MEJORA DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA: SEMEJANZA GEOMÉTRICA EN 2.º ESO.

UNIVERSITAT JAUME·I

Máster Universitario de Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad en Matemáticas.

AUTOR: ALFONSO TUDELA FERNÁNDEZ.

TUTORA: MARÍA SANTAGUEDA VILLANUEVA.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer el apoyo incondicional de la gente que me rodea. Este trabajo se lo dedico a la gente que ha hecho especial mi estancia en Castellón. Ellos son Rubén, Javi, Luizina, Adrià, Héctor, Carlos, Angi y Joel.

Por otra parte, el diseño y la implementación de la UD no hubieran sido posibles sin Pilar Cucala, del IES Penyagolosa, y María Santagueda, de la UJI. Infinitas gracias a las dos.

RESUMEN

El documento que se presenta a continuación consiste en mi Trabajo Final del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas, especialidad en Matemáticas, y trata sobre la mejora de una Unidad Didáctica (UD) establecida.

En concreto, consiste en la mejora de la UD de Semejanza Geométrica para 2.º de la ESO. Gracias a las prácticas realizadas por el autor del mismo, se ha podido implementar dicha UD con las mejoras que se proponen en dos grupos distintos.

Como novedad y ampliación al currículum académico, se presenta la geometría fractal en una de las tres actividades diseñadas para la UD. Los fractales, por lo general, figuras geométricas recurrentes que poseen la propiedad de auto-semejanza. En la mayoría de las aulas de ESO y Bachillerato no se explica este concepto novedoso, que amplía la geometría euclídea tradicional.

Las otras dos actividades que se proponen, integradas en las ocho sesiones de la UD, tienen como objetivo reforzar y ampliar los conocimientos de la UD de una manera entretenida e inclusiva. Estas actividades se realizarán en grupos heterogéneos para que unos se ayuden unos a otros, mediante aprendizaje cooperativo. La primera actividad trabaja los conceptos de escala de un mapa, mientras que la segunda trata la aplicación del teorema de Tales para conseguir alturas de objetos a partir de su sombra. Además, se hará servir una aplicación de teléfono móvil para conseguir dichas distancias, y de este modo poder calcular el error absoluto de la medida.

Además, se ha programado otras sesiones en la que se dará un aprendizaje más tradicional, donde el docente explicará los conceptos y procedimientos en la pizarra, apoyándose cuando sea conveniente en el libro de texto. En total, la UD está formada por ocho sesiones, contando una para el examen parcial. Cada actividad ocupará una sesión, habrá tres sesiones de teoría en el aula y una última de repaso de todo el tema antes del examen.

Para el diseño de la UD, se ha seguido las tres primeras fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele, muy útil para la didáctica de conceptos y procedimientos geométricos.

ÍNDICE

0. LISTA DE TABLAS E IMÁGENES

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se va a trabajar una Unidad Didáctica (UD). En concreto, se va a proponer una serie de mejoras de la UD de Semejanza Geométrica para el curso de 2.º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

En la primera parte del trabajo se realizará una introducción teórica donde se contextualizará el trabajo. Se hablará del Modelo de Van Hiele, de la teoría del trabajo cooperativo, así como se brindarán unas pinceladas del estado del alumnado de matemáticas en nuestro país y los errores más comunes que se suelen cometer en el primer ciclo de ESO. También se explicará la teoría que se ha introducido en la UD, tanto los conceptos presentes en el libro de texto de apoyo como los conceptos novedosos que se introducen.

A continuación, se presentará la mejora de UD diseñada y las ocho sesiones programadas para la misma. La idea de dicha UD es que se trabaje los conceptos de semejanza de una manera entretenida y diferente, intentando transmitir interés al alumnado. Para ello, se han diseñado tres actividades en las que el docente agrupará al alumnado de manera que entre ellos se dé un aprendizaje cooperativo. Además, estas actividades serán variadas, para que se dé un trabajo de campo y se utilicen las nuevas tecnologías, todo ello cumpliendo con las competencias marcadas por la ley vigente. También habrá tres sesiones en las que se utilizará la pizarra y el libro de texto.

Debido a que nos situamos en el plano de la semejanza geométrica, se ha considerado de gran importancia introducir el concepto de geometría fractal. Para ello, se propone una actividad en la cual se explicará en qué consisten los fractales, así como se realizarán varios ejercicios en los cuales el alumnado deberá dibujar y construir sus propios fractales auto-semejantes. Además, se aprovechará la actividad para explicar la diferencia entre la geometría euclídea y la no euclídea.

Por último, se presentará los resultados que ha obtenido el autor, tras la implementación de la UD en el instituto IES Penyagolosa, para dos grupos distintos de 2.º ESO. De dichos resultados se extraerán una serie de conclusiones. Para finalizar, se presentará la opinión personal del autor del presente trabajo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Método Van Hiele

El Modelo Van Hiele (Pastor & Rodríguez, 1990) es una teoría didáctica y educativa sobre la enseñanza de las matemáticas. En concreto, este modelo se centra en el estudio de geometría y pretende orientar al cuerpo docente hacia un mejor enfoque y entendimiento de los conceptos geométricos.

Este modelo fue desarrollado hace cuarenta años aproximadamente por los profesores holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016) a raíz de observar una serie de problemáticas a la hora de impartir clases de matemáticas.

Entre estos problemas se observaba que gran cantidad de alumnos entendían los conceptos, pero sólo eran capaces de aplicarlos en ejercicios muy similares a los vistos en clase. Otras veces había conceptos que gran porcentaje del alumnado no llegaba a comprender.

Este modelo consta de dos partes (Gutiérrez, 2017):

- La primera parte es más descriptiva, en la cual se definen los cuatro niveles de razonamiento o pensamiento matemático que puede alcanzar un alumno.
- La segunda parte es más práctica, ya que se tratan cinco fases directrices para que los docentes puedan trabajar la geometría de una manera adecuada con su alumnado.

Las ideas centrales de esta teoría (Pastor & Rodríguez, 1990) se podrían resumir en estos tres puntos clave:

- En un mismo grupo con alumnado de la misma edad, existirán personas con distintos niveles de razonamiento.
- No se puede enseñar a razonar a una persona de una manera en concreto, pero sí que se le puede dar herramientas y guiarle para que alcance ese nivel de razonamiento.
- Si existe un concepto matemático o geométrico que por su complejidad no puede ser enseñado al nivel de razonamiento de un grupo de alumnos en concreto, el docente deberá esperar a cursos posteriores, donde el alumnado posiblemente ya haya alcanzado dicho nivel de razonamiento.

A continuación se va a presentar las dos partes que componen en Modelo de Van hiele:

A) NIVELES DE RAZONAMIENTO

En una misma aula puede existir alumnado en distintos niveles de pensamiento matemático. Es más, es posible que una persona en concreto, al trabajar distintas áreas de la geometría, se ubique en diferentes niveles de razonamiento. A continuación, se presenta los cuatro niveles de razonamiento (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016; Pastor & Rodríguez, 1990) que distingue el Modelo Van Hiele:

1. Nivel de Reconocimiento.
   - A la hora de describir cuerpos geométricos es frecuente recurrir a objetos físicos de la vida cotidiana.
   - Se da una percepción individualizada a las figuras. Es decir, las características vistas en una figura geométrica no se generalizan a otras de su misma familia.
   - No se reconocen las distintas propiedades y partes de las que puede formar parte una figura en concreto.

2. Nivel de Análisis.
   - Aparece la capacidad de agrupar las figuras geométricas en familias, atendiendo a las distintas clasificaciones y propiedades geométricas.
   - Gracias a la manipulación y observación, el alumnado que se encuentra en este nivel es capaz de llegar a deducir ciertas propiedades geométricas.
   - Ya se da un reconocimiento de las propiedades y partes que forman una figura.

3. Nivel de Clasificación.
   - El alumnado ya ha adquirido la habilidad o capacidad de definir ciertos objetos geométricos de una manera acertada.
   - Además, los alumnos ya son capaces de relacionar y clasificar las figuras en grandes grupos o familiar geométricas.
   - Se observa una deducción de las propiedades geométricas tanto por la vía manipulativa como por la vía del pensamiento abstracto.

4. Nivel de Deducción Formal.
   - La persona que alcanza este nivel adquiere la capacidad de razonar formalmente las matemáticas y la geometría.
   - Se acepta y se entienda que puede existir distintas demostraciones para el mismo teorema.
   - De la misma manera, se entiende que también puedan existir definiciones equivalentes para un mismo concepto geométrico.

Por otra parte, la transición de un nivel a otro se realiza de una manera continua. Además, no es posible saltarse niveles o que se produzca una transición de niveles de una manera no ordenada. Es decir, para llegar al cuarto nivel es imprescindible haber pasado por los tres anteriores (Rodríguez, 2010; Salvador, 1994).

B) FASES DE APRENDIZAJE

Según el Modelo de Van Hiele, existen cinco fases distintas (Benedicto, Gutiérrez & Jaime, 2015; Gualdrón & Gutiérrez, 2007; Pastor & Rodríguez, 1990) en las que se da un aprendizaje de la geometría:

a) La primera fase es conocida como la de información. Se trata de una primera toma de contacto para el alumnado. El docente debe realizar una evaluación inicial para conocer el nivel de conocimientos de cada estudiante.

b) La segunda fase es la orientación dirigida. Consiste en que el docente proponga una serie de actividades con la intención de que los propios alumnos encuentren la solución por ellos mismos.

c) La explicitación es la tercera fase. En ella los estudiantes deben explicar cómo han realizado los desarrollos requeridos para la realización de las actividades orientas.

d) La orientación libre consiste en la fase en la cual el docente propone a su alumnado actividades abiertas que ofrezcan distintas posibilidades de resolución. La intención es que se afiancen los conocimientos y procedimientos.

e) En la última fase, la integración, el docente (Gutiérrez, 2017) pretende que se dé un afianzamiento de todos los conceptos, así como que se alcanza una visión y entendimiento globales del tema a tratar.

2.2. Trabajo cooperativo

Las matemáticas es posiblemente una de las asignaturas que presenta una mayor resistencia a los cambios en materia didáctica en los últimos años.

En muchas ocasiones (Terán & Pachano, 2009) esta asignatura la tratan los docentes sin apenas tener en cuenta los conocimientos previos del alumnado, impartiéndose de una manera mecánica y descontextualizada. Por todo ello, como es bien sabido, las matemáticas tienen una escasa popularidad entre el alumnado juvenil.

Además, ocurre que algunos docentes de matemáticas (Coll, 1996) conciben la enseñanza de esta asignatura como una actividad estereotipada y rutinaria.

Por todas estas razones, muchos investigadores y especialista en didáctica matemática han investigado sobre unas maneras de trabajar. Uno de los métodos consumados con mayor éxito ha sido el trabajo cooperativo en las cuatro ramas de las matemáticas, tanto con aritmética, como geometría, álgebra y estadística.

Generalmente, si al alumnado le das la propia responsabilidad de la construcción de su propio conocimiento (Terán & Pachano, 2009), éstos suelen responder con una actitud favorable para aprender.

Además, según Díaz y Hernández (2002), entre los diversos motivos para implementar el trabajo cooperativo en las clases de matemáticas, destaca:

- Se da mayor cantidad de aprendizaje significativo entre el alumnado.
- Se me mejora las relaciones entre compañeros, además de ganar en habilidades sociales.
- Por lo tanto, aparecen más ganas en acudir al instituto o colegio.
- Se inculcan valores positivos como el compañerismo y la solidaridad.
- Se puede llegar a dar un aumento de autoestima entre el alumnado que lo practica.

2.3. Estado del alumnado de matemáticas en España

El nivel del alumnado español en materia matemática y científica en general no es muy buena, y está algo por debajo de la media de la OCDE (wikipedia, 2019), según el informe internacional PISA 2015.

El informe PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) es uno de los estudios con mayor fiabilidad en el mundo académico y, se realiza cada tres años. El último se realizó en 2018, pero los resultados aún no se han publicado (educacionyfp.gob.es, 2018). En este informe, se evalúan tres competencias o áreas de la educación básica: científica, matemática y lectora.

Según Cárdenas-Sánchez y Huertas-Delgado (2013) ''La competencia matemática implica la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir los fenómenos'' (p. 10).

En el informe de 2015, España obtuvo 486 puntos en competencia matemática (elpais.com, 2016), ocho puntos menos que en el informe anterior (2012). En comparación con la media de los resultados de los países miembros de la OCDE, España obtuvo seis puntos menos en 2015 (492 frente a 486). Se recuerda que la OCDE es una organización constituida por gran cantidad de países ''desarrollados'', por lo que se puede tomar como un buen referente para comparar los resultados.

En cuanto a comunidades autónomas, Navarra, Castilla y León y La Rioja lideran el ranking superior en 2015 con más de quinientos puntos (elpais.com, 2016). La Comunidad Valenciana se sitúa un punto por debajo de la media española con 485 puntos.

De estos resultados se puede deducir que el nivel matemático español no es bueno, pero tampoco llega a ser bajo del todo. Es decir, queda mucho trabajo por delante para el conjunto de los docentes españoles de matemáticas.

2.4. Errores más comunes entre el alumnado

Es importante que el docente siempre tenga en mente los errores más comunes entre el alumnado, para poder identificarlos y resolverlos de una manera eficiente y rápida.

A continuación se presenta una serie de errores matemáticos generales que el alumnado del primer ciclo de ESO suele cometer (Pérez Prados, 2013). Posteriormente, se comentará otros errores más concretos del temario en el que se sitúa nuestra UD (Marín & Arnal, 2015; Tudela, 2019). Esta enumeración de errores generales y concretos se realiza tras obtener unas conclusiones de la implementación de la UD en el instituto, así como tras una búsqueda bibliográfica.

<u>ERRORES GENERALES:</u>

- No saber despejar en ecuaciones algebraicas de primer y segundo orden.
- Errores con el cambio de unidades, tanto en unidades unidimensionales, como bi y tridimensionales. Sobre todo, existe mayor cantidad de fallos con las unidades de volúmenes, como por ejemplo para pasar de m^3 a cm^3.

Pero también hay alumnos que fallan en cálculos más sencillos como el paso de cm a m o viceversa.

- En los ejercicios y problemas, no saber identificar qué es lo que pide el enunciado.
- No saber descontextualizar en los enunciados de los problemas. Muchas veces el alumnado se fija en datos que no son importante y no consigue obtener la información relevante.
- Errores a la hora de trabajar con fracciones, como por ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; es muy común que el alumnado despeje como a · c = b · d.
- Realizar incorrectamente cálculos aritméticos de baja dificultad, debido a un bajo cálculo mental.
- Errores al meter datos en la calculadora, o al realizar cálculos aritméticos utilizando la calculadora.
- No saber interpretar la coma y el punto de los resultados que muestra la calculadora. A veces el alumnado al ver un resultado, cree que 1,234.56 por ejemplo se trata de uno coma doscientos treinta y cuatro.
- Con las figuras geométricas simples, ocurre que si su representación en el libro o en la pizarra se dibuja, por ejemplo, con un lado horizontal, muchos alumnos relacionarán este elemento con que siempre tenga un lado horizontal. Entonces, puede ocurrir que un cuadrado se confunda con un rombo, por ejemplo.

<u>ERRORES CONCRETOS EN SEMEJANZA</u>

1. Utilizar el término ''similar'' o ''parecido'' para describir dos figuras geométricas que son semejantes.
2. A pesar de no ser muy común, algún alumno confunde los procedimientos de ampliar y reducir una figura a otra semejante.
3. Tomar criterios de semejanza incorrectos, a partir de condiciones incorrectas.
4. Un error bastante común es el uso de la k (razón de semejanza) para relacionar áreas y volúmenes de figuras semejantes, en lugar de utilizar k^2 y k^3.
5. Errores en los ejercicios de escala de un mapa debido a no entender el concepto de 1:n.
6. Parte del alumnado suele cometer errores a la hora de realizar ejercicios de aplicación del Teorema de Tales. Por ejemplo:

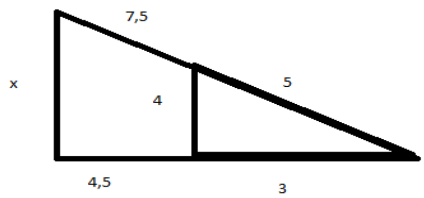


Imagen 1. Triángulo ejemplo 1 (elaboración propia).

Dado el triángulo, a la hora de aplicar el Teorema de Tales, se suele cometer el error $\frac{5}{4} = \frac{7,5}{x}$, cuando lo correcto es $\frac{5}{4} = \frac{7,5+5}{x}$.

3. METODOLOGÍA

3.1. Niveles de Van Hiele en los que se sitúa el alumnado

En el trabajo de investigación realizado por Gualdrón y Gutiérrez (2007) en estudiantes de alumnos de 14 y 15 años de una escuela de Colombia, se constató, a partir de una serie de actividades enfocadas a la UD de la semejanza geométrica, que ningún alumno alcanzaba el tercer nivel de razonamiento de Van Hiele.

Es decir, todo el alumnado se situaba entre el primer y el segundo nivel. Es importante mencionar que un mismo estudiante se puede encontrar en distintos niveles atendido al concepto sobre el que se esté trabajando.

<u>Por ello, se puede suponer inicialmente que el alumnado al que se va a implementar la presente UD se sitúa en estos dos niveles. Una vez se analicen los resultados de la UD, se concluirá si la suposición era acertada o no.</u>

3.2. Objetivos de usar el trabajo cooperativo

Los objetivos principales de realizar un trabajo cooperativo en la presente UD son los siguientes:

- Que se fomente el compañerismo y el buen ambiente dentro del grupo.
- Que se de cierta atención a la diversidad.
- Que el alumnado con mayores ritmos de aprendizaje ayude a los compañeros con mayores dificultades, es decir, que se ayuden entre ellos.

Como se ha comentado anteriormente, en el Modelo de Van Hiele, un mismo estudiante se puede ubicar en distintos niveles de razonamiento según el área de la geometría que se esté tratando. Es decir, existirá personas que tengan mayor facilidad para ciertos conceptos, y otros que lo tengan para otros conceptos.

Por ello, se considera que puede ser una buena idea agrupar al alumnado de una manera equilibrada en grupos de tres personas, de manera que se ayuden entre ellos.

3.3. Conceptos que se van a explicar en la UD

3.3.1. Conceptos presentes en el libro de texto

En la Unidad Didáctica presente se introduce al alumnado de 2.º ESO a ciertos conceptos geométricos de gran importancia. En el Anexo IX se ha adjuntado las páginas del libro de texto (Colera, Gaztelu & Colera, 2016) que se utiliza en el instituto donde se va a implementar la UD.

Entre los conceptos que se abarca en la UD cabe destacar:

- <u>La Semejanza de triángulos</u>

Se dice que dos figuras diferentes son semejantes cuando sólo difieren en su tamaño. Es decir, los lados iguales de cada una de las figuras son proporcionales entre sí, y al cociente entre estas longitudes se denomina razón de semejanza.

Una condición suficiente para asegurar que dos triángulos son semejantes, es que sus tres ángulos son iguales.

- La razón de semejanza.

Es la relación entre dos figuras geométricas semejantes. En concreto, es la relación (cociente) entre sus lados homólogos. Evidentemente, la razón de semejanza es constante entre dos figuras semejantes (Colera, Gaztelu & Colera, 2016).

Entendido de otro modo, la razón de semejanza es una constante de proporcionalidad entre los lados homólogos. La relación de las áreas de dos figuras semejantes es k^2, mientras que la relación entre sus volúmenes es k^3.

Además, es importante mencionar que existen razones semejantes de ampliación y de reducción, siendo la segunda la inversa de la primera. Es decir, dependiendo el orden del cociente de las longitudes de dos figuras semejantes, se obtendrá una u otra razón de semejanza:

$K_{ampliación} = \frac{lado\ figura\ grande}{lado\ figura\ pequeña}$; entonces $K_{ampliación} > 1$.

$K_{reducción} = \frac{lado\ figura\ pequeña}{lado\ figura\ grande}$; entonces $K_{reducción} < 1$.

- La escala de planos y mapas.

Los planos y mapas son semejantes a la realidad que presentan (Colera, Gaztelu & Colera, 2016). En estos, además de la distribución de los lugares, importan las medidas y las distancias. Por eso, llevan una escala.

La escala es simplemente una razón de semejanza de reducción entre la reproducción y la realidad, y se presenta de la forma 1:5.000, por ejemplo. Es decir, la longitud en la realidad es 5.000 veces mayor que en la reproducción. En la Actividad 1 de la UD, como se explica posteriormente, se profundizará y se trabajará este punto en concreto.

- El Teorema de Tales.

El Teorema de Tales es la base teórica sobre la que se sustenta la semejanza de triángulos, ampliamente utilizada en geometría:

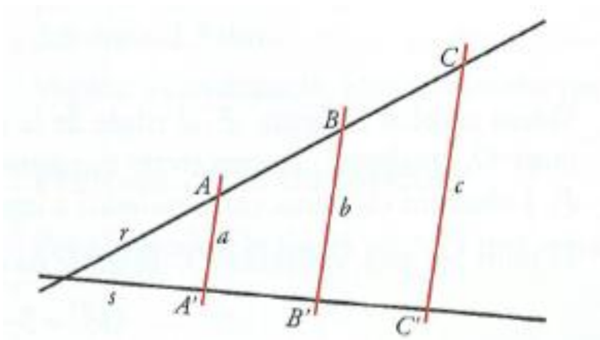


Imagen 2. Teorema de Tales (extraída del libro de texto)

Enunciado del teorema

Dadas tres rectas a, b y c, paralelas entre sí y que cortan con las rectas secantes r y s, entonces los segmentos que aparecen son proporcionales (pág. 202, Colera, Gaztelu & Colera, 2016):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

- Aplicaciones del teorema:

a) Si dos triángulos se encuentran en posición de Tales, son semejantes.

b) Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a dos ángulos de otro, entonces ambos triángulos son semejantes.

c) Aparece semejanza entre dos triángulos rectángulos si:

1) Ambos tienen un ángulo agudo igual.
2) Ambos tienen sus dos catetos proporcionales, o tienen un cateto y la hipotenusa proporcional.

- Las aplicaciones de la semejanza de triángulos.

Son numerosas las aplicaciones prácticas que tiene la semejanza de triángulos. Entre ellas, destaca el cálculo de la altura de un objeto:

a) A partir de su sombra (Actividad 2) y con la ayuda de una referencia.
b) Mediante triangulación.

