GRADO EN MATEMÁTICA COUMPUTACIONAL

ESTANCIA EN PRÁCTICAS Y PROYECTO FINAL DE GRADO

Funciones Elípticas

Supervisor:
Sergi Estellés Jovaní
Tutor académico:
Alejandro Miralles Montolío

Autor:
Mar Catalán Carbó

Fecha de lectura: Julio de 2018
Curso académico 2017/2018

RESUMEN

En este documento se recoge la memoria relativa a la estancia en prácticas y el Trabajo Final de Grado que se ha realizado.

En la memoria de prácticas se contextualiza y detalla el trabajo realizado como programadora en la consultoríaa Opentix (Castellón). A lo largo de cuatro meses se puso en práctica lo aprendido durante el Grado de Matemática Computacional y se aprendieron nuevas técnicas y herramientas de trabajo, ganando experiencia laboral.

En cuanto al Trabajo Fin de Grado, no se ha redactado un trabajo derivado de la experiencia desarrollada en prácticas, sino que se ha realizado un trabajo bibliográfico sobre el estudio de las funciones elípticas. En él se ha profundizado en el trabajo que desarrollaron Jacobi y Weierstrass en este campo.

PALABRAS CLAVE

OpenbravoERP, programación, función compleja, función elíptica.

KEYWORDS

OpenbravoERP, programming, complex function, elliptic function.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Parte I

Memoria de Prácticas

RESUMEN

En esta memoria de prácticas se describe la estancia en prácticas realizada durante el curso 2017-2018 en Opentix (Castellón), una empresa dedicada a la consultoría en pequeñas y medianas empresas donde trabajan conjuntamente consultores y programadores.
Durante cuatro meses y una totalidad de 290 horas trabajadas, se ha observado, aprendido y participado en las diferentes tareas encomendadas a programadores de esta empresa.
En las siguientes páginas se detalla y valora la experiencia de esta estancia, detallando principalmente el trabajo realizado, el equipo que forma la empresa, la formación recibida y los problemas encontrados.

1. Introducción

Esta estancia en prácticas esta destinada a conocer el mundo laboral, adquirir nuevos conocimientos y poner en práctica aquellos conocimientos adquiridos durante los estudios del Grado en Matemática Computacional.
La empresa donde se realizan, Opentix, es una consultoría informática que se dedica a mejorar la gestión de otras empresas adaptando programas que ya existen en el mercado a las características de cada cliente.
Esta empresa tiene dos tipos de empleados diferenciados: por una parte los consultores que se encargan de gestionar las empresas de los clientes y mantener el contacto con estos; y por otra los desarrolladores o programadores, que crean las funciones necesarias de manera personalizada para cada cliente.
La estancia en prácticas se lleva a cabo como programadora. Existen diferentes áreas de programación dentro de Opentix según la herramienta con la que se trabaja: Sugar, OpenbravoERP y Gsuite. La plataforma sobre la que se trabaja en estas prácticas es OpenbravoERP ya que se basa en el lenguaje Java, el más visto durante la carrera universitaria. Sin embargo también se requiere trabajar en otros lenguajes según la tarea asignada. Para trabajar con bases de datos, por ejemplo, se utiliza SQL.

1.1. Objetivos

El propósito de estas prácticas como ya se ha mencionado, no es desarrollar un proyecto, sino conocer una de las salidas que tiene en el mundo laboral el Grado en Matemática Computacional.
Con este fin se empezaron las prácticas conociendo el entorno de la empresa y como trabaja ésta, y progresivamente se aprendió a realizar diferentes tareas. El objetivo era que a lo largo de estas prácticas se aprendiera a realizar las tareas que realiza un programador de Opentix, para finalmente conseguir realizarlas como una programadora más del equipo.
Así, se pretende ganar experiencia profesional que permita conocer el mundo laboral y ser mejor programadora, y trabajadora en general, tras la realización de las prácticas.

2. Contextualización

2.1. Empresa

Opentix S.L. es una empresa joven fundada en 2012 por Daniel Segarra (actualmente CEO de Opentix). Tras formarse en la UJI, Daniel Segarra fundó su propia sociedad dentro del CEEI (Centro Europeo Empresa Innovadora) con objeto de dar soluciones tecnológicas (CRM y ERP) a la pequeña y mediana empresa.

La empresa se ha especializado en consultoría e implantación de soluciones para optimizar la gestión, tanto interna como externa de las empresas, así como su relación con los clientes y proveedores. A partir de programas ya existentes (Openbravo ERP, Sugar CRM y G Suite), Opentix adapta y personaliza las aplicaciones a cada cliente y las ajusta a sus nuevas necesidades, utilizando siempre código abierto. Ofrece, además, continua formación personalizada en función de las necesidades del cliente.

Desde su fundación en 2012, la empresa a crecido significativamente. Fue reconocida en la "Gala Empresa del Año" como la mejor Empresa Joven de 2014 y 2015. Sus oficinas se han expandido, desde Castellón, hasta Valencia, Sevilla, Madrid, Zaragoza y Barcelona. De un equipo de dos personas a contar con más de treinta trabajadores. Y, desde este año, trabaja también junto a Aitana y Fadrell; dos ambiciosas empresas del mismo sector que cuentan con más de 30 años de experiencia. [1]

2.2. Openbravo ERP

Openbravo es el entorno en el que se han realizado las prácticas. Un ERP[1] de código abierto personalizable según las características y necesidades de la empresa.

Son los desarrolladores de Opentix los que personalizan el programa para los negocios de sus clientes, dando soluciones para cualquier área de estos negocios.
Cada cliente tiene su Openbravo y todas las personalizaciones realizadas para el cliente se almacenan en *módulos* dentro de dicho Openbravo.
Cuando un programador de Opentix trabaja en Openbravo para un cliente lo hace desde diferentes versiones/máquinas virtuales:

[1]Enterprise Resource Planning: Software que permite gestionar los recursos de un negocio

Local Esta máquina es propia del programador y sólo tiene consecuencias dentro del propio ordenador. Es un back-up de la "máquina original". El cliente no tiene acceso a ella y todo el desarrollo se realiza de manera aislada, por lo que si se produce algún error, este no afecta en ningún sentido al cliente ni a la máquina original. Es por lo tanto una forma de trabajar segura.
Todo el trabajo de los programadores se desarrolla en esta versión de Openbravo.

Test Esta versión es una máquina de prueba a la que tiene acceso el cliente. Los programadores realizan sus tareas en la máquina local. Una vez finalizado y comprobado el funcionamiento de la tarea, se exporta de la máquina local el módulo donde está almacenada la personalización que se ha hecho; para después instalar dicho módulo en la máquina de Test. De esta manera, el cliente puede entrar a la máquina y comprobar si la tarea que ha realizado el programador es la deseada o si requiere de alguna especificación más.

Producción Esta versión es la que antes hemos denominado como máquina original. No sólo tiene acceso el cliente sino que es la máquina con la que éste trabaja.
Cuando la personalización realizada, tras instalarla en Test, ha sido aceptada por el cliente, se instala el módulo que la contiene de nuevo en Test para que el cliente pueda trabajar ya con ella.

Cuando se accede a cada una de estas máquinas, se hace con usuario y clave. De esta manera las funciones disponibles en la página dependen del permiso que tenga el usuario que accede. Los programadores pueden elegir, dentro de la página, el rol con el que quieren trabajar para tener acceso a la vista de cualquier usuario.

2.3. Equipo

Opentix cuenta con un equipo de trabajo mayoritariamente joven, del cual se podría diferenciar tres grupos:

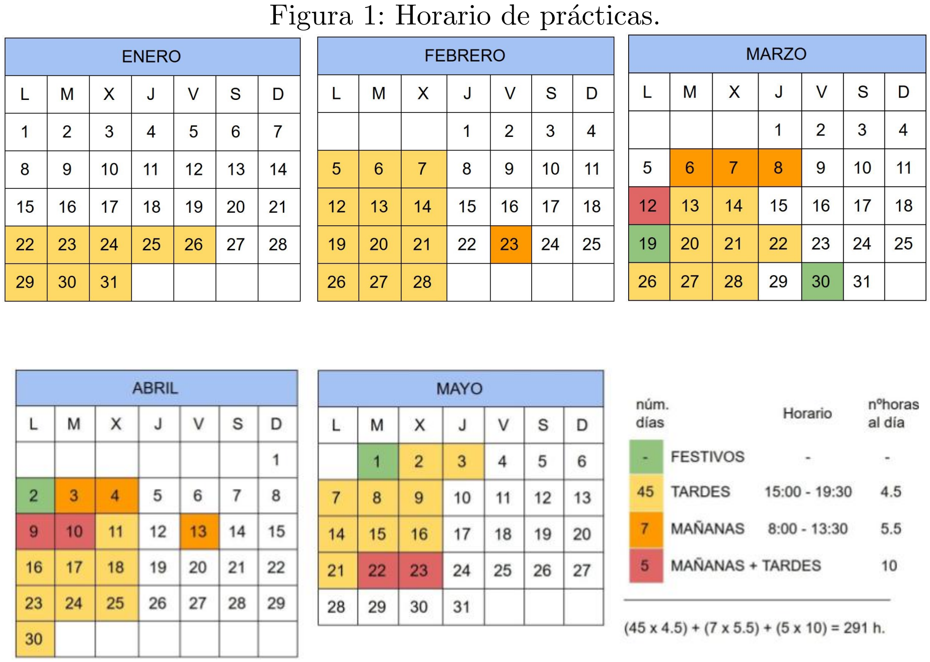
- *Equipo directivo*: aunque en la empresa no hay una gran diferencia jerárquica, si que se existen miembros del equipo que tienen una mayor responsabilidad y que se especializan normalmente en uno de los dos sectores de trabajo (consultor o desarrollador).
- *Consultores*: Son los encargados de tratar de manera personal al cliente y mediar entre éste y los desarrolladores. En muchas ocasiones su trabajo les obliga a viajar fuera para mostrar los productos que ofrece la empresa.
- *Desarrolladores*: Es un grupo bastante numeroso por la cantidad de trabajo que abarca. El equipo de desarrolladores está dividido según el área en que se trabaje. Su función es programar aquello que el cliente ha pedido a los consultores.

3. Estancia

3.1. Planificación

La estancia de prácticas en la empresa se realiza entre el día 22 de Enero de 2018 y el 23 de Mayo del mismo año. Durante esos cuatro meses se realizan un total de 291 horas de trabajo presencial.
Debido a que estaba realizando estudios universitarios de forma paralela a las prácticas, no podía realizar el horario habitual de un empleado de la empresa. Este hecho se advirtió antes de acordar las prácticas con la empresa y no pusieron ningún problema, por ello se fijó un horario especial.
Generalmente la asistencia a la empresa ha sido de tres días a la semana durante las tardes. Sin embargo, las semanas que no tenía clases universitarias y podía asistir por las mañanas a la empresa, realizaba también esas horas. A continuación se muestra el horario que se acordó con la empresa y que se ha seguido durante toda la estancia:

Figura 1: Horario de prácticas.



La temporalización prevista durante la estancia es la siguiente:

- Durante las tres primeras semanas se establece un primer contacto con la empresa, su equipo y el programa Openbravo. Con la finalidad de conocer las posibilidades y funcionalidades de este programa se realizan los *Thecnical raining* durante estas semanas, dos cursos de iniciación (un primer curso más teórico y un segundo curso más práctico) en los que se describen las herramientas disponibles en Openbravo, como utilizarlas, sus características, etc. Durante estos cursos se empieza a utilizar algunos de los programas con los que se trabaja en la empresa: Eclipse, PostgreSQL, el mismo Openbravo, etc.
- Tras la realización de los Technical Training, se empiezan a realizar tareas propias de los desarrolladores, aprendiendo primero las más sencillas. Los primeros trabajos consisten en realizar informes mediante el uso de TIBCO Jaspersoft Studio (además de los programos ya mencionados anteriormente).
- Finalmente, y con la ayuda de los compañeros, se pretende ir incorporándose poco a poco al trabajo habitual de los desarrolladores, aprendiendo a realizar tareas de mayor dificultad a medida que avanza el tiempo dedicado.

3.2. Herramientas Utilizadas

A lo largo de las prácticas las herramientas que se han utilizado son muchas. Sin embargo, cabe destacar el uso de seis de ellas:

Eclipse Dentro del workspace de Eclipse hay una carpeta para cada empresa, y esta tiene, entre otras cosas, una carpeta con todos los módulos de la empresa. Los módulos, junto al Tomcat (usamos la versión 7.0) son los dos puntos clave de Eclipse. Esta herramienta es necesaria para poder conectarse a cualquier máquina local de Openbravo y para crear ciertas configuraciones de este: Event Handlers, nuevas clases, etc.
El lenguaje que se utiliza en Eclipse es Java.

PostgreSQL Es el programa que se utiliza para las bases de datos de los clientes. Igual que en eclipse, se crea una carpeta específica para cada cliente.
El lenguaje que se utiliza en este programa es SQL.

Openbravo Aunque en muchas ocasiones se requiera el uso de otros programas complementarios para realizar las tareas de Openbravo, siempre se trabaja desde este.
Dentro de Openbravo no se utiliza ningún lenguaje de programación.

Wiki Tanto Opentix como Openbravo cuentan con sus propias wikipedias en las que se puede encontrar información sobre el funcionamiento de Openbravo y cómo modificar las funiconalidades que este ofrece. Ambas wikipedias han sido herramientas de ayuda durante la estancia en prácticas y son consultadas habitualmente por los desarrolladores de la empresa.

TIBCO Jaspersoft Este software, Jasper, es uno de los programas con los que más se ha trabajado. Todos los informes se diseñan y personalizan con este software que trabaja directamente con Openbravo y las bases de datos.
Dentro del programa se requiere el uso del lenguaje SQL para la selección de los campos que se desean mostrar en los informes, y el uso de Java para definir cómo o con que condiciones deben mostrarse.

Gnome Se utiliza como herramienta alternativa a la consola. Gnome mantiene las funcionalidades de una consola, pero permite un uso más dinámico. Ofrece, además, opciones extra como, por ejemplo, mantener guardados túneles con otras máquinas virtuales. Esta funcionalidad de Gnome se utiliza con gran frecuencia en Opentix para mantener conexiones ssh con las máquinas de Test y Producción de cada cliente, pues el acceso a estas sólo se puede realizar de esta forma.
El lenguaje usado en este programa es el mismo que en la consola.

Figura 2: Herramientas utilizadas.

3.3. Interacción

Opentix es una empresa con un equipo bastante joven que mantiene una buena relación dentro y fuera de la oficina. El nivel de compañerismo es muy alto y las oficinas son abiertas (el número de despachos privados es mínimo), lo que permite y facilita la comunicación y el contacto entre trabajadores.
Durante los cuatro meses de estancia, los trabajadores han facilitado la integración en el equipo y se ha interactuado con todos los componentes.

La interacción con compañeros concretos ha sido en mayor o menor medida según las tareas que se realizaban en cada momento:

- Durante las primeras semanas y la formación, el mayor contacto fue con mi supervisor Sergi Estellés y con los compañeros que se localizaban más próximos, los cuales se prestaron a ayudar en el aprendizaje y conocimiento de la empresa y Openbravo.

- Tras los Technical Training el contacto se realizaba alternativamente con diferentes programadores según la tarea encomandada que se estaba aprendiendo a realizar.

- A medida que el conocimiento de Openbravo era mayor las tareas eran más específicas y se enfocaban más en ciertos clientes. Durante el periodo dedicado a cada cliente, el contacto aumentaba con el equipo al cargo de dicho cliente. Cabe destacar el contacto con el equipo de desarrolladores responsable del cliente García Ballester, Cristian e Iñaki, así como con el consultor Borja.

3.4. Observaciones

Las observaciones más destacables que se han realizado a lo largo de esta estancia han sido las siguienrtes:

- La empresa tiene unos empleados muy jóvenes, la edad media es de unos 25 años, y por lo tanto el ambiente es muy agradable y las relaciones se mantienen dentro y fuera del trabajo.

- Los cursos para empezar a trabajar en la empresa están desactualizados y en inglés, lo que impide que se pueda aprender a utilizar Openbravo con facilidad, ya que cuando no te funciona algo no sabes si es que está desactualizado o que no has entendido bien el curso.

- Hay mucha faena en la empresa y todos dependen del trabajo y/o conocimientos de otros compañeros.

- A medida que pasa el tiempo y se gana experiencia, se trabaja de forma más eficiente, lo que permite ayudar más en las tareas de la empresa.

- El hecho de no tener un cliente fijo establecido sobre el que trabajar, hace que se pierda mucho tiempo en subir los datos del viejo cliente, actualizar la máquina del nuevo cliente en cada programa, conocer la estructura de este cliente, aprender a moverse entre sus campos, etc.

- Tras las dificultades de trabajar con un viejo cliente, Marcaprint, se considera necesario tener las máquinas de los clientes actualizadas, aunque sean clientes antiguos y no se hayan realizado cambios en una gran temporada.

- Es curioso observar que, en general, los programadores se centran en realizar su trabajo correctamente sólo a nivel informático, sin fijarse mucho en la parte estética de su trabajo. Durante estas prácticas se ha valorado mucho por parte del equipo de consultores el trabajo realizado por prestar también mucha atención al diseño estético, por ejemplo, de los informes.

4. Trabajo Realizado

4.1. Formación

Durante las primeras tres semanas de prácticas Opentix ofrece los servicios a sus clientes a través de un software llamado OpenbravoERP. Para aprender su funcionamiento la empresa cuenta con dos cursos de formación, Technical Trainings, con los siguientes contenidos:
El primer curso tiene más contenido teórico, mientras que el segundo curso es más

Cuadro 1: Contenido de la formación.

Technical Training 1	Technical Training 2
- Chapter 1: Online learning guide	- Chapter 1: Introduction and Concepts
- Openbravo support portal user guide	- Chapter 2: Setting Up the Development Environment
- Chapter 2: Setup and System Configuration	- Chapter 3: Modularity and Initial Client Setup
- Modularity Introduction	- Chapter 4: Advanced Application Dictionary
- Chapter 3: Modularity	- Chapter 5: DB Core Elements
- Chapter 4: Client Setup	- Chapter 6: Java Processes and the DAL
- Chapter 5: Data Architecture	- Chapter 7: Callouts
- Chapter 6: Roles and Users	- Chapter 8: Event Handlers
- Chapter 7: Application Dictionary	- Chapter 9: Background Process
- Chapter 8: Reporting	- Chapter 10: Web Services
- Chapter 9: Other Interesting Topics	- Chapter 11: Toolbar and Navigation Bar
- Chapter 10: Packaging	- Chapter 12: Manual View
	- Chapter 13: Packaging

Cuadro 2: Contenido de los cursos de formación

práctico: aprender a añadir ventanas, botones, información lógica, etc.
A lo largo de estos cursos y con el objetivo de tener contacto con todas las funciones del programa se desarrolla un nuevo cliente, Hotel Management, y en cada capítulo de los cursos se van desarrollando las funciones que se explican para este cliente.

4.2. Tareas

Tras realizar la formación de Openbravo se empezó a realizar tareas propias de los desarrolladores. Como estaba previsto, las primeras tareas que se aprendieron a ejecutar fueron aquellas relacionadas con informes, y a lo largo de las prácticas este tipo de faena fue el más habitual. Sin embargo, a medida que avanzaban las semanas y se cogía más experiencia, los desarrolladores delegaban tareas más diversas y poco a poco se fueron aprendiendo a realizar tareas más complejas.
Durante toda la estancia, la metodología que se siguió a la hora de realizar una tarea fue la siguiente:

- El encargado de algún cliente delega la solución de alguna incidencia de dicho proyecto.
- En el caso de ser la primera vez que se trabaja con ese cliente, o llevar más de una semana sin trabajar con él, se realiza un back-up desde la máquina de Test del cliente para tener una copia reciente de dicha máquina.
- Se intenta solucionar la incidencia de manera individual en base a los conocimientos que se han adquirido, tanto del cliente, como de Openbravo.
- En el caso de dudar sobre algún procedimiento, se consulta ejemplos semejantes que ya se hayan llevado a cabo.
- Si no se consigue resolver la incidencia o se encuentra algún error inesperado se avisa al compañero más indicado según el tipo de incidencia.
- Se solventa la incidencia y se comprueba que los resultados son correctos, no sólo en los programas utilizados (Jasper, Eclipse, PostGreSQL, etc), sino también en la máquina local del cliente.
- Se corrobora con el consultor encargado del cliente, si la incidencia se ha resuelto de acuerdo a las exigencias del cliente o si hay algún detalle a mejorar (en tal caso mejorarlo).
- Exportar de la máquina local el/los módulo/s modificados con los nuevos cambios que resuelven la incidencia.
- Instalar en la máquina de Test del cliente el/los módulo/s modificados.
- Se comprueba que todo funciona correctamente en Test también.
- En los casos que se requiera, instalar el módulo también en Producción y verificar su funcionamiento.

