5. Resolución de ejercicios tipo en las pruebas de acceso a la universidad

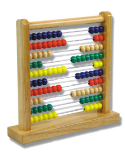
En aquellas Comunidades en que la teoría de la probabilidad forma parte del curiculum de las pruebas de acceso a la Universidad, los ejercicios de esta temática suelen ser de tres tipos:

a) La aplicación de las fórmulas básicas (probabilidad de la unión de dos sucesos, probabilidad del suceso contrario,.....) ya sea a partir de conocer directamente la probabilidad de algunos de los sucesos implicados, ya sea a partir de su cálculo mediante la noción de probabilidad de Laplace (casos favorables entre casos posibles).

b) Aplicar el Teorema de la Probabilidad Total.

c) Probabilidad condicionada: Teorema de Bayes.

La siguiente lista de ejercicios es un compendio de problemas en los que se trabajan estos aspectos básicos de la teoría de la probabilidad.



Ejercicios

Ejercicio 1 (Junio 2013, Comunidad Valenciana). Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que ambos sean de naranja.

b) La probabilidad de que ambos sean del mismo sabor.

c) La probabilidad de que ninguno sea de café.

Solución:

a) El tarro contiene un total de 45 caramelos. Por tanto, la probabilidad de sacar un caramelo de naranja es $\frac{25}{45}$. Al extraer el segundo caramelo, el tarro contiene 44 caramelos. Si el primero que hemos extraído es de naranja, la probabilidad de que lo sea el segundo es $\frac{24}{44}$. Con estos datos, la probabilidad pedida es

$$P(\text{ambos caramelos sean de naranja}) = \frac{25}{45}\frac{24}{44} = \frac{10}{33} = 0.3030$$

b) Razonando como en el apartado anterior, se tiene que

$$P(\text{ambos caramelos sean de limón}) = \frac{12}{45}\frac{11}{44}$$

y que

$$P(\text{ambos caramelos sean de café}) = \frac{8}{45}\frac{7}{44}.$$

Con esta información, se tiene

$$P(\text{ambos sean del mismo sabor}) = \frac{25}{45}\frac{24}{44} + \frac{12}{45}\frac{11}{44} + \frac{8}{45}\frac{7}{44} = \frac{788}{1980} = \frac{197}{495} = 0.3980.$$

c) P(ninguno sea de café)=P(ambos sean de naranja)+P(el primero sea de naranja y el segundo de limón)+P(el primero sea de limón y el segundo de naranja)+P(ambos sean de limón).

$$P(\text{ninguno sea de café}) = \frac{25}{45}\frac{24}{44} + \frac{25}{45}\frac{12}{44} + \frac{12}{45}\frac{25}{44} + \frac{12}{45}\frac{11}{44} = \frac{1332}{1980} = \frac{333}{495} = 0,6727.$$

Ejercicio 2 (Junio 2013, Comunidad Valenciana). Sabiendo que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(A/B) = 0.2$, contesta las siguientes cuestiones:

a) Calcula $P(\overline{A} \cup B)$.

b) Calcula $P(B/A)$.

c) Calcula $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Solución:

Teniendo en cuenta que $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.2$, se obtiene

$$P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(B) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08.$$

a) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$.

Necesitamos calcular $P(\overline{A})$ y $P(\overline{A} \cap B)$.

La primera es inmediata ya que $P(\overline{A})$ es el suceso contrario del suceso A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

Para calcular $P(\overline{A} \cap B)$ tenemos en cuenta que

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

de donde se deduce que $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, es decir

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0.3 - 0.08 = 0.32.$$

Con los datos anteriores obtenemos

$$P(\overline{A} \cup B) = 0.7 + 0.4 - 0.32 = 0.78.$$

b) $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.08}{0.3} = 0.2667.$

c) Aplicando las leyes de DeMorgan obtenemos

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

Hemos de calcular $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.08 = 0.62.$$

El resultado final es

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.62 = 0.38.$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes ha de cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A \cap B) = 0.08 \neq P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12.$$

Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

Ejercicio 3 (Julio 2013, Comunidad Valenciana). Una empresa de telefonía móvil ofrece 3 tipos diferentes de tarifas, A, B y C, cifrándose en un 45 %, 30 % y 25 % el porcentaje de clientes abonados a cada una ellas, respectivamente. Se ha detectado que el 3 %, 5 % y 1 % de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia. Se pide:

a) Si un cliente elegido al azar cancela su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia ¿cuál es la probabilidad de que estuviera abonado a la tarifa C?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar no cancele su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

c) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté abonado a la tarifa A y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

d) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté abonado a la tarifa B y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

Solución:

Denotamos por A el suceso "estar abonado a la tarifa A", por B el suceso "estar abonado a la tarifa B", por C el suceso "estar abonado a la tarifa C" y por D el suceso "cancelar el contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia".

