SEIEM 2021

Valencia del 8 al 10 de septiembre de 2021

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXIV

Pascual D. Diago

Dionisio F. Yáñez

Mª Teresa González-Astudillo

Dolores Carrillo

Investigación en Educación Matemática XXIV

Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Valencia, 8, 9 y 10 de septiembre de 2021

Investigación en Educación Matemática XXIV

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dr. Pascual D. Diago
Dr. Dionisio F. Yáñez
Dra. Mª Teresa González-Astudillo
Dra. Dolores Carrillo

ISBN: 978-84-09-32184-1
ISSN: 1888-0762

Cítese como:
Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.) (2021). *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La publicación de estas actas ha contado con la ayuda del proyecto UV-SFPIE_PID20-1351257 de la Universitat de València.

ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Strategies used by primary school students when solving geometric pattern problems

Arbona, E.[a], Beltrán-Meneu, M. J.[b] y Gutiérrez, Á.[a]

[a] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

[b] Depto. de Educación y Didácticas Específicas, Universitat Jaume I

Resumen

Presentamos parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo general, analizar la progresión en el pensamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria al resolver una secuencia de problemas de patrones geométricos. Para ello, es necesario analizar las distintas estrategias que emplean los estudiantes al resolver este tipo de problemas. Tras estudiar las estrategias recogidas en la literatura, presentamos una nueva clasificación a modo de marco teórico para nuestra investigación, cuyo objetivo es hacer más detallado y profundo el análisis de las respuestas de los estudiantes. En esta clasificación diferenciamos entre las estrategias empleadas en cuestiones de relación directa e inversa. Describimos cada estrategia e incluimos ejemplos de respuestas producidas por estudiantes de Primaria.

Palabras clave: *problemas de patrones geométricos, pensamiento algebraico, estrategias de resolución, educación primaria, altas capacidades matemáticas*

Abstract

We present part of a research project aimed to analyze the progress of primary school students' algebraic thinking when solving a sequence of geometric pattern problems. To accomplish this, it is necessary to analyze the diversity of strategies used by students when solving these problems. After having analyzed the strategies found in the literature, we present a new classification as a theoretical framework for our research. The aim of this new framework is to allow a more detailed and deeper analysis of students' responses. In this classification we distinguish between strategies used on direct and inverse question. We describe each strategy and show examples of answers by primary school students.

Keywords: *geometric pattern problems, algebraic thinking, solving strategies, primary education, mathematical giftedness*

INTRODUCCIÓN

El álgebra es uno de los contenidos clave en las matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Sin embargo, muchos estudiantes presentan dificultades durante su aprendizaje, como la falta de comprensión de las nociones de variable e incógnita y de las expresiones algebraicas o en el uso de operaciones aritméticas en estas expresiones (Jupri, Drijvers, y Van den Heuvel-Panhuizen, 2015). Para tratar de combatir estas dificultades, el *pensamiento algebraico* plantea empezar el aprendizaje del álgebra trabajando y operando con variables e incógnitas sin hacer uso de expresiones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011), lo cual puede servir de puente para la introducción del álgebra en estudiantes de Educación Primaria.

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. (2021). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133 – 140). Valencia: SEIEM.

Diversos autores han destacado los problemas de patrones geométricos como un contexto idóneo para el desarrollo de la generalización y el pensamiento algebraico. En concreto, los *problemas de patrones geométricos* (Figura 1) muestran los primeros términos de una sucesión creciente de números naturales representados mediante figuras formadas por piezas cuya cantidad coincide con el valor del término. Estos problemas piden calcular: un término *inmediato*, situado en las dos o tres posiciones siguientes a los términos dados; un término *próximo*, cuyo valor se pueda calcular mediante la representación gráfica o la recursividad; un término *lejano*, que, por su posición, sea costoso de calcular mediante las estrategias anteriores y sugiera la conveniencia de desarrollar una estrategia nueva para obtener una generalización; y, por último, expresar verbal y/o algebraicamente el *término general* de la sucesión (Benedicto, Jaime, y Gutiérrez, 2015).