De entre tareas que se han realizado durante estas prácticas a continuación se describen aquellas más generales y destacables:

Informes : Al trabajar en un informe puede ser que sólo haya que retocar algunos campos para ajustarnos a las exigencias de los clientes; que se tenga que corregir un error o que haya que crear un informe completamente nuevo.
Los informes no se realizan individualmente para cada caso, sino que se hace de forma genérica utilizando la base de datos. De esta forma sólo se realiza un informe para cada tipo requerido, y una vez el cliente seleccione un caso concreto dentro de este tipo de informe, Openbravo, gracias al informe genérico, realiza el informe específico para dicho caso.
Para trabajar con informes es necesario conocer el lenguaje SQL (para seleccionar los campos a visualizar) y algunos conceptos básicos de Java (para indicar cómo y en que casos se deben mostrar los campos), así como tener soltura dentro de Openbravo (para averiguar de que tablas proceden los campos y qué relación indicar entre las diferentes tablas con las que se trabaja).

Nuevas Ventanas A veces para Openbravo y otras simplemente para poder crear un informe específico. Para poder crear una nueva ventana se debe crear esta en todos los campos en que trabaja Openbravo. En primer lugar se crea una nueva tabla o una vista en la base de datos del cliente correspondiente. Esta tabla debe contener todos los campos e identificadores necesarios (siempre hay que incluir seis campos por defecto, aunque no se necesiten para la ventana). Una vez esté completada la tabla en la base de datos, se puede empezar a incluir esta en Openbravo. Openbravo trabaja a dos niveles: Ventanas (lo que se vé) y Tablas (a través de las que trabajan las ventanas). Primero se crea la tabla en Tablas y se añaden todos los campos especificando las características de cada uno de ellos; y una vez la tabla ya esté en Openbravo, se crea una ventana en Ventanas que muestre, por pestañas, los datos que se desean mostrar. Por último debe crearse un menú que permita la visualización de la ventana creada desde Openbravo.
En ocasiones sólo era necesario crear algunos campos nuevos en ciertas ventanas ya existentes. En esos casos, de igual modo, se deben crear los campos requeridos en la base de datos primero, después en las tablas de openbravo y por último añadirlos en la ventana correspondiente.

Event Handlers Son ciertos códigos de Eclipse que permiten que algunas acciones de Openbravo se realicen de manera automática según si se cumplen ciertas condiciones especificadas. Durante estas práctias se han creado varios Event Handlers relacionados con dos incidencias:

- La primera incidencia requirió varios Event Handlers. Se deseaba que, de manera automática, el programa completara en las facturas, los pagos y los albaranes el campo “campaña” con aquella campaña de venta que tuviera el campo “actual” marcado; si no había ninguna campaña con dicho campo marcado, no se completaba. Para ello además, se creó otro Event Handler que hiciera saltar un error al marcar más de una campaña como “actual”.
- La segunda incidencia estaba relacionada con el crédito de los terceros. Éstos

tienen un crédito límite y un crédito usado. Los Event Handlers debían impedir que se crearan facturas, pagos o albaranes nuevos referidos a un tercero cuyo crédito usado supere el crédito límite.

En los Cuadros 2 y 3 se recogen cada una de las tareas realizadas durante la estancia en prácticas, detallando el cliente, las fechas de realización y un breve resumen de la tarea hecha.

Cuadro 3: Tareas Realizadas I.

CLIENTE	FECHAS	TAREA
-	25 Ene -12 Feb	Realizar y estudiar los Technical Training de Openbravo
Redimed	13,14,19 Feb	Modificar varios informes
García Ballester	19,20,21,23,27 Feb	Crear nuevo informe “Compensaciones”, exportar e instalar en Test.
GNP	26,27 Feb	Revisar código, modificarlo y exportar módulo
Desguace París	27 Feb	Crear relación en BBDD entre facturas y pedidos
Semoan	28 Feb	Revisar informe de presupuesto y corregir el IVA.
Desguace París	6,7,8,12,13,14 Mar	Crear informe “Autofactura” y nuevos informes específicos según la organización
García Ballester	12 Mar	Crear campo “impresión” que identifique el correo a imprimir en las facturas
García Ballester	13 Mar	Modificar informe “Factura Venta No Fruta”, exportar e instalar en Test
García Ballester	14 Mar	Modificar informe “Pedido de Venta Interno”. Crear selectores
García Ballester	20,21 Mar	Crear nueva ventanta “Declaraciones fianzas”, exporar e instalar en Test
Marcaprint	21,22,26,27,28 Mar 3 Abr	Intentar descargar máquina. Exportar módulo e instalar en García Ballester. Crear en García Ballester la nueva ventana “Información de Pedidos de Venta”. Modificar informe “Factura (Clientes)”. Exportar e instalar en Marcaprint Test
García Ballester	26,27,28 Mar 3,16 Abr	Crear campo “Campaña Actual”. Desarrollar Event Handlers. Exportar e instalar en Test
	4 Abr	Formatear el ordenador
García Ballester	9,10 Abr	Crear informes “Remesas” y “Pago/Cobro”, exportar e instalar en Test
García Ballester	11 Abr	Solcionar error SQL en informe “Albarán (Cliente)”

Cuadro 4: Tareas realizadas II.

CLIENTE	FECHAS	TAREA
García Ballester	13 Abr	Mejorar ventana e informe “Viajes y Grupajes”. Mejorar informe “Factura (Cliente)” añadiendo campos nuevos.
García Ballester	16 Abr	Instalar cinco módulos a Producción. Mejorar informes “Factura (Cliente)” y “Abono Venta”. En “Viajes y Grupajes” modificar informe y crear campos nuevos.
García Ballester	17 Abr	Crear campos en “Albarán (Cliente)”, exportar e instalar en Test.
García Ballester	17,18,23,30 Abr 2,7,8,9,14 May	Mejorar informe “Rentabilidad”.
García Ballester	18 Abr	Solucionar error SQL en “Compensaciones”.
García Ballester	30 Abr 2,3 May	Solucionar error SQL y de cálculo en “Factura (Venta)”. Modificar varios informes referentes a facturas y abonos. Exportar e instalar en Test.
García Ballester	24,25,30 Abr	Crear botones “Descontabilizar Varios” y “Desliquidar Varios”.
García Ballester	7 May	Mejorar ventana “Payment In Plan”.
García Ballester	9 May	Crear Event Handlers para bloquear terceros según su crédito
García Ballester	14 May	Crear Direct Report para visualizar un sólo impreso en “Rentabilidad”.
García Ballester	15 May	Exportar varios módulos. Mejorar informes “Abono Venta”, “Facturas Venta” y “Pago”.
García Ballester	16 May	Crear ventana para “Líneas de Facturas”.
García Ballester	21 May	Modificar informe “Pedidos de Venta”. Exportar varios módulos.
García Ballester	22 May	Instalar módulos en Test y cerrar todas las tareas con el encargado de García Ballester.

4.3. Problemas y Soluciones

A continuación se listan los problemas más destacables que se han encontrado a lo largo de la estancia en prácticas:

Tecnical Training Durante la realización de los cursos, el mayor problema a nivel general que se ha observado ha sido que los cursos estaban muy desactualizados respecto a Openbravo y por lo tanto algunas de las funciones descritas no servían actualmente. Frente a este problema la decisión fue consultar al equipo los contenidos de los cursos que no funcionaban correctamente.

Openbravo El uso de un programa nuevo puede ser complicado, más si este uso no es superficial sino que se requiere de configurar y programar partes de dicho programa. Pese a la realización de los cursos, el problema más constante a lo largo de todas las prácticas ha sido el desconocimiento de Openbravo. El aprendizaje no era sencillo y se tenía que realizar desde cero, por lo que era habitual encontrar dudas o errores desconocidos.
Con el paso del tiempo, a medida que se ganaba experiencia estas dudas eran menos habituales. Sin embargo, el aprendizaje de nuevas funcionalidades siempre conllevaba nuevas dudas.
Ante este problema siempre se acudía a los compañeros más cercanos o a los encargados del cliente con el que se estaba trabajando.

Clientes Cómo se ha nombrado anteriormente, cada cliente tiene su propio Openbravo. Esto conlleva que, cuando se trabaja en paralelo con varios clientes, se deben tener también varias máquinas locales de Openbravo funcionando a la vez, cada una de ellas con su propio workspace de Eclipse, su propia base de datos, etc. Esta situación de trabajo resulta bastante compleja y resultó ser un problema sobretodo en los que se ayudaba a resolver tareas de varios clientes a la vez. Frente a ello la única solución que se aportó fue la buena organización de las tareas.
Surgió también un problema con un cliente en particular, Marcaprint. Un cliente antiguo en el que ningún empleado trabajaba, pero que requería de unas mejoras. El problema viene de la imposibilidad de hacer un back-up de la máquina de producción que funcionara correctamente. Tras muchos intentos, la única solución que se halló fue desarrollar las funcionalidades en un módulo nuevo dentro de otro cliente diferente de manera genérica para poder exportarlo e instalarlo directamente en producción, sin las pruebas previas que se deben realizar.

Ordenador El ordenador con el que se trabaja durante las prácticas había sido utilizado previamente y se encontraba sobrecargado. Como consecuencia de ello, su rendimiento era bajo y esto dificultaba el trabajo: se quedaban bloqueadas algunas aplicaciones, se tenían que suprimir procesos del Tomcat constantemente, etc. En estas condiciones, el trabajo resultaba lento e ineficaz. La solución fue formatear el ordenador y reinstalar todas las aplicaciones necesarias para poder trabajar correctamente. Una vez formateado, el funcionamiento mejoró significativamente.

5. Conclusiones y Valoración Personal

Los momentos en los que tenemos que hacer frente a problemas reales son los que nos enseñan la importancia de todo lo que hemos aprendido y de aquellos pequeños detalles que, durante el aprendizaje, podían parecer poco significativos. Resulta muy gratificante ver como en la práctica esos conceptos y particularidades nos permiten avanzar y contribuir en tareas propias de un trabajador. Sin embargo, puede parecer frustrante al principio trabajar como programadora cuando se empieza a utilizar un programa o un lenguaje nuevo. Inicialmente todo son dudas y errores, y se pierde mucho tiempo en resolver incluso las tareas más sencillas. Es el tiempo, la experiencia y el haber cometido tantos errores lo que te hace aprender y coger soltura en el trabajo.
Considero que en este proceso ha sido de gran ayuda tener un amplio conocimiento en lenguajes de programación. Haber trabajado en diferentes programas y lenguajes durante el grado me ha permitido tener una visión más abierta sobre el programa, y así, conseguir que su aprendizaje fuera más rápido y sencillo.
Considero la realización de estas prácticas una experiencia muy positiva en la que he podido conocer el funcionamiento de una empresa y la forma de trabajar como programadora dentro de ella.
Aunque el comienzo fuera costoso, la ayuda de mis compañeros y el tiempo hizo que, poco a poco, mi presencia en la empresa fuera más útil y productiva; y a la vez, muy enriquecedora y gratificante para mi.
Tras estas prácticas, creo que dentro de la empresa resulta muy positivo tener un buen equipo, no sólo a nivel académico, sino un equipo unido con un gran compañerismo y diversidad que aporte diferentes puntos de vista en los proyectos. En mi caso, tener un equipo así ha sido muy positivo a la hora de afrontar cualquier problema, pues siempre han estado a mi lado para ayudarme.

Parte II

Trabajo Final de Grado

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Grado (TFG), tiene como objeto estudiar las funciones elípticas, es decir, las funciones meromorfas doblemente periódicas no constantes.
Este estudio se enfoca en las funciones elípticas definidas por Jacobi y Weierstrass y sus propiedades. A lo largo de los siguientes capítulos se definen y analizan estas funciones centrándonos en hallar sus periodos, el paralelogramo que determinan dichos periodos, y cómo se comporta la función dentro de cada paralelogramo, es decir, qué ceros y qué polos tiene.
El último punto que se trata en este trabajo muestra aplicaciones de las funciones estudiadas. Las funciones elípticas se aplican en numerosos campos de estudio como la teoría de números, la física, la geometría y el cálculo integral entre otros. En los últimos capítulos se recogen algunos de estos ejemplos.

1. Funciones Elípticas

1.1. Introducción y Conceptos Básicos

El objetivo de este primer capítulo es introducir al lector en el estudio de las funciones elípticas. En él presentamos este tipo de funciones y asentamos las bases sobre las que trabajaremos en los siguientes capítulos.

Como paso previo al desarrollo de este trabajo, recordamos a continuación algunos conceptos de los que se hará uso a lo largo de todo el trabajo. [2]

Definición. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *analítica* si para todo $a \in \Omega$ existe $R_a > 0$ tal que el disco $D(a, R_a) := \{z \; : \; |z - a| < R_a\}$ está contenido en Ω y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ si $z \in D(a, R_a)$.

Es bien conocido que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si es holomorfa, es decir, si es derivable compleja en todo $z \in \Omega$.
Al conjunto de las funciones holomorfas se le denota por $\mathcal{H}(\Omega)$. Una función holomorfa en $\mathbb{C}$ se denomina *función entera*.

Ejemplos.

- Función analítica: $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{1/z}$.
- Función entera: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^z$.

Definición. Una función f se dice que es *periódica* si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo x de su dominio. El valor T se denomina *periodo*.
Nos referiremos indistintamente al periodo para referirnos a un periodo cualquiera de una función o a su periodo mínimo, es decir, el menor $T > 0$ cumpliendo la definición.

Se dice que una función es *doblemente periódica* cuando tiene dos periodos, es decir, existen T_1 y T_2 distintos tal que $f(x) = f(x + T_1) = f(x + T_2)$.

Si aplicamos sucesivamente la periodicidad tenemos que:

- En una función periódica: $f(x) = f(w) \;\; \forall w \in \{z + nT,\; n \in \mathbb{Z}\}$.
- En una función doblemente periódica:

$$f(x) = f(w) \;\; \forall w \in \{z + nT_1 + mT_2,\; n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Ejemplos.

- Funciones periódicas: las funciones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$ son funciones periódicas, ambas con periodo 2π.
- Funciones doblemente periódicas: en los siguientes capítulos se verán ejemplos de ellas.

Definición Sean $a \in \mathbb{C}$ y $\{a_n \;:\; n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Consideramos $\{f_n\}_{n\geq 0}$ con:

$$\begin{cases} f_0(z) = a_0, & \forall z \in \mathbb{C} \\ f_n = a_n(z-a)^n + a_{-n}(z-a)^{-n}, & \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Llamamos *serie de Laurent* de centro a y coeficientes a_n a la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Decimos que una función f tiene una *singularidad aislada* en z_0 si f es holomorfa en el abierto $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$, para algún $R > 0$. Dicho de otra manera, z_0 es una singularidad aislada si admite una serie de Laurent convergente en dicho abierto.

Ejemplo. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$. Además, esta serie coincide con la función $e^{1/z}$ en todo z de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Definición. Sea $f : dom(f) \to \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f.

- Se dice que a es una singularidad *evitable* si $lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- Se dice que a es un *polo* si $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) \neq 0$ para algún $n > 0$. A este n se le denomina *orden* del polo.

Ejemplo. La función $f(z) = \frac{1}{z^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$.

Definición. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω abierto en $\mathbb{C}$, se dice que es una *función meromorfa* si f es holomorfa en Ω excepto en un conjunto aislado de singularidades, que son polos o evitables.
$\mathcal{M}(\Omega)$ denotará el conjunto de funciones meromorfas en Ω.

Ejemplo. La función $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.

Nota. La palabra Meromorfa tiene raíces griegas, *meros*, que significa “parte”. Holomorfa tambien proviene del griego antiguo, *holos*, significa “todo” [3]. Como hemos comentado, una función meromorfa en Ω es derivable compleja en todo el conjunto excepto en sus singularidades, es decir, es holomorfa en *todo* el conjunto excepto en una *parte*.

1.2. Funciones Elípticas

Definición. Una función meromorfa no constante doblemente periódica se llama ***función elíptica***.

Denotamos por w_1 y w_2 los periodos de una función elíptica f, es decir, los dos números complejos distintos de cero tales que:

$$f(z+w_1) = f(z) \qquad y \qquad f(z+w_2) = f(z)$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Centrándonos en la característica de la doble periodicidad, veamos a continuación que se puede trabajar de forma más sencilla con ellas suponiendo, sin pérdida de generalidad, que estos dos periodos son 1 y τ, donde τ es un número complejo tal que $Im(\tau) > 0$.

La demostración de esta generalidad la haremos en varios pasos:

- Primero probaremos que los dos periodos w_1 y w_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.
- Tras dicha demostración, veremos que si tomamos $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, entonces $Im(\tau) \neq 0$ y además podemos considerar que $Im(\tau) > 0$.
- Por último veremos que podemos considerar como periodos de la función dicho valor τ y el valor 1.

Empecemos pues por demostrar que los dos periodos w_1 y w_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Con el siguiente lema se demuestra que en caso de que sean los dos periodos w_1 y w_2 linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$, es decir, si $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{R}$, se reduce a la existencia de un solo periodo. Veámoslo:

Lema 1. *Sea una función f doblemente periódica. Si ambos periodos w_1 y w_2 son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$, podemos considerar dos casos:*

- *Si $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{Q}$ y entonces f tiene un sólo periodo simple.*
- *Si $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{Q}$ y, en este caso, f es constante.*

Demostración. Consideramos los dos casos vistos:

∘ Caso 1: $w_2/w_1 \in \mathbb{Q}$
Lo que queremos ver es que f es periódica de un único periodo simple, es decir, $\exists s \in \mathbb{Z}$ tal que w_1 y w_2 son múltiplos de s y $f(z) = f(z+ns)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Si $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{Q}$, entonces $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{w_2}{w_1} = \frac{p}{q}$, con $\frac{p}{q}$ fracción irreducible, es decir, el máximo común divisor de p y q es 1. Aplicando Bezout,[2] $\exists m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $pm_0 + qn_0 = 1$. Si tomamos $s = w_2/p$, queda:

$$w_1 = sq \qquad y \qquad w_2 = sp.$$

Por ser w_1 y w_2 periodos, para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$f(z) = f(z + nw_1 + mw_2) = f(z + s(np + mq)).$$

Por lo tanto,

$$f(z) = f(z + s(n_0p + m_0q)) = f(z+s).$$

Por lo tanto f es s-periódica con periodo simple, y se cumple que $f(z) = f(z+ns)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De manera que w_1 y w_2 son periodos de f por ser múltiplos de s.

∘ Caso 2: $w_2/w_1 \notin \mathbb{Q}$
Sea $\theta = w_2/w_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. El teorema de Kronecker asegura que $\{m + \theta n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. En consecuencia $\{mw_1 + nw_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
Se tiene

$$f(z) = f(z - mw_1 - nw_2) \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ tales que $m_kw_1 + n_kw_2$ converge a z, se deduce

$$f(z) = f(0).$$

Por lo tanto, la función f es constante. □

Teniendo en cuenta este lema, a partir de ahora ya podemos suponer que f tiene periodos w_1 y w_2 linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ y tomaremos

$$\tau = \frac{w_2}{w_1}.$$

En este caso, τ no es real, así que podemos asumir que $Im(\tau) \neq 0$.

Además, dado que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $signo(Im(z)) \neq signo(Im(\frac{1}{z}))$, podemos suponer que $Im(\tau) > 0$, pues en el caso de que $Im(\tau) < 0$ podemos invertir el papel de w_1 y w_2, $\tau = \frac{w_1}{w_2}$, y conseguir que $Im(\tau) > 0$.

Finalmente, sea $F(z) = f(w_1z)$, es claro que f tiene periodos w_1 y w_2 si y sólo si F tiene periodos 1 y τ. Además se cumple que la función f es meromorfa si y sólo si lo

[2] Si a, b tienen máximo común divisor d, entonces $\exists m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $am_0 + bn_0$=d.

es F. Por lo tanto, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con periodos 1 y τ, donde $Im(\tau) > 0$.

