

TRABAJO FINAL DE MÁSTER:

# LÍMITES Y CONTINUIDAD

IMPLEMENTACIÓN Y MEJORA DE UNIDAD  
DIDÁCTICA EN MATEMÁTICAS ACADÉMICAS DE 1º  
DE BACHILLERATO

Autora: Agnes Altur Brines

Tutor: Julio José Moyano Fernández

MÁSTER DE PROFESOR/A DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, FORMACIÓN  
PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

## ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN	3
2.	MI UNIDAD DIDÁCTICA	3
a.	CONTEXTUALIZACIÓN	3
b.	OBJETIVOS DIDÁCTICOS	4
c.	COMPETENCIAS BÁSICAS	4
d.	CONTENIDOS ESPECÍFICOS	5
e.	METODOLOGÍA: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS	5
f.	MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS	11
g.	TEMPORALIZACIÓN	12
h.	SECUENCIA DE ACTIVIDADES	12
i.	EVALUACIÓN DEL ALUMNADO	25
3.	REFLEXIÓN	27
a.	LAS DIFICULTADES	28
b.	LOS PUNTOS FUERTES DE MI UNIDAD DIDÁCTICA	31
4.	MEJORAS	34
5.	CONCLUSIÓN	35
6.	BIBLIOGRAFÍA	37
7.	ANEJOS	38
	ANEJO 1: TEST Y MINI-PRUEBAS.	38
	ANEJO 2: EL EXAMEN.	43
	ANEJO 3: LA RÚBRICA.	46
	ANEJO 4: EL CONCURSO.	47
	ANEJO 5: LAS NOTAS.	49
	ANEJO 6: LAS ENCUESTAS.	50

ANEJO 7: EL EJERCICIO INICIAL	56
ANEJO 8: PRESENTACIÓN SOBRE LA UTILIDAD DEL ANÁLISIS	58

## 1. INTRODUCCIÓN

En este documento presento mi trabajo final de máster (TFM de ahora en adelante) que consiste en una unidad didáctica que diseñé e implementé en la segunda fase del Prácticum del “Máster de Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de idiomas”.

En la primera parte del TFM expongo la unidad didáctica dando contexto a la misma, detallando los objetivos, contenidos y temporalización, explicando la metodología empleada y cómo se evalúa al alumnado.

Pero el objetivo principal de este TFM no es sólo presentar una unidad didáctica, sino también enumerar, evaluar y reflexionar sobre las dificultades que he encontrado a la hora de ponerla en práctica, así como poner en valor los aspectos de los que me siento más orgullosa, y finalmente, proponer posibles mejoras en el hipotético caso de que volviese a impartir esta unidad didáctica en el futuro.

## 2. MI UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado presento la unidad didáctica que preparé antes de comenzar el Prácticum en el instituto, es decir, este es el proyecto para ejecutar, y como en todos los proyectos, la mayoría de las veces hay que cambiarlos cuando nos enfrentamos a la realidad.

Principalmente expongo los contenidos a trabajar, los objetivos que persigo conseguir y cómo pretendo hacerlo con el tiempo del que dispongo para esta unidad didáctica.

### a. CONTEXTUALIZACIÓN

Se trata de la unidad didáctica “*Límites y continuidad*” para el curso 1º de Bachillerato con la Opción de Matemáticas I del IES Alfons XIII de la Vall d’Alba. El grupo está formado por un total de 18 alumnos, de los cuales son 4 chicas y 14 chicos, de entre 16 y 17 años.

Esta unidad didáctica forma parte del Bloque 3 (Análisis) del currículum oficial de la Generalitat Valenciana para el curso de 1º de Bachillerato. Esta unidad se imparte en el tercer trimestre del curso y se dispone de 10 sesiones para trabajar todos los contenidos de la unidad. Este grupo tiene cuatro horas semanales de matemáticas, a razón de una hora diaria de martes a viernes.

Es importante destacar que el alumnado que me encuentro en el aula ya está habituado a una manera de trabajar, la de su profesora, y lo que pretendo es probar una nueva metodología con los riesgos de aceptación que esto pueda conllevar. Además, durante la primera fase del Prácticum observé que en el aula hay muchos alumnos que van a clases de repaso fuera del IES, que en cierto modo les hace desatender algunas de las explicaciones porque confían en que alguien fuera del aula se lo explique de forma exclusiva y esto intentaré cambiarlo con mi metodología didáctica.

## b. OBJETIVOS DIDÁCTICOS

A continuación, enumero los objetivos de esta unidad didáctica:

- Usar el razonamiento inductivo y deductivo para llegar a la definición de límite y continuidad de una función en un punto.
- Conocer el significado gráfico y analítico de los diferentes tipos de límites e identificarlos sobre la representación gráfica de una función.
- Dominar el cálculo de límites de funciones.
- Conocer y entender el concepto de continuidad de una función en un punto.
- Dominar el estudio de la continuidad de una función e identificar los tipos de discontinuidades que presenta.
- Conocer los diferentes tipos de ramas infinitas y dominar su cálculo dada la expresión analítica de la función.
- Desarrollar una metodología propia de resolución de problemas de análisis.
- Usar el lenguaje y la notación matemática adecuada para describir el comportamiento de una función.

## c. COMPETENCIAS BÁSICAS

De acuerdo con los objetivos marcados para esta unidad didáctica, se desarrollarán 5 de las 7 competencias clave que establece el RD 87/2015 en LOMCE, que son las siguientes:

- CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- CPAA: Competencia aprender a aprender.
- SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- CCL: Competencia lingüística.

- CSC: Competencias sociales y cívicas.

#### d. CONTENIDOS ESPECÍFICOS

De acuerdo con los objetivos planteados para esta unidad, los contenidos que vamos a abordar son los siguientes:

- Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito.
- Concepto de límites laterales.
- Concepto de indeterminación.
- Concepto de continuidad en un punto.
- Cálculo del límite de una función en un punto a partir de gráficas, tablas y expresiones analíticas de una función.
- Cálculo del límite de una función cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .
- Estudio de las discontinuidades y clasificación: evitables y no evitables (de salto finito y salto infinito).
- Ramas infinitas: asíntota vertical, horizontal, oblicua y rama parabólica.
- Representación gráfica aproximada de funciones utilizando límites.

#### e. METODOLOGÍA: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

El planteamiento inicial era cambiar parcialmente la metodología de trabajo que había observado durante la primera fase del Prácticum. Por ello, primero expongo la metodología didáctica de la profesora titular especificando qué aspectos pretendo cambiar y por qué.

##### *La metodología anterior*

El alumnado, a mitad del tercer trimestre, ya está habituado a un método de trabajo que consiste básicamente en lo siguiente:

- Explicaciones muy breves, siempre introduciendo conceptos nuevos a través de ejemplos, nunca a través de demostraciones matemáticas. Muchas veces rehuendo también de vocabulario específico.
- Bastantes ejercicios para resolver en casa.

- Antes de comenzar la clase revisa quién ha hecho los ejercicios. A continuación, da un listado de ejercicios que pueden ir haciendo quienes hayan acabado los del listado anterior, mientras tanto la profesora corregirá los deberes en la pizarra.

Este método les funcionaba bastante bien, pero observé que:

- Gran parte del alumnado no prestaba la atención necesaria o no se tomaba las clases lo suficientemente en serio porque iban a clases particulares. Los deberes los hacían normalmente los días de clases particulares.
- Muchos de los alumnos no estudian hasta la víspera del examen.
- El vocabulario que utilizaban no era muy riguroso, como, por ejemplo: “lo de arriba y lo de abajo”, para decir numerador y denominador.
- Falta de agilidad, tanto a la hora de relacionar conocimientos nuevos con antiguos (y usar estos últimos para avanzar) como a la hora de operar, usan muchísimo la calculadora para operaciones simples que no hace falta.
- Dificultad para entender los enunciados de los problemas.
- Animadversión a cualquier demostración matemática o razonamiento teórico.

### *Mi propuesta.*

#### **1. Marco teórico.**

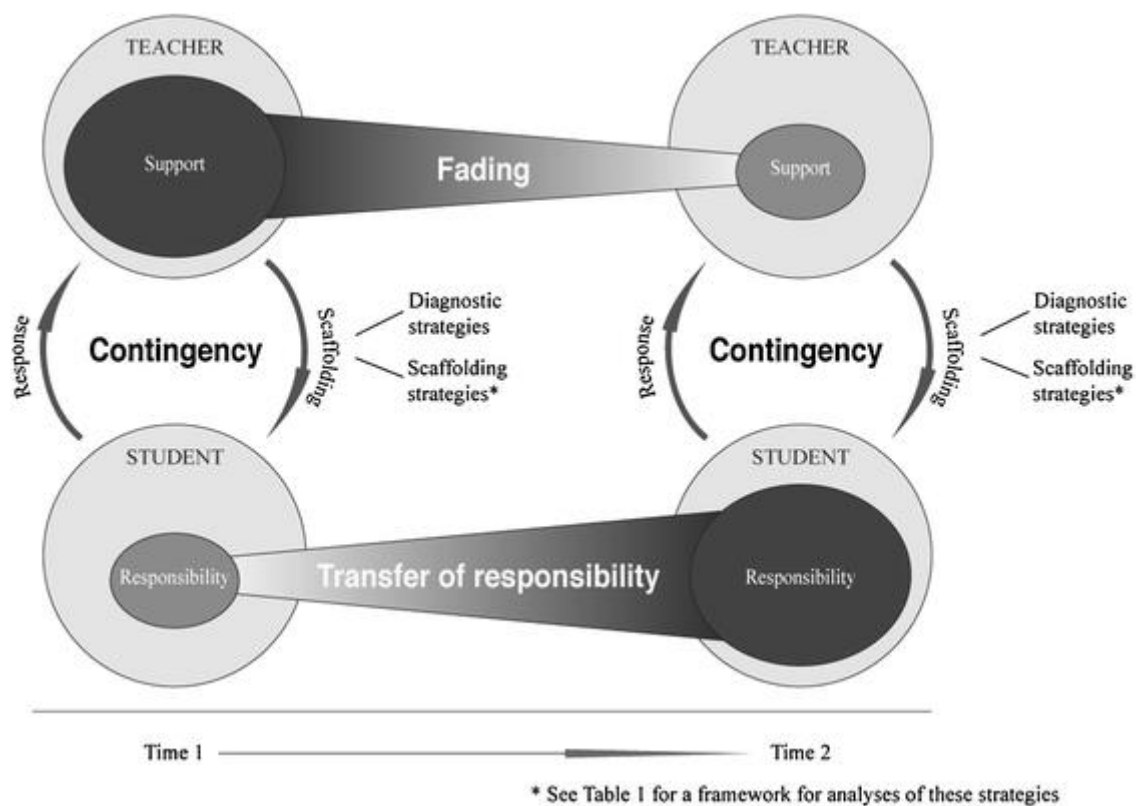
Vygotsky define en 1978 la llamada *Zona de desarrollo próximo*, “la distancia entre lo que es capaz de hacer un alumno por sí mismo, y lo que es capaz de hacer con la ayuda de una figura más capaz, bien sea el profesor/a u otro/a compañero/a más capaz”. Además, Vygotsky defendía el lenguaje como instrumento imprescindible para el desarrollo cognitivo, decía que no entendemos algo hasta que no somos capaces de explicarlo.

Wood, Bruner y Ross, en 1976, definieron *andamiaje* como “un proceso que permite al niño o al aprendiz resolver un problema, realizar tareas, o cumplir un objetivo que estaría por encima de sus posibilidades sin ayuda externa” (*The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89–109).

La metáfora es evidente, el andamio es una estructura provisional que nos ayuda a construir un edificio, que una vez construido retiraremos esa estructura auxiliar. En el proceso de aprendizaje, para Wood, Bruner y Ross el edificio es el conocimiento y el andamio son las herramientas que

usa el profesor, la ayuda que presta. Esta metáfora ha sido ampliamente criticada a lo largo de muchos años (por autores como Aukerman, Butleere, Donahue, Lopez-Reyna, etc), por el hecho que parece que el edificio está predefinido, y muchos abogan por que cada alumno tiene un edificio diferente. Así, siguiendo la visión de Stone (1998a, *The metaphor of scaffolding: Its utility form the fields of learning disabilities. Journal of Learning Disabilities, 31, 344-364*), se entiende andamiaje como un proceso interactivo que ocurre entre alumno y profesor donde ambos deben participar activamente.

Pese a las muchas definiciones de andamiaje, el modelo conceptual en el que coinciden todas ellas es el que se muestra a continuación:



Esta imagen pertenece al artículo *"Scaffolding in teacher-student interaction: a decade of research"* van de Pol et al, 2010.