Además de estas cuestiones, denominadas de *relación directa*, se pueden plantear cuestiones de *relación inversa* (Rivera, 2013), en las cuales se da el valor de un término y se pide calcular su posición. Estas cuestiones inician a los estudiantes en el planteamiento y resolución de ecuaciones.

La resolución de problemas de patrones geométricos también resulta especialmente interesante para los estudiantes con altas capacidades matemáticas, ya que su estructura permite a los profesores graduar la complejidad y adaptarlos a las necesidades y capacidades de los distintos estudiantes de los grupos ordinarios de Educación Primaria (Jaime y Gutiérrez, 2014).

En clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?
e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Problema de patrón geométrico

Marcos teóricos previos

Estudios previos han descrito diversas estrategias, algunas con distintas denominaciones, que utilizan los estudiantes al resolver cuestiones de relación directa en problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales, $f(n)=an$, o afines, $f(n)=an+b$ (Stacey, 1989; Lannin, Barker, y Townsend, 2006; Jurdak y El Mouhayar, 2014; García-Reche, Callejo, y Fernández, 2015). Principalmente podemos dividir estas estrategias en: i) *recuento* (*counting method)*, si se cuentan las piezas del término a partir de su dibujo; ii) *recursiva (recursive)*, si se añade de forma reiterada la diferencia constante entre el valor de dos términos consecutivos a uno conocido; iii) *múltiplo de la diferencia (difference method* o *chunking)*, si se añade al valor de un término anterior la diferencia constante entre los valores de dos términos consecutivos multiplicada por la distancia entre la posición del término anterior y el demandado; iv) *funcional (functional, linear method* o *explicit)*, si se establece una relación funcional entre la posición del término y su valor; y v) *proporcional (whole-object method*, *unitising* o *proportional)*, si se hace uso de una relación de proporcionalidad, aunque algunos autores también referencian una variante aditiva.

Centrándose en el contexto de estudiantes con altas capacidades matemáticas, Amit y Neria (2008) identificaron dos tipos de estrategias en su estudio con estudiantes superdotados de 11-13 años (cursos 6 y 7): la *recursiva-operacional-local*, que les permitía extender la secuencia a nivel operacional pero estaba limitada por su carácter local, y la *funcional-conceptual-global*, cuando identificaban las variables y constantes y establecían una relación de dependencia entre ellas.

En cuanto a las estrategias empleadas para resolver cuestiones de relación inversa, Arbona (2016) describió 3 categorías: *ensayo y error con cálculos de relación directa*, si se prueba con distintos términos hasta encontrar el valor señalado; *inversión de las operaciones*, si se resuelve invirtiendo el orden de los cálculos realizados al resolver cuestiones de relación directa; y *resolución de ecuaciones*, si se plantea una ecuación.

Al empezar a analizar las respuestas de estudiantes recogidas en nuestras experimentaciones aplicando las estrategias mencionadas, nos dimos cuenta de que estas no diferencian determinados tipos de respuestas que, aunque tienen un estilo común de estrategia, muestran características específicas diferentes que es conveniente conservar. Por ello, hemos procedido a integrar el conjunto de estrategias descritas en la literatura en un nuevo marco teórico que contempla nuevas categorías y subcategorías emergidas del análisis de nuestros datos.

Objetivos

El trabajo presentado en esta comunicación forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es analizar la progresión de estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria en una secuencia de problemas de patrones geométricos e identificar características diferenciadoras de los estudiantes con altas capacidades matemáticas en este contexto.

El objetivo específico de esta comunicación se centra en presentar un nuevo marco teórico que recoja los distintos tipos de estrategias empleadas por los estudiantes al resolver problemas de patrones geométricos, para el cálculo de los valores de los términos de la sucesión (cuestiones directas) y de sus posiciones (cuestiones inversas).

METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo general de investigación planteado, empleamos una metodología cualitativa de *investigación de diseño* (Cobb, Jackson, y Dunlap, 2015), realizando diversas experimentaciones, en las que la primera autora era la profesora, con una muestra heterogénea de conveniencia de estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria que no habían trabajado previamente con problemas de patrones geométricos y no tenían conocimientos de álgebra: dos estudios longitudinales con una duración de 3 sesiones por curso, uno de 3 años con 39 estudiantes y otro de 2 años con 30 estudiantes de un centro público; un estudio no longitudinal de una duración de 4 sesiones con 112 estudiantes de otro centro público; y una sesión con un grupo de 16 estudiantes superdotados (11-12 años) que asistían a un taller extraescolar de matemáticas.

Las experimentaciones se centraron en la resolución de problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales y afines. Estos problemas estaban ordenados con un aumento gradual de dificultad y con distintas versiones de cuestiones enfocadas a la asimilación de diversos objetivos de aprendizaje. Tras la resolución de los problemas por los estudiantes, se realizaba una puesta en común de las estrategias empleadas, para ampliar su conocimiento y descartar las erróneas, y se introducían conceptos nuevos relacionados con los objetivos de aprendizaje.

Finalizada la experimentación, iniciamos el análisis de las respuestas de los estudiantes tomando como referencia las categorías encontradas en la literatura, pero diversas estrategias empleadas por los estudiantes no se recogían o no quedaban bien definidas en ellas, por lo que surgió la necesidad de elaborar una clasificación más fina. Para ello, realizamos varias veces un proceso cíclico en el que los tres autores analizábamos, de forma independiente, las respuestas de algunos estudiantes y, después, hacíamos una puesta en común con el fin de discutir las diferencias y refinar las definiciones de las categorías problemáticas. Este nuevo marco teórico aporta una clasificación de las estrategias usadas en las cuestiones directas e inversas de los problemas de patrones geométricos nueva y más completa y detallada que las anteriores, lo cual supone un avance en la evaluación de los conocimientos y estrategias empleadas por los estudiantes.

MARCO TEÓRICO PROPUESTO

A continuación, describimos los diferentes tipos de estrategias que consideramos que los estudiantes de Educación Primaria pueden emplear al resolver problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales y afines. Presentamos también ejemplos de resoluciones del problema de la Figura 1, extraídas de las experimentaciones descritas. Para su clasificación, diferenciamos entre las estrategias utilizadas al resolver cuestiones de relación directa e inversa. En las estrategias que han sido descritas en la literatura que hemos consultado, incluimos su denominación en inglés para facilitar la relación de este texto con dicha literatura. Las estrategias sin denominación en inglés son las que hemos introducido para completar los tipos existentes.

Estrategias en cuestiones de relación directa

Las estrategias empleadas en cuestiones de relación directa son las siguientes:

- *Recuento* (Counting method): Consiste en dibujar la representación gráfica del término requerido y contar sus piezas como unidades independientes.

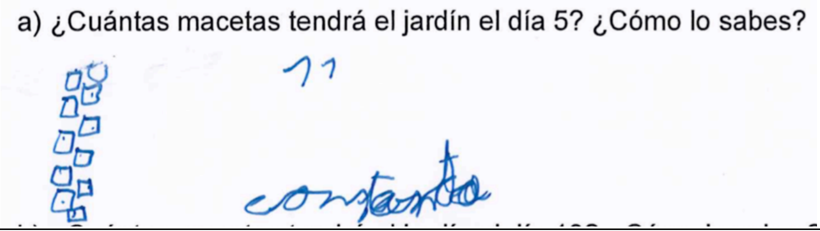


Figura 2. Ejemplo de estrategia de recuento

En la figura 2, el estudiante dibujó la figura correspondiente al término 5, siguiendo el patrón de los primeros términos, y contó la cantidad total de macetas.

- *Recursiva* (Recursive): Se caracteriza por calcular el valor de un término sumando de forma reiterada a un término ya conocido la diferencia numérica constante entre los valores de dos términos consecutivos.