Por ello, de ahora en adelante supondremos que f tiene dos periodos, 1 y τ, tal que $Im(\tau) > 0$ y que por lo tanto, aplicando sucesivamente la periodicidad tenemos que:

$$f(z + n + m\tau) = f(z)$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. [4]

1.3. Paralelogramo Fundamental

Del mismo modo que se puede estudiar las funciones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$ estudiando su comportamiento en una sección de la recta real, por ser funciones periódicas con periodo real; veremos en este apartado que las funciones elípticas, por ser doblemente periódicas con, al menos, un periodo complejo, pueden ser estudiadas analizando su comportamiento en una sección del plano complejo, en un paralelogramo.

Recordemos que un *retículo* en $\mathbb{R}^n$ es $\phi(\mathbb{Z}^n)$, donde ϕ es un isomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Considerando el retículo en $\mathbb{C}$ generado por 1 y τ:

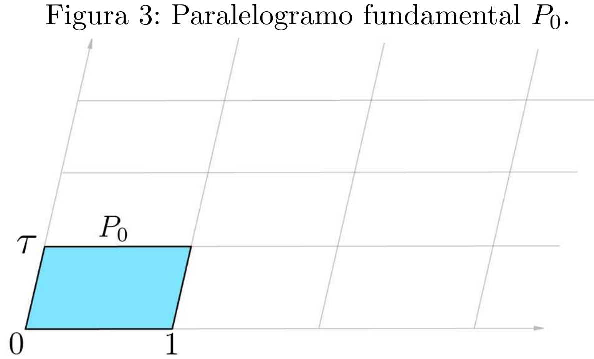
$$\Lambda := \{n + m\tau \ : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

podemos dar la siguiente definición

Definición. Definimos el *paralelogramo fundamental* asociado a un retículo $\Lambda := \{n + m\tau \ : n, m \in \mathbb{Z}\}$, como la sección de éste acotada por los dos periodos 1 y τ:

$$P_0 := \{z \in \mathbb{C} : z = a + b\tau \quad , donde \quad 0 \leq a < 1 \quad y \quad 0 \leq b < 1\}.$$

Figura 3: Paralelogramo fundamental P_0.



La importancia de este paralelogramo recae en el hecho de que f está determinada completamente por sus valores en P_0.

Nota. Dados z, w tal que $z = w + n + m\tau$ para ciertos $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que $f(z) = f(w)$ por periodicidad, y diremos que z y w son *congruentes.*

Veamos ahora que, como se ha dicho, la función está determinada por sus valores en el paralelogramo, ya que, para cualquier punto del plano complejo, existe un punto del paralelogramo fundamental de manera que ambos puntos son congruentes.

Lema 2. *Para cualquier* $z \in \mathbb{C}$, *existe un único* $w \in P_0$ *de manera que* $z = w + n + m\tau$ *para ciertos* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para la demostración, probaremos primero la existencia de dicho w y después su unicidad.

- Existencia: Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ podemos escribir z como $z = a + b\tau$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.
  Elegimos n y m tal que sean los mayores enteros menores o igual que a y b respectivamente. Si tomamos $w = z - n - m\tau$, entonces por definición $f(z) = f(w)$; además $w = (a - n) + (b - m)\tau$. Por construcción $w \in P_0$.

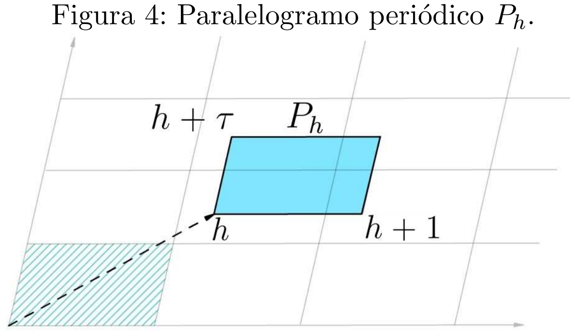
- Unicidad: Si escribimos $w = a + b\tau$ y $w' = a' + b'\tau \in P_0$ congruentes, entonces $w - w' = (a - a') + (b - b')\tau \in \Lambda$, y por lo tanto $a - a'$ y $b - b'$ son enteros. Pero además $0 \leq a, a' < 1$, es decir $-1 < a - a' < 1$, lo que implica que $a - a' = 0$. Análogamente se demostraría que $b - b' = 0$.

$\square$

Teniendo en cuenta este resultado, dado un número complejo y a partir del paralelogramo fundamental, podemos definir un nuevo paralelogramo como el paralelogramo resultante de desplazar P_0 sobre el plano complejo:

Definición. Un *paralelogramo periódico* P_h es una translación del paralelogramo fundamental, i.e, $P_h = P_0 + h$ con $h \in \mathbb{C}$.

Figura 4: Paralelogramo periódico P_h.



Podremos aplicar el *Lema 2* a $z - h$, y por lo tanto podemos concluir que cada punto en $\mathbb{C}$ es congruente a un único punto en un paralelogramo periódico. Por lo tanto, f está unívocamente determinada por su comportamiento en cualquiera de sus paralelogramos periódicos.

Nota. Fijémonos que, a partir de la definición de P_0 y de los resultados anteriores, podemos afirmar que Λ y P_0 dan lugar a un recubrimiento del plano complejo:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (n + m\tau + P_0).$$

Además esta unión es disjunta. [4]

Resumimos las conclusiones que hemos obtenido en la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ doblemente periódica cuyos periodos 1 y τ generan Λ. Entonces:*

1. *Cada punto en $\mathbb{C}$ es congruente a un único punto del paralelogramo fundamental.*
2. *Cada punto en $\mathbb{C}$ es congruente a un único punto de un paralelogramo periódico dado.*
3. *El retículo Λ genera un recubrimiento disjunto del plano complejo.*
4. *La función f está completamente determinada por sus valores en cualquier paralelogramo periódico.*

1.4. Singularidades de una función elíptica

En esta sección estudiamos los polos que tiene una función elíptica. Hemos asumido desde el principio que las funciones elípticas son meromorfas en $\mathbb{C}$, es decir, que tienen singularidades evitables y/o polos. Veamos ahora por qué hemos asumido esta condición, en lugar de la condición más exigente de ser holomorfa, es decir, entera:

Teorema 1. *Una función entera doblemente periódica es constante.*

Demostración. La función está completamente determinada por sus valores en P_0 y además la clausura de P_0 es compacta. Concluimos que la función es acotada en $\mathbb{C}$ y por lo tanto constante por el teorema de Liouville[3].

□

Por lo tanto las funciones elípticas tendrán singularidades evitables y/o polos. Como una función meromorfa puede tener sólo un número finito de ceros y polos en cualquier

[3] Teorema en Apéndice.

disco, una función elíptica tendrá sólo un número finito de ceros y polos en un paralelogramo periódico dado, y en particular, en el paralelogramo fundamental.
Veamos cuantos polos puede tener una función elíptica dentro de un paralelogramo.

Teorema 2. *El número total de polos, contados con multiplicidades, de una función elíptica en P_0 es siempre mayor o igual que* 2.

Demostración: Supongamos primero que f no tiene polos en la frontera ∂P_0 del paralelogramo fundamental. Por el Teorema de los Resíduos[4] tenemos:

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f).$$

Podemos expresar la integral sobre ∂P_0 como la suma de los lados que construyen el paralelogramo, es decir,

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = \int_0^1 f(z)dz + \int_1^{1+\tau} f(z)dz + \int_{1+\tau}^{\tau} f(z)dz + \int_{\tau}^{0} f(z)dz$$

Dado que la función tiene periodos 1 y τ, podemos aplicar dicha periodicidad de manera que

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = \int_0^1 f(z)dz + \int_0^{\tau} f(z)dz + \int_1^{0} f(z)dz + \int_{\tau}^{0} f(z)dz =$$

$$= \int_0^1 f(z)dz + \int_0^{\tau} f(z)dz - \int_0^{1} f(z)dz - \int_0^{\tau} f(z)dz = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f) = 0$$

Así que f debe tener al menos dos polos en P_0, incluyendo la opción de un polo simple con doble multiplicidad.

Nada excluye que f tenga polos en la frontera del paralelogramo, basta con elegir $h \in \mathbb{C}$ pequeño tal que, si $P_h = h + P_0$, f no tenga polos en ∂P_h. Aplicando el razonamiento anterior a $h + P_0$, deducimos la misma conclusión para P_0.

$\square$

Definición. El número total de polos de una función elíptica, contados según sus multiplicidades, se denomina *orden* de dicha función.

En el siguiente resultado relacionamos el número de polos de una función elíptica con el número de ceros.

Teorema 3. *Toda función elíptica de orden m tiene m ceros en P_0.*

[4] Ver Teorema en Apéndice

Demostración. Asumimos primero que f no tiene ceros o polos en la frontera de P_0. Sabemos por el Principio del Argumento[5] que

$$\int_{\partial P_0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}} - \mathcal{N}_{\mathfrak{p}})$$

donde $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}}$ y $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ denotan el número de ceros y polos de f en P_0, respectivamente.
Por periodicidad, igual que en la prueba anterior, podemos deducir que

$$\int_{\partial P_0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

y por lo tanto $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}} = \mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$.

En el caso en que un polo o cero de f esté situado en ∂P_0, basta con aplicar lo anterior a una traslación de P_0.

$\square$

Por lo tanto, se puede deducir que una función elíptica tiene los mismos polos que ceros, si contamos ambos según sus multiplicidades.

Nota. Como consecuencia del resultado previo, si f es elíptica, la ecuación $f(z) = c$ tiene tantas soluciones como el orden de f para todo $c \in \mathbb{C}$, ya que $f - c$ es elíptica y tiene tantos ceros como f. [4]

[5] ver Teorema en Apéndice.

2. Funciones Elípticas de Jacobi

Jacobi, en su estudio de las funciones elípticas definió tres funciones: sn, cn y dn. Podemos ver estas funciones como una generalización de funciones trigonométricas y, de hecho, comparten muchas propiedades y relaciones entre ellas.
En este capítulo veremos muchas de estas propiedades y proporcionaremos dos enfoques diferentes para definirlas: las integrales elípticas de Legendre y el uso de las funciones theta.

2.1. Introducción histórica

Carl Gustav Jacob Jacobi ($1804 - 1851$) fue un matemático alemán que contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra y la teoría de números. También destacó como docente en la universidad de Königsberg por su dedicación y apoyo hacia su alumnado. Tuvo relación con otros importantes matemáticos como Bessel, Gauss, Fourier, Dirichlet, Poisson y Legendre. Este último era un gran experto de la época en funciones elípticas y fue apoyo de Jacobi para sus trabajos en este campo. En 1829 publicó la *"Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum"*. Un tratado en el que asentó nuevas bases para el análisis de funciones elípticas. [5]

Figura 5: Carl Gustav Jacob Jacobi.

2.2. Integral elíptica de Legendre

Definiremos inicialmente las funciones elípticas de Jacobi a partir de la integral elíptica de Legendre. Por ello, como paso previo a esta definición, se presenta en esta sección una breve descripción de los conceptos relacionados con la integral elíptica de Legendre que se utilizarán a lo largo del capítulo.

Definición Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq k \leq 1$. Se define la *Integral Elíptica de Legendre* con amplitud φ y parámetro k como:

$$F(\varphi|k) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Sobre ésta, definimos los siguientes parámetros:

- Denominamos al valor k el *módulo*.
- Definimos el *módulo complementario* k' como el número real $0 \leq k' \leq 1$, tal que $k^2 + k'^2 = 1$.
- Para un módulo k definimos la *Integral Elíptica Completa de Legendre* como

$$K(k) = F(\frac{1}{2}\pi|k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

- Para un módulo k definimos la *Integral Elíptica Completa Complementaria de Legendre*, $K'(k)$, como $K'(k) = K(k')$. Se tiene por tanto

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

  Utilizando el cambio de variable $\sqrt{1-k't^2} = sk$, también se puede expresar como

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

En este estudio, denominaremos a la Integral Elíptica Completa como *periodo*, y a la Integral Elíptica Completa Complementaria como *periodo complementario*.

Nota. La integral que se ha definido se conoce como la integral elíptica de *primera especie* y es con la que trabajaremos durante este capítulo. Sin embargo, Legendre también definió la siguiente integral

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

a la que denominó *integral elíptica de segunda especie.* [6]

2.3. Funciones Elípticas de Jacobi

Definición. Jacobi define, a partir de la Integral Elíptica de Legendre, tres funciones. La primera de ellas, $sn(u)$, viene dada por la función inversa de esta integral $sn(u) = \sin\varphi$; de modo que se cumple

$$u = \int_0^{sn(u)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

A partir de esta, definimos las otras dos funciones de Jacobi, $cn(u)$ y $dn(u)$, que vienen dadas por las soluciones positivas que se deducen de las relaciones

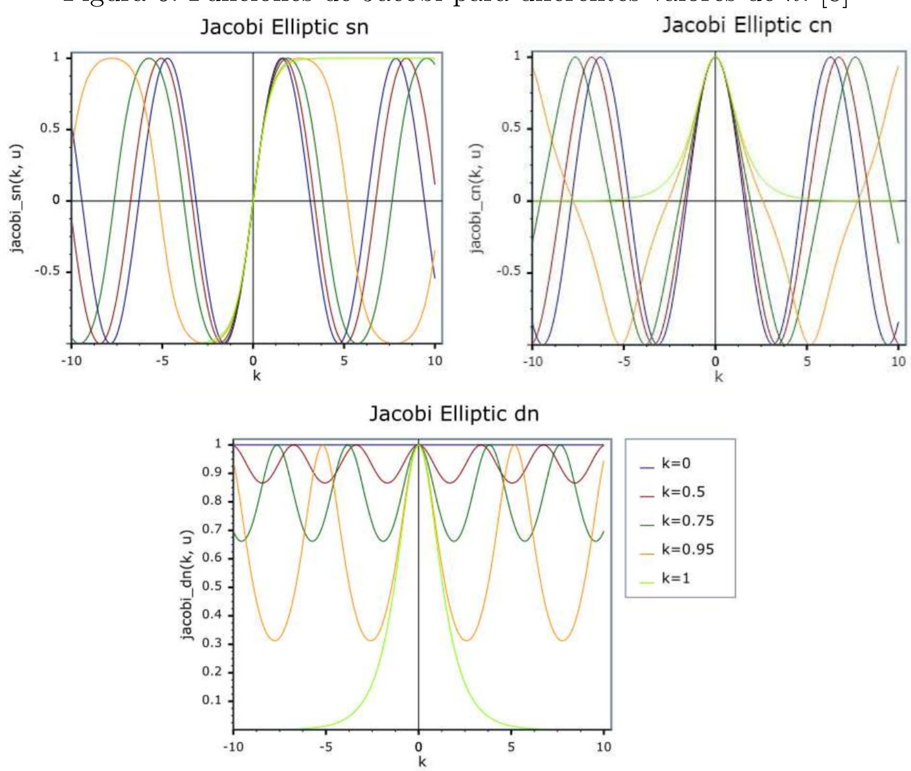
$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1,$$

$$k^2sn^2(u) + dn^2(u) = 1.$$

Fijémonos que, por la propia definición de la integral $sn(0) = 0$, y en consecuencia, $cn(0) = dn(0) = 1$. [7]

En las siguientes gráficas se ve cómo varían las funciones elípticas de Jacobi respecto al módulo k elegido:

Figura 6: Funciones de Jacobi para diferentes valores de k. [8]

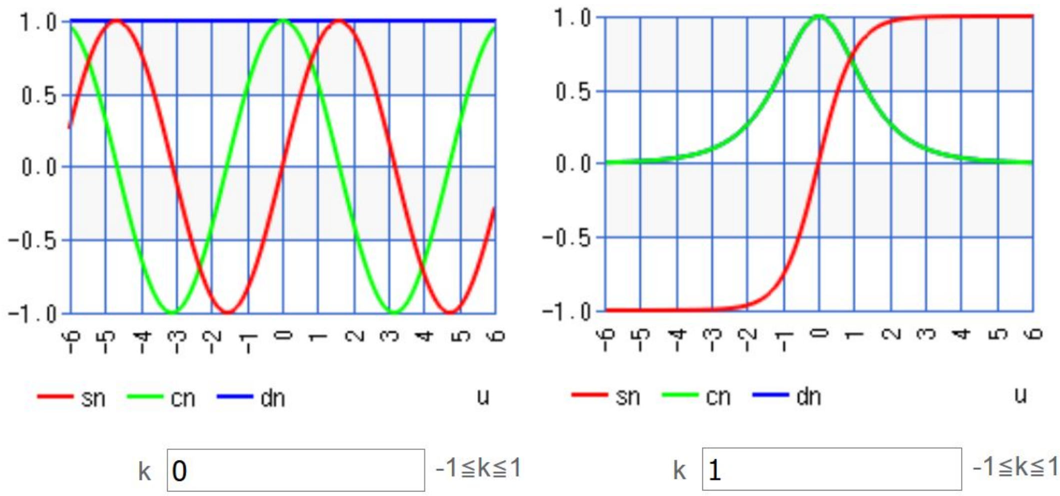


Nota. Las funciones de Jacobi cumplen las siguientes características:

1. Cuando $k = 0$, las funciones $sn(u)$ y $cn(u)$ degeneran a las funciones circulares $\sin u$ y $\cos u$, respectivamente, mientras que $dn(u)$ degenera a la función constante 1.

2. Cuando $k = 1$, tenemos que $sn(u)$ coincide con la función hiperbólica $\tanh u$[6], mientras que $cn(u)$ y $dn(u)$ son iguales a $sech(u)$[7].

Figura 7: Tendencia de las funciones elípticas de Jacobi para $k = 0$ y $k = 1$. [9]



Si queremos hacer hincapié en un módulo particular, escribimos las tres funciones como $sn(u,k)$, $cn(u,k)$ y $dn(u,k)$, y los periodos como $K(k)$ y $K'(k)$. De ahora en adelante, en este trabajo se utilizará la notación $sn(u)$, $cn(u)$, $dn(u)$, K, y K'.

2.4. Propiedades de las funciones elípticas de Jacobi

En esta sección se analizan algunas de las propiedades de estas funciones: la simetría, las derivadas, las fórmulas de la suma, la relación con los periodos K y K', la periodicidad, los polos y los ceros.

Simetría

Teorema 4. *La función $sn(u)$ es una función holomorfa con simetría impar, mientras que $cn(u)$ y $dn(u)$ son funciones holomorfas con simetría par.*

Demostración. La derivabilidad de $sn(u)$ se deduce del Teorema de la Función Inversa[8]

[6] $tanh(u) = \frac{sinh(u)}{cosh(u)} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$
[7] $sech(u) = \frac{1}{cosh(u)} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$
[8] ver Teorema en Apéndice.

y de que la integral que define la función sn es holomorfa en $\mathbb{C}-([-1/k,-1]\cup[1,1/k])$. Sustituyendo t,x por $-t,-x$ en la integral

$$u=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

se obtiene $sn(-u)=-sn(u)$. Por lo tanto sn es una función impar.

Veamos ahora, a partir de las relaciones que definen cn y dn, las simetrías de estas funciones.
De la identidad $sn^2(u)+cn^2(u)=1$, se sigue que $cn^2(-u)=\pm cn^2(u)$. Como $cn(u)$ es una función analítica, entonces, por el Principio de Prolongación Analítica[9], o bien $cn(-u)=-cn(u),\ \ \forall u$, o $cn(-u)=cn(u),\ \ \forall u$.
Como $cn(0)=1$, se sigue $cn(u)=cn(-u),\ \ \forall u$, por lo tanto cn es una función con simetría par. Análogamente se demuestra que $dn(-u)=dn(u)$ y por lo tanto también tiene simetría par. [7]

□

Derivadas

Veamos que las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi, igual que las derivadas de las funciones trigonométricas, se expresan unas en función de las otras.

Teorema 5. *Las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi son:*

$$\frac{d}{du}(sn(u))=cn(u)dn(u),$$

$$\frac{d}{du}(cn(u))=-sn(u)dn(u),$$

$$\frac{d}{du}(dn(u))=-k^2sn(u)cn(u).$$

Demostración. Empezamos por demostrar la primera igualdad. Para ello hacemos la derivada de la integral que define la función sn de Jacobi. Tenemos entonces:

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

y, dado que $x=sn(u)$, se sigue que la derivada de sn es:

$$\frac{d}{du}(sn(u))=\frac{dx}{du}=\sqrt{(1-sn^2(u))(1-k^2sn^2(u))}$$

[9]ver Teorema en Apéndice.

