifica la condició de "flux zero". Seguint per aquest camí es troba el químic/a en la necessitat de coneixements d'integrals de línia, superfície i teoremes com el de Green o el de Stokes. Alguns dels teoremes atòmics més importants, juntament amb les tècniques matemàtiques que s'utilitzen, es troben en [2]. Sens dubte, un dels temes més destacats en la relació entre matemàtiques i química se centra en l'equació de Schrödinger.

▷ Altres exemples d'aplicació de les matemàtiques són l'estudi de les superfícies equipotencials que apareixen en cinètica molecular, la distribució de les velocitats moleculars d'un gas ideal (que necessita conceptes de probabilitat) i els fenòmens de transport o la integració de les equacions cinètiques moleculars, que comporten l'ús de tècniques d'equacions diferencials.

Alguns llibres que són font d'exemples i aplicacions de química-física són [21], [16] i [17].

8.2 Química analítica

La química analítica pot definir-se com la ciència que desenvolupa, i millora, mètodes i instruments per a obtenir informació sobre la composició i naturalesa química de la matèria. Dins de la química analítica s'inclou l'anàlisi química, que és la part pràctica que aplica els mètodes d'anàlisis per a resoldre problemes relatius a la composició i naturalesa química de la matèria. Els àmbits d'aplicació de l'anàlisi química són molt variats; en la indústria destaca el control de qualitat de matèries primeres i productes acabats; en el comerç, els laboratoris certificats d'anàlisis asseguren les especificacions de qualitat de les mercaderies, i en el camp mèdic, les anàlisis clíniques faciliten el diagnòstic de malalties.

Entre les fases d'una anàlisi química destaquen la presa de mostres, les seues transformacions i l'anàlisi de dades, que són, sens dubte, matèries relacionades amb l'estadística.

Ressenyem a continuació alguns exemples il·lustratius:

▷ Dins del laboratori s'ha de desenvolupar un pla general de validació de mètodes i equips d'anàlisi química. Això ens porta inexorablement a tractar el tema estadístic del calibratge. En general, en l'anàlisi d'errors se suposarà una distribució normal d'aquests errors.

- ▷ Quan estudiem la quantitat d'un compost sotmès a diverses temperatures estem obtenint dades per a realitzar una interpolació, un ajust de mínims quadrats o una regressió.

- ▷ A l'hora de realitzar experiments fora del laboratori també necessitarem l'estadística. Per a esbrinar, per exemple, el nivell de ferro existent en l'aigua, partirem d'una sèrie de dades estadístiques que com a tals hauran de ser tractades. Els histogrames d'aquestes dades ens aportaran una hipòtesi sobre la distribució de la concentració de ferro en l'aigua.

- ▷ Per a esbrinar si dos o més tancs d'aigua tenen la mateixa concentració de ferro es prenen mostres i l'anàlisi de la variància ens dirà si acceptem o rebutgem aqueixa hipòtesi.

- ▷ L'avaluació de la precisió i la veracitat de procediments analítics ens condueixen a la quimiometria i al control de qualitat, parts molt importants dins de la química analítica. El disseny experimental, els ajustos lineals i no lineals i el control estadístic de processos (gràfics de control) són temes que apareixen d'una manera natural.

- ▷ Els assajos calorimètrics comporten la preparació d'una sèrie de solucions patró i la comparació de la intensitat del color amb la produïda en la solució de concentració desconeguda. Aquesta concentració és deduïda de la seua absorbància en comparació de les solucions patró, mesurades en un colorímetre o espectrofotòmetre. La relació entre l'absorbància i la concentració és lineal (Llei de Beer). La concentració de la substància que s'està mesurant és la variable x, mentre que l'absorbància és la variable y; el pendent b és la mesura del canvi d'absorbància per unitat de canvi en la concentració, i l'ordenada en l'origen a és la mesura de l'assaig en blanc. L'estimació dels paràmetres a i b amb variància mínima és un càlcul habitual en química. Vegeu, per exemple, la pàgina 151 de [38].

La bibliografia referent a la utilització de l'estadística en aquesta àrea és molt extensa; a manera d'exemple, esmentem [38], [27] i [26].

Altres tècniques fonamentals en la química analítica són les basades en l'us d'espectròmetres. L'espectroscòpia per transformada de Fourier està basada en l'interferòmetre de Michelson [35].