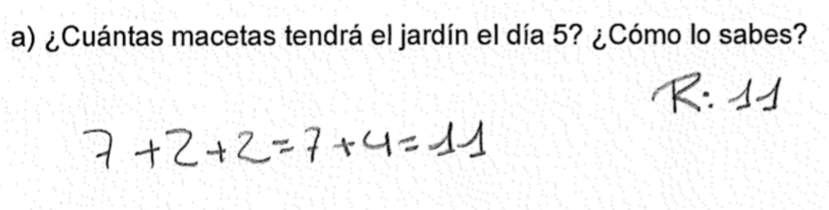
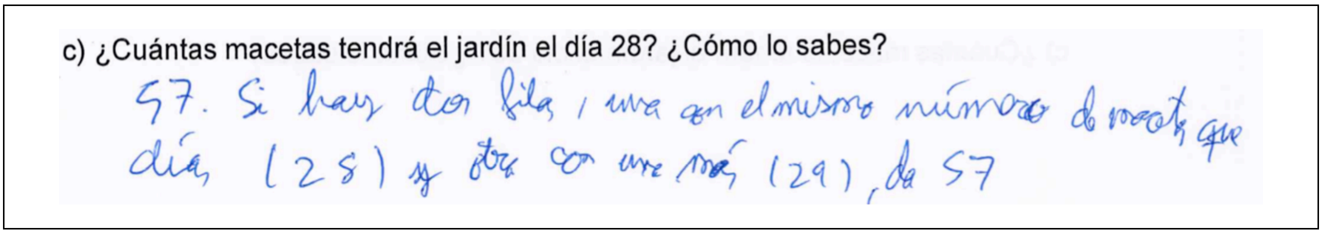


Figura 3. Ejemplo de estrategia recursiva

En la figura 3, el estudiante contó la cantidad de macetas en el término 3 (7 macetas) y sumó 2 (diferencia entre los valores de dos términos consecutivos) las veces necesarias hasta llegar al término 5.

- *Funcional* (Functional): Los estudiantes calculan el valor de un término prestando atención a la correspondencia entre su posición y la cantidad de piezas que lo forman. Podemos encontrar dos tipos de estrategia funcional:

- *Descomposición*: Se basa en dividir la representación gráfica de un término en partes, con el fin de encontrar una relación entre la posición del término y la cantidad de piezas que tiene cada parte.


c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

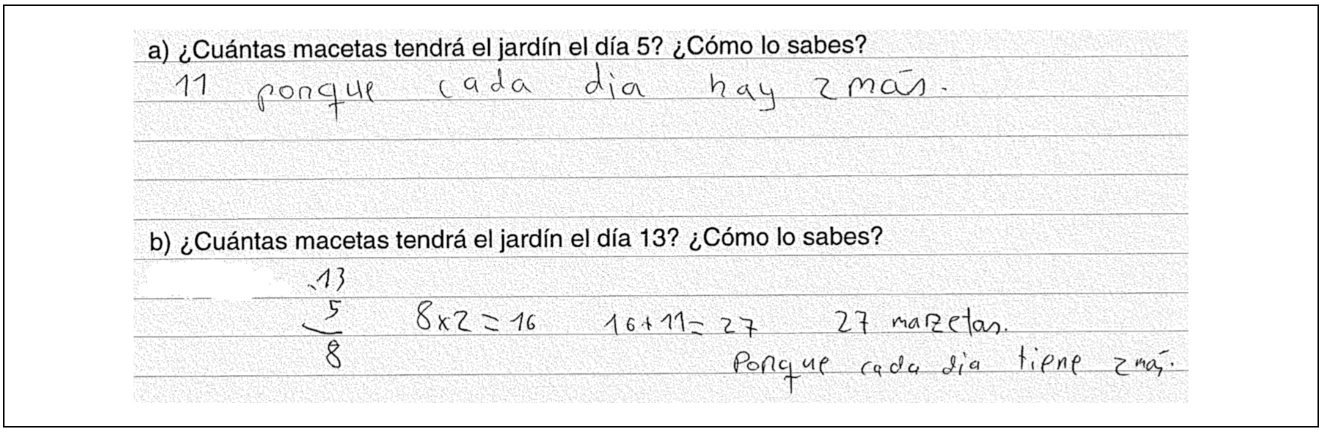
57. Si hay dos fila, una con el mismo número de macet. que día, (28) y otra con una más (29), da 57

Figura 4. Ejemplo de estrategia de descomposición

En la figura 4, el estudiante dividió la representación gráfica de los términos en las dos columnas (él las llama filas) y relacionó cada columna con la posición del término. De este modo, la cantidad de macetas equivalía a la posición del término (28) en la columna de la izquierda y a la posición más uno (29) en la columna de la derecha.