Por la propia definición de cn y dn, simplificamos esta derivada como:

$$\frac{d}{du}(sn(u)) = \sqrt{cn^2(u)dn^2(u)} = cn(u)dn(u).$$

Veamos ahora, a partir de las ecuaciones que definen las funciones cn y dn, cuales son las derivadas de éstas.
Para cn derivamos en $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$, de manera que tenemos:

$$2sn(u)\frac{d}{du}(sn(u)) + 2cn(u)\frac{d}{du}(cn(u)) =$$

$$= 2sn(u)cn(u)dn(u) + 2cn(u)\frac{d}{du}(cn(u)) = 0.$$

Por lo tanto

$$sn(u)dn(u) + \frac{d}{du}(cn(u)) = 0$$

$$\frac{d}{du}(cn(u)) = -sn(u)dn(u),$$

Análogamente, calculamos la derivada de dn a partir de $k^2sn^2(u) + dn^2(u) = 1$. Derivando la ecuación tenemos:

$$2k^2sn(u)\frac{d}{du}(sn(u)) + 2dn(u)\frac{d}{du}(dn(u)) =$$

$$= 2k^2sn(u)cn(u)dn(u) + 2dn(u)\frac{d}{du}(dn(u)) = 0.$$

Así queda

$$k^2sn(u)cn(u) + \frac{d}{du}(dn(u)) = 0$$

$$\frac{d}{du}(dn(u)) = -k^2sn(u)cn(u).$$

□

Fórmulas de adición

Una función $f(u)$ se dice que posee una *fórmula para la suma* si existe una función R que relaciona $f(u_1), f(u_2)$ y $f(u_1 + u_2)$ de la forma

$$f(u_1 + u_2) = R(f(u_1), f(u_2))$$

para todo u_1, u_2. La función $\sin u$, por ejemplo, tiene como fórmula para la suma:

$$\sin(u_1 + u_2) = \sin u_1 \cos u_1 + \cos u_1 \sin u_2.$$

Teorema 6. *Las fórmulas para la suma de las funciones elípticas de Jacobi son:*

$$sn(u_1+u_2)=\frac{sn(u_1)cn(u_2)dn(u_2)+sn(u_2)cn(u_1)dn(u_1)}{1-k^2sn^2(u_1)sn^2(u_2)},$$

$$cn(u_1+u_2)=\frac{cn(u_1)cn(u_2)-sn(u_1)sn(u_2)dn(u_1)dn(u_2)}{1-k^2sn^2(u_1)sn^2(u_2)},$$

$$dn(u_1+u_2)=\frac{dn(u_1)dn(u_2)-k^2sn(u_1)sn(u_2)cn(u_1)cn(u_2)}{1-k^2sn^2(u_1)sn^2(u_2)}.$$

Demostración. Usaremos la notación

$s_1 = sn(u_1)$, $s_2 = sn(u_2)$, $c_1 = cn(u_1)$, $c_2 = cn(u_2)$, $d_1 = dn(u_1)$, $d_2 = dn(u_2)$.

$S=\dfrac{s_1c_2d_2+s_2c_1d_1}{1-k^2s_1^2s_2^2}$, $C=\dfrac{c_1c_2-s_1s_2d_1d_2}{1-k^2s_1^2s_2^2}$, $D=\dfrac{d_1d_2-k^2s_1s_2c_1c_2}{1-k^2s_1^2s_2^2}$, $\Delta=1-k^2s_1^2s_2^2$.

La diferencial parcial de S con respecto a u es:

$$\Delta^2\tfrac{\partial S}{\partial u_1}=\Delta[c_1d_1c_2d_2-s_1s_2(d_1^2+k^2c_1^2)]+(2k^2s_1c_1d_1s_2^2)(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1)=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(\Delta+2k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2[\Delta(d_1^2+k^2c_1^2)-2k^2s_2^2c_1^2d_1^2]=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(\Delta+2k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2[d_1^2(\Delta-k^2s_2^2c_1^2)+k^2c_1^2(\Delta-s_2^2d_1^2)]=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(\Delta+2k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2[(1-k^2s_1^2s_2^2)d_1^2-k^2c_1^2(s_2^2d_1^2+1-k^2s_1^2s_2^2-s_2^2d_1^2)]=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(\Delta+2k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2[d_1^2(1-k^2s_2^2(s_1^2+c_1^2))+k^2c_1^2(1-k^2s_1^2s_2-s_2^2+k^2s_2^2s_1^2)]=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(\Delta+2k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2[d_1^2(1-k^2s_2^2+k^2c_1^2(1-s_2^2)]=$$

$$=c_1d_1c_2d_2(1+k^2s_1^2s_2^2)-s_1s_2(d_1^2d_2^2+k^2c_1^2c_1^2c_2^2)=$$

$$=(c_1c_2-s_1s_2d_1d_2)(d_1d_2-k^2s_1s_2c_1c_2).$$

Así

$$\frac{\partial S}{\partial u_1}=CD,$$

que es simétrica en u_1, u_2. Como S es simétrica en u_1, u_2, concluimos que

$$\frac{\partial S}{\partial u_1}=CD=\frac{\partial S}{\partial u_2}.$$

Definimos ahora dos nuevas variables $z = u_1 + u_2$, $w = u_1 - u_2$ para transformar la última ecuación en

$$\frac{\partial S}{\partial w}=\frac{\partial S}{\partial u_1}-\frac{\partial S}{\partial u_2}=0.$$

De donde $S = f(z) = f(u_1 + u_2)$. Tomando $u_2 = 0$, $f(u_1) = S(u_1, 0) = sn(u_1)$ y así $S(u_1, u_2) = sn(u_1 + u_2)$.

Ahora tenemos:

$$cn^2(u_1 + u_2) = 1 - sn^2(u_1 + u_2) = \frac{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2 - (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}.$$

Si expresamos $(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2$ en la forma $(c_1^2 + s_1^2 d_2^2)(c_2^2 + s_2^2 d_1^2)$, entonces:

$$cn^2(u_1 + u_2) = \frac{(c_1^2 + s_1^2 d_2^2)(c_2^2 + s_2^2 d_1^2) - (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} =$$

$$= \frac{c_1^2 c_2^2 + c_1^2 s_2^2 d_1^2 + c_1^2 s_1^2 d_2^2 + s_1^2 s_2^2 d_1^2 d_2^2 - s_1^2 c_2^2 d_2^2 - s_2^2 c_1^2 d_1^2 - 2 s_1 s_2 c_1 c_2 d_1 d_2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}$$

$$cn^2(u_1 + u_2) = \frac{(c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}.$$

Tomamos la raíz cuadrada y tenemos que, por prolongación analítica, o bien

$$cn(u_1 + u_2) = \frac{c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \qquad \forall u_1, u_2,$$

o

$$cn(u_1 + u_2) = -\frac{c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \qquad \forall u_1, u_2.$$

Tomando $u_2 = 0$, se deduce que

$$cn(u_1 + u_2) = \frac{c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \qquad \forall u_1, u_2.$$

La fórmula para $dn(u_1 + u_2)$ se sigue de que

$$\frac{\partial S}{\partial u_1} = cn(u_1 + u_2) dn(u_1 + u_2).$$

Aplicando ahora los resultados anteriores:

$$\frac{(c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2)(d_1 d_2 - k^2 s_1 s_2 c_1 c_2)}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} = \frac{c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} dn(u_1 + u_2).$$

$$dn(u_1 + u_2) = \frac{dn(u_1) dn(u_2) - k^2 sn(u_1) sn(u_2) cn(u_1) cn(u_2)}{1 - k^2 sn^2(u_1) sn^2(u_2)}.$$

Con lo que quedan probadas las tres fórmulas de adición. [10] $\square$

Periodos K y K'

Veamos algunas relaciones entre los periodos definidos por la integral de Legendre que ya hemos visto, y estas funciones. [7]

- Se sigue de las propias definiciones de sn y K que,

  $$sn(K) = 1.$$

  Aplicando las relaciones que definen las funciones cn y dn:

  $$cn(K) = 0, \qquad dn(K) = k'$$

- Teniendo en cuenta las definiciones de K y K', podemos definir la siguiente suma:

  $$K + iK' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + i\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

  $$K + iK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

  Aplicando de nuevo las definiciones de las funciones elípticas de Jacobi, tenemos:

  $$sn(K+iK') = 1/k, \qquad cn(K+iK') = -ik'/k, \qquad dn(K+iK') = 0.$$

Periodicidad

Vamos a comprobar ahorar que las funciones elípticas de Jacobi son, efectivamente, doblemente periódicas. Los periodos de estas funciones pueden ser expresados en términos de las constantes K y K'.
A partir de ahora usaremos las siguientes notaciones:

$$cd := \frac{cn(u)}{dn(u)}, \quad dc := \frac{dn(u)}{cn(u)}, \quad ds := \frac{dn(u)}{sn(u)}, \quad sd := \frac{sn(u)}{dn(u)},$$

$$cs := \frac{cn(u)}{sn(u)}, \quad sc := \frac{sn(u)}{cn(u)}, \quad nd := \frac{1}{dn(u)}, \quad nc := \frac{1}{cn(u)}, \quad ns := \frac{1}{sn(u)}.$$

En los siguientes tres teoremas se muestran los periodos de las tres funciones elípticas de Jacobi. Se verán tres periodos para cada una de las funciones, sin embargo, sólo dos de ellos son linealmente independientes.

Teorema 7. Las funciones $sn(u)$ y $cn(u)$ tienen periodo $4K$, y la función $dn(u)$ tiene periodo $2K$.

Demostración. Usaremos en esta prueba las fórmulas para la suma vistas. Aplicándolas tenemos que

$$sn(u+K) = \frac{sn(u)cn(K)dn(K) + sn(K)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(K)} = \frac{cn(u)dn(u)}{dn^2(u)} = cd(u).$$

Análogamente, para cn y dn tenemos:

$$cn(u+K) = \frac{cn(u)cn(K) - sn(u)sn(K)dn(u)dn(K)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(K)} = \frac{-sn(u)dn(u)k'}{dn^2(u)} = -k' sd(u),$$

$$dn(u+K) = \frac{dn(u)dn(K) - k^2 sn(u)sn(K)cn(u)cn(K)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(K)} = \frac{k' dn(u)}{dn^2(u)} = k' nd(u).$$

De ahí

$$sn(u+2K) = \frac{cn(u+K)}{dn(u+K)} = \frac{-k' sd(u)}{k' nd(u)} = -sn(u),$$

y también se sigue que

$$cn(u+2K) = -k' \frac{sn(u+K)}{dn(u+K)} = -k' \frac{cd(u)}{nd(u)} = -cn(u),$$

$$dn(u+2K) = \frac{k'}{dn(u+K)} = \frac{k'}{k' nd(u)} = dn(u).$$

Por lo tanto dn tiene un periodo $2K$. Además: Finalmente,

$$sn(u+4K) = -sn(u+2K) = sn(u),$$

$$cn(u+4K) = -cn(u+2K) = cn(u).$$

□

Los siguientes dos teoremas se demuestran de forma análoga a este primero.

Teorema 8. *Las funciones $sn(u)$ y $dn(u)$ tienen periodo $4K + 4iK'$, y la función $cn(u)$ tiene periodo $2K + 2iK'$.*

Demostración. Sabemos que

$$sn(K+iK') = 1/k, \qquad cn(K+iK') = -ik'/k, \qquad dn(K+iK') = 0.$$

Si volvemos a aplicar las fórmulas de la suma, tenemos:

$$sn(u+K+iK') = \frac{sn(u)cn(K+iK')dn(K+iK') + sn(K+iK')cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(K+iK')} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k} cn(u)dn(u)}{1 - sn^2(u)} = \frac{1}{k} dc(u).$$

De forma análoga para cn y dn, tenemos:

$$cn(u+K+iK') = -\frac{ik'}{k}nc(u), \qquad dn(u+K+iK') = ik'sc(u).$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, podemos volver a calcular la suma:

$$sn(u+2K+2iK') = \frac{1}{k}\frac{dn(u+K+iK')}{cn(u+K+iK')} = -sn(u),$$

$$cn(u+2K+2iK') = -\frac{ik'}{k}\frac{1}{cn(u+K+iK')} = cn(u),$$

$$dn(u+2K+2iK') = ik'\frac{sn(u+K+iK')}{cn(u+K+iK')} - dn(u).$$

Así, tenemos que cn tiene periodo $u+2K+2iK'$ y

$$sn(u+4K+4iK') = sn(u), \qquad dn(u+4K+4iK') = dn(u).$$

□

Teorema 9. *Las funciones $cn(u)$ y $dn(u)$ tienen periodo $4iK'$, mientras que $sn(u)$ tiene periodo $2iK'$.*

Demostración. Usamos además de las fórmulas para la suma, los resultados obtenidos en la demostración anterior para $sn(u+K+iK')$, $cn(u+K+iK')$ y $dn(u+K+iK')$. Teniendo en cuenta que $sn(-u) = -sn(u)$:

$$sn(u+iK') = sn(u-K+K+iK') = \frac{1}{k}dc(u-K).$$

Así

$$sn(u+iK') = \frac{1}{k}ns(u).$$

Y por otro lado, deduciendo de la misma forma, tenemos:

$$cn(u+iK') = -\frac{i}{k}ds(u), \qquad dn(u+iK') = -ics(u).$$

Aplicando reiteradamente esta propiedad:

$$sn(u+2iK') = sn(u), \qquad cn(u+2iK') = -cn(u), \qquad dn(u+2iK') = -dn(u),$$

$$cn(u+4iK') = cn(u), \qquad dn(u+4iK') = dn(u).$$

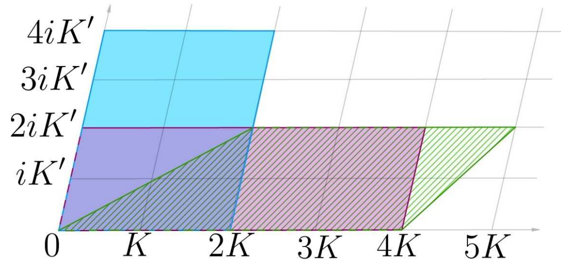
□

Nota. De los tres teoremas anteriores concluimos que los periodos de las funciones de Jacobi son:

$$\begin{cases} \text{sn(u)}: & 4K,\ 2iK'; \\ \text{cn(u)}: & 4K,\ 2K+2iK'; \\ \text{dn(u)}: & 2K,\ 4iK'. \end{cases}$$

y esto implica que cada función tiene un retículo diferente.

Figura 8: Retículos asociados a las funciones de Jacobi.



Como $4K$ y $4K'$ son periodos de las funciones elípticas de Jacobi, también nos podemos referir a K como al *cuarto del periodo* y a K' como al *cuarto del periodo complementario.* [7]

Polos y Ceros

En este apartado estudiamos los ceros y polos de las tres funciones elípticas de Jacobi: la cantidad de ceros y polos que tiene cada una así como la posición de estos.

Propiedad. *Cada una de las funciones $sn(u)$, $cn(u)$ y $dn(u)$ tiene dos polos simples y dos ceros simples:*

- *sn tiene sus ceros en los puntos congruentes a cero y $2K$; los polos se situan en los puntos congruentes a iK' y $2K+iK'$.*
- *cn tiene sus ceros en los puntos congruentes a K y $-K$; los polos se situan en los puntos congruentes a iK' y $2K+iK'$.*
- *dn tiene sus ceros en los puntos congruentes a $K+iK'$ y $K-iK'$; los polos se situan en los puntos congruentes a iK' y $-iK'$.*

Demostración. Primero vamos a comprobar que, efectivamente, sólo tienen dos polos simples y dos ceros simples. Sabemos que el número de polos es igual al número de ceros, así que bastaría probar que sólo tienen dos ceros simples o que sólo tienen dos polos simples. En esta demostración, sin embargo, desarrollaremos para *sn* la obtención de dichos polos y ceros. Las funciones *cn* y *dn* se tratarían de forma análoga.

Veamos primero que la siguiente igualdad es cierta

$$sn(iy,k)cn(y,k') = isn(y,k').$$

Esta identidad resulta del desarrollo de la integral que define $sn(iy)$:

$$iy = \int_0^{sn(iy)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t)}} = (\sin s = t) = \int_0^{\arcsin(sn(iy))} \frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s}} = (\sin s = i\tan\theta) =$$

$$= i\int_0^{\arctan(-isn(iy))} \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}d\theta}{\sqrt{1+k^2\tan^2\theta}} = i\int_0^{\arctan(-isn(iy))} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}} =$$

$$= i\int_0^{\arctan(-isn(iy))} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} = i\int_0^{\sin\arctan(-isn(iy))} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\arctan(-isn(iy,k)) = sn(y,k') \quad \Rightarrow \quad sn(iy,k)cn(y,k') = isn(y,k')$$

Si usamos también las fórmulas que relacionan las diferentes funciones elípticas, se obtiene también:

$$cn(iy,k)cn(y,k') = 1, \quad dn(iy,k)cn(y,k') = dn(y,k')$$

Aplicamos ahora los resultados anteriores y la fórmula de la suma de sn:

$$sn(x+iy) = \frac{sn(x)cn(iy)dn(iy) + sn(iy)cn(x)dn(x)}{1-k^2sn^2(x)sn^2(iy)} =$$

$$= \frac{\frac{sn(x,k)cn(iy,k)cn(y,k')dn(iy,k)cn(y,k')}{cn^2(y,k')} + \frac{sn(iy,k)cn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn(y,k')}}{1+\frac{k^2sn^2(x,k)sn^2(iy,k)cn^2(y,k')}{cn^2(y,k')}} =$$

$$= \frac{\frac{sn(x,k)dn(y,k')}{cn^2(y,k')} + i\frac{sn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn(y,k')}}{1+\frac{k^2sn^2(x,k)sn^2(y,k')}{cn^2(y,k')}} =$$

$$= \frac{sn(x,k)dn(y,k') + isn(y,k')cn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn^2(y,k') + k^2sn^2(x,k)sn^2(y,k')}.$$

Esta última expresión está bien definida excepto en los puntos $x+iy$ tal que $cn(y,k')=0$ y $sn(x,k)=0$, o lo que es lo mismo, cuando $x=2mK$ y $y=(2n+1)K'$. De modo que ya tenemos identificados los polos de la función $sn(u)$.

Veamos ahora los ceros de $sn(u)$ en el conjunto abierto

$$\mathbb{C} - \{x+iy \in \mathbb{C} : x = 2mK,\ y = (2n+1)K'\}.$$

Se tiene que $sn(x+iy)=0$ si y sólo si simultáneamente $sn(x,k)=0$ y $sn(y,k')=0$, es decir, si y sólo si $x+iy \equiv 0$ (mód $2K$, $2iK'$).

De ese modo quedan identificados todos los ceros de sn, módulo periodos.

El hecho de que los ceros sean simples se sigue de que

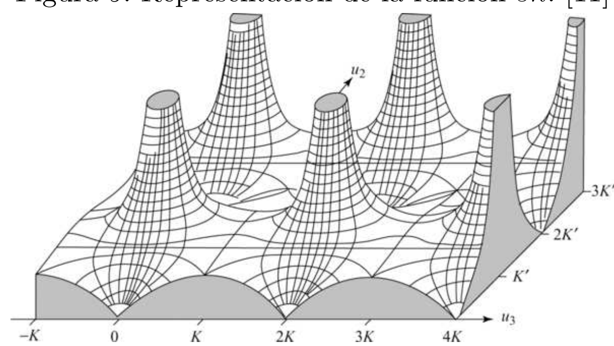
$$\frac{d}{du} sn(u) \mid_{u=0} = cn(0)dn(0) = 1 \neq 0.$$

□

Recapitulando, mostramos a continuación cuáles son los ceros y polos de cada una de las funciones elípticas de Jacobi, y calculamos sus residuos:

∘ La función $sn(u)$:
Tiene ceros simples en los puntos congruentes a cero y $2K$. Los polos son los puntos congruentes a iK' y $2K + iK'$, con resíduos $1/k$ y $-1/k$, respectivamente.