8.3 Química inorgànica i química orgànica

La química inorgànica tradicionalment estava definida com la branca de la química que estudiava el "regne mineral", a diferència de la química orgànica, que estudiava la constitució dels organismes vius ("regne animal" i "regne vegetal"). En l'actualitat, la definició de química inorgànica s'ha simplificat a l'estudi de la química de tots els elements "excepte el carboni", del qual la química és convencionalment classificada com a orgànica. Naturalment, la frontera s'ha tornat difusa: els químics inorgànics estudien alguns compostos amb carboni, i els químics orgànics també estudien compostos que contenen metalls.

Són aquestes les dues àrees on el paper de les matemàtiques podria semblar més reduït, ja que en elles és on s'estudien el sistema periòdic, la formulació d'elements i les seues propietats, els processos de síntesis en laboratori, el paper de l'oxidació, etc. No obstant açò, no és així; per exemple, el químic orgànic necessita l'estudi de les reaccions orgàniques, i és en aquest estudi on apareixen l'optimització i les equacions diferencials. Una reacció química és un procés mitjançant el qual una o més substàncies, anomenades reactius, es transformen en unes altres, anomenades productes, i l'estequiometria és la part de la química que estudia les relacions quantitatives entre les substàncies que intervenen en una reacció química. Les reaccions orgàniques més importants són:

- ▷ Reaccions de substitució. Un àtom o grup d'àtoms d'una molècula és reemplaçat per un àtom o grup d'àtoms d'una altra molècula.

- ▷ Reaccions d'eliminació. A partir d'una molècula gran s'obté una molècula xicoteta. Augmenta el grau de multiplicitat de l'enllaç.

- ▷ Reaccions d'addició. Una molècula gran assimila una molècula xicoteta. Disminueix el grau de multiplicitat de l'enllaç.

Qualsevol de les tres reaccions ve definida per una equació diferencial (o un sistema d'equacions diferencials); la majoria d'aquestes equacions són senzilles de resoldre, analíticament o numèricament.

Finalment, comentar que els conceptes de teoria de grups són de gran importància en l'estudi de l'estructura molecular. Es defineix simetria com la regularitat en la disposició de les parts o punts d'un cos o figura, de manera que posseïsca un centre, un eix o un pla de simetria.

Una operació de simetria és una acció que, en actuar sobre una molècula, produeix una nova molècula, la qual, encara que diferent, no és distingible de l'original. Associada a cada operació, hi ha un element de simetria, que és el punt, línia o pla respecte del qual es realitza l'operació de simetria. Els elements de simetria d'una molècula determinen el grup puntual al qual pertany. Cada element del grup té una representació irreductible en forma de matriu. Una vegada identificat el grup de la molècula, coneixem moltes de les seues propietats, com vibracions, orbitals moleculars, etc.

Els procediments exposats estan a cavall entre les matemàtiques i la química i, sens dubte, fonamenten la teoria de grups. Així doncs, es poden extraure exemples interessants per a la docència del bloc d'àlgebra de *Matemàtiques I* en els llibres [10] i [8].

8.4 Enginyeria química

Segons la definició de H. F. Rase i M. H. Barrow [32], l'enginyeria química comprèn les activitats relacionades amb la producció òptima de coses útils mitjançant processos que impliquen fenòmens fisicoquímics en una o més etapes. La paraula *òptima* que apareix en aquesta definició ens dóna la clau sobre el principal paper que exerceixen les matemàtiques en aquesta àrea: l'optimització de processos químics.

Una estupenda font d'exemples d'aquest tipus la podem trobar en [13] i [15].

A més de l'optimització, també s'utilitzen altres tècniques matemàtiques en enginyeria química [6], com per exemple tècniques d'anàlisi numèrica en la identificació de sistemes. Donat un sistema del qual es coneix el funcionament de manera experimental, la identificació de sistemes procura determinar un model que justifique aquest funcionament. La paraula *model* es refereix normalment, des del punt de vista matemàtic, a un sistema d'equacions diferencials, i la minimització de l'error es realitza amb rutines numèriques. Aquesta última afirmació pot comprovar-se en el llibre [34].

8.5 *Química computacional*

Des dels anys vuitanta hi ha hagut un increment exponencial en l'ús de tècniques computacionals en química. Aquest increment fa que s'haja passat de la "computació" de la geometria i propietats de molècules xicotetes fins a molècules d'una grandària relativament gran.