- *Múltiplo de la Diferencia* (Chunking): Se caracteriza por sumar al valor de un término la diferencia constante entre los valores de dos términos consecutivos multiplicada por la distancia entre la posición del término requerido y la de ese término. Esta estrategia puede aplicarse de dos modos distintos:
  - *Auxiliar*: Si el término utilizado es un término no proporcionado en el enunciado del problema ni calculado en cuestiones anteriores.

    En la figura 8, el estudiante calculó primero el término 10 (22) y a continuación le sumó 2 (diferencia entre dos términos consecutivos) multiplicado por 3 (distancia entre las posiciones 10 y 13).
  - *Anterior*: Si el término utilizado es un término proporcionado en el enunciado del problema o calculado en cuestiones anteriores.


a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?

11 porque cada día hay 2 más.

b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?

13
5
8

8x2=16 16+11=27 27 macetas.

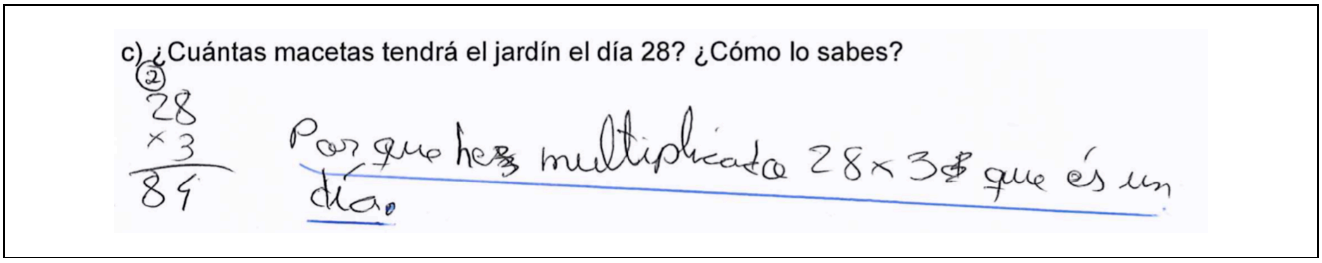
Porque cada día tiene 2 más.

Figura 5. Ejemplo de estrategia anterior

En el apartado *b)* de la figura 5, el estudiante multiplicó la diferencia entre las posiciones de los apartados *a)* y *b)* (13-5=8) por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) para, posteriormente, sumar el resultado de la multiplicación (16) al valor de la posición del apartado *a)* (11).

- *Construcción* (Whole-object): Los estudiantes utilizan los valores de uno o varios términos previos conocidos para obtener, mediante operaciones aritméticas, el valor del término requerido. Dentro de esta categoría podemos encontrar tres estrategias:

- *Proporcional* (Proportional): Consiste en usar una relación de proporcionalidad, que en los patrones basados en relaciones funcionales afines es errónea, entre las posiciones de dos términos y sus valores para calcular el valor de uno de los términos.


c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

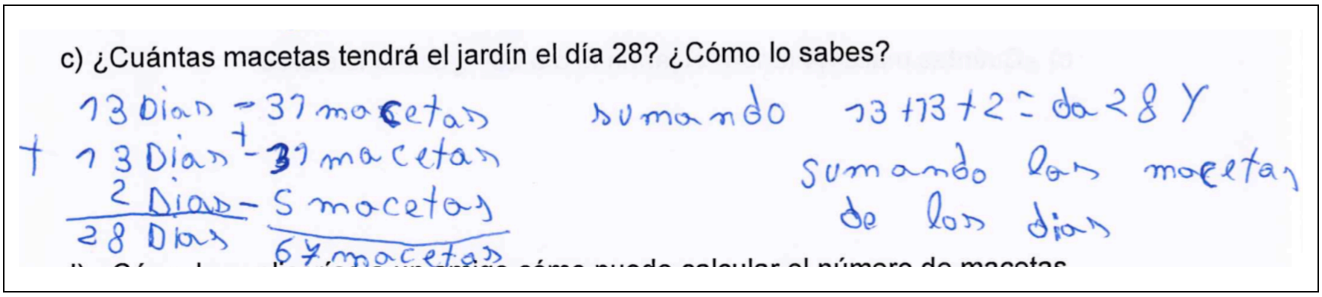
② 28 × 3 = 84

Porque hes multiplicado 28×3 que és un día.