3.3.2. Conceptos adicionales

A) CÁLCULO DEL ERROR ABSOLUTO

El error absoluto es un concepto matemático muy útil y por lo tanto ampliamente utilizado. Se utiliza dicha herramienta para calcular la desviación o exactitud de una medida respecto a la realidad.
Para calcular el error absoluto de una medida en concreto, se realiza de la siguiente manera: $|Error_{absoluto}| = |Medida_{real} - Medida_{realizada}|$.

El error absoluto siempre se tomará positivo, por lo que en su cálculo se utilizará la herramienta del valor absoluto.

Otro concepto muy relacionado con el anterior es el error relativo, que no se explicará en la presente UD por razones de tiempo.

B) GEOMETRÍA FRACTAL

La geometría fractal es una rama de la geometría no Euclídea que se dedica a describir elementos geométricos planos o tridimensionales que están compuestos por infinitos elementos. Dicha geometría es muy útil para describir muchos elementos presentes en la naturaleza (Mandelbrot, 1997), como puede ser las ramas de un árbol, las formas de las nubes, la forma de los rayos, los copos de nieve, las plumas de un pavo real o la forma del Romanescu.

Es decir, los fractales explican gran cantidad de elementos presentes en la naturaleza, a diferencia de la geometría euclídea que convencionalmente aprenden los alumnos de ESO y Bachillerato, y que se dedica a estudiar las formas de los objetos y construcciones humanas.

El término fractal fue acuñado en 1975 por el matemático polaco Benoît B. Mandelbrot. Fractal proviene del término latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado.

La característica principal de los fractales es que son auto-semejantes. Según B. Mandelbrot (wikipedia, 2019), un objeto es auto-similar o auto-semejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.

Es decir, existe imágenes fractales se repiten infinitamente, por lo que no importa la escala o razón de semejanza.

Por otra parte, la dimensión fractal (wikipedia, 2019) es un concepto revolucionario en el campo de la geometría. La dimensión de un fractal no corresponde con un número entero, como ocurre con las figuras euclideanas, sino que corresponde con números racionales no enteros. Existe cierta controversia en este asunto e incluso se han desarrollado varias teorías sobre como calcular la dimensión fractal, no siendo todas estas teorías equivalentes.

Entre los fractales matemáticos más intuitivos y fáciles de construir, destaca el Conjunto de Cantor y el Triángulo de Sierpinski, que se presentan a continuación.

Además, ambas figuras serán tratadas en la Actividad 3 de la UD, que se explicará en el presente trabajo.

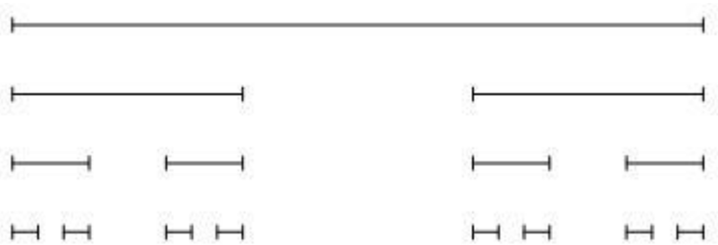


Imagen 3. Conjunto de Cantor.
(extraída de https://naukas.com/2011/10/17/algunas-propiedades-del-conjunto-de-cantor/).

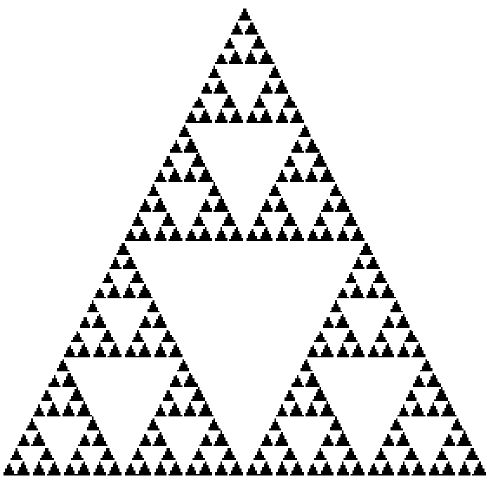


Imagen 4. Triángulo de Sierpinski.
(extraída de http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/practicas/fractales_clasicos/sierpinski.html).

4. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Dentro de una misma clase es muy importante que el docente sea consciente de la gran diversidad de alumnado que puede existir. Dichas diferencias surgen a raíz de gran variedad de motivos, como puede ser genéticos, ambientales, sociales, etc.

Como menciona el Modelo de Van Hiele, un mismo individuo puede tener mayores facilidades para comprender e interiorizar ciertos conceptos geométricos, y menos capacidades para entender otros conceptos.

Por ello, es necesario que el docente tenga planeadas una serie de estrategias de actuación para que ningún alumno o alumna de la clase no sienta que sus necesidades educativas están siendo desatendidas.

Es decir, para el grupo de alumnado con un alto ritmo de aprendizaje y mayores capacidades para las Matemáticas, se propone en la programación de las sesiones de la UD una serie de ejercicios de ampliación. El docente, al inicio de la siguiente clase, dará la solución de dichos ejercicios al alumnado que los haya resuelto.

Además, durante la realización de las tres actividades que han sido diseñadas, este grupo de alumnos deberá ayudar a los compañeros que presenten mayores dificultades mediante la metodología del aprendizaje cooperativo.

Por otra parte, en las aulas suele aparecer individuos que presentan mayores dificultades para las matemáticas, así como un ritmo más lento para el aprendizaje.

Para este segundo grupo evidentemente no se le exigirá la realización de los ejercicios de ampliación. Como se ha mencionado anteriormente, durante las actividades estos alumnos serán ayudados por sus compañeros en caso de que sea necesario.

5. COMPETENCIAS

A continuación, se presenta una tabla que recoge como se van a tratar las ocho competencias requeridas por el Real Decreto 1105/2014 (J. Del Estado, 2014) que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, publicado en el BOE-A-2015-37.

COMPETENCIA	OBJETIVO	UBICACIÓN EN LA UD
MATEMÁTICA	Conocer y entender los conceptos fundamentales de la Unidad: razón de semejanza, escala de un mapa, semejanza de triángulos. Saber aplicar dichos conceptos a los ejercicios propuestos.	En todas las sesiones
COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA	Comprender textos e información oral y escrita. Saber expresarse de manera oral y escrita.	En todas las sesiones
CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO	Saber tratar con mapas y planos, así como saber trabajar con las escalas de los mismos.	En la Actividad 1
TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y COMPETENCIA DIGITAL	Saber utilizar y dominar programas informáticos de apoyo de la asignatura como la aplicación ''SmartMeasure''.	En la Actividad 2
SOCIAL Y CIUDADANA	Saber tratar con mapas y planos, así como saber trabajar con las escalas de los mismos.	En la Actividad 1
CULTURAL Y ARTÍSTICA	Saber construir fractales simples como el Conjunto de Cantor con papel, lápiz y tijeras.	En la Actividad 3
APRENDER A APRENDER	Saber resolver los problemas propuestos por uno mismo. Valorar, mediante autoevaluación, los conocimientos adquiridos en la unidad.	En todas las actividades
DESARROLLO DE LA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL Y COMPETENCIA EMOCIONAL	Afrontar posibles problemas que pueden surgir, así como saber tomar decisiones.	En todas las sesiones

Tabla 1. Competencias (elaboración propia).

6. UNIDAD DIDÁCTICA

La Unidad Didáctica (UD) que he diseñado está centrada en la geometría, en concreto en la Semejanza Geométrica. La intención de la Unidad Didáctica que se va a presentar a continuación es trabajar diversas competencias curriculares de una manera lúdica para el alumnado.

En esta UD se han planteado tres actividades a realizar en grupos de tres personas. La idea es juntar a alumnos de distintas características para que se puedan ayudar entre ellos. Es decir, se pretende que el alumnado aprenda cooperativamente y que los alumnos con mayores ritmos de aprendizaje ayuden a aquellos con más dificultades para aprender.

6.1. Caracterización general de los destinatarios

Los destinatarios de la Unidad Didáctica son adolescentes de 2.º de la ESO del Instituto IES Penyagolosa de Castellón de la Plana. Dicho alumnado se sitúa entre los 13 y los 14 años de edad, en pleno inicio de la pubertad. En el Anexo IX y X se ha dado información sobre las características generales del centro así como sobre los dos grupos a los que se ha implementado la UD.

A continuación se exponen algunas de las características psicológicas más destacables de los estudiantes que se sitúan en estas edades.

La pubertad comporta una serie de cambios hormonales y cerebrales en todas las personas de estas edades (Martín & Navarro, 2011), por lo que dichos individuos tienden a comportarse de una manera muy variada, siendo algunas veces difícil la tarea del docente en el aula.

Además, es importante mencionar las grandes diferencias evolutivas entre el desarrollo de chicos y chicas. En las adolescentes, según Martín y Navarro (2011), su cerebro madura dos o tres años antes, se centran más en las relaciones sociales y en la aceptación social, suelen buscar el pacto ante el conflicto y son menos agresivas.

En cambio, los adolescentes tienden a conductas más agresivas, buscando fácilmente la acción física para resolver conflictos. Además, le suelen dar gran importancia a las vivencias sexuales, así como a destacar en el grupo, ya sea por su fuerza o por sus habilidades.

Por otra parte, a la edad del alumnado de 2.º de la ESO se debe prestar especial atención a dos fenómenos muy generalizados en el desarrollo físico y mental de los individuos: la pubertad temprana y la pubertad tardía.

Los individuos peor valorados entre sus compañeros (Stice, Presnell & Bearman, 2001) son los chicos de pubertad tardía y las chicas de pubertad temprana, lo cual puede suponer un impacto en su futura personalidad así como en sus resultados académicos.

6.2. Temporización, objetivos y actividades

La Unidad Didáctica está diseñada para ocho sesiones, contando la prueba final como la última sesión. Se debe tener en cuenta que cada sesión en el IES Penyagolosa es de cincuenta y cinco minutos.

Los objetivos son:
1) Presentar la UD de una manera atractiva y entretenida.
2) Explicar y relacionar la utilidad de los conceptos y procedimientos vistos en la UD.
3) Que el alumnado aprenda los conceptos y procedimientos fundamentales de la UD de una manera inclusiva, es decir, que se atienda la diversidad presente en el aula.
4) Que el alumnado trabaje cooperativamente durante las actividades, ayudándose unos a otros.
5) Trabajar la competencia Social y Ciudadana, así como la Competencia del Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico, a través de la Actividad 1, donde se trabaja con un mapa político de Europa, con sus ciudades más pobladas.
6) Trabajar la Competencia Digital mediante el uso de aplicaciones informáticas, como el ''SmartMeasure'' en la Actividad 2.
7) Trabajar la Competencia Cultural y Artística mediante la representación de fractales, en la Actividad 3.
8) **Ampliar la información** presente en la Unidad Didáctica del libro de texto:

- Actividad 2: Introducción del concepto de error absoluto.
- Actividad 3: Introducción a la geometría no euclídea, y a los fractales (concepto novedoso).

Para el diseño de la UD, se ha seguido las tres primeras fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele (información, orientación dirigida y explicitación). Dichas fases de aprendizaje están explicadas en el apartado 2.1.B.

Para la realización de las tres actividades, el docente formará grupos de tres personas. La intención es que los grupos estén formados por alumnos de distintas características, y en cada uno de ellos debe haber al menos un alumno con altas capacidades y otro con ritmos de aprendizaje más bajo. Así, se pretende dar una atención a la diversidad del grupo.

6.3. Programación de la UD

A continuación se muestra los días en los cuales se ha implementado la UD en la fase 2 de prácticas en el instituto del autor del presente trabajo:

	GRUPO 1	**GRUPO 2**	**CONTENIDO**
Primera sesión	Lunes 6	Martes 7	Introducción
Segunda sesión	Miércoles 8	Miércoles 8	Actividad 1
Tercera sesión	Jueves 9	Viernes 10	Teorema de Tales
Cuarta sesión	Lunes 13	Martes 14	Semejanza y aplicaciones
Quinta sesión	Miércoles 15	Miércoles 15	Actividad 2
Sexta sesión	Jueves 16	Viernes 17	Actividad 3
Séptima sesión	Lunes 20	Martes 21	Repaso de todo el tema
Octava sesión	Miércoles 22	Miércoles 22	Examen parcial

Tabla 2. Programación de la UD (elaboración propia).

De esta manera, es ideal para que ambos grupos realicen el examen el mismo día, el miércoles 22 de mayo.

6.4. Explicación de las sesiones

Teniendo en cuenta que en 2.º ESO hay tres clases semanales de la asignatura de Matemáticas, se ha programado la Unidad Didáctica para dos semanas y media, con un total de ocho sesiones de cincuenta y cinco minutos.

El docente se apoyará en el libro de texto ''MATEMÀTIQUES 2 ESO'' (Colera, Gaztelu y Colera, 2016) utilizado durante todo el curso. En el Anexo IX se presenta todas las páginas del libro de texto empleadas en la UD.

Los tiempos programados en cada sesión que se presenta a continuación evidentemente son aproximados, dado que durante la implementación puede surgir una gran infinidad de contratiempos que pueden cambiar ligeramente los tiempos de cada parte de cada sesión.

SESIÓN 1 - PRUEBA INICIAL E INTRODUCCIÓN A LA SEMEJANZA

En la primera sesión de la presente Unidad Didáctica se introducirá el tema de la semejanza geométrica, así como el concepto de relación o razón de semejanza. Esta sesión constará de la siguiente estructura:

- 15 minutos: Prueba Inicial
  El objetivo de realizar una prueba inicial es que el docente obtenga información del nivel de cada alumno y alumna de la clase. En el Anexo I se presenta la Prueba Inicial propuesta, que se realizará en diez minutos, en la cual se preguntará sobre conceptos básicos de geometría como la clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos, así como el perímetro y el área de los triángulos y la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo.
  Se debe tener en cuenta que los cinco primeros minutos de cada sesión se suelen perder entre que llega el alumnado y saca libro y libreta.

- 15 minutos: Explicación teórica por parte del docente
  En esta sesión inicial el docente explicará en la pizarra el concepto de relación de semejanza k. También se explicará que la relación entre el área de dos figuras semejantes es k^2 y la de volúmenes de dos cuerpos semejantes es k^3.
  El docente se apoyará en el libro de texto, en concreto en la información presente en las páginas 194, 195, 196 y 197 (Anexo IX).

- 20 minutos: Realización de ejercicios en la pizarra
  Para continuar con la sesión, el docente resolverá en la pizarra los siguientes ejercicios:
  a) Ejercicio 1 (página 195) (Sobre la k).
  b) Ejercicio 4 (página 197) (Sobre k^2 y k^3).

- 5 minutos: Realización de ejercicios de manera individual
  Para acabar la sesión y afianzar los conceptos vistos, se propondrán:
  Ejercicio para todo el alumnado: Ejercicio 2 (página 195).
  Ejercicios de ampliación: Ejercicio 5 (página 197).
  En caso de que no se acabe en clase, el alumnado lo deberá acabar en casa en forma de trabajo para casa.

SESIÓN 2 - ACTIVIDAD 1 - JUGANDO CON MAPAS

La primera actividad consistirá en trabajar cooperativamente a partir de un mapa político de Europa, con sus ciudades más pobladas. Para ello, se formarán grupos de tres personas, los cuales serán formados por el docente. Dicha actividad se realizará en la segunda sesión de la UD.

El objetivo de la actividad es trabajar la competencia Social y Ciudadana, así como la Competencia del Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico, tal y como es requerido en el Real Decreto 1105/2014 (J. Del Estado, 2014).

La **estructura** de la actividad es la siguiente:

1. Diez minutos: el docente corregirá en la pizarra el ejercicio propuesto de deberes y dará el resultado del ejercicio de ampliación. Se debe tener en cuenta que los cinco primeros minutos se suelen perder entre que llega el alumnado y saca libro y libreta (Anexo XI).
2. Quince minutos: explicación teórica por parte del docente, sobre el concepto de escala y como utilizarlo.
3. Treinta minutos: realización de los ejercicios prácticos en grupos de tres personas a partir de la ficha (Anexo II) repartida por el docente.

Para la realización de dicha actividad el docente repartirá una ficha (Anexo II) a cada grupo. Dicha ficha presentará el mapa de la provincia de Castellón en la parte superior, y una serie de preguntas en la parte inferior de la misma.

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD 1

- Que se sepa aplicar el concepto de semejanza y el de escala de un mapa para obtener distancias reales de distintas localidades.
- Que se sepa aplicar el concepto de semejanza y el de escala de un mapa para obtener distancias en el mapa de distintas localidades.
- Que se repase el cambio de unidades.
- Que el alumnado aprenda de una manera entretenida, con un mapa real.
- Que se trabaje la Competencia del Conocimiento e Interacción del Mundo Físico.
- Que se trabaje la Competencia Social y Ciudadana.
- Que se dé cierto aprendizaje cooperativo dado que el alumnado se agrupará de tres en tres.

CONTENIDOS A TRABAJAR

- Concepto de escala de un mapa.
- Cálculo de la escala de un mapa.
- Aplicación de la escala de un mapa.

MATERIAL NECESARIO PARA LA REALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD 1

Aportado por el docente:

- Pizarra y tiza para la explicación inicial.
- Ficha con los ejercicios a realizar (Mapa y ejercicios, Anexo II).

Aportado por el alumnado (El docente deberá recordar al alumnado en la sesión anterior qué material debe traer):

- Regla de 30 cm.
- Papel y bolígrafo.
- Calculadora.

SESIÓN 3 - TEOREMA DE TALES Y SUS APLICACIONES

En esta sesión se va a introducir la base teórica del tema: El Teorema de Semejanza de Tales.

El docente se apoyará en el libro de texto (Anexo IX) siempre y cuando lo crea necesario durante la explicación teórica, y lo utilizará para los enunciados de los ejercicios a resolver.

Como se ha mencionado anteriormente, se debe tener en cuenta que los primeros cinco minutos (Anexo XI) se van a perder mientras el alumnado llega a clase, se sienta y abre el libro y la libreta. La estructura de la tercera sesión se ha diseñado, por lo tanto, para los cincuenta minutos restantes:

- 15 minutos: Introducción teórica
  Entre la teoría que el docente presentará en la pizarra, se presenta:
  1. 5 minutos: Teorema de Tales (página 202).
  2. 10 minutos: Aplicación del Teorema de Tales (página 203).

- 25 minutos: Realización de ejercicios en la pizarra
  El docente realizará en la pizarra los siguientes ejercicios:
  a) Ejercicio 2 (página 202)
  b) Ejercicio Resuelto de la página 203.
  c) Ejercicio 3 (página 203).

- 10 minutos: Realización de ejercicios de manera individual
  De igual manera que en la Sesión 1, el docente propondrá unos ejercicios para que realice el alumnado en el tiempo restante. En caso de que no su realización no se finalice en clase, el alumnado lo deberá acabarlos en casa en forma de deberes.
  Ejercicio para todo el alumnado: Ejercicio 4 (página 203).
  Ejercicio de ampliación: Ejercicio 4 (página 208).

SESIÓN 4 - SEMEJANZA EN TRIÁNGULOS Y SUS APLICACIONES

En esta sesión se va a trabajar la semejanza de triángulos y sus aplicaciones. Esta sesión va a ser principalmente práctica, ya que la mayoría de la teoría necesaria ya se ha visto en las sesiones previas. Es importante mencionar que no se tratará el Teorema del Cateto ni el Teorema de la Altura. Se ha tomado esta decisión debido a que se considera que es mejor que dichos teoremas se expliquen con mayor profundidad en los cursos posteriores (3.º y 4.º ESO).

El docente se apoyará en el libro de texto de Anaya (Anexo IX) cuando lo crea necesario durante la explicación teórica, y lo utilizará para ver los enunciados de los ejercicios a resolver.

Esta sesión constará de la siguiente estructura de cincuenta minutos, teniendo en cuenta que muy probablemente se perderán los primeros cinco minutos debido a la llegada tardía de los alumnos:

- 5 minutos: Corrección de los deberes
  El docente corregirá en la pizarra los dos ejercicios propuestos como deberes en la sesión anterior.

- 15 minutos: Introducción teórica
  a) Los primeros cinco minutos para la semejanza de triángulos rectángulos (página 204).
  b) Posteriormente, 10 minutos para las aplicaciones de la semejanza de triángulos (páginas 206 y 207).

- 20 minutos: Realización de ejercicios en la pizarra
  El docente realizará en la pizarra:
  1) Ejercicio 1 Resuelto (página 204).
  2) Ejercicio 2 Resuelto (página 204).
  3) Ejercicio 4 (página 204).

- 10 minutos: Realización de ejercicios de manera individual
  Se propondrán los siguientes ejercicios, que serán deberes para todo aquel que no los finalice al final de la sesión:
  Ejercicio para todo el alumnado: I) Ejercicio 1 (página 204)
  II) Ejercicio 1 (página 206).
  III) Ejercicio 2 (página 206).
  Ejercicio de ampliación: A) Ejercicio 2 (página 204).
  B) Ejercicio 3 (página 207).

Dado que los tiempos diseñados para la Sesión 5 y 6 son bastante ajustados debido a las dos actividades pensadas, en esta ocasión el docente actuará de manera diferente respecto a los deberes encomendados: al finalizar esta cuarta sesión, el docente dará los resultados de los ejercicios, para que el alumnado sea capaz de corregirse.

En cualquier caso, al inicio de la séptima sesión se realizará la corrección es estos ejercicios.

SESIÓN 5 - ACTIVIDAD 2 - MEDIDA DE ALTURAS A PARTIR DE LA SOMBRA

La segunda actividad, al igual que las otras dos, consistirá en un conjunto de ejercicios prácticos en los cuales se deberá aplicar los conceptos aprendidos en la Unidad Didáctica. Para ello, se utilizarán los mismos grupos que en la Actividad 1.

La diferencia con las otras dos actividades es que la mayor parte de esta actividad se realizará en el patio del instituto IES Penyagolosa. El objetivo de la actividad es que el alumnado aplique los conceptos del Teorema de Tales y la Semejanza de Triángulos de una manera entretenida y diferente.

ESTRUCTURA

1. Diez minutos: explicación teórica por parte del docente en la pizarra del aula, sobre:
   a) La aplicación del Teorema de Tales y los triángulos semejantes. Como dichos conceptos se han visto en la sesión anterior, simplemente se hará un repaso.
   b) Concepto de error absoluto y su cálculo.
2. Cuarenta minutos: realización de ejercicios prácticos en grupos de tres personas con el uso de la cintra métrica y la calculadora.
3. Cinco minutos: recoger el material y subir al aula.