Figura 9: Representación de la función sn. [11]



Dada una función f, el resíduo de un polo a de orden N se puede calcular según la fórmula

$$Res(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z-a)^N f(z)].$$

Aplicando este resultado a nuestra función sn y al polo iK' tenemos que:

$$Res(sn, iK') = \lim_{z \to iK'} (z - iK') sn(z) = \lim_{z \to iK'} \frac{(z - iK')}{ns(z)}.$$

Utilizando L'Hôpital y que $ns(u) = ksn(u + iK')$,nos queda

$$Res(sn, iK') = \lim_{u \to iK'} \frac{1}{kcn(u + iK')dn(u + iK')} = \frac{1}{kcn(2iK')dn(2iK')} = \frac{1}{k}.$$

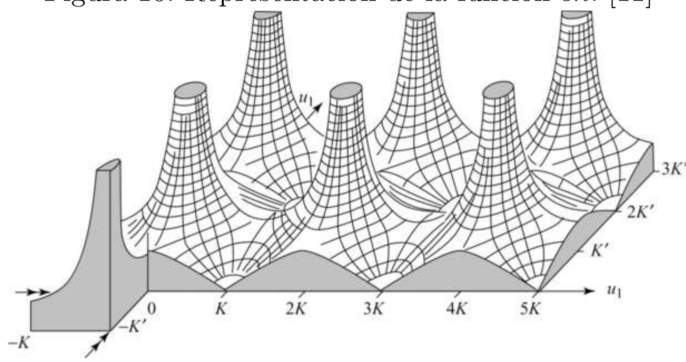
Por otra parte, análogamente

$$Res(sn, 2K + iK') = \lim_{z \to iK'} \frac{(z - 2K - iK')}{ns(z)} =$$

$$= \frac{1}{kcn(2K + 2iK')dn(2K + 2iK')} = -\frac{1}{k}.$$

◦ La función $cn(u)$:
Tiene ceros en los puntos congruentes a K y $-K$, mientras que los polos son los puntos congruentes a iK' y $2K+iK'$, con resíduos i/k y $-i/k$, respectivamente.

Figura 10: Representación de la función cn. [11]



$$Res(cn, iK') = \lim_{z\to iK'} \frac{(z-iK')}{nc(z)}.$$

Usando que

$$[nc(u)]' = [\frac{1}{cn(u)}]' = \frac{-sn(u)dn(u)}{cn^2(u)}$$

nos queda

$$Res(cn, iK') = \lim_{z\to iK'} \frac{-cn^2(z)}{sn(z)dn(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{-(-\frac{i}{k}ds(z))^2}{[\frac{1}{k}ns(z)][-ics(z)]} = \frac{dn^2(0)}{-ikcn(0)} = \frac{i}{k}.$$

Por otra lado, aplicando lo anterior se obtiene:

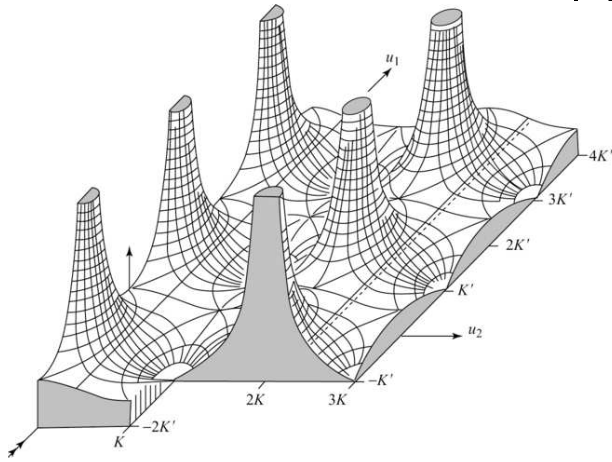
$$Res(cn, 2K+iK') = \lim_{z\to 2K+iK'} \frac{(z-2K-iK')}{nc(z)} = \lim_{z\to 2K+iK'} \frac{-cn^2(z)}{sn(z)dn(z)} =$$

$$= \lim_{z\to K} \frac{-(\frac{ik'}{k}nc(z))^2}{[\frac{1}{k}dc(z)][ik'sc(z)]} = \frac{\frac{ik'}{k}}{\frac{ik'}{k}dn(K)sn(K)} = -\frac{i}{k}.$$

◦ La función $dn(u)$:
Tiene ceros congruentes a $K+iK'$ y $K-iK'$, y polos congruentes a iK' y $-iK'$ con resíduos $-i$ y i, respectivamente.

$$Res(dn, iK') = \lim_{z\to iK'} \frac{(z-iK')}{nd(z)}.$$

Figura 11: Representación de la función dn. [11]



Usando que

$$[nd(u)]' = [\frac{1}{dn(u)}]' = \frac{k^2 sn(u)cn(u)}{dn^2(u)},$$

tenemos

$$Res(dn, iK') = \lim_{u\to 0} \frac{dn^2(u+iK')}{k^2 sn(u+iK')cn(u+iK')} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-(ics(u))^2}{k^2[\frac{1}{k}ns(u)][-\frac{i}{k}ds(u)]} = \lim_{u\to 0} \frac{-(icn(u))^2}{k^2[\frac{1}{k}][-\frac{i}{k}dn(u)]} = -i.$$

Análogamente

$$Res(dn, -iK') = i.$$

2.5. Funciones theta

Como hemos comentado, es posible expresar las funciones elípticas de Jacobi en términos de cocientes de las funciones no elípticas conocidas como *funciones theta*. En este apartado definimos cuatro funciones theta y analizamos brevemente algunas de sus propiedades y la relación de éstas con las funciones elípticas de Jacobi.

Definición. Suponemos, como antes, que τ es una constante compleja cuya parte imaginaria es positiva, y tomamos $q = e^{\pi i \tau}$, con $|q| < 1$. Definimos las funciones theta como:

$$\vartheta_1(z,q) = ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau, q) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z,$$

$$\vartheta_2(z,q) = \vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi, q) = 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z$$

$$\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz,$$

$$\vartheta_4(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n+2nzi+i\pi n^2\tau}.$$

Veamos que, aunque no sean doblemente periódicas, estas funciones tienen características semejantes a las funciones elípticas.
Es sencillo comprobar que

$$\vartheta_4(z+\pi,q) = \vartheta_4(z,q),$$

y por tanto $\vartheta_4(z,q)$ es una función periódica de z con periodo π. Además

$$\vartheta_4(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z,q).$$

Se dice por ello que $\vartheta_4(z,q)$ es una función *casi doblemente periódica*[10]; en efecto, el resultado de incrementar la variable z en π o $\pi\tau$ es el mismo que el de multiplicar $\vartheta_4(z,q)$ por 1 o $-q^{-1}e^{-2iz}$, respectivamente.
Llamamos a 1 y $-q^{-1}e^{-2iz}$ *multiplicadores* asociados a los periodos π y $\pi\tau$, respectivamente.

Es claro que ϑ_3 tiene el mismo periodo y casi-periodo que ϑ_4.
Veamos que ocurre para las otras dos funciones ϑ_1 y ϑ_2. Empezamos por ϑ_1:

$$\vartheta_1(z+\pi,q) = ie^{i(z+\pi)+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\pi+\frac{1}{2}\pi\tau,q) = e^{i\pi}ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau,q) =$$

$$= e^{i\pi}\vartheta_1(z,q) = -\vartheta_1(z,q),$$

$$\vartheta_1(z+\pi\tau) = ie^{i(z+\pi\tau)+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\pi\tau+\frac{1}{2}\pi\tau,q) = e^{i\pi\tau}ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}q^{-1}e^{-2i(z+\frac{\pi\tau}{2})}\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau,q) =$$

$$= e^{i\pi\tau}q^{-1}e^{-2i(z+\frac{\pi\tau}{2})}\vartheta_1(z,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_1(z,q).$$

Por lo tanto ϑ_1 tiene multiplicadores -1 y $q^{-1}e^{-2iz}$ asociados a π y $\pi\tau$ respectivamente.
Lo mismo ocurre para ϑ_2.

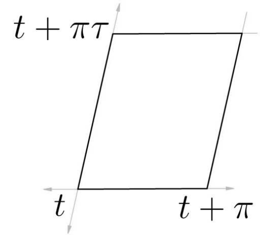
Otra propiedad clara de estas funciones es que $\vartheta_1(z,q)$ es una función impar de z, mientras que $\vartheta_4(z,q)$, $\vartheta_2(z,q)$ y $\vartheta_3(z,q)$ son funciones pares de z.

Del mismo modo que con las funciones elípticas de Jacobi, si no necesitamos enfatizar el parámetro q, podemos simplificar la notación de estas funciones escribiendo $\vartheta_j(z)$ en lugar de $\vartheta_j(z,q)$.
Si, en cambio, deseamos mostrar la dependencia de τ, escribimos $\vartheta_j(z|\tau)$.

Siendo P_t el paralelogramo con vértices en los puntos t, $t+\pi$, $t+\pi\tau$ y $t+\pi+\pi\tau$. Podemos dar el siguiente enunciado:

[10]Una función $h(t)$ es *cuasi-periódica* si $\forall\epsilon>0$ existe un cuasi-periodo $T(\epsilon)$ tal que $h(t+T)-h(t)<\epsilon$

Figura 12: Paralelogramo P_t.



Teorema 10. *La función theta $\vartheta_j(z)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tiene exactamente un cero en cada paralelogramo P_t.*

Demostración. Sabemos que $\vartheta_4(z)$ tiene periodo π y casi periodo $\pi\tau$. Haremos la prueba para ϑ_4, pero nos valdrá también para ϑ_3, ya que tiene el mismo periodo y casi periodo. Para ϑ_1 y ϑ_2 se haría análogo. La función $\vartheta_4(z)$ es analítica en una parte finita del plano complejo, por lo tanto no tendrá polos; así se sigue, por el Principio del Argumento, que el número de ceros en P_t es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{P_t} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz$$

Esta integral se puede escribir como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\pi}^{t+\pi+\pi\tau} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\pi+\pi\tau}^{t+\pi\tau} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\pi\tau}^{t} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz.$$

Como $\vartheta_4(z) = \vartheta_4(z + \pi)$, entonces

$$\int_{t+\pi}^{t+\pi+\pi\tau} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz = \int_t^{t+\pi\tau} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz,$$

y por lo tanto la integral en P_t se reduce a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{P_t} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\pi\tau}^{t+\pi+\pi\tau} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta_4'(z+\pi\tau)}{\vartheta_4(z+\pi\tau)} dz.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{P_t} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} - \frac{\vartheta_4'(z+\pi\tau)}{\vartheta_4(z+\pi\tau)} dz$$

Sabemos que

$$\vartheta_4(z + \pi\tau, q) = q^{-1} e^{-2iz} \vartheta_4(z, q),$$

derivando a ambos lados de la igualdad nos queda

$$\vartheta_4'(z + \pi\tau, q) = q^{-1} e^{-2iz} \vartheta_4'(z, q) - 2iq^{-1} e^{-2iz} \vartheta_4(z, q).$$

Por lo tanto
$$\frac{\vartheta_4'(z+\pi\tau)}{\vartheta_4(z+\pi\tau)} = \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} - 2i;$$
Así podemos concluir que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{P_t}\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2idz = 1.$$
Por lo tanto, $\vartheta_4(z)$ tiene exactamente un cero simple en P_t.

□

Fijémonos que un cero de $\vartheta_1(z)$ está en $z=0$, por ser $\sin 0 = 0$. Utilizando que
$$\vartheta_2(z) = \vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi), \quad \vartheta_1(z) = ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau), \quad \vartheta_3(z) = \vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi)$$
se sigue que los ceros de $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ y $\vartheta_4(z)$ son los puntos congruentes a $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$ y $\frac{1}{2}\pi\tau$, respectivamente. Por lo tanto, los ceros en el paralelogramo P_t de ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 y ϑ_4 son, respectivamente, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi+\pi\tau}{2}$ y $\frac{\pi\tau}{2}$.

Teniendo esto en cuenta, podemos expresar las funciones theta de un modo alternativo, factórizandolas a través del conjunto de sus ceros.
Si $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$, se obtienen las siguientes factorizaciones de tipo Weierstrass:
$$\vartheta_1(z|\tau) = 2Gq^{1/4}sin(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}cos(2z)+q^{4n}),$$
$$\vartheta_2(z|\tau) = 2Gq^{1/4}cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}cos(2z)+q^{4n}),$$
$$\vartheta_3(z|\tau) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}cos(2z)+q^{4n-2}),$$
$$\vartheta_4(z|\tau) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}cos(2z)+q^{4n-2}).$$
Cada una de estas identidades puede probarse observando que la funciones
$$\vartheta_1(z|\tau)/(sin(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}cos(2z)+q^{4n})),$$
$$\vartheta_2(z|\tau/(cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}cos(2z)+q^{4n})),$$

$$\vartheta_3(z|\tau)/(\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}cos(2z)+q^{4n-2})),$$

$$\vartheta_4(z|\tau)/\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}cos(2z)+q^{4n-2})$$

son enteras y doblemente periódicas y, como consecuencia del Teorema de Liouville, constantes. [10, 12]

Podemos ahora mostrar la relación existente entre las funciones θ y las funciones elípticas de Jacobi:

Teorema 11. *Las funciones elípticas de Jacobi se expresan en términos de las funciones theta de la siguiente manera:*

$$sn(u,k)=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))},$$

$$cn(u,k)=\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_2(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))},$$

$$dn(u,k)=\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))},$$

donde

$$u=z\vartheta_3^2(0), \qquad k=\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0).$$

Demostración. La identidad es consecuencia del teorema de Liouville. La demostración general se seguiría de la siguiente manera:
Si f es la función elíptica de Jacobi, y g la función en términos de las funciones theta que aparece en el enunciado. Como f y g tienen los mismos ceros y polos, y ambas son doblemente periódicas, la función $\frac{f}{g}$ es doblemente periódica.
Además $\frac{f}{g}$ es entera, pues f y g tienen los mismos ceros y polos y en consecuencia las singularidades de $\frac{f}{g}$ son evitables. Por lo tanto, por el teorema de Liouville $\frac{f}{g}=C$, C constante, es decir $f=Cg$.

Observando ahora el valor de ambas funciones en cero, se deduce que $C=1$ y por lo tanto $f=g$. [7]

$\square$

Nota. Como tenemos factores en la variable $u/\vartheta_3^2(0)$, podemos considerar también la función

$$\Theta(u)=\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0)|\tau)$$

Se trata de la notación original de Jacobi, y sustituye a la función $\vartheta_4(z)$. El periodo y casi-periodo asociados con estas funciones son $2K$ y $2iK'$. La función $\Theta(u+K)$ sustituye así a $\vartheta_3(z)$, y en lugar de $\vartheta_1(z)$ usamos la *función eta*, la cual se define como:

$$H(u) = -iq^{-\frac{1}{4}} e^{i\pi u/2K} \Theta(u + iK') = \vartheta_1(u/\vartheta_3^2|\tau).$$

Así, en lugar de $\vartheta_2(z)$, tenemos aquí $H(u + K)$.

Nota. Las funciones theta aparecen en la solución de la ecuación del calor. En efecto, consideremos las funciones $\vartheta_j(z|\tau), j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y tomemos $t = -i\tau$. Es fácil ver que $y = \vartheta_j(z|\tau)$ satisface la *ecuación del calor:*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}.$$

Nota. Existen muchas funciones y notaciones ligadas a las llamadas funciones theta de Jacobi. Además de las funciones ϑ_j que hemos analizado, existe una conocida como la función theta de Jacobi que viene dada por

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n z}, \quad Im(\tau) > 0, \; z \in \mathbb{C}$$

Esta función, igual que las que hemos estudiado, es casi doblemente periódica de manera que cumple:

$$\vartheta(z + 1, \tau) = \vartheta(z, \tau) \quad y \quad \vartheta(z + \tau, \tau) = e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \vartheta(z, \tau)$$

y además tiene ceros en todos los puntos del retículo $\{m + \frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2})\tau\}$. [4]

3. La función $\wp$ de Weierstrass

En este capítulo se estudia la función elíptica $\wp$ de Weierstrass. El estudio que realizó Weierstrass sobre las funciones elípticas está enfocado desde el estudio de sus polos. Esta parte del trabajo está dedicada, por lo tanto, a dar ejemplos de una función elíptica desde dicho enfoque. Como ya hemos visto, cualquier función elíptica debe tener al menos dos polos; construiremos una función cuya única singularidad sea un polo doble en los puntos del retículo generado por los periodos.

3.1. Introducción histórica

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) fue un matemático alemán que hizo grandes avances en varios campos del análisis matemático, dio definiciones rigurosas que se siguen utilizando hoy en día y realizó la demostración completa de numerosos teoremas, algunos de los cuales llevan su nombre. Es por ello que se le conoce como "el padre del análisis moderno".
El inicio de esta pasión por las matemáticas y la decisión de dedicarse a ellas vino de la lectura de varios trabajos sobre funciones e integrales elípticas, entre ellos el tratado de Jacobi, pero sobre todo influyeron en él los estudios de Niels Henrik Abel.
Trabajo como docente de matemáticas, física y botánia. Su primer escrito importante, publicado en 1841, fue un ensayo sobre funciones elípticas, y consiguió en 1854 el título de doctor *honoris causa* en reconocimiento a sus estudios sobre las funciones abelianas: *Zur Theorie der Abelschen Functionen.* [13]

Figura 13: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

En el estudio de las funciones elípticas, se utiliza mucho la notación creada por Karl Weierstrass basada en la función elíptica $\wp$. Esta notación es cómoda y más sencilla que la de Jacobi y permite, además, expresar cualquier función elíptica a partir de $\wp$.

3.2. Función de Weierstrass

La función que Weierstrass definió, $\wp$, es una función elíptica y, por tanto, doblemente periódica que permite construir cualquier función elíptica a partir de ella.
Antes de estudiar el caso de las funciones doblemente periódicas, consideraremos primero brevemente las funciones con sólo un periodo simple.

Construcción de funciones con un periodo simple

Si quisieramos construir una función con periodo 1 y polos en todos los enteros, una elección simple sería la suma

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

pues se mantiene invariante si reemplazamos z por $z+1$, y tiene polos en los enteros n. Sin embargo, no es una serie absolutamente convergente. Para resolverlo podemos expresar la función $F(z)$ como:

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{-n} \right),$$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

donde la suma se toma sobre todos los enteros excepto el cero. Como la nueva expresión cumple que

$$\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \mathcal{O}(1/n^2),$$

la serie es absolutamente convergente.
Como consecuencia, F es meromorfa con polos precisamente en los enteros. [4]

Construcción de funciones elípticas

Veamos ahora como imitar el desarrollo anterior para construir una función elíptica. Para ello, en este caso utilizamos un sumatorio análogo sobre el conjunto $\Lambda = n + m\tau \ : \ n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

donde $\Lambda^* = \Lambda - (0,0)$.
Igual que antes, la segunda expresión hace que el término del sumatorio cumpla

$$\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{-z^2 - 2z\omega}{(z+\omega)^2\omega^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right).$$

Por lo tanto, como se prueba en el siguiente lema, la serie es absolutamente convergente, y en consecuencia se define una función meromorfa con los polos en Λ.

Nota. Escribiremos $x \lesssim y$ si existe una constante positiva a tal que $x \leq ay$. Si se cumple tanto $x \lesssim y$ como $y \lesssim x$, escribimos $x \approx y$.

Lema 3. *Las dos series*

$$\sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} \qquad y \qquad \sum_{n+m\tau\in\Lambda^*} \frac{1}{|n+m\tau|^r}$$

convergen si $r > 2$.