Figura 6. Ejemplo de estrategia proporcional

En la figura 6, el estudiante usó el valor (3) del término 1 para obtener el valor demandado mediante una relación errónea de proporcionalidad.

- *Aditiva*: Consiste en establecer una relación aditiva entre las posiciones de términos conocidos y del término requerido y obtener el valor de este aplicando la misma relación a los valores de los términos conocidos.


c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

13 Dias - 37 macetas
+ 13 Dias - 37 macetas
2 Dias - 5 macetas
28 Dias 67 macetas

sumando 13+13+2 = da 28 Y sumando las macetas de los dias

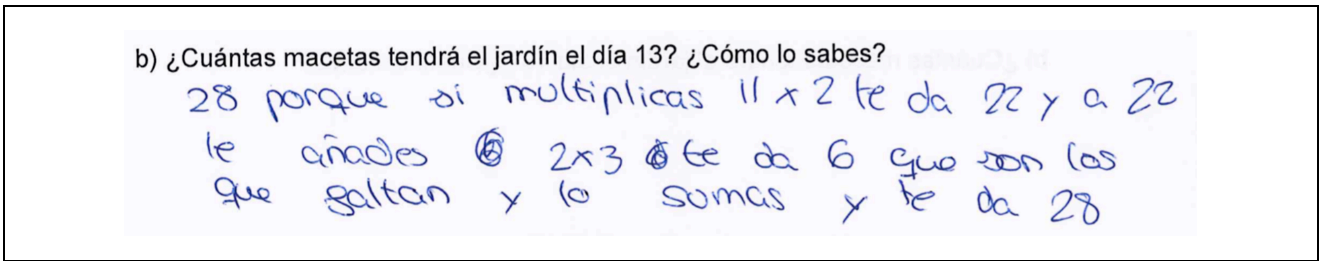
Figura 7. Ejemplo de estrategia aditiva

En la figura 7, el estudiante obtuvo la posición del término requerido a partir de la suma de las posiciones de otros términos y utilizó los valores de estos términos para calcular el resultado.

- *Combinada*: Se basa en calcular el valor de un término a partir de una combinación de relaciones proporcionales y aditivas entre otros términos con valores conocidos.

  No hay ejemplos de esta estrategia en las respuestas que hemos analizado hasta ahora.

- *Otras*: Estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores o que son combinaciones de estas.


b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?

28 porque si multiplicas 11×2 te da 22 y a 22 le añades 6 2×3 te da 6 que son los que faltan y lo somas y te da 28

Figura 8. Ejemplo de estrategia otras

En la figura 8, el estudiante empleó dos de las estrategias descritas previamente. Primero, utilizó la estrategia proporcional, al usar el valor del término 5 (11) para obtener el valor del término 10 (*f(10)=f(5)x2*) y, después, utilizó la estrategia múltiplo de la diferencia (auxiliar), al calcular la diferencia entre las posiciones del término 10, que no había sido proporcionado anteriormente, y del 13 y multiplicarla por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2x3).

Estrategias en cuestiones de relación inversa

Las estrategias utilizadas en cuestiones de relación inversa podemos clasificarlas en:

- *Inversión*: Consiste en invertir los cálculos aritméticos hechos en las cuestiones de relación directa.