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD 2

- Que se trabaje la aplicación de la semejanza de triángulos.
- Que se realice un trabajo de campo, dado que los grupos de tres personas deberán medir ellos mismos las sombras y alturas de ciertos elementos presentes en el patio del centro.
- Que el alumnado entienda el concepto de error absoluto y cómo calcularlo.
- Que se dé cierto aprendizaje cooperativo entre los miembros de un mismo grupo.
- Que se aprenda de una manera entretenida.
- Que se relacione los conceptos de semejanza a cálculos de la vida cotidiana.
  Trabajar la Competencia Digital y el Tratamiento de Información, gracias al uso de la aplicación ''Smart Measure'', tal y como es requerido según el Real Decreto 1105/2014 (J. Del Estado, 2014).

CONTENIDOS A TRABAJAR

- Aplicación de la semejanza de triángulos.
- Introducción al error absoluto y relativo.

MATERIAL NECESARIO PARA LA REALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD 2

Aportado por el docente:

- Pizarra y tiza para la explicación inicial.
- Cinta métrica para medir las sombras (aportada por la conserjería del centro).
- Ficha con los ejercicios a resolver por cada grupo.
- Teléfono móvil para la utilización de la aplicación ''SmartMeasure''. Para agilizar las medidas, tanto el docente en prácticas como el tutor del centro poseerán dicha aplicación en su móvil.

Aportado por el alumnado (El docente deberá recordar al alumnado en la sesión anterior qué material debe traer):

- Calculadora, papel y bolígrafo.
- Botella (como referencia).

SESIÓN 6 - ACTIVIDAD 3 - GEOMETRÍA FRACTAL Y SU CONSTRUCCIÓN

Debido al escaso conocimiento que se tiene de la geometría fractal, y que se apoya en el concepto de auto-similitud y auto-semejanza, se ha considerado importante introducir este concepto revolucionario matemáticamente hablando.

Además, mediante la realización de esta actividad se trabajará conjuntamente la Competencia Cultural y Artística, tal y como es requerido en el Real Decreto 1105/2014 (J. Del Estado, 2014).

Para ello, el docente introducirá los conceptos fundamentales para entender la geometría fractal, sirviéndose de un par de fragmentos de vídeos distintos, así como de una exposición en PowerPoint (Anexo VIII).

Posteriormente, se agrupará al alumnado en grupos de tres personas. Los grupos serán los mismos que los utilizados para las otras dos actividades, para asegurarse un clima correcto en el aula. La intención es que se dé cierto aprendizaje cooperativo entre el alumnado de distintas características presente en el aula.

El docente deberá recordar al alumnado en la sesión anterior qué material debe traer.

Los tres ejercicios propuestos para esta actividad son los enunciados en el Anexo IV.

ESTRUCTURA

1. <u>20 minutos: Introducción teórica por parte del docente.</u>
   - Los primeros cinco/diez minutos el docente realizará una exposición teórica en PowerPoint para introducir los conceptos necesarios para entender la geometría fractal.
   - En los siguientes cinco minutos se visualizará el vídeo *''Fractales''* (youtube, 2016), para reforzar la explicación del docente.
   - Los últimos minutos serán dedicados a la resolución de dudas en caso de que existan.

2. <u>35 minutos: Realización de los ejercicios en grupos de tres personas.</u>

   a) Para el *Ejercicio 1 ''Conjunto de Cantor''* se dedicará cinco minutos.

   b) Para el *Ejercicio 2* se dedicará veinte minutos:

      I) Los cinco primeros para la visualización del vídeo explicativo del procedimiento *''Crea tus propios fractales''* (youtube, 2015) desde el 0:00 hasta el 3:28.

      II) Unos quince minutos para la realización del ejercicio.

   c) Para el *Ejercicio 3 ''Visualización del procedimiento del Triángulo de Sierpinski''* se dedicará los minutos restantes.

      I) En siete minutos se visualizará el vídeo *tus propios fractales''* (youtube, 2015), desde el 3:28 hasta el 10:26.

      II) En los tres minutos sobrantes, cada grupo deberá realizar un resumen escrito del procedimiento que acaba de observar.

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD 3

- Que el alumnado entienda la diferencia entre Geometría Euclídea y Geometría No Euclídea.
- Que el alumnado comprenda el concepto de fractal y sus características fundamentales.
- Que el alumnado aprenda temario nuevo e interesante.
- Que se trabaje la Competencia Cultural y Artística.
- Que se utilicen las nuevas tecnologías para la búsqueda de información.
- Que se dé un aprendizaje cooperativo entre los grupos formados.

CONTENIDOS A TRABAJAR

- Geometría fractal. Concepto y construcciones sencillas de los mismos. Dichos contenidos los proporcionará el docente mediante visualizado de vídeos de Youtube, así como una exposición en formato PowerPoint.

MATERIAL NECESARIO PARA LA REALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD 3

Aportado por el docente:

- Pizarra y tiza para la explicación inicial.
- Proyector y ordenador del aula.
- Exposición en formato PowerPoint.
- Fragmentos de los vídeos seleccionados para la exposición teórica.

Aportado por el alumnado (El docente deberá recordar al alumnado en la sesión anterior qué material debe traer):

- Una cartulina tamaño DIN A4.
- Tijeras.
- Papel.
- Material de escritura.

SESIÓN 7 - SÍNTESIS DEL TEMA Y PREPARACIÓN DEL EXAMEN

El objetivo de esta séptima sesión es repasar y afianzar todos los conceptos y procedimientos vistos a lo largo de la UD. Para ello, se van a realizar una serie de ejercicios. **La idea es que cada alumno realice por su cuenta los ejercicios propuestos, y que sea el docente quien los corrija en la pizarra.**

En caso de que surjan dudas, el docente las resolverá al momento, o al finalizar la clase, según considere conveniente.

Esta sesión constará de la siguiente estructura de cincuenta minutos, dado que probablemente se pierdan los cinco primeros minutos al inicio de la sesión.

- 10 minutos: Corrección de los Ejercicios Propuesto en la Sesión 4 y Dudas Iniciales.
  Los primeros cinco minutos serán dedicados a corregir los ejercicios de la Sesión 4.
  A continuación, el docente se ofrecerá a resolver las posibles dudas que puedan tener los alumnos. Estos cinco minutos son aproximados pudiendo dedicar más o menos cantidad de tiempo dependiendo de la cantidad de dudas.

- 10 minutos: Ejercicios de razón de semejanza k
  Sobre la razón de semejanza, el docente dará 8 minutos para la realización de ambos ejercicios:
  a) Ejercicio 3 apartado a y b (página 208).
  b) Ejercicio 14 (página 209).
  En los 2 minutos restantes, el docente escribirá el resultado en la pizarra. Si fuera necesario, realizará los cálculos en la pizarra para todo aquél que no haya realizado los ejercicios correctamente. Mientras tanto, el resto del alumnado continuará con la lista de ejercicios propuestos.

- <u>10 minutos: Ejercicios del Teorema de Tales</u>
  Se proponen tres problemas para realizar en 8 minutos (2 minutos para la corrección):
  a) Ejercicio 11 (página 209).
  b) Ejercicio 12 (página 209).
  c) Ejercicio 16 (página 209).

- <u>15 minutos: Ejercicios de aplicación de la Semejanza de Triángulos.</u>
  Se proponen cuatro problemas para realizar en 15 minutos:
  a) Ejercicio 19 (página 211).
  b) Ejercicio 21 (página 211).
  c) Ejercicio 23 (página 211).
  d) Ejercicio 24 (página 211).
  Los últimos 5 minutos se dedicarán a que el docente apunte en la pizarra los resultados. En caso de existir dudas, el docente las solventará.

- <u>5 minutos: Dudas finales</u>
  Antes de que finalice la sesión, el docente volverá a atender las posibles dudas y preguntas que puedan surgir. En caso de que no existieran, el docente hará un repaso rápido de los procedimientos más importantes del tema.

- <u>Ejercicios de Ampliación:</u>
  Para los alumnos/as que no tengan dudas o vayan más avanzados, se propondrán los ejercicios:
  a) Ejercicio 6 (página 208).
  b) Ejercicio 7 (página 208).
  c) Ejercicio 25 (página 211).
  Al final de la sesión se les proporcionará los resultados.

<u>SESIÓN 8 - EXAMEN Y VALORACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA</u>

El examen parcial de dicha UD se realizará durante la clase correspondiente a la octava sesión. Como en el resto de las sesiones, se dispone de cincuenta y cinco minutos.

En el Anexo V se presenta el enunciado del examen. Dicha prueba consta de cinco ejercicios a realizar en 50 minutos. Cada uno de ellos vale dos puntos sobre la nota total de la prueba parcial.

La Valoración al Docente se hará también en esta última sesión. Al tratarse de una opinión personal, esta valoración debe ser realizada de forma anónima. La idea es repartir el formulario y que el docente recoja los formularios rellenos boca abajo a los cinco minutos de empezar el examen.

En el Anexo VI se presenta las preguntas destinadas a la Valoración al Docente.

6.5. Contenido curricular de la UD

Es de gran importancia conocer y tener presente el contenido curricular que marca la ley vigente del estado español. Para ello se debe consultar el BOE-A-2015-37 (J. Del Estado, 2014), que establece el currículum para la E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria).

En el BOE aparece conjuntamente el currículum establecido para 1.º y para 2.º ESO. A continuación, se reproduce los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que se requieren para la Unidad Didáctica de Semejanza. Dicha información se encuentra en el Bloque 3. Geometría. Matemáticas 1.º y 2.º ESO (Sec. I Pág. 412).

La figura que se muestra a continuación consiste en el fragmento del BOE para el currículum de geometría de 1.º y 2.º ESO:

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

Tabla 3. Contenido curricular de la UD (Extraída de: J. Del Estado, 2014).

6.6. Evaluación de la UD

En la tabla que se presenta a continuación se definen los porcentajes de nota con los que se evaluará la Unidad Didáctica que se presenta.

PRUEBA	PORCENTAJE	PUNTOS	COMPETENCIA
Actividad 1	20%	2	Espacial y social
Actividad 2	20%	2	Espacial
Actividad 3	20%	2	Espacial y artística, de la información.
Examen Parcial	40%	4	Todas
Total	100%	10	

Tabla 4. Porcentaje de las notas UD (Elaboración propia).

En las tres actividades, el docente valorará :

- **<u>Una actitud adecuada, que se dé el compañerismo y la autonomía (10%):</u>**
  El docente tomará nota de la conducta y actitud de cada estudiante durante la realización de las actividades. Se tendrá en cuenta si en los grupos se está dando un aprendizaje cooperativo, así como si existe cierta independencia frente al profesor. Es decir, se valorará negativamente al grupo que pregunte continuamente al docente.
  En casos excepcionales, esta nota podría ser distinta para cada miembro del grupo.

- **<u>Los resultados de los ejercicios (10%):</u>**
  El docente recogerá los resultados de los ejercicios propuestos en cada una de las actividades, para su posterior evaluación. Esta nota será común para todos los miembros del mismo grupo.

En el Anexo XII se presenta la rúbrica de la UD, donde se detalla con mayor precisión los objetivos y la puntuación tanto para el examen parcial como para las tres actividades.

Por otra parte, el docente posee la herramienta de los positivos y negativos para el control de la conducta en cualquier sesión de la UD. Los positivos suman 0,1 puntos a la nota final del tema, mientras que los negativos restan 0,1.

En caso de que la nota media de la UD se sitúe entre el 5 y el 3'5, entonces se hará media con el resto de notas de las otras unidades del trimestre. Si la media global del trimestre saliera suspendida, dicho alumno realizará la recuperación de todo el bloque.
En cambio, si el estudiante no alcanza una nota de un 3'5, entonces dicha nota no le hará media y deberá realizar la recuperación de todo el trimestre.

6.7. Dificultades previstas

Es evidente que, a la hora de aplicar la UD dentro del aula, es muy probable que aparezcan ciertas dificultades o contratiempos.

Algunas de las dificultades que pueden aparecer, y la manera de solucionarlas, son:

- <u>Que algún alumno no entienda las explicaciones del docente.</u>
  En la estructuración de cada sesión, se ha puesto en todas un tiempo extra para posibles dudas y aclaraciones. Es decir, si se dice que la explicación del docente será de 15 minutos, el docente deberá realizar en unos 10 minutos la explicación y reservarse los últimos cinco para dichas dudas y aclaraciones.
  Por otra parte, en caso de que algún alumno lo requiera, a la hora del patio el docente ofrecerá su ayuda.

- <u>Que se pierda mucho tiempo en alguna sesión, o en todas en general.</u>
  Hay que tener en cuenta que al estar implementado el sistema aula-materia (el alumnado se desplaza al aula de cada asignatura), las sesiones no suelen empezar puntualmente, sino que se suelen perder tres o cuatro minutos al menos hasta que llega todo el alumnado.

  Por ello, en la programación de cada sesión de la Unidad Didáctica cada parte de cada sesión está programada con cierto margen de tiempo extra, para poder realizar las explicaciones, ejercicios y actividades programadas para cada sesión.

- <u>A la hora de formar los grupos, que el número de los asistentes a clase no sea múltiplo de tres.</u>
  Si se diera este caso, el docente decidirá en cada caso lo que crea más conveniente. Es decir, o bien se formará un grupo de dos personas o bien de cuatro personas.

- Que exista un mal comportamiento dentro del aula.
  En caso de que aparezcan malas conductas, el docente dispone de varias herramientas para el control del aula. Tras realizar uno o dos avisos a la persona en concreto que esté comportándose de una manera inadecuada, se procederá de una de las siguientes maneras, dependiendo de la gravedad del asunto:
  a) Ponerle un negativo.
  b) Enviarle al aula de soporte, es decir, expulsarlo del aula.

  Si el mal comportamiento aparece durante el desarrollo de alguna de las tres actividades, este hecho se reflejará en la nota de cada actividad. Como se comenta en el apartado 6.6., el docente valorará positiva o negativamente la actitud de cada integrante de cada grupo. Estas medidas correctivas sólo se utilizarán en el caso de que sean estrictamente necesarias. Es decir, la idea es castigar lo mínimo posible, intentando fomentar un buen clima en el aula.

- Que algún alumno no entienda la dinámica de la actividad a realizar, o no sepa realizar los cálculos.
  Como los grupos están formados por tres personas con distintos ritmos de aprendizaje, en caso de que exista dificultades, los alumnos que hayan entendido la dinámica deberán ayudar a los compañeros que no hayan sabido realizarla, dándose un aprendizaje cooperativo.

6.8. Justificación de las mejoras de propuesta aportadas.

Se ha considerado importante enfocar la UD de una manera diferente, haciendo uso de una metodología dinámica durante las sesiones programadas. De esta manera, el alumnado será partícipe de su propia construcción de conocimiento (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016). Como se ha comentado anteriormente en la programación (apartado 6.3.), las tres actividades se combinarán con clases más tradicionales, donde el docente explicará en la pizarra y se realizarán ejercicios en la misma.

Para el diseño de todas las actividades se ha tenido en cuenta las fases de aprendizaje (Benedicto, Gutiérrez & Jaime, 2015) según el Modelo de Van Hiele, explicado en el apartado 2.1. En las sesiones de la UD se pretende que se den, al menos, las tres primeras fases:

- Fase de información: el docente introduce los conceptos y procedimientos programados para dicha sesión. Además, en este apartado el docente debe explicar los errores más comunes que el alumnado suele cometer (Marín & Arnal, 2015), para evitar que éstos se repitan continuamente. Algunos de los errores más comunes se exponen en el apartado 2.4.
- Fase de orientación dirigida: el docente propone una serie de ejercicios que el alumnado debe realizar de manera independiente. En el caso de las actividades, estas han sido diseñadas para realizarse en grupos de tres personas, para que se dé un aprendizaje cooperativo.

- Fase de explicitación: siempre que dé tiempo suficiente, el docente pedirá al alumnado que explique los procedimientos empleados durante las actividades. De esta manera, el docente se asegurará que el alumnado ha afianzado dichos conceptos y además se trabajará la competencia lingüística, tal y poco lo requiere la ley vigente (apartado 5).

Se ha considerado que el trabajo cooperativo, explicado en los apartados 2.2. y 3.2., es una buena manera de plantear la realización de las tres actividades por varios motivos. Por una parte, el trabajo cooperativo suele mejorar el ambiente en clase y fomenta el compañerismo (Terán & Pachano, 2009). Pero por otra parte, se considera más importante aún que se dé un aprendizaje inclusivo, de manera que en los grupos el alumnado con mayores facilidades ayude a los compañeros que tengan dificultades. De esta manera, puede conseguirse cierta atención a la diversidad de una manera efectiva.

Sobre las competencias requeridas por la ley vigente (J. Del Estado, 2014), se ha considerado importante introducir una aplicación informática como el *SmartMeasure* en la realización de la segunda actividad, para trabajar la competencia digital. La Actividad 1, en cambio, se apoya en el uso de un mapa político de Europa, por lo que se está trabajando las competencias Social y Ciudadana y la del Conocimiento del Mundo Físico, de una manera diferente. Además, de esta manera se relaciona las matemáticas con la vida cotidiana.

Para la tercera actividad, se trabaja la competencia artística gracias a la introducción de conceptos geométricos atractivos y novedosos como los fractales y la propiedad de auto-semejanza (apartado 3.3.2.). Otros conceptos que no entran en la UD que se ha modificado, es el concepto de error absoluto, que se trabaja en la segunda actividad.

En cambio, se ha decidido suprimir el Teorema del Cateto y el Teorema de la Altura debido a que se ha preferido explicar con mayor profundidad el resto de conceptos del tema. Además, ambos teoremas serán explicados tanto en 3.º como en 4.º de ESO.

7. RESULTADOS TRAS LA IMPLEMENTACIÓN

7.1. Resultados de la Prueba Inicial

El enunciado de la prueba inicial se presenta en el Anexo I.

Tras la corrección, aparece una gran diversidad de resultados. En ambos grupos ha habido algún alumno que no ha querido contestar a ninguna de las tres preguntas.

En la primera pregunta, que pedía la clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos, la gran mayoría del alumnado ha contestado medio bien o un tipo u otro de clasificación a pesar de ser advertidos por parte del docente. Sólo un alumno ha escrito correctamente ambas clasificaciones.

En cuanto al cálculo del perímetro y el área, en el ejercicio 3, algunos alumnos no han sabido hacerlo, y muchos no han puesto las unidades.

7.2. Resultados de la Actividad 1

Dado que varío bastante los resultados en ambos grupos, se van a comentar de manera separada:

- En el primer grupo los resultados no fueron muy buenos debidos a disponer menor tiempo, debido a dedicar más tiempo del programado a la resolución de los ejercicios para casa.
- En el segundo grupo los resultados fueron mejores ya que los grupos dispusieron de mayor tiempo para su realización. Además, la gran parte de los grupos consiguió realizar los seis ejercicios propuestos.

7.3. Resultados de la Actividad 2

- Para el primer grupo, al ser a primera hora, el Sol estaba muy bajo y las sombras de los elementos del patio, muy proyectadas. Aún así, la actividad salió muy bien, y la mayoría del alumnado mostró interés y participó en la toma de las medidas.
- Para el segundo grupo, después del descanso, el Sol ya estaba más alto y las sombras eran mucho más cortas. La actividad salió bien pero el alumnado estaba más disperso, y hubo un par de alumnos a los que se les tuvo que llamar la atención en repetidas ocasiones.

7.4. Resultados de la Actividad 3

La tercera actividad salió bien en ambos grupos, aunque se observan ciertas diferencias:

- En el grupo A y B, todos los componentes trajeron la cartulina y se pudo realizar los ejercicios programados. Además, la conducta fue muy buena y se dio un buen clima de trabajo. En la imagen 5 se presentan algunos resultados de la escalera de Cantor:

Imagen 5. Resultados de la Actividad 3 en el grupo A y B (elaboración propia).

- En cambio, en el grupo C, hubo una parte grande del alumnado que no se acordó de traer el material a pesar de ser avisados repetidamente. Los grupos en los que ninguno de los miembros disponían de cartulina, utilizaron un folio, siendo peores los resultados:

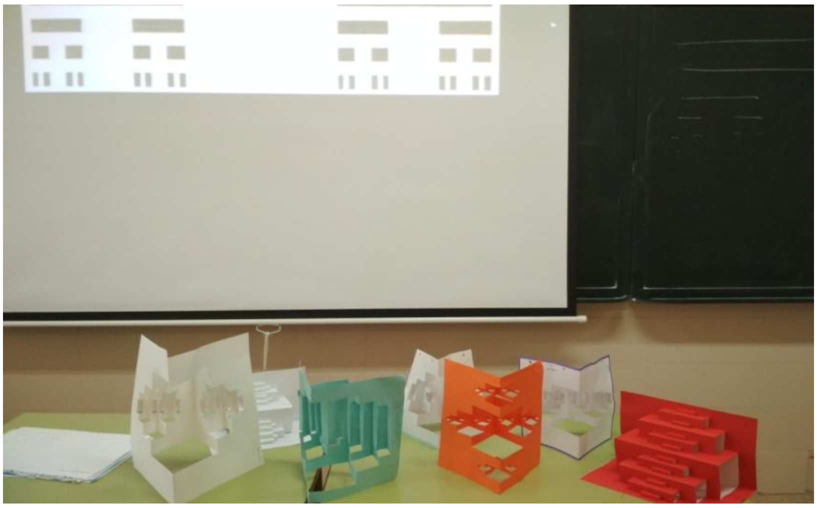


Imagen 6. Resultados de la Actividad 3 en el grupo C (elaboración propia).

7.5. Resultados del examen parcial

A continuación se comenta la tendencia general de los resultados del examen parcial de la UD para cada grupo:

- <u>**Clase A y B:**</u>
  La tendencia general ha sido mejor en este grupo dado que la nota media es más elevada. Ha habido dos suspensos, y cuatro sobresalientes (entre el 9 y el 10). Entre estos dos sobresalientes, destacan dos dieces. A continuación se presentan los porcentajes:

  - *Suspensos*: 2 (de 14), lo que representa un 14,28% del grupo.
  -*Aprobados*: 12 (de 14), lo que representa un 85,72% del grupo.
    -*Sobresalientes*: 4 (de 14), lo que representa un 28,57% del total y un 33,33% de los aprobados.

  (NOTA: hay dos alumnos que han estado ausentes durante toda la UD).