De acuerdo con el modelo, es importante señalar tres ideas fundamentales del proceso de andamiaje en el aprendizaje (van de Pol, Volman and Beishiuzen, 2010):

- Es un proceso condicionado. Como cualquier contingencia, hay que evaluar la situación a la que nos enfrentamos, en este caso es fundamental conocer el nivel de conocimientos



del alumno, lo que es capaz de hacer por sí mismo para poder diseñar el andamiaje adecuado. Por lo tanto, muchos autores resaltan la importancia de hacer un diagnóstico dinámico de las capacidades del alumno mediante evaluación formativa y dinámica (Lajoie 2005, Pea 2004, Shepard 2005).

- La retirada del andamiaje, porque es algo temporal. El ritmo con el que se retira el andamiaje dependerá del nivel de desarrollo y competencia del alumno; y está directamente relacionado con la siguiente.
- La transferencia de responsabilidad al alumno. El ritmo con el que se le retira el andamiaje al alumno va ligado al ritmo con que el alumno adquiere control sobre su propio aprendizaje y por lo tanto es más responsable en el proceso.

De acuerdo con el modelo conceptual, las estrategias de andamiaje (que hay muchísimas) son parte del proceso cíclico de andamiaje. Según van Pol et al (2010), en el artículo que mencioné anteriormente, para poder diseñar y/o clasificar las estrategias de andamiaje primero hay que clasificar el propio proceso de andamiaje. Y en los últimos años, según van de Pol et al (2010), los autores se agrupan en dos vertientes según el modo de clasificar dicho proceso:

- Según Wood, Brunner y Ross (1978), las estrategias de andamiaje se pueden clasificar según los objetivos que se persiguen, y son CINCO los objetivos del andamiaje:
  - 1) Mantener unas directrices y objetivos claros.
  - 2) Estructurar los pensamientos.
  - 3) Reducir los grados de libertad de los problemas.
  - 4) Captar al alumno, la motivación.
  - 5) Controlar la frustración del alumno.
- Según Tharp y Gallimore (1988), las estrategias de andamiaje se pueden clasificar según los medios que se usen, y son SEIS las herramientas del andamiaje:
  - 1) El feed-back que se le da al alumnado a cerca de su trabajo, en clase, deberes, exámenes, etc. (\*)
  - 2) Las pistas para guiar al alumnado a la solución usando sus conocimientos.
  - 3) Las instrucciones de cómo y por qué se hacen las cosas.
  - 4) Las explicaciones y/o aclaraciones sobre dudas del alumnado.
  - 5) Los modelos, para aprender a trabajar también por imitación (modelos de tareas bien ejecutadas y mal ejecutadas).

- 6) Las preguntas, es fundamental preguntar continuamente al alumno para que razone y se exprese correctamente.

(\*) El tipo de feed-back que se le da al alumno, inmediato o retrasado, influirá en el ritmo del aprendizaje, en la motivación del alumnado y en el nivel de autonomía del aprendiz (Nicol y Macfarlane-Dick, 2006); en definitiva, influyen en cómo el alumno toma control de su propio aprendizaje.

Una vez hecho el diagnóstico de nuestro alumnado, sus necesidades, cualquier combinación de objetivos y medios de andamiaje pueden dar como resultado muchísimas técnicas de andamiaje que dependerán del criterio del profesor.

Además, es importante resaltar que, aunque inicialmente el andamiaje se refería a la relación entre tutor y tutorizado, este concepto se ha ampliado para incluir el aprendizaje cooperativo (Rojas-Drummond & Mercer, 2003), andamiaje entre compañeros (Fernández, Wegerif, Mercer, & RojasDrummond, 2001) y discusiones a nivel de toda la clase (Cazden, 1979).

Además, es importante mencionar el aprendizaje dialógico, el diálogo entre el profesor y el alumnado es fundamental en el aprendizaje (Alexander, 2008). Alexander tomó como base para su teoría la idea de Bakhtin (1986) que decía que cualquier pregunta que no lleve a otra debe quedar fuera del diálogo. Alexander y otros muchos autores (por ejemplo Nystrand 1997, Matusov 2009, Wells 1999) entienden que un diálogo vivo entre profesor y alumno y entre compañeros es fundamental para aprender, con preguntas abiertas que lleven al alumnado a buscar por sí mismos nuevos conocimientos no limitándose sólo a lo que el profesor sabe y les explica.

Así, de acuerdo con Bakker, Smit y Wegerif (2015), una combinación de aprendizaje por andamiaje y aprendizaje dialógico es ideal en el aprendizaje de las matemáticas; la reducción de grados de libertad propias del andamiaje se compensa por un diálogo basado en preguntas abiertas que favorecen el aprendizaje por uno mismo y que nos lleva a lo que se conoce como “aprendizaje autoregulado”. El objetivo final es conseguir un alumno cada vez más autónomo capaz de organizarse para aprender por sí mismo, hacer y hacerse a sí mismo las preguntas adecuadas porque tiene claro cuáles son sus objetivos y cuáles son sus limitaciones.

## 2. Mi estrategia.

Con los datos de la primera fase del prácticum pensé que lo ideal era plantear la siguiente metodología:

- Explicaciones breves, pero utilizando explicaciones teóricas cuando sea necesario, sin huir jamás del vocabulario matemático correcto. Quiero conseguir que los alumnos hablen con propiedad en las clases de matemáticas, que sientan que no usar la notación o el vocabulario correcto es tan difícil como hablar mal o hacer faltas de ortografía.
- Clases prácticas donde se trabajen los ejercicios propuestos en equipos heterogéneos de 4 ó 5 alumnos. La profesora resuelve en la pizarra los ejercicios que presenten alguna dificultad o resultados diferentes entre el alumnado. Busco que se habitúen a trabajar en equipo, a discutir y argumentar sus ideas, que aprendan y ayuden al compañero o compañera.
- Mini-pruebas individuales donde la nota dependerá del trabajo grupal. No se avisa al alumnado de qué días se realizarán las mini-pruebas, intentando así mantenerlos atentos y estudiando a diario. Les daré feed-back personalizado lo más pronto posible porque busco que progresivamente se vuelvan más independientes, que conozcan sus limitaciones, qué mejorar, etc.

El planteamiento constructivista presentado en el marco teórico es el eje de la metodología que empleo en mis sesiones. Tras la observación del alumnado en la primera fase del prácticum identifico cuáles son las necesidades del grupo y por lo tanto los “estrategias de andamiaje” que necesitarán para construir los nuevos conocimientos de esta unidad didáctica.

- **Andamiaje de los contenidos de la unidad.**

Siempre intento comenzar la clase preguntando al alumnado por lo que aprendieron en la sesión anterior, intentando así captar su atención y conectar conocimientos adquiridos con nuevos. Intento trabajar muchos ejemplos en la pizarra para que vean y les suene la nomenclatura matemática correcta. Los ejercicios están divididos o estructurados en ejercicios más sencillos (o apartados) que de alguna manera les guían a la solución final del problema.

- **Andamiaje lingüístico.**

En esta unidad didáctica introduzco un vocabulario específico (límite, límite por la izquierda, indeterminación, asíntota, tender a, etc.) que el alumnado debe asimilar y utilizar de forma adecuada. Para ello, durante las clases procuro repetir tantas veces como pueda estas palabras acompañadas de ejemplos o explicaciones breves. Siempre procuro dejarles que se expresen como puedan, pero corrigiendo los errores para que poco a poco adopten el vocabulario específico de la materia. Busco el diálogo continuamente con mis alumnos, les pregunto y espero que me pregunten. Pero sin duda, la mejor manera de que el alumnado asimile este vocabulario y lo use adecuadamente es a través del trabajo en grupo, donde se verán obligados a discutir, argumentar, etc.

- **Andamiaje del pensamiento.**

En general, en matemáticas, el razonamiento inductivo y deductivo es fundamental, y en esta unidad también. Busco que los alumnos sean capaces de deducir, que además consigan resolver los ejercicios de forma ordenada y razonada siguiendo su propio método. Para ello, durante los ejemplos que expongo en la pizarra hago hincapié en los pasos que sigo para resolverlos, cómo es un ejercicio de 10 y por qué, y cuáles son los errores que no se deben cometer y por qué. Exponiéndoles ejemplos de ejercicios bien y mal ejecutados espero que ellos desarrollen su propio método para alcanzar los estándares exigibles.

De acuerdo con la Taxonomía de Bloom (1948), es fundamental tener los objetivos claros y organizados por niveles de dificultad de forma que las actividades y ejercicios a resolver estén programados para poder avanzar progresivamente de nivel hasta alcanzar los más altos. Una buena planificación de actividades es fundamental para evitar desmotivar al alumnado con ejercicios demasiado difíciles o aburrirles con ejercicios demasiado fáciles. Por ello en cada sesión organizo los ejercicios de menor a mayor dificultad.

## f. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

Para conseguir cumplir los objetivos y competencias señaladas en esta unidad, debo detenerme a evaluar las necesidades materiales y de recursos que tendré.

**Recursos humanos:** La profesora y el grupo-aula.

**Recursos materiales:** Tiza y pizarra. Pantalla y proyector. Libro, libreta y material de escritura.

**Recursos espaciales:** El aula.

**Recursos organizativos:** Necesitaremos reorganizar los pupitres para formar los grupos de trabajo que mantendremos durante todas las sesiones que dure la unidad didáctica.

### g. TEMPORALIZACIÓN

Nº	TEMA	DURACIÓN	FECHA
1	Introducción del concepto de límite.	1 sesión	24/04/2018
2	Definición formal de límite y continuidad.	1 sesión	25/04/2018
3	Límite de una función en un punto.	1 sesión	26/04/2018
4	Límites de funciones cuando $x \rightarrow +\infty$	1 sesión	27/04/2018
5	Límites de funciones cuando $x \rightarrow -\infty$ . Ramas infinitas. Asíntotas.	1 sesión	02/05/2018
6	Práctica de cálculo de límites en el infinito.	2 sesiones	03/05/2018 04/05/2018
7	Ramas infinitas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.	1 sesión	08/05/2018
8	Práctica de continuidad, límites y ramas infinitas.	1 sesión	09/05/2018
9	El concurso final.	1 sesión	10/05/2018

(\*) El examen ocupará otra sesión más, que por no tener actividades como tal no aparece en el apartado h) *Secuencia de actividades*.

### h. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

#### *Sesión 1: Introducción del concepto de límite*

OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recordar el concepto intuitivo de discontinuidad.</li> <li>• Recordar el concepto de dominio de una función.</li> <li>• Relacionar continuidad con dominio.</li> <li>• Introducir los conceptos de límites laterales.</li> <li>• Calcular límites laterales a partir de una tabla de valores de una función.</li> </ul>
-----------	--

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introducir el concepto de discontinuidad.</li> <li>• Clasificar tipos de discontinuidades.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dominio de una función.</li> <li>• Continuidad de una función en un punto.</li> <li>• Discontinuidades: evitables y no evitables.</li> <li>• Límites laterales (límite por la izquierda y límite por la derecha).</li> <li>• Límite de una función en un punto.</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	<p>Se inicia la sesión con una lluvia de ideas, preguntando al alumnado cómo definirían continuidad, qué es dominio y si relacionarían estos conceptos de algún modo.</p> <p>A continuación, se les pasa un ejercicio que resolverán en parejas para así llegar a través de la práctica a una definición de límite y continuidad.</p>
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	1 sesión de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas (10 minutos)</p> <p>Se animará al alumnado a reflexionar sobre lo que hasta ahora han entendido como continuidad y su relación con lo que entienden por dominio de una función.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Ejercicio por parejas (45 minutos)</p> <p>Se pasará el mismo ejercicio a todo el alumnado que deberán resolver por parejas. Se trata de un listado de 5 funciones, ordenadas de más sencillas a más difíciles, sobre las que se trabajará para calcular el límite en un punto y estudiar la continuidad en ese punto utilizando la calculadora.</p> <p>Inicialmente se reflexiona sobre el dominio de la función y sobre la continuidad con los conocimientos que se tienen hasta el momento. A continuación, se rellenará la tabla de valores de la función a ambos lados del punto de estudio, lo ideal es que cada uno se encargue de los valores a un lado u otro. Finalmente,</p>

	se rellenará la tabla resumen de resultados sobre la que se trabajará en la próxima sesión.
<b>EVALUACIÓN</b>	No se evalúa al alumnado en esta sesión.