Demostración. Hacemos la prueba de forma independiente para cada serie:

∘ Primera serie:
En esta serie, para cada $n \neq 0$, se tiene:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} = \frac{1}{|n|^r} + 2\sum_{m\geq 1} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} =$$

$$= \frac{1}{|n|^r} + 2\sum_{k\geq|n|+1} \frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{|n|^r} + 2\int_{|n|}^{\infty} \frac{dx}{x^r} \leq \frac{1}{|n|^r} + C\frac{1}{|n|^{r-1}}$$

Por lo tanto, si $r > 2$, se cumple:

$$\sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} = \sum_{|m|\neq 0} \frac{1}{|m|^r} + \sum_{|n|\neq 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} \leq$$

$$\leq \sum_{|m|\neq 0} \frac{1}{|m|^r} + \sum_{|m|\neq 0} \frac{1}{|m|^r} + \sum_{|n|\neq 0} \left(frac1|n|^r + C\frac{1}{|n|^{r-1}}\right) < \infty.$$

∘ Segunda serie:
Para probar que esta serie también converge, es suficiente ver que hay una constante c tal que

$$|n| + |m| \leq c|n+m\tau|, \qquad \forall n,m \in \mathbb{Z}.$$

Veamos que para cualesquiera dos números positivos A y B, se tiene

$$(A^2+B^2)^{1/2} \approx A + B$$

Por un lado $A \leq (A^2+B^2)^{1/2}$ y $B \leq (A^2+B^2)^{1/2}$, así que $A+B \leq 2(A^2+B^2)^{1/2}$. Por otro lado, es suficiente elevar al cuadrado ambos lados para ver que $(A^2+B^2)^{1/2} \leq A+B$. La prueba de que la segunda serie del lema converge es una consecuencia de la siguiente observación:

$$|n| + |m| \approx |n + m\tau| \quad \forall \tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

En efecto, si $\tau = s + it$ con $s, t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, entonces por la observación previa:

$$|n + m\tau| = |(n+ms)^2 + (mt)^2|^{1/2} \approx |n + ms| + |mt| \approx |n + ms| + |m|$$

Por lo tanto $|n + ms| + |m| \approx |n| + |m|$.

$\square$

Nota. La prueba anterior muestra que cuando $r > 2$, la serie $\sum |n + m\tau|^{-r}$ converge uniformemente en el semiplano $Im(\tau) > 0$. En cambio, para $r = 0$, esta serie no converge. [4]

Función $\wp$

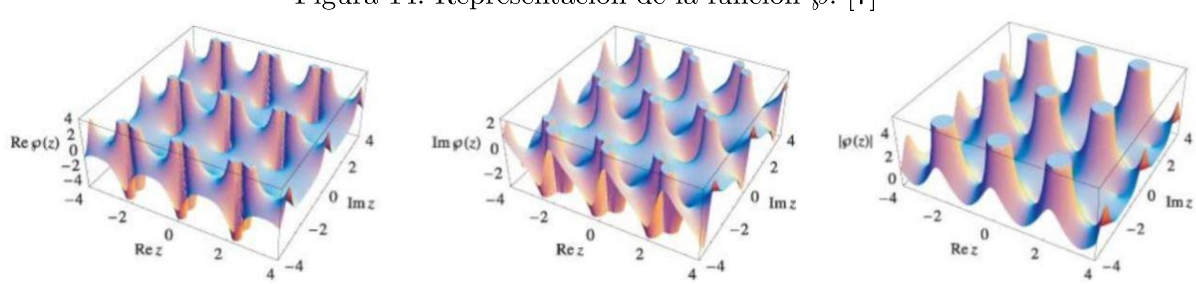
Definimos la función de Weierstrass $\wp$ como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z+n+m\tau)^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2} \right).$$

Por los resultados anteriores, tenemos que la función $\wp$ es una función meromorfa y además, por la propia definición de la función, es claro que tiene polos dobles en los puntos del retículo. [4]

Figura 14: Representación de la función $\wp$. [7]



3.3. Propiedades de $\wp$

Por la propia definición de $\wp$, podemos dar dos propiedades claras:

- $\wp$ es par, es decir, que $\wp(z) = \wp(-z)$, ya que el sumatorio sobre $\omega \in \Lambda$ puede ser reemplazado por el sumatorio sobre $-\omega \in \Lambda$.
- $\wp$ tiene polos dobles en los puntos del retículo.

Mostramos a continuación otras propiedades de la función de Weierstrass no tan evidentes: su doble periodicidad, su fórmula de adición y la universalidad de $\wp$ que permite expresar toda función elíptica en función de si misma y su derivada.

Periodicidad

Teorema 12. *La función $\wp$ es una función elíptica que tiene periodos 1 y τ.*

Demostración. Para demostrarlo, por facilidad, veremos primero que la derivada de $\wp$ es periódica. Es fácil obtener $\wp'$ derivando la función término a término, así

$$\wp'(z) = -2 \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n+m\tau)^3}.$$

Es evidente, por el *Lema 3* que $\wp'$ converge absolutamente cuando z no es un punto del retículo, ya que $r = 3 \geq 2$.
También es claro, que la derivada de $\wp$ tiene periodos 1 y τ, ya que permanece sin cambios después de reemplazar z por $z+1$ o $z+\tau$. Por lo tanto, existen dos contantes a y b tales que

$$\wp(z+1) = \wp(z) + a \qquad y \qquad \wp(z+\tau) = \wp(z) + b, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por ser $\wp$ par se cumple que $\wp(-1/2) = \wp(1/2)$ y $\wp(-\tau/2) = \wp(\tau/2)$; tomando $z = -1/2$ y $z = -\tau/2$ en las expresiones anteriores, comprobamos que $a = b = 0$ y por lo tanto, 1 y τ son periodos de $\wp$. [4]

□

Derivada

Hemos visto en el punto anterior la definición de la derivada, wp', como

$$\wp'(z) = -2 \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n+m\tau)^3}.$$

Veamos ahora algunas observaciones sobre esta.

Hemos visto que la función $\wp$ es par, por lo tanto su derivada $\wp'$ es impar. Además hemos probado que $\wp'$ es también periódica con periodos 1 y τ. En consecuencia, se cumple

$$\wp'(1/2) = \wp'(\tau/2) = \wp'(\frac{1+\tau}{2})$$

Veamos ahora que además todos estos términos se igual también a cero. Para ello utilizamos que $\wp'$ es impar y tiene periodos 1 y τ:

$$\wp'(1/2) = -\wp'(-1/2) = -\wp'(-1/2+1) = -\wp(1/2),$$

$$\wp'(\tau/2) = -\wp'(-\tau/2) = -\wp'(-\tau/2+\tau) = -\wp(\tau/2),$$

$$\wp'((1+\tau)/2) = -\wp'(-(1+\tau)/2) = -\wp'(-(1+\tau)/2+(1+\tau)) = -\wp((1+\tau)/2)$$

$$\Rightarrow \wp'(1/2) = \wp'(\tau/2) = \wp'(\frac{1+\tau}{2}) = 0$$

Por ser $\wp'$ una función de orden tres, estos tres puntos son los únicos ceros de la función en el paralelogramo fundamental y tienen multiplicidad 1.

Definimos las constantes:

$$e_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\right), \qquad e_2 = \wp\left(\frac{\tau}{2}\right), \qquad y \qquad e_3 = \wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right).$$

Por ser $\wp$ una función elíptica de orden 2, se sigue que las ecuaciones $\wp(z) = e_1$, $\wp(z) = e_2$ y $\wp(z) = e_3$ tienen, cada una, dos soluciones el el paralelogramo P_0, y estas son:

- $\wp(z) = e_1$ tiene una raíz doble en $1/2$,
- $\wp(z) = e_2$ tiene una raíz doble en $\tau/2$,
- $\wp(z) = e_3$ tiene una raíz doble en $(1+\tau)/2$,

Además estas tres constantes e_1, e_2 y e_3 son distintas entre sí, pues si no fuera así, la función $\wp$ debería ser de un orden superior a 2.

Gracias a estas observaciones, podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 13. *La función* $(\wp')^2$ *es el polinomio cúbico en* $\wp$

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Demostración. Sea $F(z) = (\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$, fijémonos que $F(z)$ y $(\wp')^2$ tienen:

- Los mismos ceros con mismas multiplicidades:
  Los únicos ceros de $F(z)$ en P_0 tienen multiplicidad 2 y están en los puntos $1/2$, $\tau/2$ y $(1+\tau)/2$.
  $(\wp')^2$ tiene raíces dobles en esos puntos.

- Los mismos polos con mismas multiplicidades:
  F tiene polos de orden 6 en los puntos del retículo, y lo mismo ocurre con $(\wp')^2$ (porque $\wp'$ tiene polos de orden 3 en esos puntos).

Por lo tanto $(\wp')^2/F$ no tiene polos ni ceros, es decir, es una función holomorfa e igualmente doblemente periódica; por lo tanto, aplicando el Teorema de Liouville, este cociente resultante es una funcion constante: $(\wp')^2/F = C$.
Para encontrar el valor de esta constante, notamos que para z cerca de 0, tenemos:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \cdots, \qquad \wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \cdots, \qquad (\wp')^2 = \frac{4}{z^6} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior. Cómo

$$(\wp')^2(z) = CF(z) = C\left(\frac{1}{z^6} + \cdots\right)$$

entonces $C = 4$ y, por lo tanto, $(\wp')^2 = 4F(z) = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$ como queríamos probar [4].

$\square$

Fórmula de adición

Igual que las funciones elípticas de Jacobi, la función $\wp$ de Weierstrass tiene también una fórmula para la adición. A continuaicón vemos y probamos dicha fórmula.

Teorema 14. *La fórmula para la suma de $\wp$ se calcula mediante el determinante:*

$$\begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp(u) & 1 \\ \wp'(v) & \wp(v) & 1 \\ -\wp'(u+v) & -\wp(u+v) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración. Para probarlo tomamos dos contantes c_1 y c_2, tales que se cumplan las ecuaciones

$$\wp'(u) = c_1\wp(u) + c_2 \;\; y \;\; \wp'(v) = c_1\wp(v) + c_2$$

De esta manera, la función $f(z) = \wp'(z) - c_1\wp(z) - c_2$ tiene un polo triple en $z = 0$ y por lo tanto, tiene tres ceros. Por la forma en que hemos definido c_1 y c_2, estos ceros se encuentran en $z = u$, $z = v$ y $z = -u - v$.
Los dos primeros ceros están relacionados con las dos ecuaciones anteriores. El cero $z = -u - v$ tiene como consecuencia la ecuación

$$\wp'(-u-v) = c_1\wp(-u-v) + c_2.$$

Como $\wp$ es par y $\wp'$ es impar, aplicando estas simetrías a la ecuación anterior obtenemos

$$-\wp'(u+v) = c_1\wp(u+v) + c_2$$

El resultado se sigue de las tres igualdades obtenidas:

$$\wp'(u) = c_1\wp(u) + c_2$$
$$\wp'(v) = c_1\wp(v) + c_2$$
$$-\wp'(u+v) = c_1\wp(u+v) + c_2$$

Basta con fijarse en las columnas del determinante y de las igualdades anteriores. [7]
□

Universalidad

Por último probaremos la universalidad de $\wp$ demostrando que cualquier función elíptica es una función racional de $\wp$ y $\wp'$.
Para ello, probamos primero que esto es cierto para cualquier función elíptica par.

Lema 4. *Toda función elíptica par F con periodos 1 y τ es una función racional de $\wp$.*

Demostración. Por ser F par, si tiene un cero o polo en el origen será de orden par. Como consecuencia, existe un entero m de modo que se cumpla que la función $F(z)(\wp(z))^m$ no tiene ceros o polos en los puntos del retículo. Por lo tanto, por ser $\wp$ también par con periodos 1 y τ, podemos asumir sin pérdida de generalidad que F no tiene polos o ceros en Λ.

Sea $\{a_1, -a_1, \dots, a_m, -a_m\}$ el conjunto de los ceros de la función F y $\{b_1, -b_1, \dots, b_m, -b_m\}$ el conjunto de sus polos, vamos a utilizar la función $\wp$ para construir una función doblemente periódica G que tenga los mismos ceros y polos que F. Veamos como se construye para los ceros, y los polos se seguirían de forma análoga.
Sea a uno de los ceros, sabemos que $\wp(z) - \wp(a)$ tiene dos ceros contados según sus multiplicidades:

- Un cero de orden 2 si a es un medio periodo.
- Dos ceros distintos en a y $-a$, por ser $\wp$ par, si a no es un medio periodo.

Por lo tanto, la función

$$[\wp(z) - \wp(a_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(a_m)]$$

tiene exactamente los mismos ceros que F.

Para los polos, actuando del mismo modo, tenemos que la función

$$[\wp(z) - \wp(b_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(b_m)]$$

tiene los mismos polos que F y por lo tanto:

$$G(z) = \frac{[\wp(z) - \wp(a_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(a_m)]}{[\wp(z) - \wp(b_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(b_m)]}$$

tiene los mismos ceros y polos que F y, además, es periódica por serlo $\wp$.

Así pues, F/G es holomorfa en $\mathbb{C}$ (entera) y doblemente periódica, y por lo tanto, por el teorema de Liouville, F/G es constante.

$\square$

Como consecuencia de este lema, podemos demostrar ya el caso general:

Teorema 15. *Toda función elíptica f con periodos 1 y τ es una función racional de $\wp$ y $\wp'$.*

Demostración. Para probar este resultado, escribimos la función f como

$$f(z) = f_{par}(z) + f_{impar}(z),$$

donde

$$f_{par}(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \qquad f_{impar}(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $\wp$ es una función par y su derivada $\wp'$ es impar, tenemos que el cociente $f_{impar}/\wp'$ es par. Por lo tanto, ahora podemos aplicar el *Lema 4* a las funciones f_{par} y $f_{impar}/\wp'$, de manera que f es una función racional de $\wp$ y $\wp'$ como queríamos probar. [4]

$\square$

3.4. Las series de Eisenstein

La *serie de Eisenstein* de orden k está definida como

$$E_k(\tau) = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n + m\tau)^k},$$

para cualquier k entero, $k \geq 3$, y $\tau \in \mathbb{C}$ con $Im(\tau) > 0$.
Teniendo en cuenta la definición del retículo Λ, otra forma de expresar la serie de Eisenstein es

$$E_k = \sum_{\omega\in\Lambda^*} \frac{1}{\omega^k}.$$

Veamos algunas de las propiedades de estas series y como definir la función $\wp$ de Wierstrass y su derivada a partir de estas series.

Teorema 16. *Las series de Eisenstein tienen las siguientes propiedades:*

- *$E_k(\tau)$ converge si $k \geq 3$.*

- $E_k(\tau)$ *es holomorfa en el semiplano superior.*
- $E_k(\tau) = 0$ *si* k *es impar.*
- $E_k(\tau+1) = E_k(\tau)$, $E_k(\tau) = \tau^{-k}E_k(-1/\tau)$[11]

[12]

Demostración. La primera propiedad es evidente de la condición $k \geq 3$: como hemos visto en el *Lema 3*, la serie $E_k(\tau)$ converge absolutamente y uniformemente en todo el semiplano $Im(\tau) \geq \delta > 0$, siempre que $k \geq 3$.
La segunda propiedad se sigue de la primera. Por ser $E_k(\tau)$ absolutamente y uniformemente convergente, también es holomorfa en el semiplano superior $Im(\tau) > 0$.

Por la simetría, al sustituir n y m por $-n$ y $-m$, vemos que cuando k es impar, los términos opuestos se suprimen dos a dos y por lo tanto, la serie de Eisenstein suma cero.

Por último, veamos las dos igualdades dadas:

- El hecho de que $E_k(\tau+1) = E_k(\tau)$, es decir, que $E_k(\tau)$ es periódica de periodo 1, viene de la posibilidad de reordenar los términos de la suma, de forma que la suma se queda igual si en $n + m(\tau+1) = n + m + m\tau$ sustituimos $n+m$ por n.
- Para probar que $(n + m(-1/\tau))^k = \tau^{-k}(n\tau - m)^k$, podemos volver a reescribir la suma, esta vez reemplazando $(-m, n)$ por (n, m).

$\square$

Para ver la relación de E_k con la función de Weierstrass $\wp$ necesitamos investigar el desarrollo en serie de $\wp$ cerca del origen 0. Lo vemos en el siguiente teorema.

Teorema 17. *Para* z *en un entorno de* 0*, se cumple*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3E_4z^2 + 5E_6z^4 + \ldots = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)E_{2k+2}z^{2k}.$$

Demostración. Empezamos esta demostración aplicando a la definición de $\wp$ la sustitución ω por $-\omega$ de forma que la suma no cambia:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right),$$

Por otro lado, veamos ahora la siguiente identidad. Aplicando el desarrollo en serie a $\frac{1}{1-\omega}$ tenemos:

$$\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n$$

[11]Esta propiedad se conoce a veces como el caracter *modular* de la serie de Eisenstein.

Derivando, nos queda

$$\frac{1}{(1-\omega)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\omega^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\omega^n$$

Aplicando este desarrollo a $frac1z - \omega$ tenemos:

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n.$$

Por lo tanto, si utilizamos esta igualdad en la definición que habíamos desarrollado de $\wp$ nos queda:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^{n+2}}\right)z^n =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)E_{n+2}z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)E_{2n+2}z^{2n},$$

donde hemos aplicado la tercera propiedad vista en la proposición previa, donde la serie de Eisenstin suma cero para subíndices impares.

□

A partir de el resultado obtenido en este teorema, si aplicamos la derivada para z próximo a 0 sucesivas veces obtenemos:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6E_4 z + 20E_6 z^3 + \ldots,$$

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24E_4}{z^2} - 80E_6 + \ldots,$$

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9E_4}{z^2} + 15E_6 + \ldots.$$

Por lo tanto la diferencia

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 60E_4\wp(z)$$

es holomorfa en un entorno de 0.
Si tomamos

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 60E_4\wp(z) + 140E_6$$

es holomorfa en un entorno de 0 y además igual a 0 en el origen. Como $\wp$ y $\wp'$ son periódicas, la expresión dada por la diferencia de estas también es periódica y, por lo tanto, aplicando de nuevo el Teorema de Liouville, tenemos que dicha difernencia es constante y, en consecuencia, igual a 0. [4]

Podemos enunciar, por lo tanto, el siguiente corolario:

Corolario 1. *Si* $g_2 = 60E_4$ *y* $g_3 = 140E_6$, *entonces*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

3.5. Las funciones zeta y sigma de Weierstrass

Asociadas a la función $\wp$ y al retículo Λ, se definen las siguientes funciones:

- Función sigma de Weierstrass

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda^*} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}$$

- Función zeta de Weierstrass

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{z - w} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

Ésta última, también puede expresarse como

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k+2} z^{2k+1}$$

y es la derivada logarítmica de la función sigma, es decir, $\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$. Además se cumple que $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

Nota. Considerando la función $\wp(z) - \wp(v)$. Esta función tiene un polo doble en $z = 0$ y ceros en $z = \pm v$. Ya que el número de ceros de una función elíptica es igual al número de polos, se sigue que estos ceros son simples y son los únicos ceros de la función. Así, tenemos

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u - v)\sigma(u + v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$$

Tomando derivadas logarítmicas con respecto a u se obtiene

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta(u).$$

3.6. Conexión con las funciones Theta

Veamos ahora la relación que hay entre la función de Weierstrass y las funciones Theta que mencionamos en el capítulo anterior.
Si escribimos

$$y = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sn^2(\lambda u)} = e_3 + (e_1 - e_3)ns^2(\lambda u),$$

entonces, aplicando la parcial sobre u en ambos lados,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -2(e_1 - e_3)ns^3(\lambda u)\lambda cn(\lambda u)dn(\lambda u)$$

Teniendo en cuenta que sn es par, y por lo tanto ns también, nos queda:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -2(e_1 - e_3)ns(\lambda u)\lambda cs(\lambda u)ds(\lambda u).$$

Así

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = 4(e_1-e_3)^2\lambda^2 ns^2(\lambda u)cs^2(\lambda u)ds^2(\lambda u) = 4(e_1-e_3)^2\lambda^2 ns^2(\lambda u)\left(ns^2(\lambda u) - 1\right)\left(ns^2(\lambda u) - k^2\right).$$

Por lo tanto, si tomamos $\lambda^2 = e_1 - e_3$ y $k^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$, podemos reducir la anterior ecuación y se cumple que:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3).$$

Observemos que la segunda parte de la igualdad ya la hemos visto anteriormente en el *Teorema 13*, donde se prueba que $\wp(u)$ cumple la misma función que y, por lo tanto:

$$y = e_3 + (e_1 - e_3)ns^2(u\sqrt{e_1 - e_3}) = \wp(u + A),$$

para alguna constante A.
Cuando u tiende a cero, A es un periodo, por lo tanto, $A = 0$ y así

$$\wp(u) = e_3 + (e_1 - e_3)ns^2(u\sqrt{e_1 - e_3}, k),$$

donde el módulo está dado por $k^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$.