- **Clase C:**
  En este segundo grupo la tendencia no ha sido tan positiva. Dado que en esta clase hay tres alumnos sin interés por la asignatura y que no han contestado ninguna pregunta del examen, la media ha bajado considerablemente. A continuación se presentan los porcentajes de los resultados:
  - *Suspensos*: 7 (de 16), lo que representa un 43,75 % del grupo.
    - *Con un cero*: 3 de los 7 suspensos.
  - *Aprobados*: 9 (de 16), lo que representa un 56,25 % del grupo.
    - *Sobresalientes*: 3 (de 16), lo que representa un 18,75% del total, y un 33,33% de los aprobados.

  (NOTA: hay una alumna que ha estado ausentes durante toda la UD).

7.6. Resultados de la valoración anónima al docente

Por lo general, la valoración ha sido bastante positiva. Se recuerda que el enunciado de dicha valoración se encuentra disponible en el Anexo VI.

En cuanto a la forma de explicar del docente, la valoración es bastante positiva, siendo la media de las respuestas un 4,3 de 5 (el 5 es la valoración más positiva). Respecto a la pregunta 1 (si consideran que han aprendido los conceptos más importantes de la UD), la media de respuestas se sitúa en el 4,1.

La actividad peor valorada ha sido la primera con un 3'5, mientras que la segunda (4,2) y la tercera (4,3) han tenido una aceptación mayor. Además, la mayoría del alumnado considera buena idea haber realizado las actividades en grupo (3,9).

Para la pregunta 5 (si consideran que han entendido ligeramente los conceptos de geometría fractal), la media de respuestas ha sido de un 3,8. Por último, a la pregunta 10 (si el docente había explicado correctamente el sistema de evaluación, la media se sitúa en un 3,9).

Casi ningún alumno ha escrito en el apartado de quejas y sugerencias, pero sí ha habido varios comentarios positivos y un par de alumnos que decían que el docente había explicado muy rápido.

8. CONCLUSIONES TRAS LA IMPLEMENTACIÓN DE LA UD

8.1. Conclusiones generales

Tras la implementación de la UD que se ha diseñado en el presente trabajo, se concluye:

- Existe una **gran variedad de actitudes e intereses** dentro de un mismo grupo, por lo que el trabajo del docente puede llegar a ser bastante difícil.
- **El docente debe intentar crear un buen clima de trabajo** con el alumnado que aspire a aprobar.
- En cambio, es preferible **llegar a un pacto con el alumnado que no tiene interés** por la asignatura y por aprobarla. El pacto puede ser, por ejemplo, permitir que dichas personas duerman o realicen faena de otras asignaturas antes de que molesten al docente y al resto de compañeros.
- Con la corrección de la prueba inicial, el examen parcial y durante las sesiones, **se confirman los errores** que suele cometer el alumnado de este curso (Pérez Prados, 2013; Marín y Arnal, 2015), tal y como se comenta en el apartado 2.4.
  Por ejemplo, a la hora de leer los enunciados gran parte del alumnado no lo entiende o no sabe identificar cuál es el objetivo del ejercicio, es decir, falta comprensión lectora. Otro error muy común es no poner las unidades en los resultados o realizar de manera incorrecta los cambios de unidades.
  También se ha observado que los errores a la hora de utilizar la calculadora son muy comunes.
- En la Sesión 7 (repaso final de la unidad) el docente ha constatado que **la gran mayoría del alumnado sólo estudia la tarde antes del examen**. Esto es, muchos de ellos no recordaban conceptos y procedimientos importantes durante la realización de la séptima sesión.
- En cuanto al comportamiento de los grupos, **el comportamiento general es mejor cuando la clase se realiza a primeras horas de la mañana**. En cambio, en las sesiones realizadas después del patio, el alumnado suele estar bastante alborotado.
  También cambia según los días de la semana. El Viernes suele ser el día más complicado en cuanto al control de la conducta se refiere.

8.2. Conclusiones de la UD

A continuación, se presenta las conclusiones que se extraen tras implementar la UD en las dos aulas de 2.º ESO a las que el autor del trabajo ha tenido acceso:

- **Ha sido buena idea realizar una evaluación inicial**, para poder tener un mínimo de información sobre el alumnado al que se iba a aplicar la UD, tal y como recomienda el Modelo Van Hiele en su primera fase de aprendizaje (apartado 2.1.B).
- Dicha evaluación inicial ha demostrado que el **nivel matemático del alumnado es medio-bajo**, y que en general la capacidad de entender los enunciados es bastante baja. Además, ha constatado la gran diversidad que existe en ambas aulas. Los resultados de dicha prueba se encuentran en el apartado 7.1.
- **Las actividades y la UD en general han sido valoradas de forma bastante positiva**, tal y como se comenta en el apartado 7.6.
- En la actividad 1, en el primer grupo se cometió el error de corregir los deberes a pesar de que muy poca gente los había hecho, por lo que se perdió bastante más tiempo del

programado, y luego muchos grupos no pudieron acabar la actividad. Por ello, para el segundo grupo directamente se dieron los resultados de los deberes.

- **Se considera adecuado mandar poca faena para casa**, ya que la mayoría de alumnos no van a hacerlos y además se pierde mucho tiempo corrigiéndola en clase.
- Para las actividades diseñadas, se concluye que es mejor agrupar al alumnado en **grupos de dos personas**, ya que los grupos de tres han resultado demasiado grandes. Sólo en la primera actividad y en el primer grupo se juntaron de tres en tres, en el resto ya se adoptó el formato de parejas.
- Se ha dado cierto **trabajo cooperativo** durante la realización de las prácticas. En general, el alumnado se ha ayudado entre ellos pero ha habido ciertos problemas de entendimiento en alguna pareja en concreto, donde el docente ha tenido que mediar.
- En la segunda actividad, se decidió un par de modificaciones durante la realización de la misma:

  a) Una vez tomadas las medidas en el patio, subir a clase a realizar los cálculos ya que se trata de un lugar más adecuado para trabajar.

  b) Las medidas serían comunes a cada grupo, es decir, el docente realizaría las medidas con ayuda de voluntarios, mientras el resto del alumnado tomaba nota de las medidas tomadas.
- Además, como en la Actividad 2 surgió un problema con la calibración de la aplicación *SmartMeasure*, por lo que el docente debe tener preparadas alternativas suficientes para este tipo de contratiempos. En este caso en concreto, se decidió que lo mejor sería dar unos valores aproximados al alumnado para que así pudiera realizar los cálculos de error absoluto.
- La actividad 3 ha sido bastante bien aceptada y valorada por parte del alumnado en la valoración anónima. De hecho, hubo un par de alumnos que felicitaron al docente al acabar la actividad.
- **Se constata que el alumnado se sitúa entre el primer y segundo nivel de razonamiento de Van Hiele** (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016; Gualdrón & Gutiérrez, 2007) , tal y como se ha supuesto en el apartado 3.1. Se podría decir de algún alumno de altas capacidades ha alcanzado el tercer nivel (explicado en el apartado 2.1.A), pero ninguno ha llegado al cuarto nivel dado que surgieron muchas dudas al comentar las posibles demostraciones del teorema de Tales.
- Para dar un trato justo e igualitario a todo el alumnado, **a todo aquél que** por algún motivo no **pudo realizar alguna de las actividades o el examen parcial, se le ha dado la oportunidad de realizarlo en otra sesión.** En el caso de las actividades 2 y 3, se modificó ligeramente el enunciado de la actividad, además de convertirse en actividades individuales para casa, debido a la imposibilidad de realizar las actividades de la forma que estaban diseñadas.

9. OPINIÓN PERSONAL

Como profesor particular de matemáticas, creía conocer los problemas y dificultades a los que se enfrenta un docente en un instituto. Pero hasta que no he diseñado e implementado una UD en dos clases de un IES, no he sido realmente consciente de los aspectos, tanto positivos como negativos, que acarrea la profesión.

Normalmente, es muy baja la popularidad de las matemáticas entre el alumnado de ESO y Bachillerato. Se suele considerar una asignatura tediosa y aburrida. Por lo tanto, es deber del docente intentar presentar la asignatura de una manera atractiva y divertida, explicando la gran utilidad de la misma en los distintos aspectos de nuestra vida cotidiana.

Con esta intención se ha diseñado el conjunto de esta UD y, en concreto, de las tres actividades planteadas.

Una vez implementada en el centro público donde he realizado mi estancia en prácticas, puedo concluir que la idea de la UD es buena pero que existen aspectos a mejorar. Entre ellos, me he dado cuenta que posiblemente he bajado algo el nivel de exigencia en el examen parcial. Otro aspecto a mejorar sería el planteamiento de los grupos, inicialmente diseñados en tres personas. Observando la dinámica de los grupos, he considerado que es mejor juntar al alumnado en parejas. Este tipo de errores evidentemente se pueden corregir y mejorar para la implementación en futuros cursos.

10. BIBLIOGRAFÍA

Albet, A., Bosch, D., García, M., González-Monfort, N., García Sebastián, M., & Gatell, C. (2018). *GiH 1. Geografia i Història. Comunitat Valenciana.* Barcelona, España. Editorial Vicens Vives. ISBN: 9788468235684.

Aravena, M.; Gutiérrez, A.; & Jaime, A. (2016): Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile, *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 107-128. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/306639

Benedicto, C.; Gutiérrez, A.; & Jaime, A. (2015): Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/306639

Binimelis, M. I. (2010). *Una nueva manera de ver el mundo: la geometría fractal*. RBA.

Cadenas-Sánchez, C., & Huertas-Delgado, F. J. (2013). Informe PISA en España: un análisis al detalle. Extraído el día 27/05/2019 de http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/30018/rev172COL2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Colera, J.; Gaztelu, I., & Colera, R. (2017). *Matemàtiques ESO 2*. Madrid, España. Editorial ANAYA. ISBN: 978-84-698-1522-9.

Coll, C. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de los mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica. *Anuario de psicología/The UB Journal of psychology*, (69), 153-178. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/AnuarioPsicologia/article/viewFile/61321/88955

Del Estado, J. (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Recuperado de http://www.ceice.gva.es/va/web/ensenanzas-en-lenguas/curriculo

Díaz-Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. *2ª. México: McGraw Hill*. Recuperado de http://www.sidalc.net/cgi-bin/wxis.exe/?IsisScript=SIDINA.xis&method=post&formato=2&cantidad=1&expresion=mfn=003250

Gualdrón, E. & Gutiérrez, A. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1275/

Gutiérrez, A. (2017). Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: teoría y práctica. En H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A.P. Canavaro, J.P. da Ponte (Eds.), *O ensino e a aprendizagem da geometria,* 27-39. Lisboa: Instituto de Educación, Universidad de Lisboa. Recuperado 2019 de http://funes.uniandes.edu.co/9438/

Mandelbrot, B. B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*(No. 72.013). Tusquets.

Marín Irigaray, B., & Arnal Bailera, A. (2015). Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO. Recuperado de https://zaguan.unizar.es/record/36857/files/TAZ-TFM-2015-342.pdf

Martín, C., & Navarro, J. I. (2011). Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato. *Madrid, España: Editorial Pirámide*.

Pastor, A. J., & Rodríguez, Á. G. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. In *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Ediciones Alfar. Recuperado el día 13/05/2019 de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5574717

Pérez Prados, M. (2013). Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1.º ESO durante el aprendizaje de geometría plana. Recuperado de https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/9946/TFM.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rodríguez, M. M. G. (2010). La geometría y su didáctica. Revista Digital Innovación y experiencias educativas. N, 32. Recuperado de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_32/MATILDE_GUERRA_2.pdf

Salvador, R. C. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*(Vol. 95). Ministerio de Educación. Recuperado el día 15/03/2019 de https://books.google.es/books

Stice, E., Presnell, K., & Bearman, S. K. (2001). Relation of early menarche to depression, eating disorders, substance abuse, and comorbid psychopathology among adolescent girls. *Developmental psychology*, *37*(5), 608. Recuperado el día 26/04/2019 de https://psycnet.apa.org/record/2001-11105-005

Terán de Serrentino, M., & Pachano Rivera, L. (2009). El trabajo cooperativo en la búsqueda de aprendizajes significativos en clase de matemáticas de la educación básica. *Educere*, *13*(44), 159-167. Recuperado el día 15/03/2019 de http://www.redalyc.org/pdf/356/35614571019.pdf

Tudela Fernández, A. (2019). *Memoria de prácticas*. Universitat Jaume I (trabajo inédito). Castellón de la Plana, España.

10.1. Videografía y webgrafía

- Benoît Mandelbrot. (n.d.) En *Wikipedia*. Consultado el día 16 de abril de 2019 de https://es.wikipedia.org/wiki/Benoît_Mandelbrot
- Cristian Orellana (8 de octubre de 2015). *Crea tus propios fractales.* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=dnuFRjDr-KI
- Fractal. (n.d.) En *Wikipedia*. Consultado el día 16 de abril de 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Fractal
- Informe Pisa. (n.d.) En *Wikipedia*. Consultado el día 27 de mayo de 2019 de https://es.wikipedia.org/wiki/Informe_PISA#PISA_2018
- Red De Cerebros (19 de julio de 2016). *Fractales* [archivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=PPu_94l0o8Q
- Tthsqe12 (15 de abril de 2013). *Mandelbrot Zoom 10^227 [1080x1920]* [archivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk

- https://www.google.es/imghp?hl=es
- http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/practicas/fractales_clasicos/sierpinski.html
- http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/practicas/fractales_clasicos/sierpinski.html
- https://naukas.com/2011/10/17/algunas-propiedades-del-conjunto-de-cantor/
- https://elpais.com/elpais/2016/12/05/media/1480958752_164797.html
- http://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018.html

11. ANEXOS

LISTADO:

ANEXO I - Prueba inicial de la UD

A continuación se presenta la prueba inicial que se repartirá a todo el alumnado en los primeros diez minutos de la primera sesión dedicada a la presente unidad didáctica. Dicha prueba inicial es de gran utilidad para el docente, ya que le permite ver los conocimientos previos que el alumnado posee sobre una determinada materia. Los enunciados y soluciones están en valenciano, debido a que la asignatura se imparte en esta lengua.

Esta prueba consta de cuatro preguntas, todas relacionadas con los triángulos:

1. Enuncia els tres tipus de triangles existents atenent a la seua classificació segons els seus costats i també la seua classificació segons els seus angles.

(SOL: Equilàters, Isòsceles y Escalens; Acutangles, Rectangles y Obtusangles).

2. ¿Quant sumen els tres angles d'un triangle? *(SOL: 180º)*

a) Tinguem un triangle amb angles de 30º, 90º y a. ¿Quant val a? *(SOL: 60º)*

b) Tinguem un triangle amb angles de 100º, 30º y b. ¿Quant val b? *(SOL: 50º)*

3. Calcula l'àrea y el perímetre d'un triangle rectangle que els catets mesuren 3cm i 4cm, i la hipotenusa 5cm.

(SOL: A=6cm^2 y P=12cm).

ANEXO II - Enunciado de la Actividad 1

La ficha que se repartirá a cada grupo de trabajo constará de dos partes:

- Mapa político de Europa, con su escala (1:20.600.000).
- Enunciado de los ejercicios a realizar.

Entonces, la ficha quedará se la siguiente manera (<u>los enunciados y soluciones están en valenciano, debido a que la asignatura se imparte en esta lengua</u>).

MAPA

Imagen 7. Mapa político de Europa (extraída de: Albet, Bosch y García, 2018).

EXERCICIS A REALITZAR (Anar amb compte en el canvi d'unitats. Cal passar els km a cm i viceversa).

<u>Exercici 1:</u>

Mesura la distància que hi ha en el mapa entre València i Roma, en cm. Donat que l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en cm i km entre aquestes ciutats.

(SOLUCIÓ: Considerant que en el mapa la Distància mapa = 5,45cm, Distància real= 1.122,7km = 112.270.000cm).

<u>Exercici 2:</u>
Mesura la distància que hi ha en el mapa entre Londres i Sant Petersburg, en cm. Donat que l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en cm i km entre aquestes ciutats.

(SOLUCIÓ: Considerant que en el mapa la Distància mapa = 10,35cm, Distància real= 2.132,1km = 213.210.000cm).

<u>Exercici 3:</u>
Si la distància real entre Madrid i París és de 1.052,89km i l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en el mapa en cm entre aquestes ciutats.
Comprova amb la regla si la solució es vàlida.

(SOLUCIÓ: Distància mapa = 5,11cm).

<u>Exercici 4:</u>
Si la distància real entre Berlín i Estocolm és de 810,51km i l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en el mapa en cm entre aquestes ciutats.
Comprova amb la regla si la solució es vàlida.

(SOLUCIÓ: Distància mapa = 3,93cm).

<u>Exercici 5</u>: (Ampliació)
Mesura la distància que hi ha en el mapa entre Dublín i París, en cm. Donat que l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en cm i km entre aquestes ciutats.

(SOLUCIÓ: Considerant que en el mapa la Distància mapa = 3,75cm, Distància real= 772,5km = 77.250.000cm).

<u>Exercici 6</u>: (Ampliació)
Si la distància real entre València i Roma és de 1.117,43km i l'escala del mapa és de 1:20.600.000, calcula la distància en el mapa en cm entre aquestes ciutats.
Comprova amb la regla si la solució es vàlida.

(SOLUCIÓ: Distància mapa = 5,42cm).

ANEXO III - Enunciado de la Actividad 2

Per a la realització dels exercicis que es proposen a continuació, cada grup ha de tindre una referència que posarà de manera paral·lela a l'objecte del pati que desitgem mesurar.

El nostre objecte de referència serà una botella de agua, por exemple. D'aquesta manera, les ombres dels dos objectes seran comparables.

Per a mesurar les ombres o altures, utilitza la cinta mètrica que ha portat el mestre.

EXERCICIS A REALITZAR:

1. **<u>Exercici 1. Càlcul de l'altura de la canastra.</u>**
   Utilitzant l'altura i l'ombra de la referència, així com l'ombra de la canastra, calcula l'altura de la canastra.
   (SOLUCIÓ: $\frac{Altura\ Canastra}{Ombra\ Canastra} = \frac{Altura\ Referència}{Ombra\ Referència}$; despejar la Altura Canastra, tot expressat en metres).

2. **<u>Exercici 2. Càlcul de l'altura de la porteria.</u>**
   Utilitzant l'altura i l'ombra de la referència, així com l'ombra del palo de la porteria, calcula la altura de la canastra.
   (SOLUCIÓ: $\frac{Altura\ Porteria}{Ombra\ Porteria} = \frac{Altura\ Referència}{Ombra\ Referència}$; despejar la Altura Porteria, tot expressat en metres).

3. **<u>Exercici 3. Càlcul de l'altura d'una persona.</u>**
   Utilitzant l'altura i l'ombra de la referència, així com l'ombra d'un dels integrants del grup, calcula la altura d'aquesta persona.
   (SOLUCIÓ: $\frac{Altura\ Persona}{Ombra\ Persona} = \frac{Altura\ Referència}{Ombra\ Referència}$; despejar la Altura Persona, tot expressat en metres).

4. **<u>Exercici 4. Càlcul de l'ombra d'una persona.</u>**
   Utilitzant l'altura i l'ombra de la referència, així com l'ombra d'un dels integrants del grup, calcula l'ombra d'aquesta persona.
   (SOLUCIÓ: $\frac{Altura\ Persona}{Ombra\ Persona} = \frac{Altura\ Referència}{Ombra\ Referència}$; despejar la Ombra Persona, tot expressat en metres).

5. **<u>Exercici 5. Càlcul de l'error absolut.</u>**
   Demana-li al mestre (un dels dos) que et mesure la distància que necessites mitjançant l'aplicació ''SmartMeasure'' que tindrà instal·lada al seu telèfon mòbil.

6. **<u>Exercici d'Ampliació.</u>**
   Mitjançant la fórmula: Error abs = Mesura real - Mesura aproximada, calcula els errors absoluts comesos en els exercicis anteriors.

ANEX IV - Enunciado de la Actividad 3

L'enunciat de los exercicis s'exposarà verbalment per part del docent. A més a més, el docent ho escriurà en la pissarra.

En esta tercera activitat es realitzaran tres exercicis diferents:

1) **Exercici 1. Conjunt de Cantor.**
   Cada membre del grup haurà de dibuixar en un full el Conjunto de Cantor. (Per açò el docent haurà explicat prèviament en què consisteix aquest conjunto).

2) **Exercici 2.**
   Després de visualitzar el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=dnuFRjDr-KI (des de el 0:00 fins al 3:28), cada grup haurà de realitzar la construcció d'aquest fractal con la única ajuda d'unes tisores y una cartolina.

3) **Exercici 3. Triangle de Sierpinski.**
   Després de visualitzar el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=dnuFRjDr-KI (des de el 3:28 fins al 10:26), els grups hauran de realitzar un resumen escrit del procediment que acaben de visualitzar.

ANEXO V - Examen Parcial de la UD

El examen parcial de la presente Unidad Didáctica se realizará en la última sesión dedicada a la presente UD. Dado que la asignatura se imparte en valenciano, los enunciados están escritos en esta lengua.

Esta prueba está diseñada para que se pueda realizar en unos 40 minutos, aunque el alumnado dispondrá aproximadamente de 50 minutos. La prueba consta de cinco ejercicios distintos a realizar.

Ejercicio sobre k^2 y k^3. Elaboración propia.

1. La raó de semblança entre dos caixes de cartolina és de 2,2. Para fabricar la caixa petita s'ha necessitat 6 dm^2 de cartolina, y el seu volum és de 3,4 L.

a) Quina superfície de cartolina necessitem per a construir la caixa gran? (1 PUNT).

$k^2 = A_g / A_p$; aleshores $A_g = (2,2)^2 \cdot 6\ dm^2 = \underline{29{,}04\ dm^2}$.

b) Quin serà el seu volum? (1 PUNT).

$k^3 = V_g / V_p$; aleshores $V_g = (2,2)^3 \cdot 3,4\ L = \underline{36{,}203\ L}$.

Ejercicio sobre la escala de un mapa. Elaboración propia.

2. a) Sabent que l'escala d'un determinat mapa és de 1: 5.000.000, y que la distància real entre València i Palma de Mallorca és de 260km en línea recta. Quina ha de ser la distància en mm i en cm entre ambdós ciutats en el mapa?. (1 PUNT).

$\frac{1}{5.000.000} = \frac{D\ mapa}{D\ real}$ *i com 260km = 260.000.000 mm;*

aleshores $D_{mapa} = \frac{D\ real}{5.000.000} = \frac{260.000.000}{5.000.000} = \frac{260}{5} = 52\ mm = \underline{5{,}2\ cm}$.

b) Sabent que l'escala d'un determinat mapa és de 1: 5.000.000, y que la distància al mapa és de 5,6 cm entre Castelló i Barcelona, quina és la distància real en km? (1 PUNT).