### *Sesión 2: Definición formal de límite y continuidad*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definir intuitivamente límite en un punto utilizando razonamiento inductivo.</li> <li>Definir continuidad en un punto utilizando el razonamiento inductivo.</li> <li>Familiarizar al alumnado con la nomenclatura y el vocabulario básico de límites y continuidad.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>CCL: Competencia lingüística.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Límite en un punto.</li> <li>Entorno de un punto.</li> <li>Continuidad de una función en un punto.</li> <li>Tendencia de una función.</li> <li>Discontinuidades evitables y no evitables (de salto finito y salto infinito).</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	<p>Se inicia la sesión recordando lo que se hizo en la anterior.</p> <p>A continuación, se animará al alumnado a que analice la tabla, interprete los resultados, hable del comportamiento de la función, etc. con el objetivo último que la clase llegue a una definición intuitiva de límite y de continuidad.</p> <p>Finalmente, les escribiré en la pizarra la definición formal de límite.</p>
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>Recursos espaciales: el aula.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	1 sesión de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas (10 minutos)</p> <p>En voz alta, el alumnado recordará lo que se trabajó en la sesión anterior y reflexionarán sobre cuál puede ser el objetivo último de este ejercicio.</p>

	<p><b>Actividad 2.</b> Reflexión grupal (20 minutos)</p> <p>Se animará al alumnado a deducir una definición más o menos rigurosa de límite de una función en un punto, a la vista de los resultados obtenidos en el ejercicio. A continuación, se hará lo propio para la definición de continuidad en un punto.</p> <p><b>Actividad 3.</b> Breve clase magistral (15 minutos)</p> <p>En la última parte de la clase, cuando el alumnado tiene una idea de lo que es límite y continuidad en un punto, se les dará la definición formal de límite usando la simbología adecuada.</p> <p><b>Actividad 4.</b> Test individual (10 minutos)</p> <p>En los últimos 10 minutos se pasará un pequeño test de los contenidos introducidos en las dos primeras sesiones de la unidad didáctica que deberán resolver de forma individual.</p>
<b>EVALUACIÓN</b>	Test individual de 5 preguntas con diferentes opciones. (Ver ANEXO 1).

### *Sesión 3: Límite de una función en un punto.*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular el límite en un punto a partir de gráficas o tablas.</li> <li>• Identificar el tipo de discontinuidad en un punto a partir de gráficas y tablas.</li> <li>• Recordar lo que son las funciones a trozos.</li> <li>• Calcular el límite de una función en un punto dada la expresión analítica de una función.</li> <li>• Entender el concepto de asíntota vertical.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límites laterales y límite en un punto</li> <li>• Límite en un punto.</li> <li>• Continuidad.</li> <li>• Discontinuidad.</li> </ul>



	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciones a trozos.</li> <li>• Asíntotas verticales.</li> <li>• Indeterminación.</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	Siempre al iniciar la sesión se recordará lo trabajado en la anterior. A continuación, durante toda la clase se usará la misma metodología de trabajo: pequeñas explicaciones a través de ejemplos (siempre interpellando a la clase para conectar con los conocimientos adquiridos) seguidas de un par de ejercicios del libro que deberán resolver en grupos.
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	1 sesión de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<p><b>Actividad 0.</b> Revisión del test (5 minutos) Se reparte al alumnado el test de la sesión anterior para que lo revisen.</p> <p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas (10 minutos) Se recordará, interpellando a la clase, cuándo una función tiene límite en un punto y cuándo es continua en ese punto.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Introducción y práctica del cálculo de límites en un punto a partir de la expresión analítica de la función. (15 minutos)</p> <p><b>Actividad 3.</b> “Refresco de funciones a trozos” (10 minutos) Se trabajará en la pizarra una función a trozos, que servirá para recordar conceptos como intervalos, funciones básicas y se estudiará el comportamiento de la función en los puntos de ruptura.</p> <p><b>Actividad 4.</b> Mini-prueba (10 minutos) Se repartirá un examen corto con dos ejercicios que deberán resolver individualmente, pero la nota final de la prueba dependerá del resultado de los otros miembros del grupo (tal y como explicaré en el apartado de evaluación).</p>
<b>EVALUACIÓN</b>	Mini-prueba individual con dos ejercicios: uno de límite en un punto y otro de continuidad de una función en un punto. (Ver Anejo 1)

#### *Sesión 4: Límites de funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ .*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender el concepto de límite de una función en el infinito.</li> </ul>
------------------	---

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprender que cuando <math>x \rightarrow +\infty</math> en funciones polinómicas, hay términos despreciables.</li> <li>• Calcular límites de funciones polinómicas y racionales cuando <math>x \rightarrow +\infty</math>.</li> <li>• Interpretar el resultado del límite y trasladarlo al comportamiento gráfico de la función.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Infinito.</li> <li>• Límite de funciones polinómicas y racionales cuando <math>x \rightarrow +\infty</math>.</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	<p>Inicialmente recordar el concepto de límite e introducir el concepto de infinito, el significado de “tender a infinito”.</p> <p>El método siempre es el mismo, introducir nuevos conceptos a través de ejemplos resueltos en la pizarra, interpelando continuamente al alumnado y posteriormente, deberán resolver en grupo algunos ejercicios similares del libro. La dificultad de los ejercicios irá en aumento a medida que se observe una mayor soltura en el alumnado.</p>
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	1 sesión de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<p><b>Actividad 0. Revisión de mini-prueba</b> (5 minutos)</p> <p>Se entrega al alumnado la mini-prueba corregida para que la revisen.</p> <p><b>Actividad 1. Lluvia de ideas</b> (5 minutos)</p> <p>Se pretende hacer reflexionar a los alumnos del concepto de infinito y de qué significa que la variable <math>x</math> tienda al infinito.</p> <p><b>Actividad 2. Introducción y práctica de cálculo de límites en el infinito</b> (40 minutos)</p>

	<p>La profesora, resolverá un par de límites de funciones polinómicas con varios términos con la ayuda de los alumnos a los que se les interpelará continuamente para asegurarse de que han entendido lo que significa aproximarse al infinito y que saben cuáles y por qué hay términos que son despreciables frente a otros.</p> <p>A continuación, se pasará a funciones inversas de polinómicas para recordar que cuando el denominador tiende a infinito, su inversa tiende a cero, se aprovechará para recordar el gráfico de la función <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> y su comportamiento en el infinito, introduciendo así la utilidad de los límites a la hora de representar de forma aproximada una curva.</p> <p>Finalmente se trabajarán en la pizarra un par de ejemplos de funciones racionales, recordando la importancia de que, al despreciar términos, los que no son despreciables deben mantener el coeficiente con su signo.</p> <p>Entre las explicaciones de la profesora se le dará tiempo al alumnado para que practique un par de ejercicios del libro parecidos a los de la pizarra.</p> <p><b>Actividad 3.</b> Reflexión final (5 minutos)</p> <p>Al final de la clase la profesora hará un resumen de lo trabajado en esta sesión recordando el significado de <math>x \rightarrow +\infty</math>, por qué al calcular estos límites en una función polinómica despreciamos términos y por qué es importante mantener el coeficiente y el signo del término con el que nos quedamos.</p>
<b>EVALUACIÓN</b>	No se evalúa al alumnado en esta sesión.

*Sesión 5: Límites de funciones cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Ramas infinitas. Asíntotas.*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender el concepto de límite de una función en el infinito.</li> <li>• Comprender que cuando <math>x \rightarrow -\infty</math> en funciones polinómicas, hay términos despreciables.</li> <li>• Calcular límites de funciones polinómicas y racionales cuando <math>x \rightarrow -\infty</math>.</li> <li>• Interpretar el resultado del límite y trasladarlo al comportamiento gráfico de la función.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Infinito.</li> <li>• Límite de funciones polinómicas y racionales cuando <math>x \rightarrow -\infty</math>.</li> </ul>
METODOLOGÍA	<p>Los primeros minutos se utilizarán como refresco de lo trabajado en la sesión anterior y así poder introducir el contenido de ésta.</p> <p>El método será el mismo que el de la sesión anterior, pero el ritmo posiblemente será mejor y se podrán hacer más ejercicios.</p>
MATERIALES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
TEMPORIZACIÓN	1 sesión de 55 minutos.
DESARROLLO	<p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas (5 minutos)</p> <p>Durante los primeros minutos la profesora intentará que recuerden los conceptos que se trabajaron en la sesión anterior y aprovechará para introducir el contenido de esta.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Introducción y práctica de cálculo de límites en el infinito (15 minutos)</p> <p>Esta actividad será idéntica a la de la sesión anterior con la diferencia que al tomar la variable independiente valores negativos se deberá prestar atención al signo del coeficiente del término de mayor exponente a la hora de calcular el límite. Se aprovechará que previsiblemente el alumnado tiene en esta sesión más soltura que en la anterior en el cálculo de límites para detenerse un poco más en la representación gráfica de la función en más o menos infinito. Esta actividad la conectaremos así con la siguiente dedicada a asíntotas.</p> <p><b>Actividad 3.</b></p> <p>Ramas infinitas (35 minutos)</p> <p>La profesora trabajará en la pizarra tres ejemplos de funciones con asíntotas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Primero, una función con asíntota horizontal: se dibujará la asíntota, se escribirá la ecuación y se estudiará la posición de la curva respecto de la asíntota de forma analítica y posteriormente con la calculadora.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A continuación, una función con asíntota parabólica. Se recordará la ecuación implícita de la recta, que es fundamental para poder calcular la ecuación de la asíntota oblicua. Se les explicará cómo calcular la ecuación utilizando límites y asegurándonos que entienden que en el infinito la curva se parece mucho a una recta que es la asíntota que buscamos.</li> <li>• Finalmente, una función sin asíntotas y que por tanto presenta ramas parabólicas.</li> </ul> <p>Después de cada explicación de la profesora se pedirá al alumnado que busquen por grupos las asíntotas de una función similar a la trabajada en la pizarra y así poner en práctica lo aprendido.</p> <p><b>Actividad 4.</b> Reflexión final (5 minutos)</p> <p>Esta actividad es fundamental en esta sesión porque suelen perderse a lo largo de la explicación de las ramas parabólicas. Por ello, la profesora recordará el significado de rama infinita, enumerará los diferentes tipos y les ofrecerá una metodología para buscar asíntotas dada la expresión analítica de la función a estudiar.</p>
<b>EVALUACIÓN</b>	No se evalúa al alumnado en esta sesión

### *Sesión 6 y 7: Práctica de cálculo de límites en el infinito.*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir soltura en el cálculo de límites y búsqueda de asíntotas.</li> <li>• Representar gráficamente el comportamiento de la función cuando <math>x \rightarrow \pm\infty</math>.</li> <li>• Desarrollar un método propio para resolver los ejercicios de forma ordenada, rigurosa y argumentada.</li> <li>• Utilizar razonamiento deductivo.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límite de una función cuando <math>x \rightarrow \pm\infty</math>.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ramas infinitas: asíntota horizontal, asíntota oblicua y rama parabólica.</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	Esta sesión es totalmente práctica, el alumnado irá resolviendo por grupos un listado de ejercicios que les propondrá la profesora, cuya función durante estas dos sesiones se limitará a resolver dudas.
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>Recursos espaciales: el aula.</li> <li>Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	2 sesiones de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<p><b>Actividad 1.</b> Refresco (5 minutos)</p> <p>Durante los primeros minutos de clase la profesora ayudará al alumnado a recordar cómo calcular límites de funciones en el infinito y el tipo de ramas infinitas que pueden tener las funciones.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Practicar (50 minutos)</p> <p>La profesora pasará al inicio de las sesiones un listado de ejercicios que hay que resolver en clase siempre por equipos. El contenido de estos ejercicios (del libro) está destinado a practicar y consolidar la habilidad del alumnado para comprender y resolver límites de funciones en el infinito, buscar las asíntotas de una función y estudiar gráficamente el comportamiento de esta.</p> <p><b>Actividad 3.</b> Mini-prueba (10 minutos) (*)</p> <p>Se repartirá un ejercicio de cálculo de asíntotas a cada alumno que deberá resolver individualmente.</p> <p>(*) La mini-prueba se realizará en los últimos 10 minutos de la sesión 7.</p>
<b>EVALUACIÓN</b>	Mini-prueba nº2 en la sesión 7. Consiste en un ejercicio donde se piden las ramas infinitas dada la expresión analítica de la función. (Ver anejo 1)

### *Sesión 8: Ramas infinitas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.*

<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recordar funciones básicas: <math>\sin x</math>, <math>\cos x</math>, <math>a^x</math>, <math>\log x</math></li> <li>Calcular el límite cuando <math>x \rightarrow \pm\infty</math> de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.</li> <li>Familiarizarse con la representación gráfica de estas funciones.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límite cuando <math>x \rightarrow \pm\infty</math> de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.</li> </ul>
METODOLOGÍA	La metodología empleada será la misma que en la mayoría de las sesiones: al inicio se intentará conectar con conocimientos previos del alumnado y a continuación la profesora resolverá en la pizarra ejercicios cuya dificultad irá en aumento, intercalando entre las explicaciones ejercicios muy parecidos a los de la pizarra que el alumnado deberá resolver en grupos.
MATERIALES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
TEMPORIZACIÓN	1 sesión de 55 minutos.
DESARROLLO	<p><b>Actividad 0.</b> Revisión de la mini-prueba (5 minutos)</p> <p>Se le entrega al alumnado la mini-prueba corregida para que la revisen.</p> <p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas. (5 minutos)</p> <p>La profesora intentará hacer recordar al alumnado algunas de las funciones básicas que se estudiaron en la unidad anterior, si recuerdan cuál era su representación gráfica, si la recuerdan... podremos calcular sobre la gráfica el límite cuando <math>x \rightarrow \pm\infty</math>.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Estudiar y practicar (45 minutos)</p> <p>La mayor parte de esta sesión será práctica, puesto que el alumnado ya tiene los conocimientos suficientes para poder calcular el límite de casi cualquier tipo de funciones. Tienen todas las herramientas; conocen el significado de límite en un punto y en el infinito, saben qué son las asíntotas de una función y conocen las funciones básicas. En esta actividad, con la ayuda de la profesora, deberán usar el razonamiento deductivo para calcular límites de funciones un poco más inusuales, que no más complejas.</p>
EVALUACIÓN	No se evalúa al alumnado en esta sesión.