a) Hemos de calcular $P(C/D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)}$.
$P(F)$ la calculamos aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$
$$= 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.01 = 0.031.$$

Entonces

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.031} \approx 0.0806.$$

b) Hemos de calcular $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.031 = 0.969$.

c) Hemos de calcular $P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = 0.45 \cdot 0.03 = 0.0135$.

d) Se tiene la igualdad $D = (D \cap B) + (D \cap \overline{B})$, de donde se deduce que

$$P(D) = P(D \cap B) + P(D \cap \overline{B})$$

es decir,

$$P(D \cap \overline{B}) = P(D) - P(D \cap B) = P(D) - P(B)P(D/B) =$$
$$= 0.031 - 0.30 \cdot 0.05 = 0.031 - 0.015 = 0.016.$$

Ejercicio 4 (Julio 2013, Comunidad Valenciana). El 50 % de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40 % afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70 % de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el B.

c) Si practica el deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?

d) ¿Son independientes los sucesos "Practicar el deporte A" y "Practicar el deporte B"? ¿Por qué?

Solución:

Denotemos por A el suceso "practicar el deporte A" y por "B practicar el deporte B". A partir de los datos del problema, sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.7$.

a) Nos piden la probabilidad del suceso $\overline{A \cup B}$:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3.$$

b) Hemos de calcular $P(A \cap \overline{B})$. De la igualdad $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, deducimos que

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

Necesitamos, por tanto, calcular $P(A \cap B)$. Para ello aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

de la que deducimos que

$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) - P(B) = 0.5 + 0.4 - 0.7 = 0.2.$$

Por tanto,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$$

c) Hemos de calcular $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5.$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes, ha de verificarse la igualdad

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por el apartado anterior, sabemos que $P(A \cap B) = 0.2$. Por otra parte,

$$P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2.$$

Por lo tanto, los sucesos A y B son independientes.

Ejercicio 5 (Junio 2013, Comunidad de Madrid). Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:

Denotamos por D el suceso "ser deportista" y por L el suceso "ser lector". Del enunciado del problema obtenemos la siguiente información:

$$P(D \cup L) = 0.55, \quad P(D) = 0.4, \quad P(L) = 0.3.$$

a) Hemos de calcular $P(D \cap L)$.

De la expresión $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L)$ se deduce

$$P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0.4 + 0.3 - 0.55 = 0.15.$$

b) Nos piden calcular la probabilidad del suceso D/L:

$$P(D/L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5.$$

Ejercicio 6 (Junio 2013, Comunidad de Madrid). Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al satre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

Solución:

Denotamos por NS el suceso "no quedar satisfecho" y por A el suceso "el arreglo lo ha hecho el sastre A".

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(NS) = 0.55 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.08 + 0.15 \cdot 0.1 = 0.0665.$$

b) Nos piden calcular la probabilidad $P(A/NS)$:

$$P(A/NS) = \frac{P(NS/A)}{P(NS)} = \frac{0.05 \cdot 0.55}{0.0665} = 0.4135.$$

Ejercicio 7 (Junio 2013, Comunidad de Andalucía). El 55 % de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30 % usa vehículo propio y el resto va andando. El 65 % de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70 % de los que usan vehículo propio son hombres y el 52 % de los que van andando son mujeres.

a) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

b) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Solución:

Denotaremos por A, B, C, H y M los sucesos "utiliza transporte público", "utiliza su vehículo", "va andando", "es hombre" y "es mujer", respectivamente.

Del enunciado del problema se deducen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.55,\ P(B) = 0.3,\ P(M/A) = 0.65,\ P(H/B) = 0.7 \text{ y } P(M/C) = 0.52.$$

a) Los datos anteriores nos permiten aplicar el teorema de la probabilidad total:

$$P(H) = P(A) \cdot P(H/A) + P(B) \cdot P(H/B) + P(C) \cdot P(H/C) =$$

$$= 0.55 \cdot 0.35 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.15 \cdot 0.48 = 0.4745.$$

b) Hemos de calcular la probabilidad $P(C/H)$:

$$P(C/H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{P(C) \cdot P(H/C)}{P(H)} = \frac{0.15 \cdot 0.48}{0.4745} = \frac{144}{949} \approx 0.15174.$$

Ejercicio 8 (Junio 2013, Comunidad de Andalucía). De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0.3$ y que $P(\overline{B}) = 0.25$. Calcule las siguientes probabilidades.

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) $P(A/\overline{B})$.

Solución:

a) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Necesitamos, por tanto, calcular $P(B)$ y $P(A \cap B)$:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.25 = 0.75,$$

y, al ser los sucesos A y B independientes, se tiene

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.75 = 0.225.$$

Con los datos anteriores obtenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.75 - 0.225 = 0.825.$$

b) Por las leyes de DeMorgan, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.825 = 0.175.$$

c) Sabemos que

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

De la igualdad $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, obtenemos que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Por tanto,

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0.3 - 0.225}{0.25} = 0.3.$$