$\frac{1}{5.000.000} = \frac{D\ mapa}{D\ real}$ *i com* $D_{mapa} = 5{,}6cm$;

aleshores $D_{real} = 5{,}6cm \cdot 5.000.000 = 28.000.000cm = \underline{280km}$.

Ejercicio sobre la aplicación del Teorema de Tales. Elaboración propia.

3. Tinguem dos triangles que sabem que són semblants. (1 PUNT).

Sabent que a = 4 cm ; b = 3 cm ; d = 5 cm. Calcula quant mesura el costat c, expressat en cm.

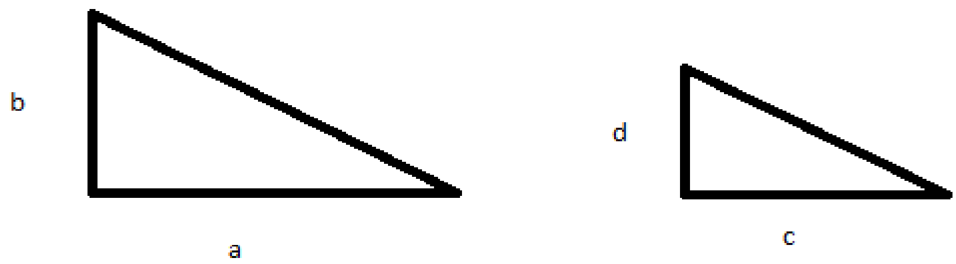


Imagen 8. Ejercicio 3 del examen parcial (elaboración propia).

Aplicant el Teorema de Tales: $\frac{3}{5} = \frac{4}{c}$ *; aclarim c i resulta: c =* $\frac{4 \cdot 5}{3}$ *=* *6,6 cm.*

Ejercicio sobre la aplicación del Teorema de Tales. Extraído del ejercicio 6 de la página 208.

4. Els costats d'un triangle mesuren A=7,5 cm, B=18 cm y C=19,5 cm. Es construeix un segon triangles semblant al primer, amb el seu costat menor de a=5 cm. (2 PUNTS).

a) Quina és la raó de semblança entre els dos triangles? *k =* $\frac{A}{a} = \frac{7,5}{5}$ *= 1,5*

b) Calcula las mesures dels costats b i c (en cm).

Ja que k = $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ *; aleshores 1,5 =* $\frac{18}{b} = \frac{19,5}{c}$.

Per el que b = $\frac{18}{1,5}$ *= 12 cm ; c =* $\frac{19,5}{1,5}$ *= 13 cm.*

Problema sobre la aplicación del Teorema de Tales . Elaboración propia.

5. a) Calcula el valor de x (en metres) per al següent triangle. (1,5 PUNTS).

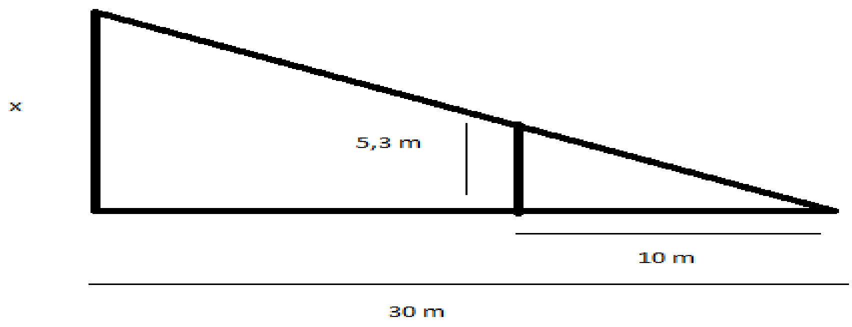


Imagen 9. Ejercicio 5 a) del examen parcial (elaboración propia).

Ja que k = $\frac{30}{10} = \frac{x}{5{,}3}$; *aleshores x =* $\frac{30 \cdot 5{,}3}{10} = 5{,}3 \cdot 3 =$ *15,9m.*

b) Calcula el valor de y i de d (en cm) per al següent triangle (1,5 PUNTS).

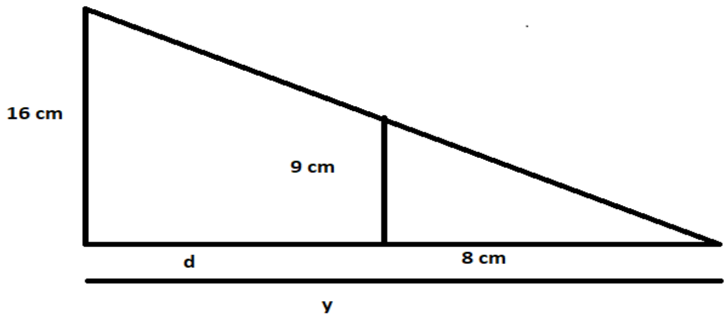


Imagen 10. Ejercicio 5 b) del examen parcial (elaboración propia).

Ja que $\frac{16}{9} = \frac{y}{8}$; *aleshores y =* $\frac{16 \cdot 8}{9} =$ *14,22 cm i d = 6,22cm.*

ANEXO VI - Valoración al docente

Com s'ha mencionat anteriorment, en la octava sessió a part de realitzar el examen parcial, se realitzar la valoració anònima al docent por part del alumnat. Per això, el docent repartirà un formulari como el que se presenta a continuació.

Aquest formulari consta d'onze preguntes. Les deu primeres tenen cinc possibles respostes, segons el nivell de satisfacció de cada alumne. També es donarà l'opció d'una resposta oberta, per a possibles queixes o suggeriments en cas de que algun alumne desitge realitzar qualsevol tipus de valoració.

Las preguntes son las següents:

	MOLT EN DESACORD	DESACORD	REGULAR	D'ACORD	MOLT D'ACORD
1. Consideres que has aprés els conceptes més importants de la Semblança Geomètrica?					
2. T'ha agradat l'Activitat 1 (Mapes)?					
3. T'ha agradat l'Activitat 2 (Mesura de altures a partir de la ombra)?					
4. T'ha agradat l'Activitat 3 (Construcció de fractals)?					
5. Has entés lleugerament en què consisteix la geometria fractal?					
6. Consideres una bona idea la realització de las tres activitats en grup?					
7. Te han paregut entretingudes les activitats?					
8. Has ajudat o t'han ajudat tus companys durant la realització de las activitats?					
9. Consideres que el mestre ha explicat de manera correcta los conceptes i procediments presents en el tema?					
10. Consideres que el mestre ha explicat de manera correcta el sistema d'avaluació de la Unitat? (El pes de cada activitat + examen).					

Tabla 5. Valoración anónima al docente (elaboración propia).

11. ¿Tens alguna suggeriment o queixa? ¿Què creus que es podria millorar? (Escriure, opcional).

ANEXO VII - Resultados de los ejercicios propuestos en la UD

PÀGINA 195

Exercici 1 (Proposat): a) k = 0.75 = 75 % b) 15 cm c) 12 i 18 cm.

Exercici 2 (Proposat): 5 i 15 cm.

PÀGINA 197

Exercici 4 (Proposat): a) k = 2 b) 2,8m c) Preu Àrea = 6.600€ d) Preu = 1.880€.

Exercici 5 (Proposat): a) k = $\frac{20}{8}$ = 2,5.

b) Reproducció A: $\frac{10200}{8} = \frac{1800}{x}$; x =1,41cm; Reproducció B: $\frac{10200}{20} = \frac{1800}{y}$; y =3,53cm.

c) Pes es relaciona amb el volum: $k^3 = 2{,}5^3 = \frac{\text{Pes gran}}{200\text{g}}$; Pes gran = 3.125g = 3,125kg.

d) Quantitat de pintura es relaciona amb la Superficie: $k^2 = 2{,}5^2 = \frac{400}{\text{Pint xic}}$; Pint xic = 64g.

PÀGINA 202

Exercici 2 (Proposat): 3,2 cm.

PÀGINA 203

Exercici 3 (Proposat): $\frac{4}{1{,}83} = \frac{8}{x}$; x = 3,66 m ; Distància = 8 - 3,66 = 4,34m.

Exercici 4 (Proposat): 1,65 + 0,20 + 1 = 2,85m ; $\frac{4}{2{,}85} = \frac{8}{x}$; x = 5,7m ; Distància = 8 - 5,7 = 2,3m.

PÀGINA 204

Exercici 1 (Resolt): Si dos triangles tenen iguals els seus tres angles, llavors són semblants. AB = 1,5 cm.

Exercici 2 (Resolt): k = 1,5. x = 24 cm e y = 15 cm.

Exercici 2 (Proposat): $\frac{\text{Costat gran T1}}{\text{Costat gran T2}} = \frac{\text{Costat mitjà T1}}{\text{LCostat mitjà T2}} = \frac{\text{Costat petit T1}}{\text{Costat petit T2}}$

$$\frac{289}{136} = \frac{255}{120} = \frac{136}{64} = 2{,}125.$$

Exercici 4 (Proposat): a= 13cm i b = 28,8cm.

PÀGINA 206

Exercici Resolt: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{a}{1{,}6} = \frac{3{,}5}{0{,}7}$; a= 8m.

Exercici 1 (Proposat): Ja què $\frac{x}{2} = \frac{49}{1{,}25}$; aleshores x = 78,4m.

Exercici 2 (Proposat): $\frac{z}{12} = \frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625$; aleshores x= 3,75m ; y= 5m ; z= 7,5m.

PÀGINA 207

Exercici 3 (Proposat): a) Ambdós triangles són semblants degut a que son rectangles i tenen un angle agut igual.

b) $\frac{ED}{CB} = \frac{CD}{AB}$; ED = $\frac{1{,}44 \cdot 6{,}5}{2{,}4} = 3{,}9$m.

c) Altura de l'edifici = 3m + ED = 6,9m.

PÀGINA 208 (FINAL DEL TEMA)

Exercici 3 (Proposat):): a) $\frac{12}{a} = \frac{45}{30}$; aleshores a= 8 cm.

b) $\frac{6}{b} = \frac{4}{3}$; aleshores b= 9/2 = 4,5 cm.

c) $\frac{3}{c} = \frac{12}{20}$; aleshores c= 5 cm.

d) $\frac{18}{d} = \frac{3}{1{,}5}$; aleshores d= 9 cm.

Exercici 4 (Proposat): -Angles: 180º = 51º + 33º + alfa; alfa = 96º.

-Semblança dels seus costats: $\frac{40}{20} = \frac{51}{c} = \frac{73}{b}$; c= 25,5m i b= 36,5m.

Exercici 5 (Proposat): Mateixa solució que l'Exercici 3 de la pàgina 204. (Propietat dels triangles isòsceles semblants, que tenen els seus tres angles iguals).

Exercici 6 (Proposat): a) $\mathrm{k} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2}$ = 1,5.

b) $\frac{19{,}5}{y} = \frac{18}{x}$ = 1,5; Aleshores x= 18/1,5 = 12 cm ; x= 19,5/1,5 = 13 cm.

c) Sí, si el primer y el segon triangle són semblants, ja que tenen els mateixos angles.

Exercici 7 (Proposat): En ambdós triangles es compleix que 180º = 90º + 30º + alfa.

Aleshores ambdós triangles són semblants.

PÀGINA 209 (FINAL DEL TEMA)

Exercici 11 (Proposat): a) $\mathrm{k} = \frac{12}{10} = 1{,}2$. b) 1,2 = $\frac{\mathrm{x}}{15}$; x= 18cm.

Exercici 12 (Proposat): $\mathrm{k} = \frac{9{,}6}{1{,}44} = \frac{11}{\mathrm{C}}$; C = 1,65m.

Exercici 14 (Proposat): a) k = $\frac{1}{30.000} = \frac{\mathrm{L\ petit}}{\mathrm{L\ gran}}$; L_{real} = 2,3 · 30.000 = 69.000cm = 690m.

b) $\frac{1}{30.000} = \frac{\text{L petit}}{\text{L gran}} = \frac{\text{L petit}}{150.000\text{cm}}$; $L_{petit} = \frac{150.000\text{cm}}{30.000}$ = 5cm.

Exercici 15 (Proposat): a) $\frac{1}{4} = \frac{\text{L petit}}{\text{L gran}} = \frac{\text{L rèplica}}{\text{L real}}$; $L_{real} = 4 \cdot 11{,}5 = 46$m.

b) Escala = k $= \frac{\text{L petit}}{\text{L gran}} = \frac{1{,}2\text{m}}{46\text{m}}$ = 0,026 = $\frac{1}{38}$.

Exercici 16 (Proposat): a) $\frac{1}{40} = \frac{\text{L dibuix}}{\text{L real}} = \frac{11{,}75}{\text{y}} = \frac{3}{x} = \frac{5}{z}$.

b) Resultats: x = 120cm = 1,2m ; y = 470cm = 4,7m ; z=200cm = 2m.

PÀGINA 211 (FINAL DEL TEMA)

Exercici 19 (Proposat): $\frac{16}{1{,}76} = \frac{x}{3{,}3}$; x=30m ; Distància = 3,3 +3m = 33,3m.

Exercici 20 (Proposat): $\frac{\text{x}}{4} = \frac{25}{5}$; x=20m.

Exercici 21 (Proposat): $\frac{30}{10} = \frac{h}{5{,}3}$; h=15,9m.

Exercici 23 (Proposat): $\frac{5{,}5}{0{,}9} = \frac{h}{0{,}5}$; h=3,05m.

Exercici 24 (Proposat): Cura amb les unitats. $\frac{48\text{m}}{0{,}8\text{m}} = \frac{h}{0{,}52m}$; h=31,2m ;

Altura de l'edifici=31,2 +1= 32,1m.

Exercici 25 (Proposat): $\frac{1{,}8}{0{,}3} = \frac{18}{3}$ = 6 = $\frac{\text{x}}{0{,}5}$; x = 3m.

ANEXO VIII - Presentación PowerPoint para la Actividad 3 - Fractales

Todas las imágenes que aparecen en la presentación del PowerPoint que se expondrá en la Actividad 3 han sido extraídas de Google Imágenes https://www.google.es/imghp?hl=es.

A continuación se presentan todas las diapositivas de dicho PowerPoint:

- Diapositiva 1

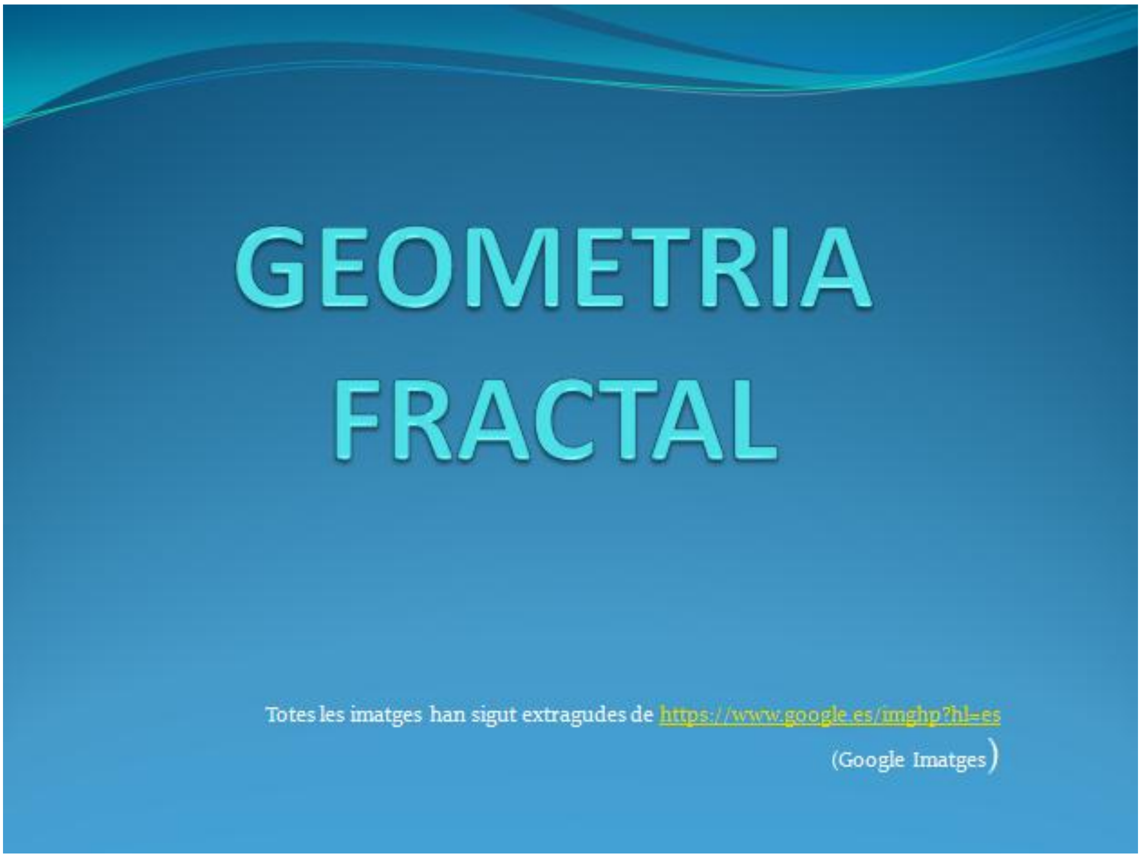


Imagen 11. Diapositiva 1/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 2:

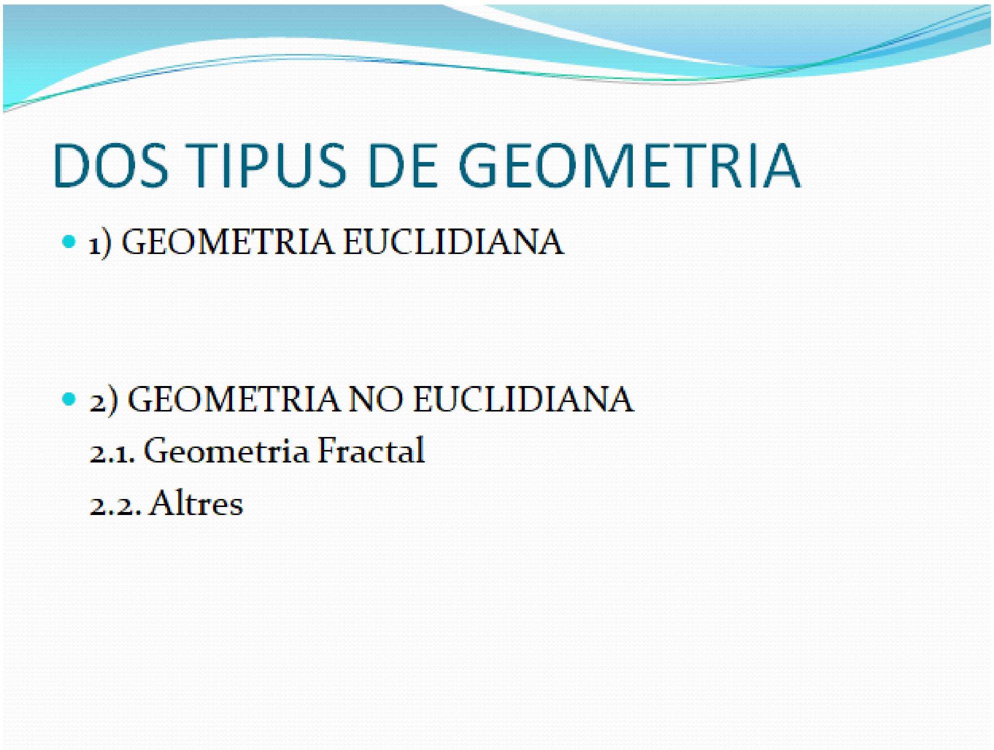


Imagen 12. Diapositiva 2/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 3:

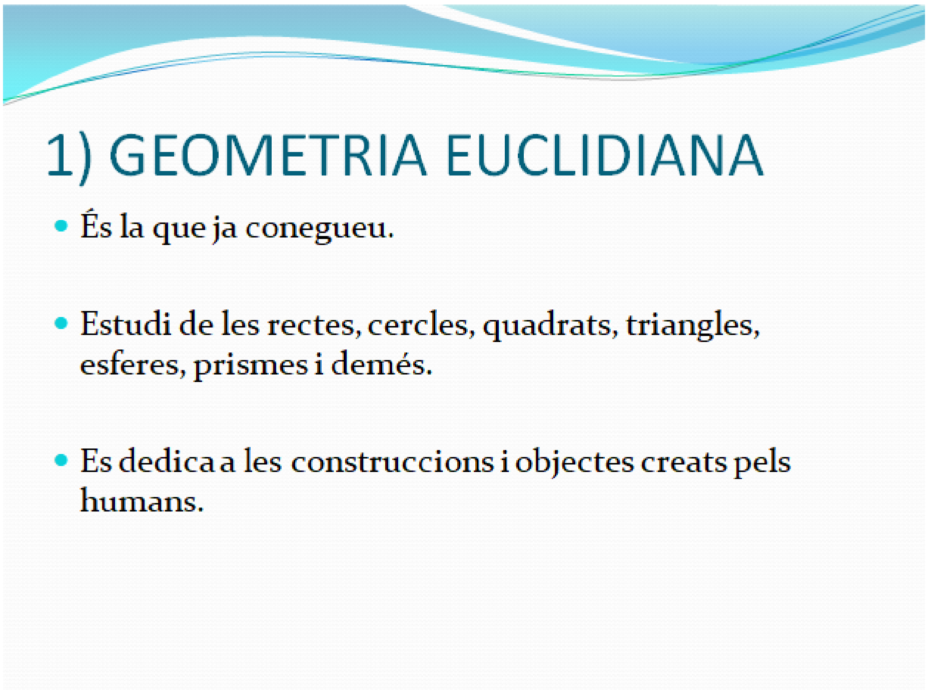


Imagen 13. Diapositiva 3/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 4:

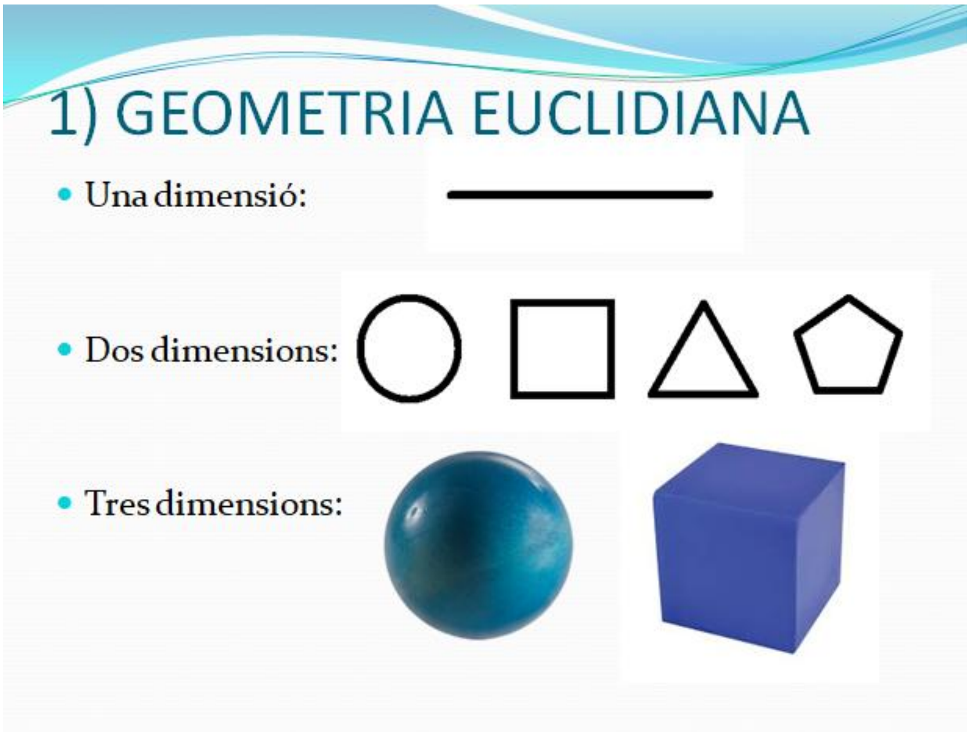


Imagen 14. Diapositiva 4/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 5:

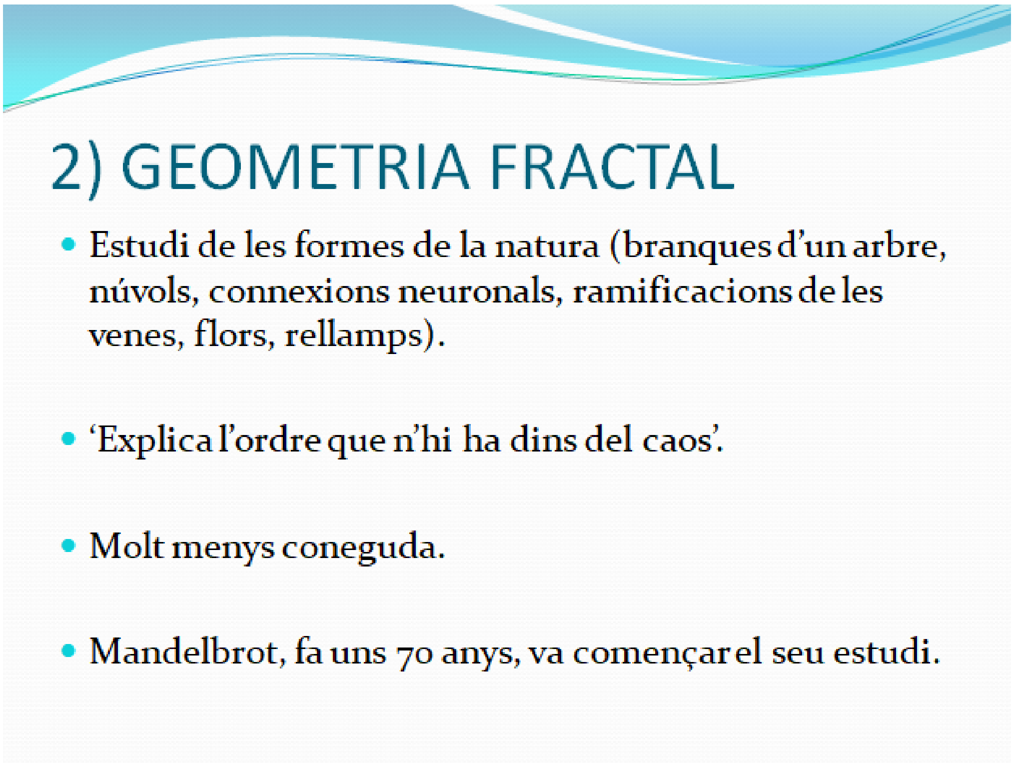


Imagen 15. Diapositiva 5/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 6:

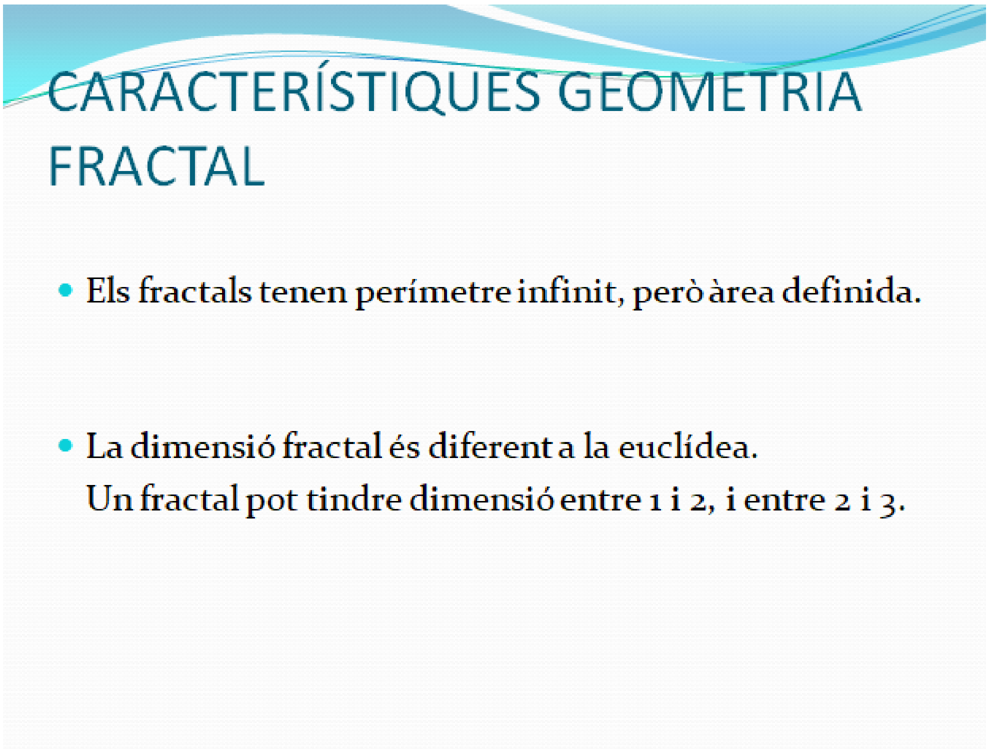


Imagen 16. Diapositiva 6/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 7:

Imagen 17. Diapositiva 7/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 8:

Imagen 18. Diapositiva 8/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 9:

Imagen 19. Diapositiva 9/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 10:

Imagen 20. Diapositiva 10/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 11:

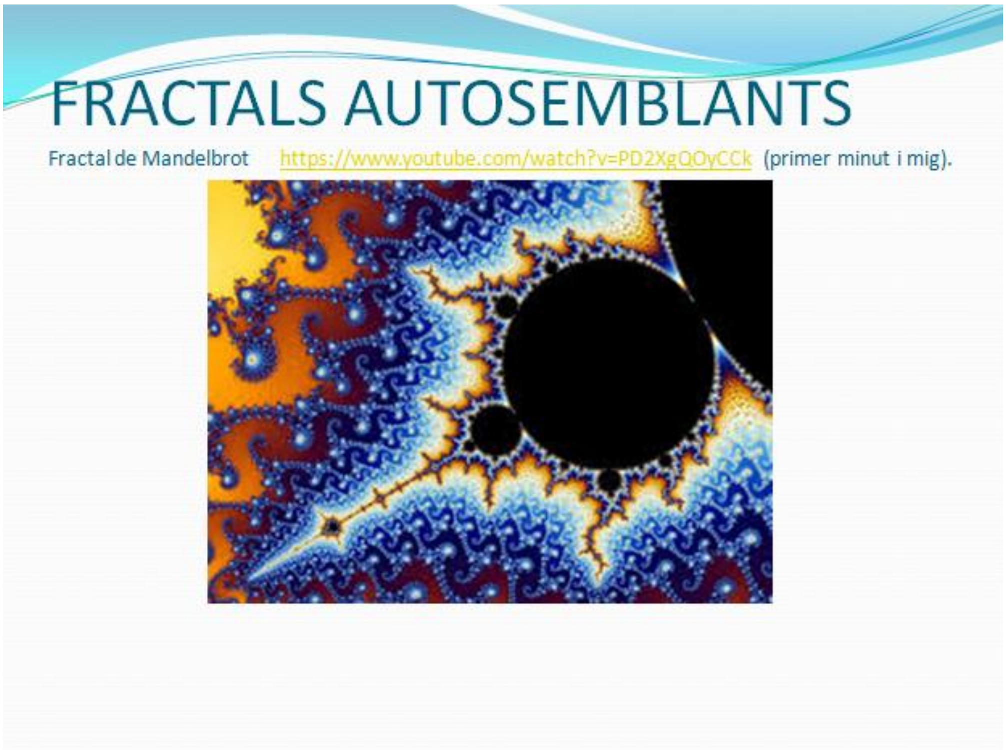


Imagen 21. Diapositiva 11/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 12:

Imagen 22. Diapositiva 12/13 del PowerPoint (elaboración propia).

- Diapositiva 13:

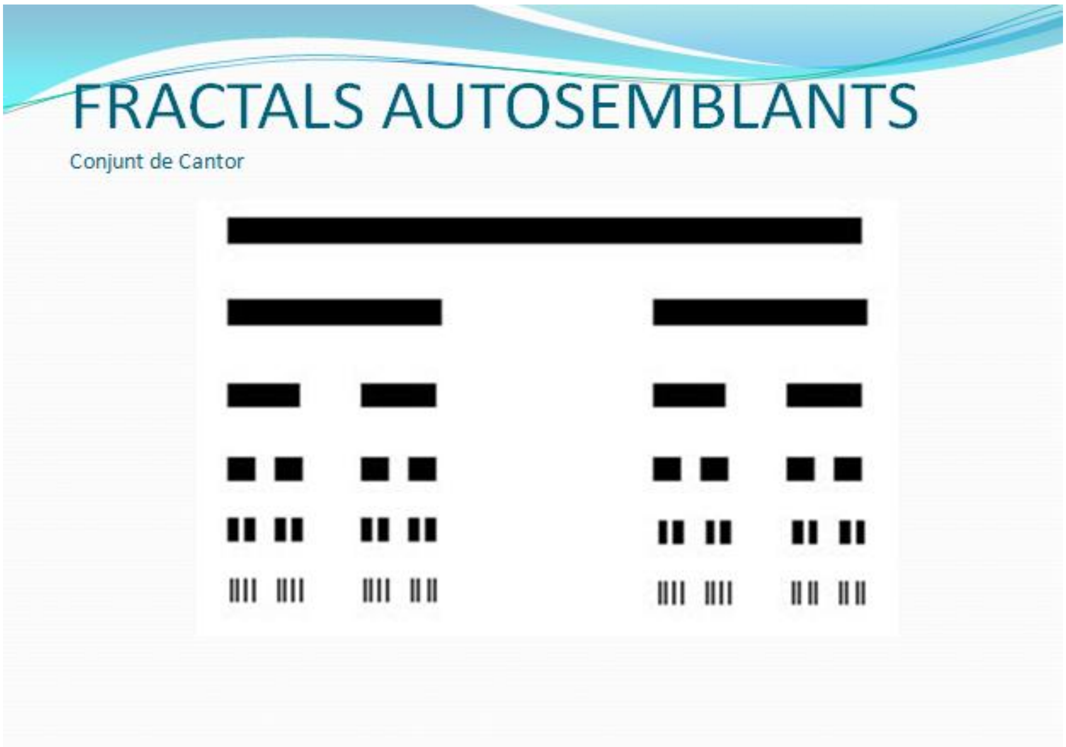
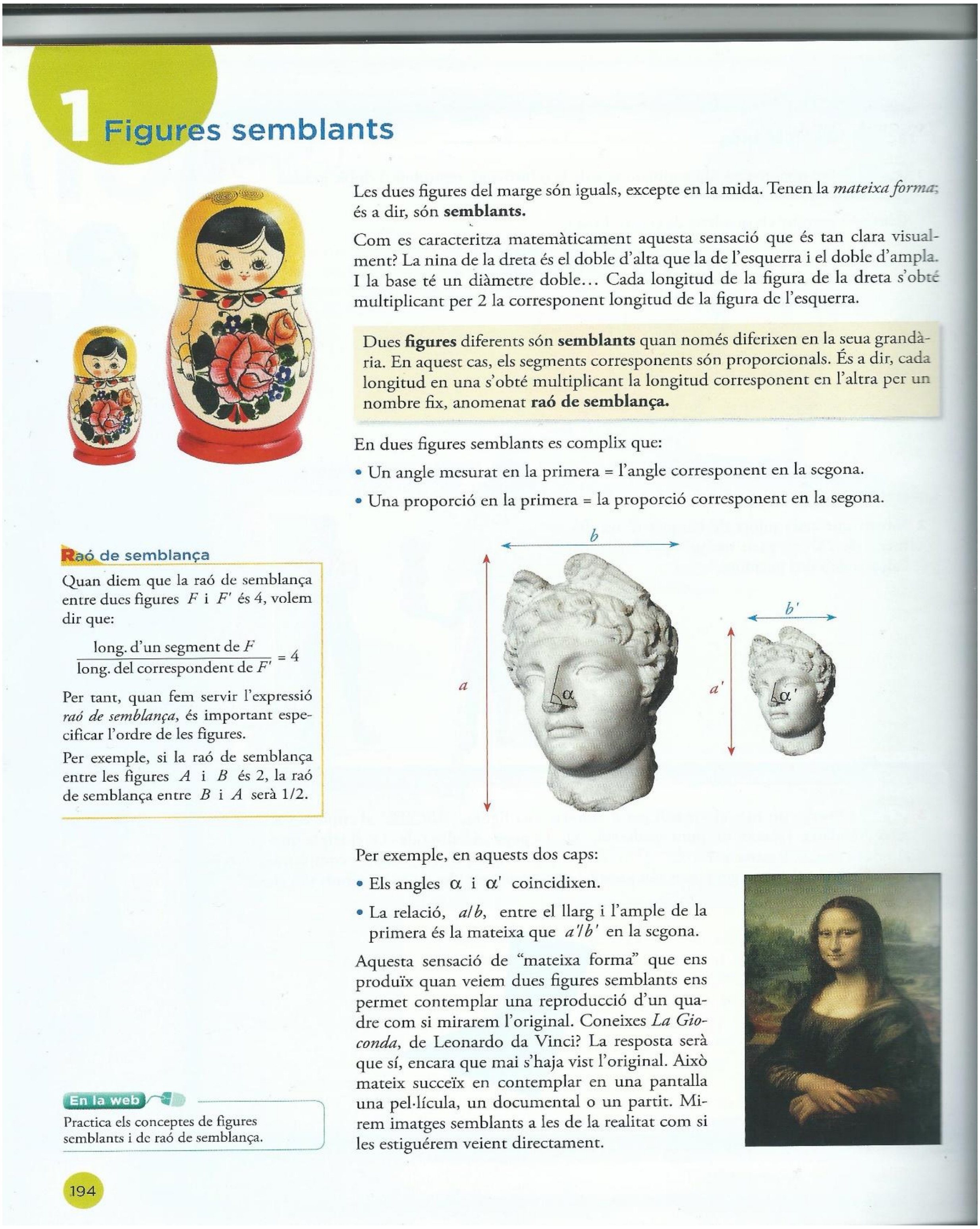


Imagen 23. Diapositiva 13/13 del PowerPoint (elaboración propia).

ANEXO IX - Páginas del libro de texto empleadas en la UD

A continuación se presenta las páginas del libro de texto ''MATEMÀTIQUES 2 ESO'' (Colera, Gaztelu y Colera, 2016) que se ha utilizado como apoyo para la implementación de la UD:

-Página 194:



1 Figures semblants

Les dues figures del marge són iguals, excepte en la mida. Tenen la *mateixa forma*; és a dir, són **semblants.**

Com es caracteritza matemàticament aquesta sensació que és tan clara visualment? La nina de la dreta és el doble d'alta que la de l'esquerra i el doble d'ampla. I la base té un diàmetre doble… Cada longitud de la figura de la dreta s'obté multiplicant per 2 la corresponent longitud de la figura de l'esquerra.

Dues **figures** diferents són **semblants** quan només diferixen en la seua grandària. En aquest cas, els segments corresponents són proporcionals. És a dir, cada longitud en una s'obté multiplicant la longitud corresponent en l'altra per un nombre fix, anomenat **raó de semblança.**

En dues figures semblants es complix que:

- Un angle mesurat en la primera = l'angle corresponent en la segona.
- Una proporció en la primera = la proporció corresponent en la segona.

b a α b' a' α'

Per exemple, en aquests dos caps:

- Els angles α i α' coincidixen.
- La relació, a/b, entre el llarg i l'ample de la primera és la mateixa que a'/b' en la segona.

Aquesta sensació de "mateixa forma" que ens produïx quan veiem dues figures semblants ens permet contemplar una reproducció d'un quadre com si mirarem l'original. Coneixes *La Gioconda*, de Leonardo da Vinci? La resposta serà que sí, encara que mai s'haja vist l'original. Això mateix succeïx en contemplar en una pantalla una pel·lícula, un documental o un partit. Mirem imatges semblants a les de la realitat com si les estiguérem veient directament.

Raó de semblança

Quan diem que la raó de semblança entre dues figures F i F' és 4, volem dir que:

$$\frac{\text{long. d'un segment de } F}{\text{long. del correspondent de } F'} = 4$$

Per tant, quan fem servir l'expressió *raó de semblança*, és important especificar l'ordre de les figures.

Per exemple, si la raó de semblança entre les figures A i B és 2, la raó de semblança entre B i A serà 1/2.

En la web

Practica els conceptes de figures semblants i de raó de semblança.

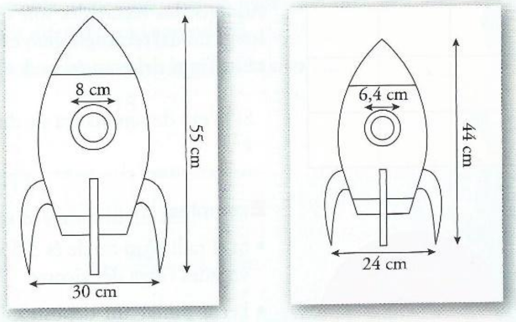
194

Imagen 24. Página 194 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 195:

Exercicis resolts

1. ***Amb una fotocopiadora hem reduït el dibuix de l'esquerra i hem obtingut el de la dreta. Quina ha sigut la reducció?***



Si dividim qualsevol segment de la segona figura pel corresponent de la primera, el quocient és 0,8.

Per exemple:

- L'alçària del coet → $\frac{44}{55} = 0{,}8$
- L'amplària del coet → $\frac{24}{30} = 0{,}8$
- El diàmetre de la finestra → $\frac{6{,}4}{8} = 0{,}8$

Aquest quocient (0,8) és la raó de semblança que transforma la primera figura en la segona.

Les fotocopiadores expressen la raó de semblança en tants per cent. En aquest cas, és el 80 %.

2. ***La raó de semblança entre dos triangles semblants és 0,4. Si el més gran té 3 cm de base i 5 cm d'altura, quant mesuren la base i l'altura del menor?***

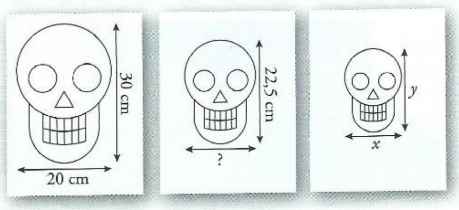
Anomenem a i b l'altura i la base del triangle menor:

- $\frac{a}{5} = 0{,}4 \rightarrow a = 5 \cdot 0{,}4 = 2$ cm
- $\frac{b}{3} = 0{,}4 \rightarrow b = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ cm

Per tant, el triangle menor té 1,2 cm de base i 2 cm d'altura.

Pensa i practica

1. Les dues figures de la dreta són reduccions que s'han fet en una fotocopiadora sobre la figura de l'esquerra:



a) Quina reducció s'ha aplicat a la pàgina central? (Expressa-la en tant per cent).

b) Quant mesura l'ample de la calavera del full central?

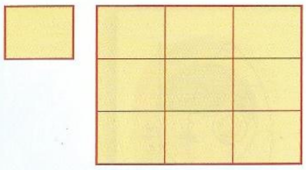
c) Calcula els valors de x i y sabent que la reducció de la pàgina de la dreta és del 60 %.

2. Dos rectangles semblants tenen una raó de semblança de 0,8. Les dimensions del menor són 4 cm d'ample per 12 cm d'alt. Quines són les dimensions del rectangle gran?

Imagen 25. Página 195 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

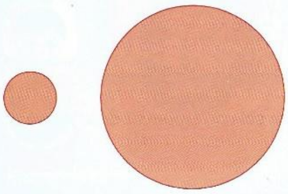
-Página 196:

Relació entre les àrees de dues figures semblants



Aquests dos rectangles són semblants. La raó de semblança és 3; és a dir, cada longitud del rectangle gran és triple de la corresponent longitud en el xicotet. Per tant, l'àrea del gran és $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ vegades l'àrea del xicotet.

Si la raó de semblança de dues figures és k, llavors la raó de les seues àrees és k^2.

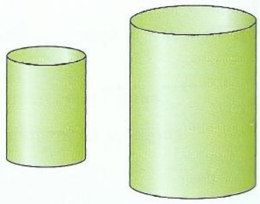


Dos cercles sempre són semblants. La raó de semblança és el quocient dels seus radis.

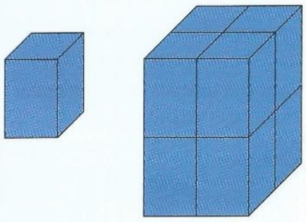
Exemples

- Si el radi d'un cercle és 3,5 vegades el d'un altre, l'àrea del gran és $3{,}5^2 = 12{,}25$ vegades l'àrea del xicotet.
- Per a pintar un depòsit cilíndric, s'han gastat 12,5 kg de pintura. Un altre depòsit és semblant a l'anterior, amb raó de semblança 1,6. Quanta pintura es necessitarà per a pintar-lo?