*Sesión 9: Práctica de continuidad, límites y ramas infinitas.*

OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisar todos los contenidos de la unidad didáctica.</li> </ul>
COMPETENCIAS BÁSICAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límites.</li> <li>• Continuidad.</li> <li>• Ramas infinitas.</li> <li>• Representación gráfica aproximada de funciones.</li> </ul>
METODOLOGÍA	Esta sesión es totalmente práctica y como en otras, los alumnos trabajarán en grupo para resolver el listado de ejercicios que proporcione la profesora, cuya función será resolver las dudas planteadas por el alumnado.
MATERIALES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
TEMPORIZACIÓN	1 sesión de 55 minutos.
DESARROLLO	<p><b>Actividad 1.</b> Lluvia de ideas (10 minutos)</p> <p>Durante los primeros minutos de la sesión, la profesora intentará que los alumnos revisen todos los conceptos trabajados durante las sesiones de esta unidad didáctica, mediante preguntas del tipo: “¿Cuándo podemos decir que existe el límite de una función en un punto?”, “¿qué significa que una función tenga una asíntota horizontal?”, etc.</p> <p><b>Actividad 2.</b> Practicar y practicar (45 minutos)</p> <p>Esta sesión se presenta como una oportunidad para revisar conceptos y afianzar al alumno en la resolución de ejercicios de límites y continuidad. Tendrán la oportunidad de revisar todo el contenido de la unidad con sus compañeros y con la profesora al resolver un listado de ejercicios que recopile todo lo trabajado con un nivel de dificultad parecido al que tendrán los del examen.</p>
EVALUACIÓN	No se evalúa al alumnado en esta sesión.

### Sesión 10: El concurso.



<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Perder el miedo a ejercicios que a priori parecen inabordables.</li> <li>• Aprender a utilizar las herramientas que se tienen para aceptar retos.</li> <li>• Aprender a delegar, organizar y coordinar un equipo para conseguir los resultados esperados.</li> </ul>
<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</li> <li>• CPAA: Competencia aprender a aprender.</li> <li>• SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.</li> <li>• CCL: Competencia lingüística.</li> <li>• CSC: Competencias sociales y cívicas.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límites.</li> <li>• Continuidad.</li> <li>• Ramas infinitas.</li> <li>• Representación gráfica aproximada de funciones.</li> </ul>
<b>METODOLOGÍA</b>	En esta sesión los alumnos competirán por grupos en un concurso matemático, donde el premio final será un complemento a la nota del examen.
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos humanos: el grupo-clase, el docente.</li> <li>• Recursos materiales: utensilios básicos de escritura, proyector.</li> <li>• Recursos espaciales: el aula.</li> <li>• Recursos organizativos: pupitres en grupos.</li> </ul>
<b>TEMPORIZACIÓN</b>	1 sesión de 55 minutos.
<b>DESARROLLO</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Durante los cinco primeros minutos la profesora explicará las reglas del concurso. Cada grupo elegirá un sobre que contiene un ejercicio, que todos son capaces de resolver porque tienen los conocimientos necesarios, sólo deben aplicarlos correctamente.</li> <li>• Tienen 10 minutos para resolver correctamente el problema y preparar una breve exposición.</li> <li>• Pasados los 10 minutos, cada grupo deberá salir a la pizarra para explicar al resto de compañeros cómo lo han resuelto y deberán responder a cualquier pregunta que se les plantee. Tendrán un tiempo máximo de 8 minutos por equipo para exponer y responder a las preguntas de los compañeros y/o de la profesora.</li> </ul>
<b>EVALUACIÓN</b>	Mediante el concurso matemático, si resultan aprobados por sus compañeros y la profesora tendrán 0,5 puntos extra en la nota final del examen.

## i. EVALUACIÓN DEL ALUMNADO

Esta unidad didáctica va dirigida a alumnos de 1º de Bachillerato, y en mi opinión no tiene sentido en este nivel evaluar los deberes o el comportamiento en clase, puesto que les presupongo con la madurez suficiente para que se planifiquen los estudios y respeten al profesorado y a sus compañeros en la clase.

El objetivo es conseguir captar la atención del alumnado de forma continuada, que sientan la necesidad de seguir el ritmo de las sesiones sin perder detalle y no abandonar la unidad para estudiar sólo el día antes del examen.

Para conseguirlo, esta unidad se evaluará del siguiente modo:

- Examen al final de la unidad, que valdrá un 90% de la nota final.
- Nota media de las mini-pruebas, que valdrá un 10% de la nota final.
- Concurso matemático, que si se supera se obtendrá un 0,5 extra adicional sobre la nota final.

### *El examen final*

A petición de la profesora, el examen final de límites y continuidad será la mitad de un examen conjunto con la unidad de representación gráfica de funciones.

En la parte del examen correspondiente a esta unidad se presentan tres ejercicios de los cuales deben resolver dos:

- Los dos primeros son ejercicios de ramas infinitas, de los cuales tienen que elegir uno. Ambos tienen cierta dificultad; el primero con una función con valor absoluto que tendrán que transformar en función a trozos y buscar las ramas infinitas y el segundo es una función racional de la que tendrán que buscar su asíntota oblicua, debiendo acordarse de cómo se calculan los coeficientes de la asíntota y cómo se ubica la curva respecto de dicha asíntota.
- El tercer ejercicio está pensado para comprobar que han entendido el concepto de continuidad de una función en un punto y discontinuidad evitable.

Con este tipo de examen pretendo que los alumnos lean detenidamente los ejercicios, comprendan el enunciado y evalúen las dificultades de cada uno y entre los dos primeros elijan

el que a su juicio puedan resolver perfectamente en el tiempo estipulado. Ellos y ellas son en cierto modo, responsables del éxito en su examen, tanto por elegir el problema que le resulte más fácil como por haberse preparado bien la materia. (El examen está en el Anejo 2).

### *Test individual y las mini-pruebas*

A lo largo de esta asignatura se realizan un test individual y dos mini-pruebas, a modo de evaluación continua, con el objetivo de mantener a los alumnos concentrados en los contenidos de cada sesión puesto que sin previo aviso se les puede pasar un test.

La nota de las mini-pruebas se calcula como sigue:

- Cada alumno resuelve su test de forma individual, obteniendo una puntuación sobre diez. Pero la nota individual final de la mini-prueba es la media entre la propia y la peor del grupo.
- La nota final de cada alumno correspondiente a las mini-pruebas es la media aritmética entre la nota del test individual y las dos mini-pruebas.

Vinculando la nota individual a la de los compañeros de grupo pretendo que el alumnado se tome en serio el trabajo en equipo. Los más capaces ayudarán a sus compañeros aunque tan solo sea porque su nota puede bajar si éstos no están aprendiendo y los que no se toman las clases en serio deben reflexionar sobre su actitud y el efecto que puede tener sobre la nota de los compañeros y compañeras del grupo.

### *El concurso matemático*

El día anterior al examen final, se anima al alumnado a que trabaje en equipo para ganar 0,5 puntos extra en el examen final. Lo interesante de este concurso es que los ejercicios serán auténticos retos para ellos, problemas que a priori les pueden parecer imposibles pero que acudiendo a los conocimientos adquiridos y usando razonamiento deductivo podrán resolver finalmente.

Este concurso en cierta manera está pensado también como un extra de motivación para los alumnos más avanzados y una inyección de confianza a los alumnos menos capaces que verán gracias a sus compañeros más capaces que tienen recursos suficientes para resolver cualquier ejercicio que se les plantee.

Las normas del concurso son las siguientes:

- La profesora tiene cuatro sobres con un ejercicio diferente cada uno, cada equipo elegirá un sobre sin conocer su contenido. Disponen 10 minutos para resolver el ejercicio en equipo y planificar la exposición oral a sus compañeros.
- Finalizado el tiempo de resolución del ejercicio, cada equipo deberá explicar cómo ha resultado el ejercicio a la clase y deberán responder a las posibles dudas que surjan entre sus compañeros o la profesora. Cada grupo tendrá 8 minutos para la exposición oral y ronda de preguntas.
- Cada equipo evaluará la exposición de los demás y la propia, para conseguir el 0,5 extra deberán obtener el apto de los compañeros y de la profesora.

Con este concurso pretendo:

- Revisar todos los contenidos de la unidad didáctica. Cada ejercicio cubre parte del contenido de la unidad: hay uno de continuidad de una función, otro de discontinuidades, otro de límites de funciones “especiales” y uno de asíntotas de funciones trigonométricas. Bien sea resolviendo el problema o escuchando la exposición de los compañeros, se revisarán todos los contenidos de la unidad.
- Que el alumnado trabaje en equipo por un objetivo común. Trabajarán coordinados a contrarreloj para conseguir un 0,5 extra para todos los miembros del grupo. Deberán pensar, discutir y razonar cómo resolver el problema, y lo más importante, ponerse de acuerdo, tanto para dar una solución como para organizar la exposición oral.
- Poner en práctica la evaluación entre iguales, a priori puede ser evidente que todos se darán el apto, pero lo interesante es que podrán ver los errores que cometen los compañeros y compañeras y les servirá para aprender.

### 3. REFLEXIÓN

En este apartado reflexiono sobre lo que he ido aprendiendo a la hora de implementar la unidad didáctica: las dificultades que me he encontrado y que no consideré al planificar la unidad didáctica y los aspectos de mi unidad que han funcionado bien.

### a. LAS DIFICULTADES

Durante la fase del Prácticum, cuando puse en práctica la unidad didáctica que había programado he podido comprender las dificultades a las que se enfrenta el profesor aun cuando el grupo-aula sea respetuoso con su trabajo y participativo, como ha sido el caso.

#### *La temporalización.*

Ya en la segunda sesión me di cuenta de que debía reajustar mi planificación inicial, tuve claro que había sido demasiado ambiciosa en cuanto al número de ejercicios que había preparado para las sesiones. Además, pensé que no estaban preparados para tener una mini-prueba en la tercera sesión, necesitaban un poco más de tiempo para asimilar el concepto de límite de una función en un punto y adquirir soltura en el cálculo de límites.

A mi juicio la razón de este error/dificultad es que conocía lo suficiente al alumnado, o al menos, no había calibrado bien sus posibilidades, pensé que les costaría menos asimilar el concepto de límite y continuidad y trabajarían más rápido. Al inicio de la unidad se evidenció en cierto modo la dificultad que tienen para acudir a conocimientos previos para trabajar los nuevos y para salir de su zona de confort y trabajar nuevos conceptos con nuevos métodos.

#### *El back-ground de los alumnos.*

A la hora de poner en práctica la unidad didáctica programada, me encontré un grupo en la recta final del curso acostumbrados a un método de trabajo que es diferente al que yo pretendía seguir, lo cual es una dificultad añadida. Del mismo modo también lo es el hecho de desconocer cuál es el nivel de los alumnos, si tienen buena base en análisis de años anteriores o no (soltura con funciones básicas, representación gráfica aproximada de funciones básicas, etc.).

Estos dos aspectos han influido significativamente en mi unidad didáctica:

- Me he encontrado con alumnos que les cuesta más de lo deseable comprender los enunciados de los problemas o que se pierden a lo largo de un razonamiento. Por ejemplo, en el ejercicio que se trabajó durante las dos primeras sesiones observé que gran parte de los alumnos no entendían la finalidad del ejercicio, ni aun teniendo la tabla de valores completa conseguían deducir una definición sencilla de límite. Incluso algunos pocos tampoco sabían lo que les preguntaban, no eran capaces de ver la “tendencia” de los valores de las tablas que ellos mismo habían generado.

- La mayoría de la clase no tenía soltura en funciones básicas: logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, etc. Prácticamente ninguno recordaba la representación gráfica aproximada e incluso a muchos les costaba responder a la pregunta “¿Qué le pasa a  $f(x) = 1/x$  cuando  $x$  es muy grande?”. La profesora me aclaró que la formación en análisis de años anteriores había sido prácticamente nula y por ello, tal vez el nivel del alumnado era menor de lo esperado.
- Tuve que detenerme durante casi una sesión entera en explicar qué es una función a trozos y cómo trabajar con una función que tiene un valor absoluto. Dedicué bastante tiempo a aclarar qué significan los puntos de ruptura, cómo interpretar intervalos, etc. Aproveché para poner ejemplos donde pudieran ver discontinuidades en los puntos de ruptura de varios tipos: de salto finito y de salto infinito.