Es podria definir la química computacional com la part de la química que simula estructures i reaccions químiques numèricament, basant-se en les lleis fonamentals de la física. Els químics tendeixen a estudiar els fenòmens químics calculant sobre un ordinador tant o més que avaluant reaccions i compostos experimentalment. Alguns mètodes no solament permeten explorar molècules inestables, sinó que es poden estudiar estats de transició i intermediaris, de curta vida mitjana, difícils d'aïllar experimentalment.

Hi ha dues àrees destacades en la química computacional orientades a l'estudi de les molècules i la seua reactivitat: la mecànica molecular (MM) i la teoria d'estructura electrònica (EE). Ambdues tenen en comú els següents aspectes, que obliguen a usar tècniques d'equacions diferencials i optimització:

- ▷ Càlculs d'energia d'una estructura particular, és a dir, per a un nombre d'àtoms donats. Aquests càlculs condueixen a problemes de Sturm-Liouville i, per tant, a l'ús de mètodes numèrics per a la seua resolució.

- ▷ Optimització de geometria, basada en l'operació de trobar el mínim d'energia per a una estructura molecular propera a l'estructura de partida. L'optimització de geometria depèn de la primera derivada de l'energia pel que fa a les posicions dels nuclis. La forma en què varia l'energia amb petits canvis en l'estructura molecular ve donada per la superfície d'energia potencial; per tant, la superfície d'energia potencial és la relació matemàtica entre l'estructura molecular i l'energia resultant. Per a una molècula diatòmica, només podem variar la distància internuclear, per la qual cosa l'energia genera una corba. L'optimització de geometria intenta localitzar un mínim d'energia en la superfície d'energia potencial, i així aconseguir l'estructura d'equilibri d'un sistema molecular. Per tant, interessa saber on el gradient d'energia és zero, però açò no solament ocorre per als mínims, també en els punts de sella. Els algorismes d'optimització són de tipus gradient (cerquen la direcció cap a on decreix més ràpidament l'energia), fins a aconseguir un punt estable, i després calculen la segona derivada, per a trobar la matriu de les constants de força (matriu hessiana). Aquestes constants de forces especifiquen la curvatura de la superfície en un punt, amb la qual cosa es pot obtenir informació addicional sobre la molècula.

▷ Càlculs de freqüència vibracionals, resultat del moviment interatòmic en la molècula. Les freqüències depenen de la segona derivada de l'energia pel que fa a les posicions dels nuclis. Hi ha programes informàtics que poden calcular analíticament la segona derivada pel que fa a les posicions nuclears, i per tant predir les freqüències moleculars en el marc de les teories de Hartree-Fock, la teoria del funcional de la densitat i la teoria de pertorbacions de segon ordre. Per a la resta dels mètodes, les derivades s'han de resoldre numèricament. Aquests programes calculen també la segona derivada de l'energia pel que fa al camp elèctric.

Com a bibliografia per a una millor comprensió del tema podem recomanar [22] i [20]. Esment especial mereix el llibre [39], en el qual s'arrepleguen diversos articles d'interès per a introduir-se, a partir de les matemàtiques, en els fonaments de la química.

Per a concloure el capítol destaquem els llibres [30] i [25].

[30]. En 1995, el *Committee on Mathematical Challenges from Computational Chemistry*, el *Board on Mathematical Sciences*, el *Board on Chemical Sciences and technology* i la *Commission on Physical Sciences, Mathematics and Applications* del *National Research Council*, van publicar aquest llibre, l'objectiu del qual era destacar l'evolució de la connexió entre les matemàtiques i la química. El capítol 3 d'aquest llibre conté una taula interessant, que il·lustra aquesta connexió entre diferents àmbits d'ambdues disciplines científiques.

[25] En aquest llibre s'introdueixen, encara que de manera molt esquematitzada, pràcticament tots els continguts de les matèries de matemàtiques i estadística. El llibre presenta també, després de cada lliçó, una llista de problemes, molts d'ells inspirats en continguts de la química i la física.

REFERÈNCIES

[1] M. Acero i M. López. *Ecuaciones diferenciales. Teoría y problemas.* Tébar Flores, 1997.

[2] R. F. W. Bader. *Atoms in Molecules. A Quantum Theory.* Oxford University Press, 1990.

[3] C. Bonet, A. Compta i P. Pascual. *Càlcul Integral per a Enginyers.* Edicions UPC, 2002.

[4] J. Bonet, A. Peris, V. Calvo i F. Ródenas. *Integració múltiple i vectorial.* Monografies UPV, 2006.