  L'àrea del segon cilindre és $1{,}6^2 = 2{,}56$ vegades la del primer. Per tant, es necessitarà $12{,}5 \cdot 2{,}56 = 32$ kg de pintura.



Relació entre els volums de dues figures semblants



Aquests dos ortoedres són semblants. La raó de semblança és 2; és a dir, cada longitud del gran és doble de la corresponent en el xicotet. Per tant, el volum del gran és $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ vegades el volum del xicotet.

Si la raó de semblança de dos cossos és k, llavors la raó dels seus volums és k^3.

Exemples

- Si el radi d'una esfera és 3,5 vegades el d'una altra, el volum de la gran és $3{,}5^3 = 42{,}875$ vegades el volum de la xicoteta.
- Si un depòsit cilíndric és semblant a un altre, amb raó de semblança 1,6, i el valor del petroli que cap en el xicotet és 3 750 €, aleshores el valor del petroli que cap en el segon és:

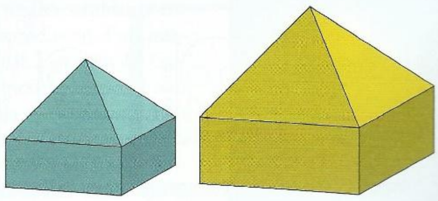
$$3\,750 \cdot 1{,}6^3 = 3\,750 \cdot 4{,}096 = 15\,360 \text{ €}$$

En la web

Practica la semblança d'àrees.

Pensa i practica

3. Aquestes dues casetes de cartolina són semblants. La raó de semblança és 1,5. Per a fabricar la xicoteta, s'han necessitat 7,2 dm^2 de cartolina, i el seu volum és 6,4 *l*. Quanta cartolina porta la gran i quin volum té?



196

Imagen 26. Página 196 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 197:

Problema resolt

En una botiga xicoteta de Florència venen reproduccions del David, de Miquel Àngel. N'hi ha de dues mides: de 18 cm i de 12 cm d'alçària.

a) Són figures semblants? Quina és la raó de semblança entre l'estàtua gran i la xicoteta?

b) El cap de la figura major mesura 2,25 cm d'alt. Quant mesura el de la xicoteta?

c) Si el cap de l'estàtua original mesura 64,6 cm d'alt, quina alçària té l'estàtua?

d) Si les dues reproduccions estan fetes del mateix material i la xicoteta pesa 150 g, quant pesa la gran?

e) Si per a pintar la xicoteta gastem 4,50 €, quant ens costarà pintar la gran?

a) Sí, són semblants perquè tenen la mateixa forma; és a dir, només diferixen en la grandària.

La raó de semblança entre la gran i la xicoteta és:

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) $\frac{2{,}25}{18} = \frac{a}{12} \rightarrow a = 1{,}5$ cm

Es podria haver obtingut així:

$$a = \frac{2{,}25}{1{,}5} = 1{,}5 \text{ cm}$$

c) La relación $\frac{18}{2{,}25}$ entre l'alçària de l'estàtua i la mida del cap es complix també en l'estàtua real.

$$\frac{alçària}{64{,}6} = \frac{18}{2{,}25} \rightarrow alçària = \frac{18 \cdot 64{,}6}{2{,}25} = 516{,}8 \approx 517 \text{ cm} = 5{,}17 \text{ m}$$

L'alçària de l'estàtua original és 5,17 m.

d) El pes és proporcional al volum. I el volum de la gran és $1{,}5^3 = 3{,}375$ vegades el volum de la xicoteta. Per tant:

Pes de la figura gran = $150 \cdot 3{,}375 = 506{,}25 \approx 506$ g

e) El cost de la pintura és proporcional a la superfície. I la superfície de la gran és $1{,}5^2 = 2{,}25$ vegades la de la xicoteta. Per tant:

Cost de pintar la figura gran = $4{,}5 \cdot 2{,}25 = 10{,}13$ €

Pensa i practica

4. Dues piscines són semblants. La xicoteta té 15 m de llarg, i la gran, 30 m.

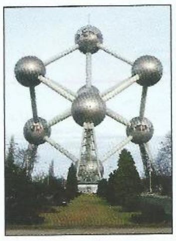
a) Quina és la raó de semblança?

b) Si la xicoteta té 1,40 m de profunditat, quina és la profunditat de la gran?

c) Impermeabilitzar l'interior de la xicoteta va costar 1 650 €. Quant costarà impermeabilitzar la gran?

d) Omplir d'aigua la xicoteta costa 235 €. Quant costarà omplir la gran?

5. L'*Atomium* és un monument construït a Brussel·les (Bèlgica) per a l'exposició universal de 1958. La seua alçària és de 102 m, i cadascuna de les esferes que el componen té 18 m de diàmetre.



A la botiga de records hi ha dues reproduccions de l'*Atomium*: de 8 cm i de 20 cm d'alçària.

a) Quina és la raó de semblança entre aquestes?

b) Quin és el diàmetre de cada una de les esferes de les reproduccions?

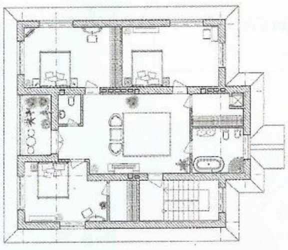
c) Si la maqueta xicoteta pesa 200 g, quant pesa la gran?

d) Per a pintar la gran, es necessiten 400 g de pintura. Quant gastarem per a la xicoteta?

Imagen 27. Página 197 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 198:

2 Plans, mapes i maquetes



Xiques tocant el piano, de Renoir.

Qui es disposa a comprar o a llogar una casa, l'estudia amb tota cura. Gran part d'aquest estudi se sol fer sobre el pla.

El **pla** d'una casa és (ha de ser) una imatge fidel de la realitat. Té la mateixa distribució, la mateixa forma que la casa real, i les seues dimensions estan reduïdes segons una escala. És a dir, la planta de la casa i el pla són **figures semblants.**

Per la mateixa raó, un **mapa** és una figura semblant a la porció de territori que representa.

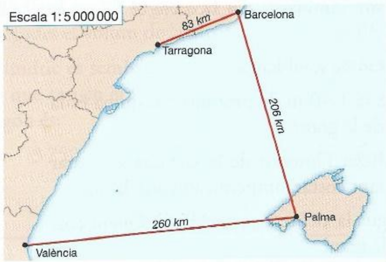
Quan consultem un pla o un mapa, quan contemplem una fotografia, ho fem sabent que són figures semblants a la realitat que representen.

Si de la realitat només ens interessa la forma, la composició, el color…, contemplem la reproducció com si fóra l'autèntica. No obstant això, en consultar un pla o un mapa, a més de la forma, importen les mides i les distàncies en la realitat. Per això, un pla o un mapa sempre va acompanyat de l'escala a la qual està construït.

- Els plans i els mapes són semblants a la realitat que representen. En aquests, a més de la distribució de llocs, importen les mides i les distàncies. Per això porten una escala.
- L'**escala** és el quocient entre cada longitud de la reproducció (mapa, pla o maqueta) i la corresponent longitud en la realitat. És a dir, és la **raó de semblança** entre la reproducció i la realitat.

Exemple

En aquest mapa de la costa mediterrània i de les illes Balears, l'escala 1:5 000 000 significa que cada distància de la realitat s'obté multiplicant per 5 000 000 la corresponent en el mapa.



Comprovem que efectivament les distàncies corresponents a la realitat són 5 000 000 de vegades les seues mesures sobre el mapa.

Distància entre València i Palma:

$$\frac{\text{Distància real}}{\text{Distància en el mapa}} = \frac{260 \text{ km}}{52 \text{ mm}} = \frac{260\,000\,000 \text{ mm}}{52 \text{ mm}} = 5\,000\,000$$

- Comprova tu la resta de les mesures.

198

Imagen 28. Página 198 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 199:

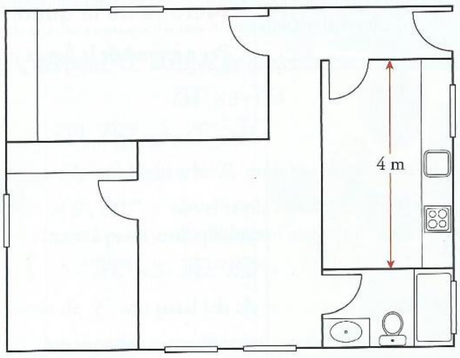
Obtenció de l'escala

Quan se'ns dóna una reproducció (pla, mapa o maqueta) sense indicar-ne l'escala, podem esbrinar-la si coneixem la distància real entre dos dels seus punts.

Per exemple, si al càmping que hi ha al pla de l'esquerra coneixem la distància real de la font a l'embarcador, podrem esbrinar l'escala i, amb aquesta, calcular altres distàncies reals a partir del pla.

Exemple

Tenim el pla de casa nostra, però ens l'han donat sense escala. En lloc de mesurar totes les parets, optem per mesurar el llarg de la cuina tant en la realitat com en el pla.



Les mesures que obtenim són:

En el pla: 4 cm

En la realitat: 4 m

Per tant, l'escala és 1:100.

Ara podem obtindre qualsevol altra distància mesurant únicament sobre el pla i multiplicant els resultats per 100.

En la web
Practica el concepte d'escala.

Càlcul de l'escala

$$\frac{4\text{ cm}}{4\text{ m}} = \frac{4\text{ cm}}{400\text{ cm}} = \frac{1}{100}$$

Pensa i practica

1. Prenent mesures sobre el mapa de la pàgina anterior i tenint en compte l'escala:

a) Calcula la distància entre Barcelona i València.

b) Quant tarda un ferri que va de Tarragona a Palma a 20 nusos?

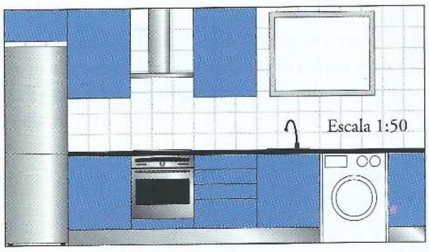
Cada nus equival a 1,852 km/h.

2. Sabent que la distància que separa en la realitat l'embarcador de la font és 136 m, troba'n l'escala i calcula les distàncies següents:

a) Càmping - platja. b) Platja - font.

c) Font - barbacoa. d) Font - càmping.

3. Aquest és el pla de la paret d'una cuina:



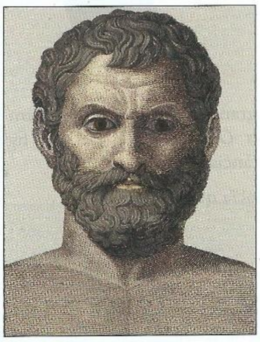
Troba'n les dimensions (llarg i ample); la superfície de la finestra i la distància entre els fogons i la campana.

Imagen 29. Página 199 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 200:

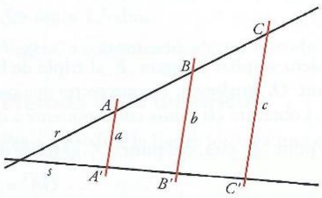
4 Teorema de Tales

El teorema de Tales és important perquè en aquest es basa l'estudi de la semblança de triangles. A partir dels triangles es comprova la semblança de dues figures qualssevol.



Tales de Milet.

Rectes paral·leles que tallen altres dues



Les rectes a, b i c són paral·leles i tallen les rectes r i s.

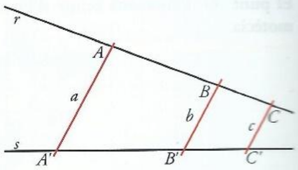
Si els segments AB i BC són iguals, llavors els segments $A'B'$ i $B'C'$ són iguals.

Comprova-ho mesurant-los.

També ara les rectes a, b i c són paral·leles i tallen les rectes r i s.

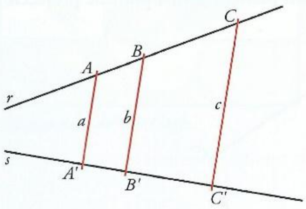
El segment AB és doble que el segment BC:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$$



Llavors, també el segon $A'B'$ és doble que $B'C'$:

$$\overline{A'B'} = 2 \cdot \overline{B'C'}$$



Teorema de Tales

Si les rectes a, b i c són paral·leles i tallen altres dues rectes, r i s, aleshores els segments que hi determinen són proporcionals:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Pensa i practica

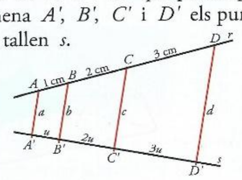
1. Traça dues rectes qualssevol, r i s. Assenyala en r quatre punts, A, B, C i D, de manera que:

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 2 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = 3 \text{ cm}$$

Traça rectes paral·leles, a, b, c i d, que passen per A, B, C i D. Anomena A', B', C' i D' els punts en què aquestes rectes tallen s.

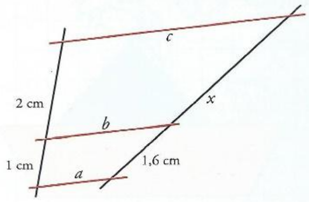
Comprova que:

$$\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{A'B'}$$
$$\overline{C'D'} = 3 \cdot \overline{A'B'}$$



2. a) Comprova que les rectes a, b i c del dibuix són paral·leles.

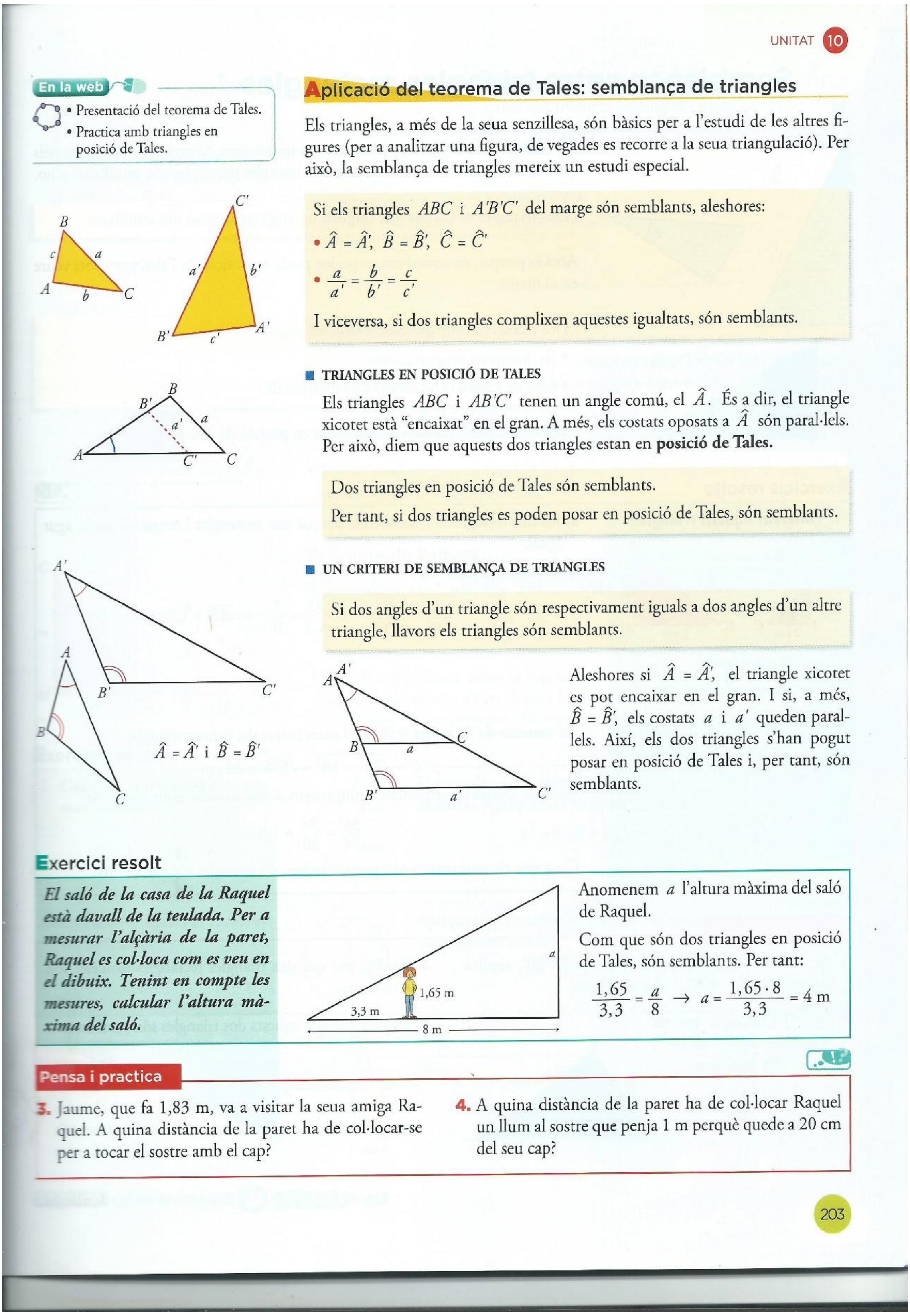
b) Calcula x.



202

Imagen 30. Página 202 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 203:



UNITAT 10

En la web
- Presentació del teorema de Tales.
- Practica amb triangles en posició de Tales.

Aplicació del teorema de Tales: semblança de triangles

Els triangles, a més de la seua senzillesa, són bàsics per a l'estudi de les altres figures (per a analitzar una figura, de vegades es recorre a la seua triangulació). Per això, la semblança de triangles mereix un estudi especial.

Si els triangles ABC i $A'B'C'$ del marge són semblants, aleshores:

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

I viceversa, si dos triangles complixen aquestes igualtats, són semblants.

TRIANGLES EN POSICIÓ DE TALES

Els triangles ABC i $AB'C'$ tenen un angle comú, el $\hat{A}$. És a dir, el triangle xicotet està "encaixat" en el gran. A més, els costats oposats a $\hat{A}$ són paral·lels. Per això, diem que aquests dos triangles estan en **posició de Tales.**

Dos triangles en posició de Tales són semblants.
Per tant, si dos triangles es poden posar en posició de Tales, són semblants.

UN CRITERI DE SEMBLANÇA DE TRIANGLES

Si dos angles d'un triangle són respectivament iguals a dos angles d'un altre triangle, llavors els triangles són semblants.

$\hat{A} = \hat{A}'$ i $\hat{B} = \hat{B}'$

Aleshores si $\hat{A} = \hat{A}'$, el triangle xicotet es pot encaixar en el gran. I si, a més, $\hat{B} = \hat{B}'$, els costats a i a' queden paral·lels. Així, els dos triangles s'han pogut posar en posició de Tales i, per tant, són semblants.

Exercici resolt

El saló de la casa de la Raquel està davall de la teulada. Per a mesurar l'alçària de la paret, Raquel es col·loca com es veu en el dibuix. Tenint en compte les mesures, calcular l'altura màxima del saló.

Anomenem a l'altura màxima del saló de Raquel.

Com que són dos triangles en posició de Tales, són semblants. Per tant:

$$\frac{1,65}{3,3} = \frac{a}{8} \rightarrow a = \frac{1,65 \cdot 8}{3,3} = 4 \text{ m}$$

Pensa i practica

3. Jaume, que fa 1,83 m, va a visitar la seua amiga Raquel. A quina distància de la paret ha de col·locar-se per a tocar el sostre amb el cap?

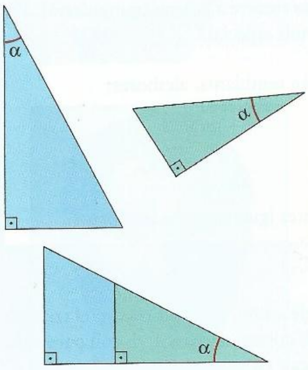
4. A quina distància de la paret ha de col·locar Raquel un llum al sostre que penja 1 m perquè quede a 20 cm del seu cap?

203

Imagen 31. Página 203 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 204:

5 Semblança entre triangles rectangles



Els triangles rectangles són especialment importants. Vegem alguns criteris pels quals es comprova molt fàcilment si dos triangles rectangles són semblants o no.

Dos triangles rectangles que tinguen un angle agut igual són semblants.

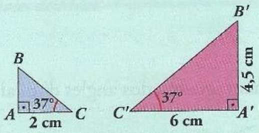
Això és perquè, en aquest cas, es poden posar en posició de Tales, com pots veure en el marge.

Dos triangles rectangles són semblants si tenen:
- els dos catets proporcionals,
- o bé un catet i la hipotenusa proporcionals.

També en aquests casos es poden posar en posició de Tales.

Exercicis resolts

1. ***Observar aquests triangles:***



a) Són semblants?

b) Calcular el catet AB.

a) Els dos triangles són semblants perquè són rectangles i tenen un angle agut igual.

b) Calculem el catet AB:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{4,5} = \frac{2}{6} \rightarrow \overline{AB} = 1,5 \text{ cm}$$

2. ***En un triangle rectangle, el catet menor mesura 10 cm, i la hipotenusa, 26 cm. En un altre triangle rectangle, el catet major mesura 36 cm, i la hipotenusa, 39 cm. Són semblants?***

Pel teorema de Pitàgores trobem el catet major del primer triangle:

$$C = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

Amb els costats corresponents comprovem si són semblants els triangles:

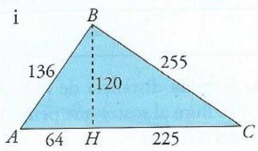
$$\frac{36}{24} = \frac{39}{26} = 1,5$$

Com que els seus costats són proporcionals, els triangles són semblants.

Pensa i practica

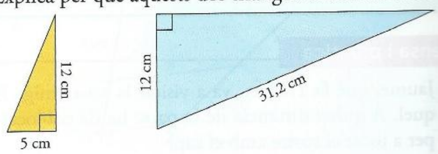
1. Si $\hat{A} = 33°$, $\hat{C} = 90°$, $\hat{B}' = 57°$ i $\hat{C}' = 90°$, explica perquè ABC i $A'B'C'$ són semblants.

2. Demostra que els triangles ABC, AHB i BHC són semblants.



3. Explica per què dos triangles rectangles isòsceles són semblants.

4. Explica per què aquests dos triangles són semblants.



En la web Practica la semblança de triangles.