Sin duda esta ha sido la dificultad que más desasosiego me generó, pero me hizo reaccionar a tiempo y tomar una decisión con el consentimiento de la profesora titular. Era obvio que con las sesiones de las que disponía no se podían alcanzar todos los objetivos, al menos con el nivel de profundidad que a mi juicio se debían de trabajar. Así que le pedí a la profesora:

1. Reformular los objetivos. Decidimos eliminar la sesión 8 (“Ramas infinitas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas”) puesto que no estaban normalmente ente sus objetivos para este nivel.
2. Dedicar tres sesiones más a esta unidad didáctica.

Estas tres sesiones las dediqué a practicar:

- Cálculo de límite de una función en un punto y estudio del comportamiento de una función cerca de sus asíntotas verticales. Les costaba muchísimo entender qué significaba tener una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ , a algunos incluso les costaba factorizar. También les costó entender que cuando tenían un cero en el denominador debían hacer los límites laterales.
- Estudio de la continuidad de una función. No estaban familiarizados con las funciones a trozos ni con las funciones con valores absolutos, así que necesitamos una sesión entera para trabajar con este tipo de funciones.
- Estudiar las ramas infinitas de una función. Les costaba entender que una función en el infinito se pareciese a una recta, sin embargo, que tendiese a un número no les inquietaba. Esto se debía a que no identificaban esta constante con una recta de ecuación  $y = a$ . Por

ello, tuve que dedicar un tiempo a la ecuación implícita de la recta, a explicar qué significaba que cuando  $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \cong ax + b$ , y a que utilizando límites podían calcular los coeficientes a y b de la asíntota.

Pero pensé que, si conseguían asimilar todos los conceptos, podrían trabajar límites y asíntotas de funciones logarítmicas, trigonométricas y exponenciales en el concurso. De este modo habría cumplido con mis objetivos iniciales, y el alumnado, a través de un reto, saldrían de su zona de confort para finalmente darse cuenta de su capacidad para resolver problemas de dificultad superior por sus propios medios.

### *El trabajo en equipo.*

El trabajo en equipo para esta unidad didáctica presenta algunas dificultades que me gustaría analizar:

- Sólo uno de los grupos trabajaba en equipo desde el inicio, y según me informó la profesora titular, tal vez fuese porque ya habían trabajado en grupo en cursos anteriores. Al resto de grupos les costaba muchísimo, los individualismos eran habituales aun sabiendo que la nota dependía del compañero. Algunos se quejaban de que su nota bajaría por culpa de otro compañero y sin embargo no hacían nada por ayudarlo a mejorar. Pero también observé comportamientos egoístas a la inversa, alumnos que no se tomaban en serio el trabajo en equipo y les daba igual perjudicar al compañero. Hicieron falta bastantes reflexiones en voz alta para vencer los individualismos. Pero finalmente, el trabajo grupal resultó a mi juicio positivo en este sentido.
- El trabajo grupal es adecuado para contenidos que los alumnos conocen o dominan en cierto modo, cuando el objetivo es afianzar o ampliar mínimamente. En el caso de límites y continuidad, al ser contenidos totalmente nuevos, todos los grupos eran muy demandantes, pudimos atender sus dudas porque éramos dos profesoras en el aula para 18 alumnos, pero no creo que funcionase con una sola profesora.
- La diversidad y diferentes ritmos de aprendizaje en el aula unidos con individualismos puede hacer que algunos alumnos se aburran y otros se descuelguen del grupo. Hace falta educar más al alumno en la cultura del trabajo en equipo, ayudar al compañero, pero también pedir ayuda y esforzarse para mejorar los resultados comunes.

### *El ¿por qué?, las inquietudes del alumnado.*

En mitad de una demostración teórica de cómo calcular una asíntota oblicua, un alumno me preguntó “¿y esto de los límites para qué sirve?” con gestos y expresión de frustración, que gran parte de los compañeros compartían. La pregunta no es nada novedosa, pero yo tenía la oportunidad de dar una respuesta que sí lo fuera, distinta a la de “para aprobar y pasar a segundo”. Le expliqué que si tenía un negocio podría modelizarlo y saber si los ingresos tenían una asíntota horizontal independientemente de la inversión sabría que no debería arriesgar capital innecesariamente, que si conozco los valores límite de uso de una turbina sabré a qué valores no acercarme para no tener un fallo irreversible, etc. Como les gustó que les hablara de explicaciones reales, preparé una pequeña presentación con ejemplos de utilidad de los límites y la continuidad en ingeniería. Les prometí proyectar la presentación a mitad de una de las clases prácticas si hacían todos los grupos la mitad de los ejercicios planificados para esa sesión. Esta pregunta “¿para qué?” puede ser una dificultad a priori, porque puede parecer frustración del alumnado y que además ralentiza el ritmo de la clase, pero por otro lado es una oportunidad para enganchar al alumnado conectando las matemáticas que estudian con la vida real.

## **b. LOS PUNTOS FUERTES DE MI UNIDAD DIDÁCTICA**

Una vez analizadas las dificultades que he tenido a la hora de poner en práctica la unidad didáctica es importante también analizar lo que ha funcionado bien a lo largo de las sesiones:

### *El test y las mini-pruebas.*

El test-individual y las mini-pruebas han ayudado al alumnado a concentrarse en cada sesión, preocuparse por no perder el ritmo porque estas pruebas eran sin previo aviso y la nota final dependía del resultado de estos ejercicios. Es importante que los alumnos adquieran unos hábitos de estudio y no estudien el día antes del examen, que tomen ellos el control del proceso de aprendizaje.

### *Corrección de las mini-pruebas.*

Siempre les he devuelto corregidas las pruebas al día siguiente de realizarlas. Al inicio de la siguiente sesión les dejaba cinco minutos para que revisaran sus tests. Cada uno tenía correcciones y explicaciones personalizadas de acuerdo con los errores cometidos. Pienso que es



importante que vean dónde se han equivocado, por qué y cómo lo podrían haber hecho perfecto. Podíamos también comentar en voz alta errores, lo cual es muy útil en el proceso de aprendizaje.

### *La rúbrica.*

Antes del examen les puse en el tablón del aula una especie de rúbrica con los estándares mínimos que debían cumplir los ejercicios del examen, con ejemplos de errores que ellos mismos habían cometido en mini-pruebas anteriores y no se podían aceptar en el examen final. El objetivo era concienciar al alumnado de la importancia de utilizar la notación adecuada y ser riguroso en el procedimiento utilizado. También pretendía en cierto modo despertar el sentido de responsabilidad del alumno, presentándoles unos criterios claros de corrección y, por lo tanto, ésta será totalmente objetiva, esto es lo que van a encontrar en un futuro en la universidad. (Ver Anejo 3).

### *La respuesta al “¿para qué sirve esto?”.*

Les preparé una pequeña presentación de las utilidades de límite y continuidad en diferentes campos profesionales para que vean que los contenidos de las asignaturas, principalmente en una tan árida como las matemáticas, tienen aplicación en la vida real.

Uno de los ejemplos más vistosos de todos los que les presenté fue el Puente Tahoma en San Francisco. Simplificando mucho el problema (asimilando el comportamiento del puente al de un muelle), la amplitud de las oscilaciones es igual a la de una función inversa,  $f(x) = \frac{a}{x-b}$ , y al excitar el viento al puente a su frecuencia natural ( $x=b$ ) la amplitud con la que oscila crece sin control y colapsa. Por eso en ingeniería se diseñan los puentes para que su frecuencia natural esté muy alejada de la frecuencia con la que se estima que los agentes externos pueden excitar el puente (viento, sismos, tráfico, etc.) Después de esta explicación proyecté un video original del accidente que les impactó y gustó por igual.

El alumnado agradece esta conexión entre lo académico y lo práctico.

### *Las TIC.*

Durante una de las sesiones prácticas, como recompensa por haber trabajado bien en equipo, les puse un pequeño video en inglés sobre asíntotas verticales de [Khan Academy](#). Este video me sirvió para hablar de lo importante que son las matemáticas independientemente del idioma, la cultura,

etc., en definitiva, las matemáticas son universales. Hay adolescentes por todo el mundo que al mismo tiempo que ellos están estudiando límites y continuidad con la ayuda de esta web. Por lo tanto, les enseñé que las redes también se pueden utilizar para aprender matemáticas, les muestro una herramienta más para estudiar y prepararse el examen en casa. En esta web además de videos explicativos y ejercicios resueltos, tienen test para que los estudiantes se pongan a prueba.

### *El concurso.*

El concurso fue un extra de motivación para todo el grupo. Después de una sesión dedicada a asíntotas oblicuas casi totalmente, una alumna (Duna) me dijo *“Esta clase ha sido muy aburrida, yo preferiría que fuese más práctica”*. Esta frase me hizo reflexionar, primero analicé qué había pasado en la sesión: tuve que dedicar casi una sesión entera a resolver en la pizarra paso a paso el cálculo de asíntotas oblicuas porque la mayoría de la clase no era capaz de hacerlo por sí mismos. Esto significó tener a los alumnos, entre los que se encuentra Duna, muy aburridos. Así pues, decidí poner unos ejercicios un poco más *“extravagantes”* para motivar a toda la clase en compensación a aquella sesión tan aburrida para algunos. Es difícil a veces, encontrar el equilibrio en el aula cuando hay diferentes velocidades de aprendizaje. Finalmente creo que el reto les resultó divertido y les hizo sentirse capaces de resolver ejercicios por encima de lo que equivocadamente ellos creen que es su nivel. (Ver Anejo 4).

### *Las encuestas.*

Durante esta unidad didáctica he realizado tres encuestas:

- La inicial para testear si el alumnado estaba habituado a trabajar en equipo y si tenía algún tipo de temor a la hora de abordar demostraciones teóricas (porque la intención era introducir la definición formal de límite).

De los resultados se deduce que:

- Por una parte, no están nada habituados a trabajar demostraciones matemáticas ni necesitan entender los conceptos para resolver los ejercicios, lo cual es preocupante.
- Por otra parte, no trabajan casi nunca en equipo a pesar de que creen que es positivo y tiene predisposición a ello. Por lo tanto, tal vez sería positivo hacerles trabajar más en grupo.

- Al final, se les pasó dos encuestas; una para evaluar la metodología de trabajo empleada y otra para evaluar la labor de la profesora.

A los alumnos se les ve satisfechos cuando el profesor les pregunta, les tiene en cuenta y desde mi punto de vista este es uno de los puntos fuertes puesto que crea un vínculo de confianza entre alumnado y profesora muy positivo. (Ver Anejo 6).

## 4. MEJORAS

En este apartado reflexionaré sobre cuáles serían las mejoras que yo aplicaría a mi unidad didáctica si tuviera que implementarla de nuevo.

### 1. Serán necesarias más sesiones para esta unidad didáctica.

El número de sesiones a mi juicio es insuficiente, al final tuve que ampliar el número inicial pero aun así considero que 16 sesiones sería ideal para conseguir que todo el alumnado alcanzara los estándares que creo que deberían alcanzar. Con este número de sesiones me hubiese dado tiempo a detenerme en funciones más complejas, a que tuvieran una mayor soltura en relacionar límites con comportamiento de una función y, por ende, representación gráfica.

### 2. Modificar el ejercicio inicial para la definición de límite y continuidad: menos funciones y más guiado en el paso final.

El ejercicio inicial de introducción al límite con la ayuda de la calculadora lo programaría para una sola sesión con sólo dos funciones. Creo que así se alcanzaría el mismo objetivo y el alumnado no se perdería tanto en la resolución y deducción de la definición de límite. Además, les pediría que representaran gráficamente la tabla de valores para que viesen el comportamiento de la función. Porque detecté que entendían que los valores se acercaban a un determinado número pero que no relacionaban esa tendencia con la representación gráfica de una función. (Ver Anejo 7 donde hay detalles del ejercicio inicial).

### 3. Reducir el trabajo grupal sólo a las sesiones 100% prácticas y a la del concurso.

De este modo podría seguir trabajando la competencia lingüística, el aprendizaje entre iguales, etc., pero en las sesiones donde se necesitan más explicaciones de la profesora o algunos alumnos necesitan aclaraciones adicionales, puedo dar ejercicios extras a los más avanzados para que no se aburran (ya lo hacía algunas veces la profesora titular).

4. **Ampliar la conexión entre las matemáticas que estudia el alumnado y sus aplicaciones.**

Buscaría más ejemplos de aplicaciones reales, simplificarlos y convertirlos en ejercicios para resolver por equipos. Creo que es fundamental en matemáticas de este nivel anclar los contenidos a la realidad que les rodea.