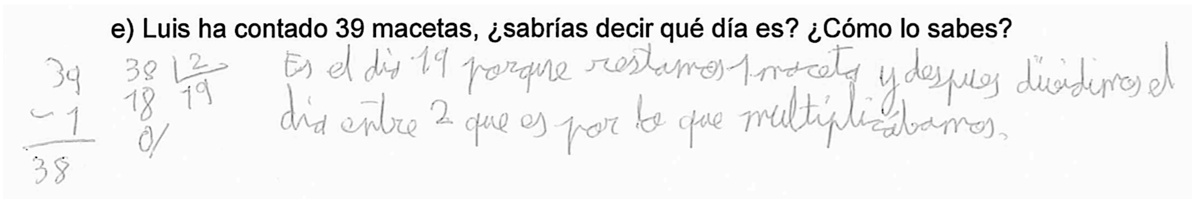


Figura 9. Ejemplo de estrategia de inversión

En la figura 9, el estudiante realizó las operaciones inversas y en el orden contrario (restar 1 y dividir entre 2) a las que había realizado en las cuestiones directas (multiplicar por 2 y sumar 1).

- *Ecuación*: Se caracteriza por formular una ecuación y resolverla.

  No hay ejemplos de esta estrategia en la respuestas que hemos analizado hasta ahora.

- *Operaciones directas*: Se basa en usar una estrategia que podría aplicarse para obtener la solución de las cuestiones de relación directa.

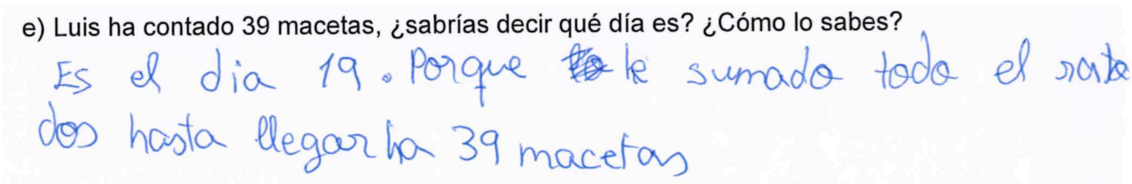


Figura 10. Ejemplo de estrategia de operaciones directas

En la figura 10, el estudiante utilizó la estrategia recursiva para calcular la posición a partir de un término previo conocido, sumando a ese término la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) las veces necesarias hasta obtener 39 macetas.

- *Otras*: Estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es presentar un nuevo marco teórico para analizar las respuestas de los estudiantes a problemas de patrones geométricos. Empezamos analizando las respuestas de los estudiantes de nuestra muestra mediante las estrategias de resolución encontradas en la literatura, pero observamos dificultades para clasificar algunas respuestas y también que algunas categorías recogían respuestas de características bastante diferentes que era necesario distinguir.

Un proceso recursivo de identificación y análisis de respuestas problemáticas dio lugar a la identificación y definición de nuevas categorías emergentes. Para las cuestiones de relación directa, hemos desarrollado tipos específicos de estrategias *funcionales*, entre los que podemos destacar *descomposición* y los subtipos de *múltiplo de la diferencia*, que permiten distinguir diferentes formas de obtener la relación funcional que caracteriza el término general de las sucesiones, y de la estrategia *construcción*, que permiten diferenciar varias maneras de relacionar términos con valores conocidos para calcular el valor de un nuevo término.

Para las cuestiones de relación inversa, hemos descrito diferentes formas de realizar los cálculos de la posición de los términos proporcionados, que van desde procedimientos rudimentarios próximos al tanteo a procedimientos aritméticos depurados y procedimientos algebraicos.

El uso de este marco teórico, más preciso y desarrollado que los anteriores, nos está permitiendo realizar un análisis más detallado y minucioso de las respuestas de nuestros estudiantes, que dará lugar a unos resultados más ricos y clarificadores, como la ausencia de estrategias proporcionales en los estudiantes con altas capacidades matemáticas.

Esta investigación forma parte del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y la ayuda predoctoral FPU16/04513.

Referencias

Amit, M., y Neria, D. (2008). «Rising to the challenge»: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas* (Trabajo Fin de Máster). Valencia: Universitat de València. http://hdl.handle.net/10550/56731

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cobb, P., Jackson, K., y Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

García-Reche, A., Callejo, M. L., y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Jupri, A., Drijvers, P., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 atudents' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *1*(1), 28-58. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0004-2

Jurdak, M. E., y El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9494-2

Lannin, J., Barker, D., y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460