204

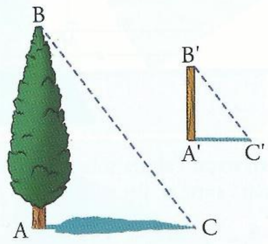
Imagen 32. Página 204 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 206:

6 Aplicacions de la semblança de triangles

La semblança de triangles té moltes aplicacions pràctiques. Vegem-ne algunes.

Càlcul de l'alçària d'un objecte vertical a partir de la seua ombra



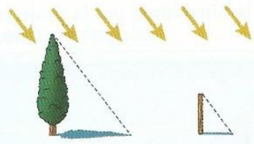
Per a calcular l'altura d'un arbre, $\overline{AB}$, procedim de la manera següent:

- Clavem a terra, verticalment, una estaca $A'B'$.
- Mesurem la longitud de l'estaca, $\overline{A'B'}$, i de les ombres, $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$, de l'arbre i de l'estaca, respectivament, projectades pel sol en el mateix instant.

Els triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants perquè tenen dos angles respectivament iguals:

$\hat{A} = \hat{A}'$ perquè els dos són rectes.

$\hat{C} = \hat{C}'$ perquè *els raigs del sol incidixen sobre l'arbre i l'estaca amb el mateix angle.*



Els raigs del sol arriben a la Terra paral·lels els uns als altres.

Ja que els triangles són semblants, els seus costats són proporcionals:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Com que coneixem $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ i $\overline{A'C'}$, podem calcular l'altura de l'arbre, $\overline{AB}$.

Problema resolt

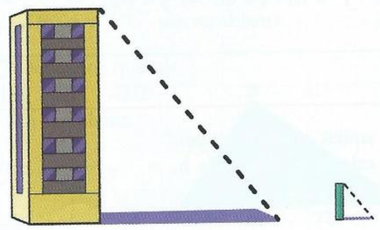
En la descripció anterior, calcular l'altura de l'arbre sabent que: longitud de l'estaca = 1,6 m; ombra de l'arbre = 3,5 m; ombra de l'estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

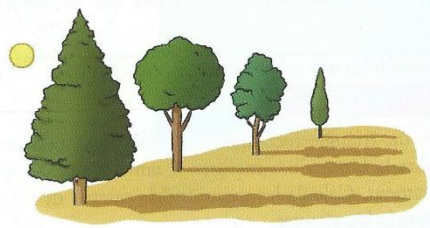
Solució: L'arbre mesura 8 m.

Pensa i practica

1. Calcula l'altura d'un edifici que projecta una ombra de 49 m en el moment en què una tanca de 2 m projecta una ombra d'1,25 m.



2. Les ombres d'aquests arbres mesuraven, a les cinc de la vesprada, 12 m, 8 m, 6 m i 4 m, respectivament. Si l'arbre xicotet mesura 2,5 m, quant mesuren els altres?



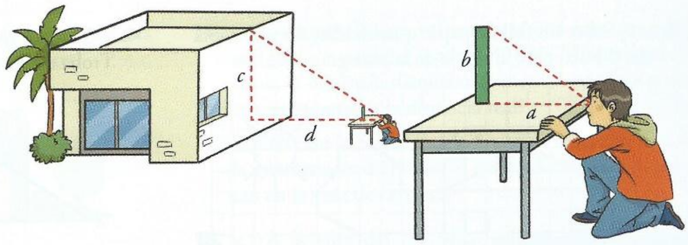
206

Imagen 33. Página 205 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 207:

Càlcul de l'alçària d'un objecte vertical sense recórrer a l'ombra

En la web
Calcula l'alçària d'un arbre per mitjà d'un espill.

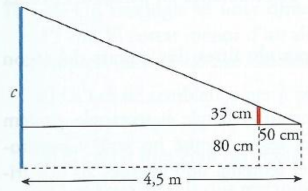


El xic llança una visual des de la vora de la taula al punt més alt de la casa. Estant en aquesta posició, mou el regle, situant-lo de manera que el seu extrem quede alineat amb la visual (la taula ha d'estar en posició horitzontal, i el regle, en vertical).

Els triangles rectangles, de catets a, b i d, c, són semblants, ja que es troben en posició de Tales. Per tant:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Coneixent a, b i d, es calcula c. L'altura de la casa és igual a c més l'alçària de la taula.



Problema resolt

En la descripció anterior, calcular l'alçària de la casa sabent que: longitud del regle, $b = 35$ cm; distància de la vora de la taula al peu del regle, $a = 50$ cm; distància de la vora de la taula a la casa, $d = 4{,}5$ m; alçària de la taula = 80 cm.

Expressem totes les distàncies en metres.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4{,}5} = \frac{0{,}35}{0{,}5} \rightarrow c = \frac{4{,}5 \cdot 0{,}35}{0{,}5} = 3{,}15 \text{ m}$$

$$3{,}15 + 0{,}8 = 3{,}95 \text{ m}$$

Solució: L'altura de la casa és de 3,95 m.

En la web
Problemes en què cal calcular mesures inaccessibles usant la semblança de triangles.

Pensa i practica

3. Observa de quin enginyós mètode es val Ramon per a esbrinar l'alçària de l'edifici:

Se situa de tal manera que la part alta de la reixa i la part alta de l'edifici estiguen alineades amb els seus ulls. Assenyala la seua posició i pren les mesures que es veuen en el dibuix.

a) Explica per què els triangles ABC i CDE són semblants.

b) Calcula $\overline{ED}$.

c) Calcula l'altura de l'edifici.

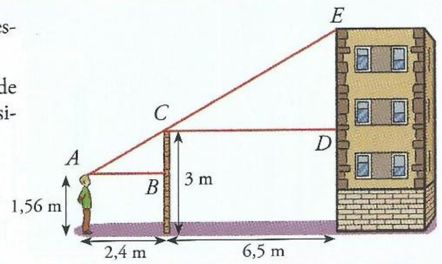


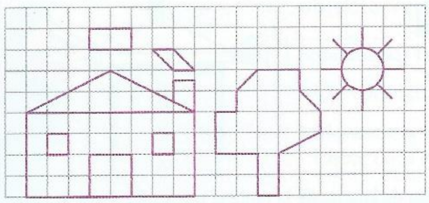
Imagen 34. Página 207 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

-Página 208:

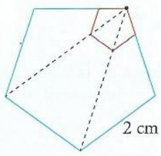
Exercicis i problemes

Figures semblants

1. Sobre un full de paper quadriculat, fes una còpia del dibuix, però al doble de la seua grandària.

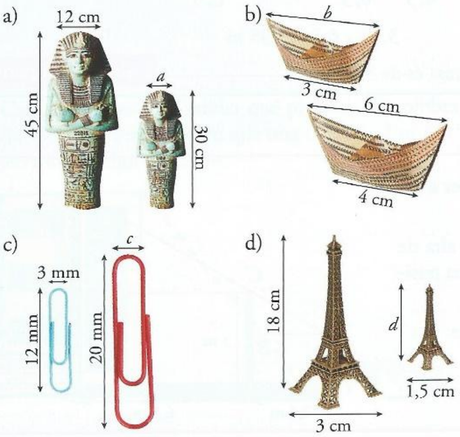


2. Per a construir un pentàgon regular de 2 cm de costat, copiem un pentàgon regular qualsevol (figura roja), allarguem dos dels seus costats consecutius fins a 2 cm i completem una figura semblant a la roja traçant rectes paral·leles als seus costats.



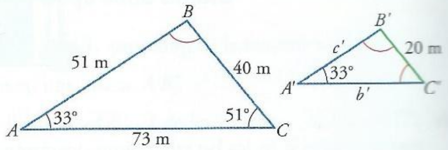
Calca en la llibreta el pentàgon roig i, procedint de la mateixa manera, dibuixa un pentàgon regular de 3 cm de costat.

3. Suposant que en cada apartat hi ha dues figures semblants, calcula la raó de semblança entre la primera i la segona, i troba les longituds que falten.

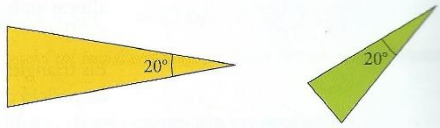


Semblança de triangles

4. Sabem que els triangles següents són semblants. Troba els costats i els angles que falten.



5. Explica per què aquests dos triangles isòsceles són semblants.



6. Els costats d'un triangle mesuren 7,5 cm, 18 cm i 19,5 cm. Se'n construïx un altre semblant a aquest el costat menor del qual mesura 5 cm.

a) Quina és la raó de semblança en passar del primer al segon?

b) Quant mesuraran els altres dos costats del segon triangle?

c) Sabent que el primer triangle és rectangle, podem assegurar que el segon també ho serà? Comprova-ho aplicant el teorema de Pitàgores als dos triangles.

7. Explica per què són semblants dos triangles rectangles amb un angle agut igual.

8. Entre els triangles rectangles següents n'hi ha alguns de semblants entre si. Esbrina quins són calculant prèviament els angles que falten.

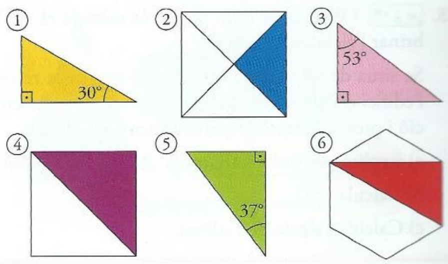
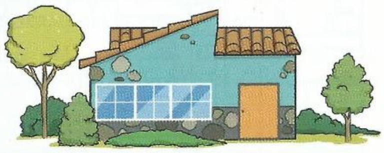


Imagen 35. Página 208 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

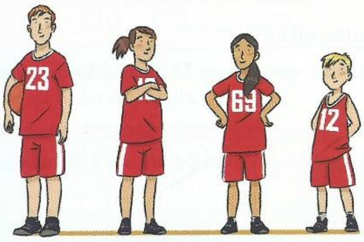
-Página 209:

Aplicacions de la semblança

9. L'alçària de la porta de la casa fa 3 m. Quina és l'alçària de la casa? I la de l'arbre més xicotet?



10. Si el més alt d'aquests jugadors fa 1,80 m, quant mesuren els altres?



11. Un rectangle té unes dimensions de 10 cm per 15 cm. El costat menor d'un altre rectangle semblant a aquest mesura 12 cm. Calcula:

a) La raó de semblança per a passar del primer al segon rectangle.

b) El costat més gran del segon.

c) Les àrees de tots dos rectangles.

12. Per a determinar que l'alçària d'un eucaliptus és d'11 m, Carles ha mesurat l'ombra d'aquest (9,6 m) i la seua pròpia (1,44 m), ambdues projectades pel sol a la mateixa hora. Quant mesura Carles?

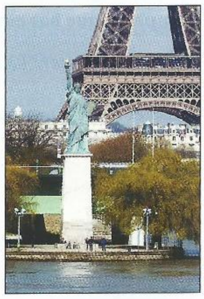
13. Sobre la pantalla del sonar d'un submarí es veu que un objecte s'acosta a 1 cm per minut. Si la imatge a la pantalla té una escala d'1:1 000 000, a quants quilòmetres per hora es mou l'objecte?

Resol problemes

14. Una parella que vol comprar una casa consulta una guia de carrers a escala 1:30 000. Mesuren sobre el pla la distància d'aquesta al metro i resulta ser de 2,3 cm. Quina és la distància real?

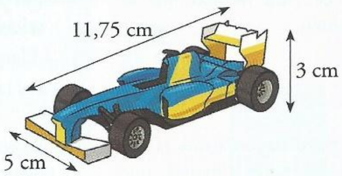
D'altra banda, saben que la distància d'aquesta casa a la guarderia és d'1,5 km. A quina distància es trobaran en la guia de carrers?

15. A la vora del riu Sena (París) hi ha una rèplica a escala 1: 4 de l'Estàtua de la Llibertat, que té una alçària d'11,5 m. Troba l'alçària de l'estàtua de Nova York.

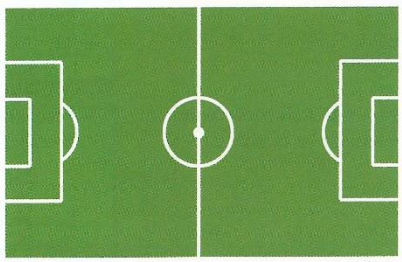


A Cenicero, un poble de La Rioja, hi ha una altra rèplica de l'Estàtua de la Llibertat d'1,2 m d'alçària. Quina és l'escala d'aquesta respecte a la de Nova York?

16. El cotxe teledirigit de Pau és una reproducció a escala 1:40 dels de "Fórmula 1". Observa sobre el dibuix les dimensions del cotxe de joguet i troba les dimensions del cotxe real.



17. Esbrina quines són les dimensions reals d'aquest camp de futbol. Calcula la superfície de l'àrea de penal (àrea gran) i la del cercle central.



1:1 400

Imagen 36. Página 209 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

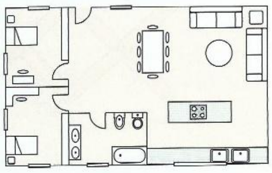
-Página 211:

18. Anna ha dibuixat el pla de la seua nova casa. Sabem que cada sofà mesura 3 m de llarg.

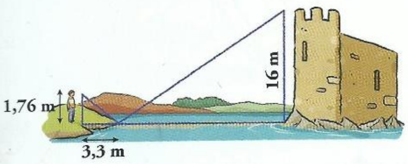
a) Quines dimensions reals tenen els llits?

b) Anna vol pintar el sostre. Si li costa 2 € per metre quadrat, quant es gastarà a pintar-lo?

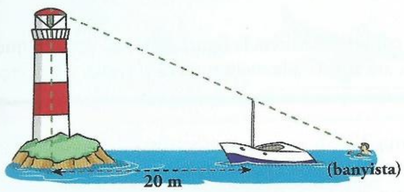
c) Anna vol posar una taula de ping-pong de 2,70 m × 1,50 m. Troba'n les dimensions en el pla.



19. Troba la distància de Marc a la base de la torre a partir de les dades del dibuix.

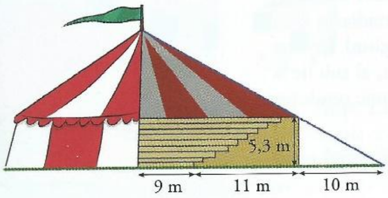


20. El banyista es troba a 5 m del vaixell. La borda del vaixell està a 1 m sobre el nivell del mar. El pal del vaixell sobreïx 3 m de la borda. El banyista veu alineats l'extrem del pal i el focus del far.



A quina altura sobre el nivell del mar es troba el focus del far?

21. Quina alçària té el circ del dibuix?



Problemes "+"

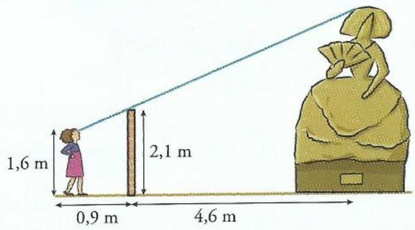
22. El *Titanic* va ser un vaixell britànic que es va enfonsar en 1912 durant el seu viatge inaugural. James Cameron va construir, per rodar la pel·lícula *Titanic*, una rèplica d'uns 15 m de llarg. El *Titanic* mesurava, uns 270 m de llarg, 30 m d'ample i 53 m d'alt. A més, pesava unes 46 000 tones.

a) A quina escala va construir James Cameron el vaixell?

b) Quant mesuraven l'ample i l'alt de la maqueta?

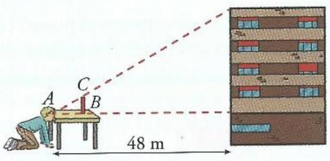
c) Si la maqueta s'haguera construït amb els mateixos materials que el vaixell, quant pesaria?

23. A quina altura es troba l'extrem superior de l'escultura, sabent que la Paula la veu alineada amb la vora de la tanca?



24. Troba l'alçària de l'edifici sabent que:

- La taula té 1 m d'alçària.
- $\overline{AB}$ = 80 cm i $\overline{BC}$ = 52 cm



25. Calcula la longitud del trampolí tenint en compte les mesures.

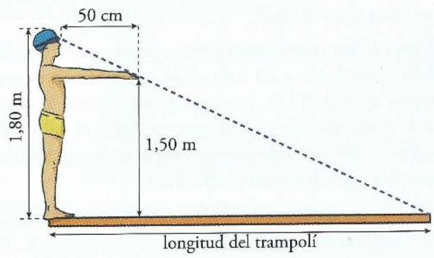


Imagen 37. Página 211 del libro de texto (extraída: Colera, Gaztelu y Colera, 2016).

ANEXO IX - Sobre el alumnado al que se va a aplicar la UD

La Unidad Didáctica que se ha diseñado en el presente trabajo se ha aplicado a dos clases diferentes de 2.º de la ESO (Tudela, 2019). Las características de cada uno de los grupos son las siguientes:

a) Primer grupo:

Tras la observación realizada durante las dos fases de prácticas, se puede decir que el grado de implicación de este grupo es satisfactorio. Entre el alumnado encontramos:

- Un alumno que ha repetido de curso
- Dos alumnos llevan pendientes las Matemáticas de 1.º ESO.
- Tres alumnos con necesidades educativas especiales (NEE).
- Cuatro alumnos que realizan actividades de ampliación de la asignatura y que han participado en la Prueba Cangur de este año. Además, entre ellos un alumno también ha participado en las Olimpiadas Matemáticas de este año.
- Hay un alumno con problemas de absentismo.

El porcentaje de suspendidos en la 2ª Evaluación es de un 28% (este porcentaje incluye a la 1ª y 2ª evaluación). El nivel es muy poco mejor en esta primera clase que en la segunda, pero tampoco se observan grandes diferencias.

b) Segundo grupo:

Es importante destacar que este segundo grupo es muy heterogéneo. Entre el alumnado existe una gran diferencia tanto en el nivel académico como en la actitud y el interés por la asignatura. Por este motivo, se hace más complicada la dinámica de grupo.

- Un alumno que ha repetido.
- Cuatro alumnos llevan pendientes las Matemáticas de 1.º ESO.
- Dos alumnos con necesidades educativas especiales.
- Un alumno que realiza actividades de ampliación de la asignatura y que ha participado en la Prueba Cangur de este año.
- Hay un alumno con problemas de absentismo.

El porcentaje de suspendidos en la 2ª Evaluación es de un 37% (este porcentaje incluye a la 1ª y 2ª evaluación).

ANEXO X - Contexto del centro

El centro donde se ha implementado la presente UD tiene las siguientes características (Tudela, 2019):

- Se sitúa en un barrio de clase media-baja.
- El porcentaje de estudiantes de origen extranjero de sitúa en un 30% aproximadamente.
- Dichas familias no suelen ser conflictivas y están bastante bien integradas.
- Existe gran variedad entre el alumnado, pero los problemas de convivencia que surgen suelen ser bien solventados por parte del equipo de mediación.
- Se considera que existe, en general, un buen clima de convivencia dentro del centro.

ANEXO XI - Sistema aula-materia

A la hora de realizar el cambio de clase, el centro funciona con el método conocido como *aula-materia* (Tudela, 2019). Es decir, cada asignatura dispone de sus propias aulas, siendo el alumnado el que se va desplazando a cada aula, y no el profesor.

Este sistema ha resultado bastante acertado en el transcurso de los escasos años que lleva implantando, al contrario de lo que podría parecer *a priori*. Entre sus ventajas se encuentra el hecho de que el alumnado se levanta de la silla y cambia de ambiente en cada clase, notándose cierta mejoría por parte del equipo docente.

Una posible pega que tiene este sistema es que se suele perder un poco de tiempo, entre tres y cinco minutos al inicio de cada sesión. Este hecho se puede agravar en el caso de que el cambio de clase se produzca con asignaturas que tienen sus aulas asignadas en edificios distintos, como puede ser con Educación Física o Inglés.

ANEXO XII - Rúbrica

RÚBRICA DE LAS ACTIVIDADES: Como ya se ha explicado anteriormente, cada actividad vale dos puntos de la nota final del tema.

		NIVEL 1 - Muy bien	NIVEL 2 - Bien	NIVEL 3 - Regular	NIVEL 4 - Mal
ACTITUD (10%)	**Respeto**	Respeto al resto de compañeros y al docente.	Bastante respeto al resto de compañeros y al docente.	Poco respeto al resto de compañeros y al docente.	Respeto nulo al resto de compañeros y al docente.
	Trabajo cooperativo	Mucha ayuda y trabajo cooperativo en el grupo asignado.	Bastante ayuda entre compañeros.	Poco compañerismo y poca ayuda dentro del grupo.	Nada de ayuda y compañerismo dentro del grupo.
	Independencia	Gran autonomía y no se hacen preguntas innecesarias.	Bastante autonomía, pocas o ninguna pregunta innecesaria.	Bastante dependencia frente al docente.	Gran dependencia frente al docente y constantes preguntas.
	Interés	Mucho interés y ganas de trabajar.	Bastante interés y ganas de trabajar.	Poco interés y pocas ganas de trabajar.	Escaso interés y ganas de trabajar.
RESULTADOS (10%)	**Corrección**	Resultados correctos.	La mayoría de los resultados son correctos.	Bastantes fallos en los resultados.	Muchos fallos en los resultados.
	Unidades	No se comenten errores con las unidades.	Apenas se comenten errores con las unidades.	Se comenten bastantes errores con las unidades.	Constantes errores con las unidades.
	Presentación	Orden y buena presentación de los resultados.	Bastante orden y presentación adecuada de los resultados.	Orden y presentación regular.	Mala presentación de los resultados

Tabla 6. Rúbrica para las tres actividades (elaboración propia).

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN PARCIAL:

El examen parcial vale 4 de los 10 puntos totales de la UD. Para explicar la manera de evaluar el examen parcial de cada alumno, no se va a presentar una rúbrica como la anterior, sino que se van a presentar los puntos rojos que restarán puntuación al ejercicio.

Veamos todos los posibles casos, válidos para cada uno de los cinco ejercicios del examen:

- **Se deja en blanco el ejercicio:** Evidentemente, no puntúa nada.

- **Hay cálculos pero el resultado es incorrecto:** Tras ver la corrección, el docente podrá puntuar de 0,1 a 0,4 puntos, dependiendo el error.

- **El alumnado ha realizado los cálculos y el resultado es correcto:**
  - <u>Buena presentación y resultado con unidades</u>: Puntuación máxima.
  - <u>Mala presentación, letra que no se entiende</u>: Restará de 0,1 a 0,2 puntos.
  - <u>Faltan las unidades cuando se requiere</u>: Restará 0,2 puntos.
  - <u>Los cálculos no están suficientemente justificados</u>: Restará entre 0,2 y 0,5 puntos.