5. **Convertir las clases en un proyecto transversal en el que se trabajen matemáticas e inglés en algunas de las sesiones.**

Dedicaría más tiempo durante las sesiones a proyectar videos de Kahn Academy o trabajarlos a modo de flipped classroom pero en inglés. Me coordinaría con la profesora de inglés para que revisen con ella gramática necesaria (futuro simple, oraciones condicionales de tipo 1, etc., que están en los objetivos del curso) y en mis clases introducir “key-words”. El objetivo sería concienciarles de que las matemáticas son universales y que, además, como verán en un futuro, en lo académico y lo profesional van unidos con el inglés.

## 5. CONCLUSIÓN

Para concluir, me gustaría valorar la experiencia de dar clase de verdad en un instituto público:

- De acuerdo con lo expuesto en el marco teórico, he comprobado que el proceso de andamiaje es un proceso dinámico que depende del nivel de los alumnos y del ritmo con el que aprenden, que una evaluación formativa del alumnado (en mi caso por observación y mediante las mini-pruebas) es fundamental para diseñar las sesiones y por lo tanto adaptar la programación inicial. Y en ese sentido, he comprobado con la práctica que una programación perfecta es aquella que se adapta a las necesidades de tus alumnos siempre con los objetivos como meta, hay mil caminos para alcanzarla. La programación es algo vivo que el profesor debe ajustar a medida que avanza el curso.
- He constatado que un diálogo fluido con el alumnado es crucial en el proceso de aprendizaje, preguntarles y animarlos a que te pregunten, buscando así despertar inquietudes que los lleve a ser autónomos en su proceso de aprender. Atender a sus sugerencias para programar actividades puede llevar a procesos de aprendizaje que les sean muy útiles y de los que se sienten artífices, esto es, motivación.
- El feed-back entre inmediato y retardado a través de correcciones personalizadas de los tests y mini-pruebas, rúbricas con ejemplos de ejercicios bien y mal ejecutados ha sido

fundamental para conseguir alumnos independientes que conocen los objetivos y cómo conseguirlos, e incluso capaces de elegir el ejercicio que más les conviene resolver en un examen.

- Necesitan conectar las matemáticas con la vida real, me ha alegrado enormemente el interés que han prestado a mis ejemplos de ingeniería. Creo que a pesar de que no me conociesen demasiado y no tuviera la confianza con los alumnos que tenía la profesora titular, estas pequeñas anécdotas de mis conocimientos como ingeniero me ayudaron a conectar con el grupo.

En definitiva, esta ha sido una oportunidad excepcional para disfrutar de la docencia y cerrar este periodo de formación como profesora de matemáticas de secundaria.

Finalmente, sólo me queda agradecer a todo el departamento de matemáticas del IES Alfons XIII de Vall d'Alba su apoyo en el periodo de prácticas. En especial querría agradecer a la que fue mi tutora, M<sup>a</sup> Angels Gallego Pitarch, que compartiera sus experiencias y me apoyara y ayudara en la implantación de esta unidad didáctica, fue tremendamente generosa conmigo. Y por supuesto, a Julio José Moyano, mi tutor de TFM, que me ha apoyado, animado y ayudado en este proceso muchísimo.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

COLERA JIMÉNEZ, J. *et al* (2015). Matemàtiques I. Valencia: Editorial Anaya.

[CURRICULUM ESO-BATXILLERAT DE LA GVA](#)

WOOD, D. *et al* (1976). *The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry*

VAN DE POL, J *et al* (2010). *Scaffolding in Teacher–Student Interaction: A Decade of Research*

BAKKER, A. *et al* (2015). *Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review.*

KAZAK, S. *et al.* *Combining scaffolding for content and scaffolding for dialogue to support conceptual breakthroughs in understanding probability.*

NICOL, D. *et al* (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice.

NORTHERN ILLINOIS UNIVERSITY, Faculty Development and Instructional Design Center.  
“*Instructional scaffolding to improve learning*”

<https://www.khanacademy.org/math/calculus-home/limits-and-continuity-calc>

[VIDEO: Entrada en resonancia del puente Tahoma](#)

## 7. ANEJOS

### ANEJO 1: TEST Y MINI-PRUEBAS.

El objetivo de estas pruebas es comprobar que los alumnos siguen el ritmo de las sesiones y asimilan los conocimientos como deben, los ejercicios son muy parecidos a los que se trabajan durante las sesiones. Preparé varios ejemplares para el primer test y evitar que copiaran, a continuación, presento uno de ellos:

NOM I COGNOMS <i>Albalet Andreu</i>	1 BAT A LÍMITS I CONTINUITAT
-------------------------------------	---------------------------------

Llig atentament les següents qüestions i senyala la correcta.

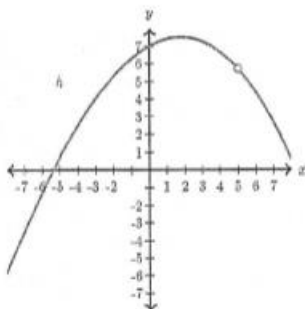
1. Donada la següent taula:

$x$	$h(x)$
-7.1	-3.32
-7.01	-3.1
-7.001	-3.03
-6.999	-3.03
-6.99	-3.1
-6.9	-3.32

Podem estimar el  $\lim_{x \rightarrow -7} h(x) = 0$

- a) ~~-3~~ ✓  
 b) -7  
 c) No existeix  
 d) 0

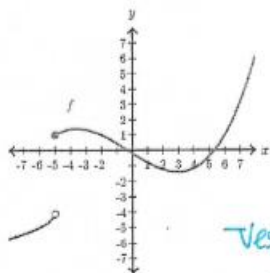
2. Donada la següent gràfica:



Podem dir que el  $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) =$

- a) 4  
 b) 5.2  
 c) 5.7 ✓  
 d) No existeix

3. Donada la següent gràfica:



- a) Té una discontinuïtat evitable en  $x=-5$   
 b) Té una discontinuïtat no-evitable en  $x=-5$   
 c) És contínua  
 d) Té una discontinuïtat evitable de salt finit en  $x=-5$

*Ves en compte!*

- Les discontinuïtats de salt finit són sempre no-evitables

4. Quina de les següents funcions és contínua en tota la recta real?

$$f(x) = e^x$$

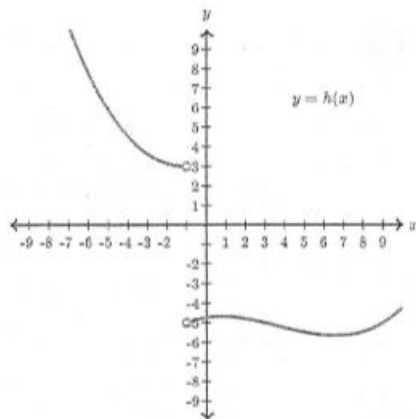
$$g(x) = \sqrt{x}$$

- e) ~~f(x) = e^x~~  
 f) ~~g(x) = \sqrt{x}~~  
 g) les dos

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$\text{Dom } g(x) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

5. El gràfic de la funció  $h(x)$  és següent:



- a)   $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$  existeixen. ✓  
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$  existeix.  
 c)  $h(x)$  està definida en  $x = -1$   
 d) ~~Ninguna de les anteriors~~

En este ejemplo, igual que en el que sigue, se pueden ver las correcciones que les hago a los alumnos.



Este es un ejemplo de la mini-prueba 1:

MINI-PROVA N°1: Continuïtat i límit d'una funció en un punt	A
NOM I COGNOMS: <i>Jordi Gombau Montoliu</i>	1r BAT A

**4** **Exercici 1 (5 PUNTS)**  
Calcula el següent límit:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

*no es pot ficar  
Hi ha que dir "tenim una indet. del tipus..."*

*+1 ha faltat dir  
límit f(x)  
x → -1  
perquè els límits laterals (x+1)·(x+1)  
límit x → -1 f(x) ≠ límit x → -1+ f(x)*

**4** **Exercici 2 (5 PUNTS)**  
Calcula el valor de k per a que la funció f(x) siga contínua en x=0.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x + k, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*A l'examen s'ha de plantejar bé o no ho evaluarem correctament.*

*Hi ha que plantejar correctament el problema!  
Per a que f(x) siga contínua en x=0:*

- Ha d'existir f(0)
- Ha d'existir  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (límits laterals iguals)
- A més;  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$  (continua)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + k = 0 + k = k$  (continua)

$\rightarrow k = 1$

Les especifico dónde se han equivocado, por qué y cómo deberían hacerlo la próxima vez para obtener la puntuación máxima. Es fundamental que vean la diferencia entre un ejercicio mal ejecutado (errores de notación, procedimiento poco claro, etc.) y uno bien ejecutado.

Finalmente, este es un ejemplo de la mini-prueba 2:

MINI-PROVA N°2: Branques infinites	C
NOM I COGNOMS: Andreu, Marius, Nica	1r BAT A

MUY BUEN TRABAJO!  
cuidado al operar y revisar el tema de ubicar la curva respecto de la asíntota

Llig atentament l'enunciat i resol el problema posant compte a la nomenclatura matemàtica i argumentant la teua resposta.

Troba les asíntotes de la següent funció:

$$f(x) = \frac{1+2x^2}{x+3}$$

5 a) Té asíntotes verticals?. Si en té, dona l'equació i dibuixa la posició de la corba respecte de l'asíntota. (5 punts)

4/5 b) Què passa quan  $x \rightarrow +\infty$ ? I quan  $x \rightarrow -\infty$ ?. Estudia si té asíntotes, i si en té dona l'equació. Dibuixa de forma aproximada el comportament de la corba quan  $x \rightarrow \pm\infty$ . (5 punts)

5 a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1+2x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1+2 \cdot (-3)^2}{0}$  Esto no se pone, se escribe  $\frac{19}{0}$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1+2x^2}{x+3} = -\infty$  ✓ te' asíntota vertical en  $x = -3$

$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1+2x^2}{x+3} = +\infty$  ✓

4/5 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+3x} = 2$  a=2 ✓

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+3x} = 2$

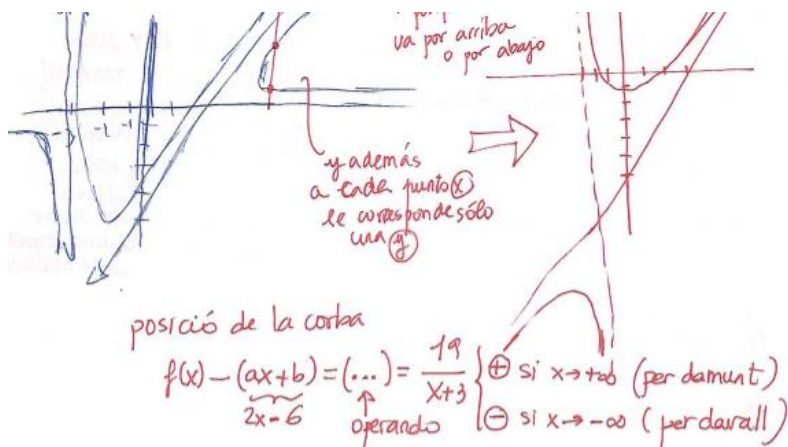
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2 - 2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x^2 - 2x^2 - 6x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-6x}{x+3} = -6$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2}{x+3} - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2 - 2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x^2 - 2x^2 - 6x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-6x}{x+3} = -6$

No té asíntota horizontal ✓

Este alumno es uno de los mejores de la clase, durante la 2ª mini-prueba demuestra que ha entendido los conceptos, tiene un método de resolución, es ordenado en el procedimiento, pero todavía tiene pequeños errores de notación y cálculo y también le cuesta la representación

gráfica. Para Nica fue muy útil, y así lo demostró en el examen, los comentarios y aclaraciones para mejorar los resultados en el examen final.



### RESULTAT DE LES MINIPROVES

	TEST INDIVIDUAL	MINI-PROVA 1 (NOTA INDIV)	MINI-PROVA 1 (NOTA FINAL)	MINI-PROVA 2 (NOTA INDIV)	MINI-PROVA 2 (NOTA FINAL)	NOTA MINI-PROVES	
GRUP 1	Miguel Campos	10	10	7,65	9,5	6,75	8,13
	Jaume Valero	6	6	5,65	9,5	6,75	6,13
	Idoia Bernat	10	5,3	5,3	NP	NP	7,65
	Carles Valero	6	6,4	5,85	4	4	5,28
GRUP 2	Gemma Gil	8	9	6	NP	NP	7,00
	Albert Matej	6	3	3	9,5	6,65	5,22
	Jordi Centelles	6	8	5,5	3,8	3,8	5,10
	Sergi Porcar	8	9	6	NP	NP	7,00
GRUP 3	Marius Nica	6	10	8,75	9,5	7	7,25
	Andres Gurrea	10	9,5	8,5	8,5	6,5	8,33
	Eric Fraga	10	7,5	7,5	4,5	4,5	7,33
	Paula Gil	6	7,5	7,5	9,8	7,15	6,88
	Cosmin	2	8,8	8,15	6,5	5,5	5,22
GRUP 4	Duna Marcos	10	9	5	7,8	5,15	6,72
	Diego Tobalina	4	3	2	9,5	6	4,00
	Adrian Gamán	10	5	3	8	5,25	6,08
	Nicolás Folch	6	1	1	5,2	3,85	3,62
	Alex Benages	6	6,5	3,75	2,5	2,5	4,08

La nota de la mini-prova representa un 10% de la nota de límites i continuïtat, el 90% restant correspondrà a la nota que s'obtinga a l'examen.