Podemos expresar $\wp(z)$ en términos de las funciones Theta de la siguiente manera:

$$\wp(z) = e_1 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_2(0)}\right)^2 = e_2 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_3(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_3(0)}\right)^2 = e_3 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_4(0)}\right)^2.$$

Estas igualdades se deben a la doble periodicidad de los cocientes de las funciones Theta: $\vartheta_2^2(z)/\vartheta_1^2(z)$, $\vartheta_3^2(z)/\vartheta_1^2(z)$ y $\vartheta_4^2(z)/\vartheta_1^2(z)$, y de que estas funciones, como vimos en el capítulo anterior, *Teorema 10*, sólo tienen un único polo de orden 2 dentro de cada

paralelogramo periódico. Veámoslo:
Recordemos que $\wp(z) - e_1$, $\wp(z) - e_2$ y $\wp(z) - e_3$ tienen ceros dobles en $1/2$, $\tau/2$ y $(1+\tau)/2$ respectivamente, al igual que igual que las funciones ϑ_2, ϑ_3 y ϑ_4.
Sabemos además que $\wp$ tiene un polo doble en 0, y en el otro lado de la igualdad también aparece un polo doble, pues $\vartheta_1(0) = 0, \vartheta_1'(0) \neq 0$.
Por lo tanto podemos volver a aplicar el Teorema de Liouville, de modo que los cocientes

$$(\wp(z)-e_1)/\left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_2(0)}\right)^2, \ (\wp(z)-e_2)/\left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_3(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_3(0)}\right)^2, \ (\wp(z)-e_3)/\left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_4(0)}\right)^2.$$

son funciones constantes a 1 por ser todas ellos funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, es decir, enteras, y doblemente periódicas. [7]

4. Aplicaciones de las funciones elípticas de Jacobi

4.1. Introducción

Mostramos en este capítulo como las funciones elípticas de Jacobi se aplican para estudiar otros campos como la física o la geometría. En este trabajo mostramos algunos ejemplos de estas aplicaciones que se enfocan en el estudio del movimiento de un péndulo y la teoría de números.

4.2. El péndulo de Greenhill.

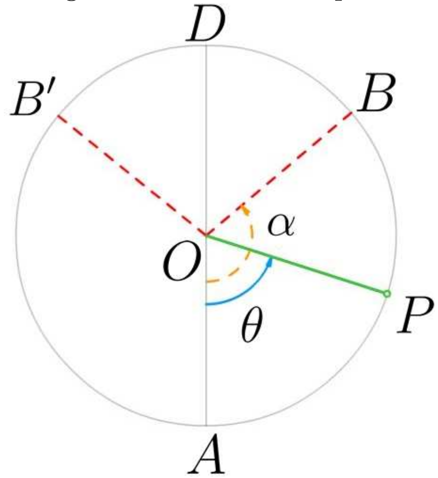
En esta sección veremos que el movimiento que describe un péndulo está íntimamente relacionado con las funciones elípticas, y se mostrará como obtener las funciones de Jacobi a partir de este movimiento. Las funciones elípticas están tan relacionadas con el péndulo, que mediante el estudio de éste comprobaremos también algunas de sus propiedades.
Sir Alfred George Greenhill (1847-1927, Londres) estaba obsesionado con los péndulos y afirmaba que la determinación de su movimiento introduce las funciones elípticas de tal manera que se podía realizar un estudio de éstas y de sus propiedades a partir de su aplicación en este problema.

Un *péndulo simple* consiste en una partícula suspendida por un cable ligero que se mueve en un plano vertical bajo la única fuerza de la gravedad. El intervalo de tiempo para cada oscilación, su periodo, es constante.

El péndulo simple

Consideramos un péndulo simple P oscilando sobre un eje horizontal OA, como se ve en la siguiente Figura 15.
Vamos a desarrollar la ecuación del movimiento de las leyes de Newton para expresar la velocidad angular como una integral de Legendre. A partir de ese punto, veremos como se pueden definir las funciones elípticas de Jacobi en función del movimiento de este péndulo P.

Figura 15: Péndulo simple.



Suponemos que la partícula del péndulo tiene peso m, y por lo tanto sobre ella está actuando una fuerza gravitacional mg.
Suponemos que inicialmente, en el instante $t = 0$, el péndulo está en posición vertical. Denotamos θ el ángulo que forma el péndulo en un instante de tiempo $t = 0$ respecto a la posición inicial, es decir, el ángulo que forma OP con OA. Entonces la componente tangencial de la fuerza es $mg \sin\theta$. Por lo tanto, se deduce de las leyes de Newton que la ecuación de movimiento del péndulo es

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta),$$

donde $\ddot{\theta}$ es la segunda derivada de θ con respecto al tiempo t y l es la longitud de la varilla del péndulo. Así se tiene

$$l\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad l\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta}\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + gl(1-\cos\theta)\right) = 0.$$

Luego

$$\frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + gl(1-\cos\theta)$$

es una función constante.
Supongamos que el ángulo de una oscilación entre B y B', 2α, es grande. Se sigue que $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = \alpha$; como es una función constante:

$$\frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + gl(1-\cos(\frac{1}{2}\theta)) = gl(1-\cos(\frac{1}{2}\alpha)).$$

Teniendo en cuenta que $1-\cos(x) = 1-2\cos^2(\frac{x}{2}) = 2sin^2(\frac{x}{2})$, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + gl2sin^2(\frac{1}{2}\theta) = gl2sin^2(\frac{1}{2}\alpha)$$

si tomamos $g/l = \omega^2$, donde ω es la velocidad angular, y despejamos $\dot{\theta}^2$:

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2(\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\theta)).$$

Así, asilando ω, obtenemos:

$$\omega = \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\theta)}}.$$

Integrando obtenemos

$$\omega t = \int_0^\theta \frac{d\frac{1}{2}\theta'}{\sqrt{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\theta')}}.$$

Se trata de una integral elíptica de Legendre de primera especie, aunque no está escrita en la forma estándar. Para comprobar que, efectivamente, esta es una integral de Legendre de primera especie, realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\sin(\frac{1}{2}\theta) = \sin(\frac{1}{2}\alpha)\sin(\varphi).$$

Aplicando este cambio a la diferencia del denominador, nos queda:

$$\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\theta) = \sin^2(\frac{1}{2}\alpha)(1 - \sin^2(\varphi)) = \sin^2(\frac{1}{2}\alpha)\cos^2(\varphi).$$

Derivamos ahora en los dos extremos de la igualdad para obtener el valor de $d\frac{1}{2}\theta$:

$$-2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)d\frac{1}{2}\theta = -2\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi.$$

$$d\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\varphi)d\varphi}{\cos(\frac{1}{2}\theta)}.$$

Haciendo el cambio $\cos(\frac{1}{2}\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{1}{2}\theta)} = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{1}{2}\alpha)\sin^2(\varphi)}$, nos queda:

$$d\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{1}{2}\alpha)\sin^2(\varphi)}},$$

y de esto se sigue que

$$\omega t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{1}{2}\alpha)\sin^2(\varphi')}}.$$

Ahora, si sustituimos $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$ por k, obtenemos la forma estándar integral elíptica de Legendre de primera especie:

$$F(\varphi|k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\varphi')}},$$

donde $k = AD/AB$ es el módulo y φ la amplitud.

Por lo tanto, otra forma en la que podríamos haber definido las funciones elípticas de Jacobi es:

$$sn(\omega t) = \sin(\varphi), \qquad cn(\omega t) = \cos(\varphi), \qquad \omega dn(\omega t) = \dot{\varphi}.$$

El periodo del péndulo

Definimos para las funciones elípticas el cuarto del periodo K. Veamos ahora la relación de éste con la oscilación del péndulo.

El péndulo realiza oscilaciones entre B y B' con intervalos de tiempo idénticos. Por lo tanto, la función del movimiento del péndulo tiene un periodo, al que llamamos T, que es el tiempo que tarda el péndulo en oscilar entre B y B' y volver a B.
La cuarta parte del periodo $\frac{1}{4}T$ es el tiempo que tarda P en moverse desde A hasta B. Cuando t aumenta de cero a $\frac{1}{4}T$, θ crece de cero a α (altura máxima), y φ de cero a $\frac{1}{2}\pi$, así que ωt aumenta de cero a K, donde K es la integral elíptica completa de primera especie, definida por

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

Por lo tanto, el cuarto del periodo K de las funciones elípticas de Jacobi representa también la cuarta parte de un periodo de oscilación del péndulo.

Si tomamos de nuevo $k = \sin(\frac{1}{2}\alpha)$ el módulo complementario se define como $k' = \cos(\frac{1}{2}\alpha)$ de modo que se cumple $k^2 + k'^2 = 1$.
Análogamente podemos definir el cuarto del periodo complementario K'.

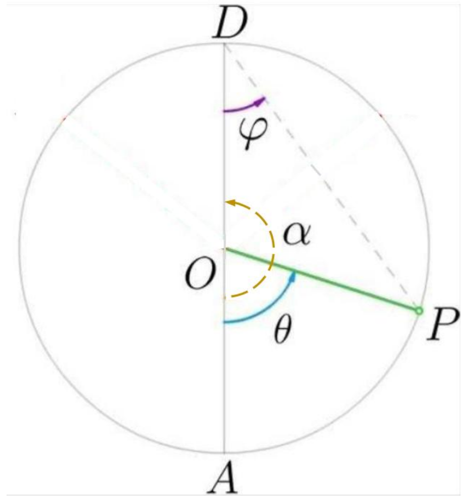
$$K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

El péndulo cuando alcanza su posición más alta

Cuando α aumenta de cero a π, el módulo k crece de cero a 1 y, en consecuencia, el cuarto del periodo, K, aumenta de $\pi/2$ a infinito.
En el caso $k = 1$, el péndulo tiene la velocidad suficiente para llegar a su posición más alta OD. Sin embargo, transcurrirá una cantidad de tiempo infinita. Si tomamos $\alpha = \pi$ y $\varphi = \frac{1}{2}\theta$ correspondiendo a $\angle ADP$, en la ecuación anterior

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2(\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\theta)),$$

Figura 16: Péndulo simple cuando alcanza su posición más alta ($\alpha = \pi$).



tenemos

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2(\cos^2(\frac{1}{2}\theta)) \Rightarrow \omega = \frac{\frac{1}{2}\dot{\theta}}{cos(\frac{1}{2}\theta)},$$

y se sigue que

$$\omega t = \int_0^{\theta} sec(\frac{1}{2}\theta')d\frac{1}{2}\theta'.$$

Como $\varphi = \frac{1}{2}\theta$, entonces

$$\sin(\varphi) = tanh(\omega t),$$
$$\cos(\varphi) = sech(\omega t),$$
$$\dot{\varphi} = 2\omega sech(\omega t).$$

Por lo tanto, cuando $k = 1$, las funciones elípticas de Jacobi degeneran, como ya habíamos visto, a funciones hiperbólicas:

$$sn(\omega t) = tanh(\omega t),$$
$$cn(\omega t) = dn(\omega t) = sech(\omega t).$$

El péndulo hace revoluciones completas

La situación que hemos trabajado en la sección anterior corresponde al péndulo con una velocidad angular $\omega = \sqrt{g/l}$ en la posición más baja. Si ω aumenta un poco más, entonces el péndulo hará revoluciones completas.
Suponemos R es el radio del círculo trazado por la partícula. Si volvemos a tomar $\frac{1}{2}\theta = \varphi$, equivalente a $\angle ADP$:

$$l^2\dot{\varphi}^2 = g(R - l\sin^2(\varphi)) \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{gR}{l^2}(1 - \frac{l}{R}\sin^2(\varphi)).$$

Tomando $k^2 = l/R$ y $\omega^2 = g/l$, la ecuación anterior se convierte en

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2}(1 - k^2 \sin^2(\varphi)) \;\Rightarrow\; \frac{\omega}{k} = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - k^2 \sin(\varphi)}},$$

e, integrando sobre t, obtenemos

$$\frac{\omega t}{k} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi')}}.$$

Por lo tanto, las funciones elípticas de Jacobi que se deducen son:

$$sn(\omega t/k) = \sin(\varphi),$$

$$cn(\omega t/k) = \cos(\varphi),$$

$$2(\omega/k)dn(\omega t/k) = \dot{\varphi}.$$

[7]

4.3. ¿Qué naturales son suma de dos cuadrados?

Veamos ahora una aplicación de las funciones elípticas a la teoría analítica de números.
Aplicaremos las funciones theta de Jacobi para obtener qué números naturales pueden escribirse como suma de cuadrados y de cuántas maneras.
Sólo damos el resultado y la estructura de la prueba, sin ofrecer detalles (la demostración completa puede consultarse, por ejemplo, en Stein, Complex Analysis [4]).

Teorema. *Todo natural es suma de cuatro cuadrados.*
(La prueba se encuentra también en Stein, Complex Analysis [4]).

Sea la función theta de Jacobi:

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z},\ Im\tau > 0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Si denotamos por $r_k(n)$ el número de posibles expresiones de n como suma de k cuadrados, se obtiene

$$\vartheta(0,\tau)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q^{n^2+m^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r_2(k) q^k,$$

donde $q = e^{i\pi\tau}$.

El paso anterior es el cálculo fundamental que permite relacionar la función aritmética que queremos estudiar con la serie de Taylor de una cierta función. Saber qué números pueden escribirse como suma de cuadrados equivale pues a conocer las propiedades de $\vartheta(0,\tau)^2$.
Recordemos ahora que

$$\vartheta(z+1,\tau)=\vartheta(z,\tau),\quad \vartheta(z+\tau,\tau)=e^{-\pi i\tau-2\pi iz}\vartheta(z,\tau).$$

y además:

$$\vartheta(m+\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau,\tau)=0,\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Construimos la función

$$\Pi(z,\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz})(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}).$$

Resulta que tiene las mismas propiedades de periodicidad y posee el mismo conjunto de ceros que la función $\vartheta(z,\tau)$. Aplicando de nuevo el Teorema de Liouville, tenemos la función

$$f(z):=\frac{\vartheta(z,\tau)}{\Pi(z,\tau)}$$

que nos permite obtener la factorización de la función $\vartheta(z,\tau)$:

$$\vartheta(z,\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz})(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}).$$

Esta factorización recibe el nombre de *identidad del triple producto de Jacobi.*
Por otro lado, sabemos que la fórmula de sumación Poisson asegura que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n),$$

donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de una función f tal que $f,\hat{f}\in C^2(R)$.
Si aplicamos la fórmula de sumación de Poisson a las funciones gaussianas adecuadas, se obtiene:

$$\vartheta(0,-\frac{1}{\tau})=e^{-i\pi/4}\sqrt{\tau}\vartheta(0,\tau).$$

Si consideramos ahora la expresión

$$C(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos(n\pi\tau)}=2\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q^n+q^{-n}},$$

es fácil deducir que

$$C(\tau)=1+4\sum_{n=1}^{\infty}(d_1(n)-d_3(n))q^n,$$

donde $d_1(n)$ es el número de divisores de n congruentes con 1 módulo 4 y $d_3(n)$ es el número de divisores de n congruentes con 3 módulo 4.

Nuestro objetivo es ahora probar la identidad entre $C(\tau)$ y $\vartheta(0,\tau)^2$ por medio de la teoría de funciones y deducir así la propiedad aritmética que buscamos: saber qué naturales pueden expresarse como suma de cuadrados y de cuántas maneras.

Para probar la identidad entre las funciones, usamos de nuevo una estrategia que hemos aplicado frecuentemente: demostramos que ambas poseen ciertas propiedades de simetría e intentamos concluir a partir de ahí que la función cociente es constante por del teorema de Liouville.

Aplicando la fórmula de sumación de Poisson a la función $\frac{1}{\cosh t}$, obtenemos:

$$C(\tau) = (i/\tau)C(-1/\tau).$$

Por tanto, las funciones $C(\tau)$ y $\vartheta(0,\tau)^2$ cumplen

$$C(\tau+2) = C(\tau),\ \vartheta(0,\tau+2)^2 = \vartheta(0,\tau)^2,$$

$$C(\tau) = (i/\tau)C(-1/\tau), \quad \vartheta(0,\tau)^2 = (i/\tau)\vartheta(0,-1/\tau)^2,$$

$$C(\tau), \vartheta(0,\tau)^2 \to 1 \ \text{ si } \ Im(\tau) \to \infty,$$

$$C(1-1/\tau), \vartheta(0,1-1/\tau)^2 \sim 4(\tau/i)e^{\pi i\tau/2} \ \text{ si } Im(\tau) \to \infty.$$

El Teorema de Liouville asegurara:

$$\vartheta(0,\tau)^2 = C(\tau) = 2\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^n + q^{-n}}, \quad q = e^{i\pi\tau}.$$

Ya habremos probado pues que

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto se tiene

Teorema. *El número natural $n = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ es suma de cuadrados si y sólo si todo primo p_j de la forma $4r+3$ que aparece en la factorización de n tiene exponente n_j par.*

Otra aplicación aritmética de las funciones ϑ está relacionada con la función de partición $p(n)$.
La función de partición $p(n)$ se define para $n \in N$ como el número de modos diferentes en los que n puede ser escrito como suma de naturales. Se verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}, \quad |x| < 1.$$

Sean ahora $p_p(n)$ el número de particiones de n en una cantidad par de términos desiguales y $p_i(n)$ el número de particiones de n en una cantidad impar de términos desiguales. Euler probó, que a menos que n sea un número pentagonal[12], se tiene $p_i(n) = p_p(n)$.

Si $n = \frac{k(3k+1)}{2}$ es pentagonal, se tiene

$$p_i(n) - p_p(n) = (-1)^k.$$

Es fácil probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty}(p_i(n) - p_p(n))x^n.$$

Para $x = e^{2\pi iu}$, la fórmula del triple producto de Jacobi permite demostrar:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{k(3k+1)}{2}}$$

y de aquí se sigue el resultado de Euler.

[12]Un número pentagonal es un entero de la forma $\frac{k(3k+1)}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

5. Aplicación de la función elíptica de Weierstrass

La función de Weierstrass tiene numerosas aplicaciones, como son las curvas elípticas o la criptografía.
En este capítulo nos centraremos en el péndulo esférico, que resulta ser una aplicación de la función wp que generaliza el péndulo simple estudiado en la sección anterior.

5.1. El péndulo esférico

Un *péndulo esférico* es un péndulo cuyos movimientos pueden realizarse en todas direcciones y, por tanto, el recorrido que describen pertenece a una esfera. Su movimiento, en vez de restringirse a un plano como ocurre con el péndulo simple, se generaliza al espacio. Este péndulo consiste, por tanto, en una partícula suspendida de un punto, de manera que permite su oscilación en un número infinito de planos verticales.

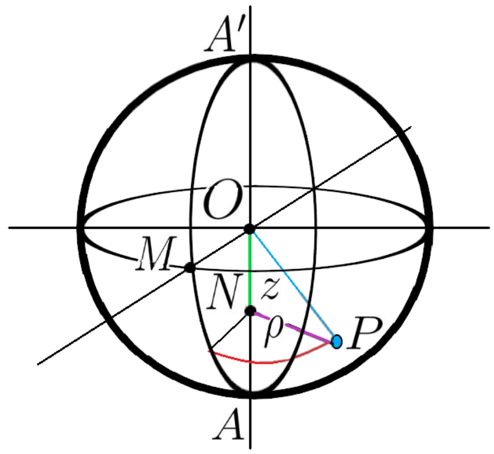
Denominamos O el punto de suspensión, m la masa de la partícula P y l la longitud de la varilla OP. Las fuerzas que actúan en la partícula son su peso, una fuerza constante debida a la gravedad de magnitud mg y que actúa verticalmente, y la tensión del cable.
Para dar las coordenadas del péndulo tomamos AOA' como el diámetro vertical de la esfera en el cual se mueve la partícula, un meridiano de referencia AMA' y PN como la perpendicular desde la partícula hasta este diámetro.
Consideramos las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) del punto P, de manera que $\rho = PN$, θ es el ángulo entre los meridianos APA' y AMA', y $z = ON$, tomando valores positivos para N por debajo del punto O.
La velocidad de la partícula en este sistema de coordenadas viene dada por $(\dot{\rho}, \rho\dot{\theta}, \dot{z})$.

Veamos ahora como el movimiento de un péndulo esférico está relacionado con la función $\wp$ de Weierstrass y como expresar en función de ésta las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo.