[5] J. de Burgos. *Cálculo integral (una y varias variables). 70 problemas útiles.* García Maroto Editores, 2007.

[6] J. de Burgos. *Matemática aplicada a la ingeniería química.* García-Maroto Editores, 2011.

[7] A. Cañada. *Series de Fourier y aplicaciones: Un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos.* Ediciones Pirámide, 2002.

[8] R. L. Carter. *Molecular Symmetry and Group Theory.* Wiley, 1998.

[9] E. Checa, M. J. Felipe, L. M. García, J. Marín, E. Sánchez i J. V. Sánchez. *Álgebra, cálculo y mecánica. Tomos I y II.* Ra-Ma, 1999.

[10] F. A. Cotton. *La teoría de grupos aplicada a la química.* Limusa, 1977.

[11] H. F. Davis i A. D. Snider. *Análisis vectorial.* McGraw-Hill, 1992.

[12] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Alianza Universidad, 1994.

[13] T. F. Edgar i D. M. Himmelblau. *Optimization of Chemical Process.* McGraw-Hill, 1988.

[14] J. Fabregat i R. M. Ros. *Equacions diferencials ordinàries de primer ordre.* Publicacions UPC, 1991.

[15] J. Happel i D. Jordan. *Chemical Process Economics.* Marcer Dekker, 1995.

[16] A. Hernanz. *Métodos teóricos de la Química Física (Vol. 2).* UNED, 1991.

[17] A. Hernanz i L. M. Sese. *Métodos teóricos de la química física (relaciones y tablas matemáticas).* UNED, 1990.

[18] M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov i G. I. Makarenko. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Ed. URSS, 2005.

[19] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics.* John Wiley and Sons, Inc, 1993.

[20] A. R. Leach. *Molecular Modelling: Principles and Applications.* Pearson Education, 2001.

[21] N. Levine. *Físico-Química.* McGraw-Hill, 1989.

[22] K. B. Lipkowitz i D. B. Boyd. *Reviews in Computational Chemistry.* John Wiley and Sons, 1998.

[23] J. E. Marsden i A. J. Tromba. *Cálculo vectorial.* Addison-Wesley, 1998.

[24] R. Martínez. *Models amb equacions diferencials.* Materials UAB, 2004.

[25] D. McQuarrie. *Mathematics for Physical Chemistry.* University Science Books, 2008.

[26] P. Meier i R. Zund. *Statistical Methods in Analytical Chemistry.* John Wiley and Sons, 1993.

[27] J. Miller i J. Miller. *Estadística y quimiometría para química analítica.* Prentice Hall, 2002.

[28] S. Montiel i A. Ros. *Curvas y superficies.* Proyecto Sur. Granada, 1997.

[29] R. K. Nagle, E. B. Staff i A. D. Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Pearson Educación, 2005.

[30] Committee on Mathematical Challenges From Computational Chemistry. *Mathematical Challenges From Theoretical/Computational Chemistry.* The National Academies Press, 1995.

[31] O. Plaat. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Reverté, 1974.

[32] H. F. Rase i M. H. Barrow. *Ingeniería de proyectos para plantas de procesos.* McGraw-Hill, 1976.

[33] R Rice i D Do. *Applied Mathematics and Modelling for Chemical Engineers.* John Wiley and Sons, Inc., 1995.

[34] J. B. Riggs. *An Introduction to Numerical Methods for Chemical Engineers.* Texas Tech University Press, 1988.

[35] V Saptari. *Fourier-Transform Spectroscopy Instrumentation Engineering.* SPIE Press, 2004.

[36] G. F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales.* McGraw Hill, 1977.

[37] G. F. Simmons i S. G. Krantz. *Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica.* McGraw-Hill, 2007.

[38] F. D. Snell i C. Snell. *Colorimetric Methods of Analysis.* Van Nostrand-Reinhold, 1967.

[39] N. Trinajstic-(Ed.). *Mathematical and Computational concepts in Chemistry.* Ellis Horwood, 1985.

[40] I. Una, J. San Martín i V. Tomeo. *Problemas resueltos de cálculo en varias variables.* Thompson, 2007.

[41] J. Vigo-Aguiar. *El papel de las matemáticas en la Licenciatura en Química.* Proyecto docente. Universidad de Valladolid.

[42] Y. Zeldovich i I. Yaglom. *Matemáticas superiores.* Mir, 1987.