El grup que superi el repte del concurs obtindrà 0,5 punts extra sobre la nota final de límits i continuïtat.

Les presenté en el tablón de anuncios de la clase, antes del examen las notas de las mini-pruebas, para que conociesen cuál era su nota final y por qué (media con la peor del grupo). No están

acostumbrados a consultar sus notas en el tablón, les parece curioso, pero a mi juicio es interesante que se acostumbren a lo que se encontrarán en la universidad.

## ANEJO 2: EL EXAMEN.

El examen es un repaso de los ejercicios trabajados en clase, precisamente se pregunta en la encuesta final si la dificultad del examen se asemeja a la de los ejercicios de clase y la mayoría de los alumnos dicen que sí. Considero que esta pregunta es muy interesante para el profesor para saber si tiene que hacer rectificaciones en su unidad (en cuanto a los ejercicios trabajados) o en el examen.

9,7 19

Examen part de límits i continuïtat	25/05/2018
NOM I COGNOMS: <u>Josimo Valente Guema</u>	1r BAT A

4/5

Ellig atentament l'enunciat i resol els exercicis posant compte a la nomenclatura matemàtica.

Has de resoldre DOS dels tres exercicis:

- Hi ha dos exercicis de branques infinites, exercicis 1 i 2, TRIA'N UN i resol-lo.
- Hi ha un exercici de continuïtat, l'exercici 3, tothom ha de resoldre'l.

### EXERCICI 1 (2,5 punts de 5)

Busca les branques infinites de la següent funció i situa la corba respecte d'aquestes:

$$f(x) = \frac{|1-2x|}{x+1}$$

### EXERCICI 2 (2,5 punts de 5)

La següent funció té una asymptota obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte a aquesta:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 1}$$

### EXERCICI 3 (2,5 punts de 5)

Donada la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}, & \text{si } x \neq -2 \\ k, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Calcula k per a que:

- a) La funció siga contínua en  $x = -2$ .
- b) La funció tinga una discontinuïtat de valor 2 unitats.

El hecho de elegir entre los ejercicios 1 y 2 les inquietó en un principio, y además uno de los alumnos me dijo "esto es como las PAU", y no está de más que se habitúen a tomar este tipo de decisiones por ellos mismos. Valorar cuál es la mejor opción para obtener el mejor resultado.

Jaume Valera Guerra 1<sup>a</sup> Bat. A 25-5-18

② 2

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$$

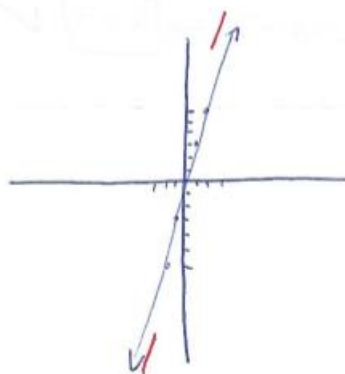
A.V. en  $x = \pm 1$   
no té A.H.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x^2 - 2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 1} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x - 3x^3 + 3x}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{*}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A.O.  $y = 3x$



T'ha faltat la posició de la corba

$$f(x) - 3x = \frac{x}{x^2 - 1} \begin{cases} \oplus \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (damunt)} \\ \ominus \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (davall)} \end{cases}$$

no pots fer en calculadora també

$$f(-1000) - 3(-1000) \text{ signe } \ominus$$

$$f(+1000) - 3(+1000) \text{ signe } \oplus$$

Este ejercicio valía 2'5 puntos, donde cada coeficiente de la asíntota valía 0'5, la ecuación correctamente escrita otro 0'5, la representación de esta 0'5 y finalmente, la posición de la curva respecto de la asíntota otro 0'5. A este alumno le faltó la posición de la curva, por eso le explico cómo debería haberlo hecho. A la gran mayoría les resultó imposible entender la forma analítica

de ubicar la curva respecto de la asíntota y finalmente se decantaban por utilizar la calculadora comparando el valor de las ordenadas, en el caso de Jaume seguramente se le olvidó ubicar la curva porque en clase hizo los ejercicios correctamente.

③ <sup>2.5</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+2x} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2-2}{-2} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = f_1(-2) = 2 = k$  ✓

b)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) & 2 = k + 2 \rightarrow k = 0 \quad \checkmark \\ f_2(x) \neq 2 & 2 = k - 2 \rightarrow k = 4 \quad \checkmark \end{cases}$

Este es un ejemplo de ejercicio muy bien resuelto, hay algún error menor que no penalizo porque en general este alumno ha trabajado como le pedí en clase, ordenado, razonado y “limpio” (recuadrando resultados, sin que haya incongruencias, sin que desaparezca el límite, etc.)

## ANEJO 3: LA RÚBRICA.

### RÚBRICA PER A L'EXAMEN DE LÍMITS.

Un exercici està perfectament resolt i tindrà la puntuació màxima si compleix tots els següents punts:

- El resultat és correcte i complet.
- Es planteja de forma raonada i ordenada el procediment/mètode utilitzat.
- No hi ha errades ni incongruències en l'expressió matemàtica.

Tal i com s'ha indicat a classe es penalitzaran errades en l'expressió matemàtica greus com:

- Oblidar-se de la paraula límit.
- Oblidar-se de la funció de la qual s'està calculant el límit.
- Utilitzar el símbol  $\infty$  com si fos un número, perquè NO ho és. Aquest és un exemple d'una de les errades que alguns de vosaltres heu comés:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x} = \frac{+\infty^2 + 1}{+\infty^3 - 2\infty}$$

- Tampoc es pot treballar amb la indeterminació  $\frac{0}{0}$  com si fos un nombre racional. Aquest és un exemple dels errors comesos per alguns de vosaltres:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2 - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} = 0$$

A los alumnos les pareció interesante tener una rúbrica colgada en el tablón del aula, incluso muchos le hicieron fotos, al igual que a las mini-pruebas corregidas, para revisar los errores y también los criterios de evaluación.

## ANEJO 4: EL CONCURSO.

El concurso es un reto para todos los alumnos, son ejercicios un poco más difíciles que los que hemos trabajado en clase pero que ellos pueden abordar si utilizan correctamente las herramientas que tienen y el razonamiento deductivo.

La frase que más oí en los primeros cinco minutos fue “esto no lo sabemos hacer”, pero haciéndoles algunas preguntas para que reflexionaran, encontraron el camino para resolver todos los ejercicios.

CONCURS LÍMITS I CONTINUÏTAT	EXERCICI 1
GRUP:	1r BAT A

Busca les asíntotes de la funció i situa la corba respecte d'aquestes.

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$$

CONCURS LÍMITS I CONTINUÏTAT	EXERCICI 2
GRUP:	1r BAT A

Estudia la continuïtat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \log(2 - x), & x < 2 \\ \frac{1}{x^2 + 4x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

CONCURS LÍMITS I CONTINUÏTAT	EXERCICI 3
GRUP:	1r BAT A



Calcula els següents límits:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |1 - x| + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\log(1 - x)}$$

CONCURS LÍIMITS I CONTINUÏTAT	EXERCICI 4
GRUP:	1r BAT A

Donada la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x < 1 \\ k, & \text{si } 1 \geq x \geq 4 \\ 2 \log_2(x - m), & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Calcula k i m per a que:

1. La funció siga contínua en  $x=1$  i tinga una discontinuïtat no evitable de salt infinit.
2. La funció siga contínua en  $x=1$  i en  $x=4$ .
3. La funció tinga una discontinuïtat de salt 2 en  $x=1$  i siga contínua en  $x=4$

## ANEJO 5: LAS NOTAS.

Al corregir los exámenes de la parte de límites y continuidad, tal y como había hecho hasta el momento les puse en su tablón la nota final, con el detalle de las notas de las mini-pruebas y el concurso.

	EXTRA				
	NOTA MINI-PROVES	MINI-PROV SOBRE 5	NOTA EXAMEN	CONCURS	NOTA FINAL
Miguel Campos	<b>8,13</b>	<b>4,07</b>	5	0,5	<b>5,41</b>
Jaume Valero	<b>6,13</b>	<b>3,07</b>	4,5	0,5	<b>4,86</b>
Idoia Bernat	<b>7,65</b>	<b>3,83</b>	4	0,5	<b>4,48</b>
Carles Valero	<b>5,28</b>	<b>2,64</b>	2,25	0,5	<b>2,79</b>
Gemma Gil	<b>7,00</b>	<b>3,50</b>	5	0,5	<b>5,35</b>
Albert Matei	<b>5,22</b>	<b>2,61</b>	3,25	0,5	<b>3,69</b>
Jordi Centelles	<b>5,10</b>	<b>2,55</b>	1,5	0,5	<b>2,11</b>
Sergi Porcar	<b>7,00</b>	<b>3,50</b>	1	0,5	<b>1,75</b>
Marius Nica	<b>7,25</b>	<b>3,63</b>	4,5	0,5	<b>4,91</b>
Andres Gurrea	<b>8,00</b>	<b>4,00</b>	3,25	0,5	<b>3,83</b>
Eric Fraga	<b>7,67</b>	<b>3,83</b>	2,5	0,5	<b>3,13</b>
Paula Gil	<b>6,88</b>	<b>3,44</b>	3,5	0,5	<b>3,99</b>
Cosmin	<b>5,22</b>	<b>2,61</b>	2	0,5	<b>2,56</b>
Duna Marcos	<b>6,72</b>	<b>3,36</b>	5	0,5	<b>5,34</b>
Diego Tobalina	<b>4,00</b>	<b>2,00</b>	4,5	0,5	<b>4,75</b>
Adrian Gamán	<b>6,08</b>	<b>3,04</b>	2,25	0,5	<b>2,83</b>
Nicolás Folch	<b>3,62</b>	<b>1,81</b>	3	0,5	<b>3,38</b>
Alex Benages	<b>4,08</b>	<b>2,04</b>	1,5	0,5	<b>2,05</b>

Las notas de las mini-pruebas, el examen y la final son sobre 5, algunos de los alumnos tienen más de 5 porque han resuelto muy bien las mini-pruebas y la parte del examen de límites y continuidad, y, además, tienen el 0'5 extra de la mini-prueba.

Sólo tres alumnos no consiguieron aprobar esta parte, estos llevan con dificultades para avanzar durante todo el curso. El resto de los alumnos demostraron una mejora de las calificaciones

## ANEJO 6: LAS ENCUESTAS.

Al inicio de la primera sesión hice una encuesta inicial para saber si el alumnado estaba acostumbrado a las demostraciones teóricas, a analizar el porqué de los conceptos matemáticos que utilizan y si estaban habituados a trabajar en equipo.

Aquí presento escaneada la encuesta de uno de los alumnos:

**Enquesta inicial**

Grup: 1r BAT A

Assignatura: Matemàtiques I

<b>TEORIA EN MATEMÀTIQUES</b>			
Et dona por la teoria en matemàtiques?	<input checked="" type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input type="radio"/> Mai
Estàs habituat/ada a treballar demostracions teòriques?	<input type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input checked="" type="radio"/> Mai
Sols comprendre els desenvolupaments teòrics en matemàtiques?	<input checked="" type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input type="radio"/> Mai
T'és necessari comprendre els desenvolupaments teòrics per a fer els exercicis pràctics?	<input checked="" type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input type="radio"/> Mai
<b>TREBALL GRUPAL</b>			
Sols treballar en grup quan treballes o estudies matemàtiques?	<input type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input checked="" type="radio"/> Mai
Creus que treballar en grup pot millorar els resultats acadèmics en matemàtiques teus i dels companys?	<input checked="" type="radio"/> De vegades	<input type="radio"/> Sempre	<input type="radio"/> Mai
Sols ajudar o demanar ajuda als companys per a resoldre dubtes en matemàtiques?	<input type="radio"/> De vegades	<input checked="" type="radio"/> Sempre	<input type="radio"/> Mai

A continuación, presento el recuento de la encuesta y analizo los resultados. En cada casilla aparece el número de alumnos que han elegido esa respuesta.