Teorema 18. *Las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico en coordenadas cilíndricas son*

$$\rho^2 = -l^2 \left(\wp(u) - \wp(\alpha)\right) \left(\wp(u) - \wp(\beta)\right),$$

Figura 17: Péndulo esférico.



$$e^{2i\theta} = -E^2 \frac{\sigma(u+\beta)\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u+\alpha)\sigma(u-\beta)} e^{[\zeta(\alpha)-\zeta(\beta)]u},$$

$$z = l\wp\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}t + \frac{1}{2}\omega_2\right) + \frac{v_0^2 + 2gz_0}{6g},$$

donde v_0 es la velocidad inicial del péndulo, z_0 es el valor inicial en el eje z, $t = \lambda u$ y α, β, λ, E y l son constantes. Los periodos de $\wp(u)$ son ω_1 y ω_2.

Demostración. Como las fuerzas actúan sobre la partícula, la gravedad y la tensión, tienen momento cero a lo largo del eje z, por el principio de conservación del momento angular, el momento de la partícula sobre este eje se conserva. Por lo tanto, para una constante h, se sigue que

$$m\rho^2\dot{\theta} = mh.$$

La energía también se conserva, así que no varía respecto a la situación inicial con posición z_0 en el eje z y velocidad inicial v_0. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgz_0.$$

Definimos la constante $c = \frac{v_0^2+2gz_0}{2g}$, de manera que la igualdad anterior se reduce a la siguiente expresión:

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = 2g(c-z).$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \frac{h}{p^2}$ tenemos

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 2g(c-z) - \frac{h^2}{\rho^2}.$$

Como la trayectoria de la partícula se encuentra sobre la esfera, los movimientos que realiza pertenecen a circunferencias de radio la longitud de la varilla. Por lo tanto se cumple que $\rho^2 + z^2 = l^2$, lo que implica que $\rho\dot{\rho} + z\dot{z} = 0$. Podemos combinar estos dos resultados para eliminar ρ y $\dot{\rho}$ de la igualdad anterior, obteniendo

$$l^2\dot{z}^2 = 2g(c-z)(l^2 - z^2) - h^2.$$

Esto determina la variación de z respecto al tiempo t.
Si consideramos ahora

$$\varphi(z) = 2g(c-z)(l^2 - z^2) - h^2,$$

entonces la fórmula anterior se reduce a

$$l^2\dot{z}^2 = \varphi(z).$$

Para que la partícula esté en movimiento, la componente de su velocidad a lo largo del eje z debe ser real, y la velocidad inicial correspondiente debe ser distinta de cero. Además, es fácil ver que

$$\varphi(-l) = -h^2, \qquad \varphi(z_0) > 0, \qquad \varphi(l) = -h^2, \qquad \varphi(\infty) = \infty.$$

Dado que φ tiene grado 3, tiene 3 ceros. Denotando estos ceros por z_1, z_2 y z_3, de las observaciones anteriores se sigue que

$$-l < z_1 < z_0 < z_2 < l < z_3 < \infty.$$

El cero z_3, por ser mayor que l, no se encuentra en la esfera, así que la partícula se mueve entre un plano horizontal superior $z = z_1$ y un plano horizontal inferior $z = z_2$.

Como hemos visto antes, $l^2\dot{z}^2 = \varphi(z)$, por lo tanto $\dot{z}^2$ es una expresión cúbica de z por serlo también $\varphi(z)$. Tenemos entonces que z debe ser una función elíptica de t.
Como hemos visto, toda función elíptica se puede expresar mediante $\wp$. Veamos ahora que $l^2\dot{z}^2 = 2g(c-z)(l^2 - z^2) - h^2$ puede expresarse también en función de $\wp$ de la siguiente forma

$$(\wp'(u))^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3,$$

para una variable u.
Si introducimos z' y c' dadas por $z = lz'$ y $c = lc'$, entonces la ecuación inicial se convierte en

$$l^2\dot{z}'^2 = 2gl(c' - z')(1 - z'^2) - \frac{h^2}{l^2}.$$

Ahora definimos t' tal que $t = \lambda t'$, $\lambda^2 = 2l/g$ y $h' = h\sqrt{2/lg}$. De esta manera, la ecuación anterior se reduce a

$$(\frac{dz'}{dt'})^2 = \frac{\lambda^2}{l^2}2gl(c' - z')(1 - z'^2) - \frac{\lambda^2 h^2}{l^2} = 4(c' - z')(1 - z'^2) - h'^2.$$

Si tomamos $z' = z'' + n$ con $n = c'/3$, entonces tenemos

$$(\frac{dz''}{dt'})^2 = 4z''^3 - g_2 z'' - g_3,$$

donde g_2 y g_3 vienen dadas por

$$g_2 = \frac{4}{3}(c'^2 + 3), \qquad g_3 = h'^2 + \frac{8}{27}c'^3 - \frac{8}{3}c'.$$

Tomando $z'' = \wp(u)$, tenemos $(\wp'(u))^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$, de donde se sigue que

$$\left(\frac{du}{dt'}\right)^2 = \pm 1,$$

y en consecuencia $u = \pm(t' + \alpha)$ donde α es una constante de integración.
Como la función de Weierstrass es par, escogemos indiferentemente uno de los casos.
Para $u = t' + \alpha$ tenemos que

$$z'' = \wp(u) = \wp(t' + \alpha).$$

Los ceros de la expresión cúbica en z'' son todos reales. Denotamos ω_1 y ω_2 como los periodos de $\wp(u)$ de forma que ω_1 es real y ω_2 es puramente imaginaria.
Si e_1, e_2 y e_3 son las raíces de $4z''^3 - g_2z'' - g_3 = 0$ y $e_1 > e_3 > e_2$, entonces $z'' = e_2$ cuando $z = z_1$, $z'' = e_3$ cuando $z = z_2$ y $z'' = e_1$ cuando $z = z_3$.
Eligimos el instante en el cual la partícula esta en su nivel más alto, $t = 0$. Tenemos que $z = z_1$, y por lo tanto, $z'' = e_2$. Si ahora sustituimos $t = 0$ en $z'' = \wp(t + \alpha)$, tenemos $\wp(\alpha) = e_2$ y $\alpha = \frac{1}{2}\omega_2$.
Teniendo en cuenta que las siguientes igualdades que hemos ido obteniendo

$$z = lz',\ z' = z'' + n,\ n = c'/3,\ c = lc',\ z'' = \wp(l + \alpha),\ \alpha = \frac{1}{2}\omega_2,\ l = \lambda l',\ \lambda^2 = 2l/g$$

Podemos concluir que:

$$z = lz' = l\left(z'' + \frac{c'}{3}\right) = l\wp(l + \alpha) + \frac{c}{3} = l\wp\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}t + \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{c}{3}$$

Sustituyendo el valor de c, tenemos finalmente que

$$z = l\wp\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}t + \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{v_0^2 + 2gz_0}{6g}.$$

Con lo que queda probada la última igualdad del Teorema.

Probemos ahora las otras dos igualdades que nos faltan por demostrar:
A partir de $m\rho^2\dot{\theta} = mh$ tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{h}{\rho^2} = \frac{h}{l^2 - z^2},$$

ya que $\rho^2 + z^2 = l^2$.
Podemos expresar la igualdad anterior como:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{2l}\left(\frac{1}{l - z} + \frac{1}{l + z}\right) = \frac{h}{2l^2}\left(\frac{1}{1 - z'} + \frac{1}{1 + z'}\right),$$

con z' definido como antes.
Recordando algunas de las igualdades tomadas, tenemos que $u = t' + \alpha = (t/\lambda) + \alpha$, y por lo tanto, $\dot{u} = 1/\lambda$. Por lo tanto, juntando estos resultados:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{du} = \dot{\theta}\frac{1}{\dot{u}} = \frac{\lambda h}{2l^2}\left(\frac{1}{1-z'} + \frac{1}{1+z'}\right).$$

Si definimos $\wp(\alpha) = -(1 + \frac{1}{3}c')$ y $\wp(\beta) = 1 - \frac{1}{3}c'$. Como

$$z' = z'' + \frac{1}{3}c' = \wp(u) + \frac{1}{3}c',$$

entonces

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\lambda h}{2l^2}\left(\frac{1}{\wp(u) - \wp(\alpha)} - \frac{1}{\wp(u) - \wp(\beta)}\right).$$

Cuando $z' = \pm 1$ o c', entonces, usando la definicíón de z' y

$$\left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2 = \wp'^2(u) = 4(c' - z')(1 - z'^2) - h'^2,$$

tenemos

$$\left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2 = -h'^2, \quad \wp'^2(\alpha) = \wp'^2(\beta) = -h'^2,$$

y se sigue que

$$\wp'(\alpha) = \wp'(\beta) = ih'.$$

Ahora, a partir de la última definición de $\frac{d\theta}{du}$, obtenemos

$$2i\frac{d\theta}{du} = \frac{\wp'(\alpha)}{\wp(u) - \wp(\alpha)} - \frac{\wp'(\beta)}{\wp(u) - \wp(\beta)}$$

Utilizando la igualdad vista sobre las funciones zeta de Weierstrass,

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta(u),$$

tenemos que

$$2i\frac{d\theta}{du} = \zeta(u + \beta) - \zeta(u - \beta) - 2\zeta(\beta) - \zeta(u + \alpha) + \zeta(u - \alpha) + 2\zeta(\alpha).$$

Después de integrar utilizando que $\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$, tenemos

$$e^{2i\theta} = -E^2\frac{\sigma(u + \beta)\sigma(u - \alpha)}{\sigma(u + \alpha)\sigma(u - \beta)}e^{2[\zeta(\alpha) - \zeta(\beta)]u},$$

donde $-E^2$ es una constante de integración que puede ser determinada por las condiciones iniciales.
Finalmente, de la ecuación de la esfera

$$\rho^2 = l^2 - z^2 = (l + z)(l - z) = -l^2\left(\wp(u) - \wp(\alpha)\right)\left(\wp(u) - \wp(\beta)\right).$$

□

Hemos probado las ecuaciones del movimiento en coordenadas cilíndricas. Se puede expresar también estas ecuaciones en función de las coordenadas cartesianas. Veámoslo:

Teorema 19. *Las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico en coordenadas cartesianas son*

$$x+iy = El\frac{\sigma(u+\beta)\sigma(u-\alpha)}{\sigma^2(u)\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}e^{2[\zeta(\alpha)-\zeta(\beta)]u},$$

$$x-iy = -\frac{l}{E}\frac{\sigma(u-\beta)\sigma(u+\alpha)}{\sigma^2(u)\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}e^{2[\zeta(\alpha)-\zeta(\beta)]u},$$

donde $t=\lambda u$ *y* α*,* β*,* λ *y* l *son constantes.*

Demostración. Definimos las coordenadas cartesianas como $x=\rho\cos(\theta)$ y $y=\rho\sin(\theta)$. La demostración de este teorema se sigue de la aplicación de las igualdades vistas en el *Teorema 18.*

$$e^{2i\theta} = -E^2\frac{\sigma(u+\beta)\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u+\alpha)\sigma(u-\beta)}e^{2[\zeta(\alpha)-\zeta(\beta)]u},$$

$$\rho^2 = (x+iy)(x-iy) = -l^2\left(\wp(u)-\wp(\alpha)\right)\left(\wp(u)-\wp(\beta)\right),$$

y del hecho de que

$$e^{2i\theta} = \frac{x+iy}{x-iy}$$

Así, para obtener los resultados basta con combinar estos resultados:

$$x+iy = \sqrt{\rho^2e^{2i\theta}} \qquad y \qquad x-iy = \sqrt{\frac{\rho^2}{e^{2i\theta}}}$$

□

[7]

Sumario

FUNCIONES ELÍPTICAS DE JACOBI.

∘ Definimos $sn(u) = x$ donde

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

y cn y dn a partir de

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1, \qquad k^2 sn^2(u) + dn^2(u) = 1.$$

∘ El módulo y el módulo complementario se definen tal que

$$k^2 + k'^2 = 1, \qquad 0 < k^2 < 1$$

∘ El periodo y periodo complementario:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

$$K'(k) = K(k') = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

$$K + iK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

∘ Propiedades que cumplen las funciones sn, cn, dn:

Cuadro 5: Propiedades de las funciones elípticas de Jacobi.

Propiedad	$sn(u)$	$cn(u)$	$dn(u)$
$u=0$	0	1	1
$k=0$	$sin(u)$	$\cos(u)$	1
$k=1$	$tanh(u)$	$sech(u)$	$sech(u)$
Paridad	Impar	Par	Par
$\frac{d}{du}$	$cn(u)dn(u)$	$-sn(u)dn(u)$	$-k2sn(u)cn(u)$
$u=K$	1	0	k'
$u=K+iK'$	$1/k$	$-ik'/k$	0
$u=u+K$	$cd(u)$	$-k'sd(u)$	$k'nd(u)$
$u=u+K+iK'$	$\frac{1}{k}dc(u)$	$-\frac{ik'}{k}nc(u)$	$ik'sc(u)$
$u=u+iK'$	$\frac{1}{k}ns(u)$	$-\frac{i}{k}ds(u)$	$dn(u+iK')=-ics(u)$
Periodo real	$4K$	$4K$	$2K$
Periodo imaginario	$2iK'$	$2K+2iK'$	4iK'
Ceros	0 $2K$	K $-K$	$K+iK'$ $K-iK'$
Polo, Residuo	iK', $1/k$ $2K+iK'$, $-1/k$	iK', i/k $2K+iK'$, $-i/k$	iK', $-i$ $-iK'$, i

- Funciones Theta:

- $\vartheta_1(z,q) = ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau, q)$

  $= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z$

  $= 2Gq^{1/4}sin(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos(2z)+q^{4n})$

- $\vartheta_2(z,q) = \vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi, q)$

  $= 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z$

  $= Gq^{1/4}\cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos(2z)+q^{4n})$

- $\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi, q)$

  $= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz$

  $= G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos(2z)+q^{4n-2})$

- $\vartheta_4(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n+2nzi+i\pi n^2\tau}$

$= G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos(2z)+q^{4n-2})$

- $\vartheta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z+2\pi i n z}$

◦ Periodicidad de las funciones theta:

- $\vartheta_1(z+\pi,q) = -\vartheta_1(z,q), \qquad \vartheta_1(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_1(z,q).$
- $\vartheta_2(z+\pi,q) = -\vartheta_2(z,q), \qquad \vartheta_2(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_2(z,q).$
- $\vartheta_3(z+\pi,q) = \vartheta_3(z,q), \qquad \vartheta_3(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_3(z,q).$
- $\vartheta_4(z+\pi,q) = \vartheta_4(z,q), \qquad \vartheta_4(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z,q).$
- $\vartheta(z+1,q) = \vartheta(z,q), \qquad \vartheta(z+\pi\tau,q) = e^{-\pi i\tau-2\pi i z}\vartheta(z,q).$

◦ Propiedades de las funciones theta:

Cuadro 6: Pariedad y Ceros de las funciones Theta.

Propiedad	$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
Pariedad	Impar	Par	Par	Par
Ceros	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$	$\frac{1}{2}\tau$

◦ Relación entre las funciones elípticas de Jacobi y las funciones theta:

$$sn(u,k) = \frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))}, \qquad cn(u,k) = \frac{\vartheta_4(0)\vartheta_2(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))},$$

$$dn(u,k) = \frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(u/\vartheta_3^2(0))}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(u/\vartheta_3^2(0))},$$

donde

$$u = z\vartheta_3^2(0), \qquad k = \vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0).$$

∘ La función de Weierstrass se define como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m)\neq(0,0)}\left(\frac{1}{(z+n+m\tau)^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2}\right)$$

- Periodos: 1, τ.
- Polos dobles: 1, τ.
- Pariedad: Par.

∘ Funciones $\wp - e_i$:

- $\wp(z) - e_1 = 0$ tiene una raíz doble en $1/2$, donde $e_1 = \wp(1/2)$.
- $\wp(z) - e_2 = 0$ tiene una raíz doble en $\tau/2$, donde $e_2 = \wp(\tau/2)$.
- $\wp(z) - e_3 = 0$ tiene una raíz doble en $(1+\tau)/2$, donde $e_3 = \wp((1+\tau)/2)$.

∘ Las series de Eisenstein se definen como:

$$E_k(\tau) = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n+m\tau)^k} = \sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^k}.$$

y cumplen

$$E_k(\tau+1) = E_k(\tau), \qquad E_k(\tau) = \tau^{-k}E_k(-1/\tau)$$

La relación entre las series de Eisenstein y la función $\wp$ es la siguiente:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3E_4z^2 + 5E_6z^4 + \ldots = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)E_{2k+2}z^{2k}.$$

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

donde $g_2 = 60E_4$ y $g_3 = 140E_6$.

∘ Funciones sigma y zeta de Weierstrass

$$\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Lambda^*}(1 - \frac{z}{w})e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2},$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}E_{2k+2}z^{2k+1}.$$

Se cumplen las siguientes identidades:

$$\zeta'(z) = -\wp(z),$$

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)},$$

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta(u).$$

∘ Relación entre la función $\wp$ y las funciones theta.

$$\wp(z) = e_1 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_2(0)}\right)^2 = e_2 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_3(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_3(0)}\right)^2 = e_3 + \left(\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(z)\vartheta_4(0)}\right)^2.$$

Apéndice

Recordemos algunos resultados de la Teoría de Funciones de Variable Compleja que se han utilizado.

Teorema de los Resíduos. *Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y una función f holomorfa en $\Omega \backslash A$, donde $A \subset \Omega$ es un conjunto numerable de singularidades aisladas de f. Sea γ un camino contenido en Ω tal que no pasa por las singularidades de f. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{a \in A} Res(f,a)Ind_{\gamma}(a).$$

Teorema de Liouville. *Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.*

Principio del Argumento. *Sea f meromorfa en el abierto simplemente conexo Ω y supongamos que $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ y $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$ son los conjuntos de polos y ceros de f, respectivamente; sea además $m_k = o(f, p_k)$ y $n_k = o(f, z_k)$.*
Sea $\gamma \subset \Omega$ un camino tal que no pasa ni por los ceros ni por los polos de f.
Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} n_k Ind_{\gamma}(z_k) - \sum_{k=1}^{m} m_k Ind_{\gamma}(p_k).$$

Principio de los ceros aislados. *Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω. Entonces son equivalentes:*

(i) $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

(ii) El conjunto de ceros de la función $f(z)$ posee puntos de acumulación en Ω.

Principio de prolongación analítica. *Sea Ω una región y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en Ω. Entonces son equivalentes:*

(i) $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

(ii) Existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) El conjunto de soluciones de la ecuación $f(z) = g(z)$ posee puntos de acumulación en Ω.

Teorema de la Función Inversa. *Sea f holomorfa en Ω y sea z_0 tal que $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen V, W abiertos que contienen a z_0, w_0, respectivamente y tales que $f : V \longrightarrow W$ és una biyección holomorfa.*

Teorema de factorización de Weierstrass. *Sea f una función entera y sean $\{z_j\}$ los ceros no nulos de f, repetidos según su multiplicitad y ordenados por*

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots .$$

Supongamos que 0 es un cero de orden $m \geq 0$ de f i supongamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^2} < \infty.$$

Entonces f puede ser factorizada del siguiente modo

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z/z_j) e^{\frac{z}{z_j}},$$

donde g es una función entera.

Bibliografía.

1. Opentix [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en: https://www.opentix.es/

2. Blasco, O., *Apuntes de Variable Compleja*, Universitat de València. 2015.

3. Etimologías de Chile [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en: http://etimologias.dechile.net

4. Stein E.M., Shakarchi R., *Complex Analysis (Princeton Lectures in Analysis, 2)*, Princeton University Press. 2003. p. 260-309.

5. La web de las biografías [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en: http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=jacobi-karl-gustav-jacob

6. Tee G.J., *Continuos branches of inverses of the 12 Jacobi ellliptic functions for real argument*, University of Auckland. 1997.

7. Snape J., *Applications of Elliptic Functions in Classical and Algebraic Geometry*, University of Durham.

8. Boost C++ Libraries [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en: https://www.boost.org/doc/libs/1_52_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/special/jacobi/jacobi_elliptic.html

9. Keisan Online Calculator [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en https://keisan.casio.com/exec/system/1180573437

10. Armitage J.V., Eberlein W., *Elliptic functions*, Cambridge University Press. 2006.

11. Jahnke E., Emde F., *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Dover Publications. 1945.

12. Tkachev V.G.,*Elliptic functions: Introduction course,* Royal Institute of Technoloy.

13. Mètode. Universitat de València [Sede Web]. Acceso 6 de Julio de 2018. Disponible en: https://metode.es/revistas-metode/article-revistes/karl-weierstrass-1815-1897.html