<b>TEORIA EN MATEMÀTIQUES</b>			
Et dona por la teoria en matemàtiques?	De vegades <b>13</b>	Sempre <b>2</b>	Mai <b>3</b>
Estàs habituat/ada a treballar demostracions teòriques?	De vegades <b>7</b>	Sempre <b>0</b>	Mai <b>11</b>
Sols comprendre els desenvolupaments teòrics en matemàtiques?	De vegades <b>14</b>	Sempre <b>3</b>	Mai <b>1</b>
T'és necessari comprendre els desenvolupaments teòrics per a fer els exercicis pràctics?	De vegades <b>11</b>	Sempre <b>3</b>	Mai <b>4</b>
<b>TREBALL GRUPAL</b>			
Sols treballar en grup quan treballes o estudies matemàtiques?	De vegades <b>5</b>	Sempre <b>1</b>	Mai <b>12</b>
Creus que treballar en grup pot millorar els resultats acadèmics en matemàtiques teus i dels companys?	De vegades <b>7</b>	Sempre <b>10</b>	Mai <b>1</b>
Sols ajudar o demanar ajuda als companys per a resoldre dubtes en matemàtiques?	De vegades <b>12</b>	Sempre <b>6</b>	Mai <b>0</b>

De los resultados de la encuesta hago el siguiente análisis:

- Los alumnos no están muy habituados a trabajar demostraciones teóricas, con lo cual difícilmente podrán utilizar el razonamiento deductivo.
- No les es necesario comprender los razonamientos teóricos para resolver los ejercicios, con lo que entiendo que tienden a recordar/memorizar reglas para resolver ejercicios sin entender a veces lo que hacen.
- Aunque la mayoría piensa que trabajar en grupo es lo ideal y suelen ayudar o preguntar a compañeros, no están acostumbrados a trabajar en equipo, lo cual en cierto modo no ayuda a matizar los individualismos.

En cuanto a la encuesta final, consta de dos partes.

La primera parte de la encuesta final está destinada a conocer las impresiones del alumnado acerca de la metodología didáctica utilizada. A continuación, presento una de las encuestas, la de Duna (lo sé por la caligrafía), que es una de las alumnas más capaces de la clase, la misma que me dijo que se aburrió el día que dedicamos toda la sesión a las asíntotas oblicuas. Durante las sesiones demostró que podía ayudar a los compañeros, hasta cierto punto, pero no le gustaba en absoluto que su nota dependiese de la de otros, se frustraba bastante cuando sus compañeros no entendían los conceptos y no avanzaban a su ritmo, prefiere claramente trabajar individualmente.

### Enquesta final

Grup: 1r BAT A

Assignatura: Matemàtiques I

TEORIA EN MATEMÀTIQUES			
Has comprés el concepte de límit?	<input checked="" type="radio"/> SI	<input type="radio"/> NO	
Has pogut arribar a la definició de límit sol/a de forma raonada?	<input checked="" type="radio"/> SI	<input type="radio"/> NO	
Consideres que el temps emprat per a comprendre i definir límit t'ha sigut d'utilitat per a saber calcular límits i estudiar la continuïtat d'una funció?	<input checked="" type="radio"/> SI	<input type="radio"/> NO	
TREBALL GRUPAL			
Has treballar a gust amb els teus companys d'equip?	<input type="radio"/> SI	<input checked="" type="radio"/> NO	
Consideres que haver treballat aquesta unitat didàctica en grup t'ha ajudat a comprendre millor el que feies?	<input type="radio"/> SI	<input checked="" type="radio"/> NO	
Consideres que l'ajuda de la professora ha sigut suficient?	<input checked="" type="radio"/> SI	<input type="radio"/> NO	
METODOLOGIA EMPRADA PER LA PROFESSORA			
En general, com valoraries la forma en la que hem treballat aquesta unitat?	<input type="radio"/> DOLEN T	<input type="radio"/> REGULAR	<input checked="" type="radio"/> MOLT BO

Crec que el treball grupal ha sigut una mala elecció.  
 - les explicacions han estat bé, clares i breus. No em queixen  
 mai que de la forma de puntuar i treballar grupalment. Encara que  
 després s'ha recuperat.  
 - Anims!

Luego tenemos el ejemplo de Miguel, que tiene las mejores notas de la clase; me manifestó que no estaba de acuerdo con la manera de puntuar las mini-pruebas, pero no se preocupó en ayudar a sus compañeros hasta el concurso, que fue cuando estuvo muy motivado y vio la oportunidad de recuperar el 0'5 máximo de las mini-pruebas.

Los resultados de esta encuesta son:

- ¿Has entendido el concepto de límite? 16 SÍ, 0 NO
- ¿Has podido llegar a la definición de límite de forma razonada? 14 SÍ, 2 NO
- ¿Consideras que el tiempo destinado a definir límite y continuidad te ha resultado útil para calcular límites y estudiar la continuidad de las funciones? 16 SÍ, 0 NO
- ¿Has trabajado a gusto con tus compañeros de grupo? 14 SÍ, 2 NO
- ¿Consideras que haber trabajado esta unidad en grupo te ha ayudado a comprender mejor lo que hacías? 5 SÍ, 11 NO
- ¿Consideras que la ayuda de la profesora ha sido suficiente? 16 SÍ, 0 NO
- En general, ¿cómo valorarías el método empleado para trabajar esta unidad? 4 MUY BUENO, 7 BUENO, 5 REGULAR, 0 MALO

El análisis que hago de estos resultados es que en general han entendido los contenidos principales pero que no ven la necesidad del trabajo en equipo, por ello la valoración global del método es satisfactoria pero no excelente.

En cuanto a la segunda parte de la encuesta, lo que pretendo es que los alumnos evalúen al profesor; tanto para que ellos vean que su opinión importa y para mí como futura profesora poder mejorar.

## Enquesta final

Grup: 1r BAT A

Assignatura: Matemàtiques I

Unitat: "Límits i continuïtat"

Aquesta enquesta està orientada a valorar la metodologia didàctica emprada en aquesta unitat didàctica de "Límits i continuïtat".

Consideres que la forma en la que s'ha treballat per a arribar al concepte de límit i continuïtat ha sigut útil per a comprendre la teoria d'aquesta unitat?	No	Una mica	Força	Molt	
Consideres que els exercicis que s'han treballat a classe han sigut suficients?	No	Una mica	Força	Molt	
Creus que la dificultat dels problemes de l'examen està d'acord amb els exercicis treballats a classe?	No	Una mica	Força	Molt	
T'han resultat amenes/divertides les classes d'aquest tema?	No	Una mica	Força	Molt	
Et sembla que has tret profit a les classes?	No	Una mica	Força	Molt	
Com valoraries les explicacions de la professora?	No	Una mica	Força	Molt	
T'ha inspirat confiança la professora per a preguntar-li dubtes?	No	Una mica	Força	Molt	
T'ha ajudat la professora quan ho has necessitat?	No	Una mica	Força	Molt	
En general, quina valoració de l'1 al 10 li donaries al treball de la professora en aquesta unitat?					9,5

Los resultados de la encuesta son:

- ¿Considera que la forma con la que se ha trabajado para llegar a los conceptos de límite y continuidad ha sido útil para comprender la teoría de esta unidad? 4 MUCHO, 7 BASTANTE, 5 POCO, 1 NO
- ¿Consideras que los ejercicios que hemos trabajado en clase han sido suficientes? 9 MUCHO, 6 BASTANTE, 2 POCO, 0 NO
- ¿Crees que la dificultad de los problemas del examen es coherente con la de los que hemos trabajado en clase? 9 MUCHO, 2 BASTANT, 3 POCO, 3 NO
- ¿Te han resultado amenas/divertidas las clases de esta unidad? 9 MUCHO, 4 BASTANTE, 4 POCO, 0 NO
- ¿Consideras que le has sacado partido a estas clases? 6 MUCHO, 7 BASTANTE, 4 POCO, 0 NO

- ¿Cómo valorarías las explicaciones de la profesora? 10 MUY BIEN, 7 BIEN, 0 REGULAR, 0 MAL
- ¿Te ha inspirado confianza la profesora a la hora de plantearle dudas? 8 MUCHO, 4 BASTANTE, 3 POCO, 2 NO
- ¿Te ha ayudado la profesora cuando lo has necesitado? 13 MUCHO, 2 BASTANTE, 2 POCO, 0 NO
- En general, ¿qué valoración del 1 al 10 darías al trabajo de la profesora en esta unidad?  
NOTA MEDIA= 9,07

En general, aunque la nota global que me ha dado el alumnado es satisfactoria, la lectura que hago de estos resultados es que:

- Debería buscar la manera de conectar más con el alumnado, que tengan más confianza para preguntarme.
- Replantear el trabajo grupal como he explicado en el apartado de reflexiones, para evitar tener a gente parada a la espera de ayuda que tarda en llegar porque todos son muy demandantes. Porque al final el alumno tiene la sensación de que voluntariamente no le estás atendiendo y se aburren esperando.
- Enfocar de otra manera el ejercicio inicial tal y como he explicado en apartado 4 "MEJORAS", reduciendo el número de funciones e ir ayudándoles en el proceso, para asegurarme de que están entendiendo cada paso que dan.



## ANEJO 7: EL EJERCICIO INICIAL

El ejercicio es uno que preparé en la asignatura del máster SAP504: “*Aprenentatge i ensenyament de la matemàtica*” y lo implementé en la segunda fase del Prácticum y se convirtió en el contenido de las dos primeras sesiones de la unidad didáctica.

A continuación, muestro parte de lo que fue el ejercicio:

- Una de las cinco funciones que tuvieron que trabajar por parejas (en azul las respuestas correctas)
- La tabla resumen que se analiza en la segunda sesión que nos llevó mediante un razonamiento inductivo a la definición intuitiva de límite y continuidad. Y que me sirvió como punto de partida para escribir la definición formal de límite.

EXERCICI 1:

Donada la següent funció:

$$f_0(x) = 3x + 2$$

Amb els coneixements que tens ara, contesta:

- Aquesta funció es contínua? On? **La funció és contínua en tota la recta real, així,  $\text{Dom}f(x) = \mathbb{R}$**
- Què creus que passa en 0?

Utilitzant la calculadora, completa les següents tables:

$x$	-1	-0.5	-0.1	-0.09	-0.009	-0.0009
$f(x)$	-1	0.5	1.7	1.73	1.973	1.9973

$x$	1	0.5	0.1	0.09	0.009	0.0009
$f(x)$	5	3.5	2.3	2.27	2.027	2.0027

- Podem contestar ara a les següents preguntes?}

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_0(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 2$$

- Aleshores, podem dir que existeix...

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 2$$

Lavors, podem dir, que en aquesta funció contínua:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = f_0(0)$

Recordem:

funció	Límit per l'esquerre	Límit per la dreta	Límit en el punt	Valor en el punt	continuitat
$f_0(x) = 3x + 2$	2	2	2	2	si
$f_1(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x}$	-2	-2	-2	No està definida en $x=0$	Discontinuitat evitable en $x=0$
$f_2(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	No està definida en $x=2$	Discontinuitat no-evitable en $x=2$ (de salt infinit)
$f_3(x) = \frac{-2}{x-2}$	$-\infty$	$\infty$	$\nexists$	No està definida en $x=2$	Discontinuitat no-evitable en $x=2$ (de salt infinit)
$f_4(x) = \frac{ x-2 }{x-2}$	-1	1	$\nexists$	No està definida en $x=2$	Discontinuitat no-evitable de salt finit en $x=2$ (2unitats)

## ANEJO 8: PRESENTACIÓN SOBRE LA UTILIDAD DEL ANÁLISIS

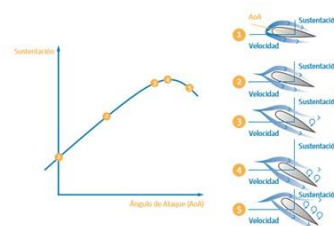
# Per què ens serveix l'anàlisi matemàtic?

## En aeronàutica: Sustentació

- Proves en túnel del vent.
- De l'experiència es modelitza la realitat mitjançant funcions.
- Informació fonamental per a l'enginyer i per al pilot.
- Entrada en pèrdua i barrena.

<https://www.youtube.com/watch?v=MIjmMi7XN4M>

<https://www.youtube.com/watch?v=eVGtsK7vvnA>



## En ingenyeria civil: ressonància de ponts

Les oscil·lacions d'un pont es modelitzen com les d'un moll.

$$A = \frac{a}{b(f - f_0)}$$

L'enginyer ha de considerar tots els factors que vagen a actuar sobre el pont.

Disenyar-lo per a que la freqüència pròpia o fonamental del pont estiga ben lluny de les freqüències que pertorbaran el pont.

<https://www.youtube.com/watch?v=nFzu6CnTqec>

[https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa\\_\\_XWZ8](https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8)



## En borsa: BIG DEAL

- Dades de partida: LA HISTÒRIA
- Model matemàtic que la represente.
- Amb hipòtesis pròpies.
- Ens faran previndre cap on es meneja el mercat per a fer el millor negoci:  
    **QUAN COMPRAR O VENDRE**  
    **A QUIN PREU**

## Economía de mercats: equilibri

Buscar l'equilibri del mercat, que no hi haja excés d'oferta i tampoc manca.

