3. Definición intuitiva de probabilidad: ley de Laplace

La palabra **probabilidad**, que usamos habitualmente, mide el **grado de creencia** que tenemos de que ocurra un hecho que puede pasar o no pasar.

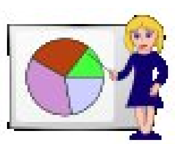
"Imposible", "casi imposible", "improbable", "inverosímil", "poco probable", "posible", "probable", "verosímil", "muy probable", "casi seguro", "seguro", y muchas otras expresiones, sirven para que nos comuniquemos unos a otros esos niveles de certeza sobre las cosas que podrían ocurrir.

Normalmente medimos esas probabilidades con porcentajes, de manera que el 0 % indica que algo es imposible, el 100 % indica que es seguro, y cualquier otro número intermedio transmite una mayor o menor certeza según su valor. Es un convencionalismo, de modo que es lo mismo medirlas con números entre 0 y 1. En ese caso, por ejemplo, un valor del 37 % se correspondería con el 0.37.

Conocer probabilidades no ayuda a conocer de antemano lo que va a ocurrir, pero sí ayuda a decidir si vale la pena o no correr ciertos riesgos en juegos de azar, decisiones profesionales, médicas, etc.

La siguiente definición recoge las condiciones que deben cumplirse para que una asignación de grados de certeza pueda llamarse probabilidad, en sentido matemático.

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU



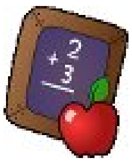
Definición

Para un experimento aleatorio, del que tenemos claro el espacio muestral Ω, una **probabilidad** P es cualquier criterio que asigne un valor numérico a cada suceso de Ω, siempre que cumpla las condiciones:

1. $P(A) \geq 0$ para cualquier suceso A de Ω (es decir, la probabilidad de cualquier suceso es no negativa).

2. $P(\Omega) = 1$ (es decir, la probabilidad del suceso seguro es 1).

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para cualquier par de sucesos A y B que sean disjuntos (es decir, con $A \cap B = \varnothing$, sin elementos en común).



Ejemplos

- Un alumno valora sus posibilidades de aprobar y suspender un examen en 0.8 y 0.2, respectivamente. Tenemos el espacio muestral $\Omega = \{a, s\}$, y las asignaciones son $P(\{a\}) = 0.8$ y $P(\{s\}) = 0.2$. Las asignaciones para todos los sucesos son:

$$P(\varnothing) = 0, \quad P(\{a\}) = 0.8, \quad P(\{s\}) = 0.2, \quad P(\Omega) = 1$$

  De lo que se deduce que P es una probabilidad en sentido matemático.

- Otro alumno valora sus posibilidades de aprobar y suspender un examen en 0.7 y 0.5, respectivamente. Tenemos el espacio muestral $\Omega = \{a, s\}$, y las asignaciones son $P(\{a\}) = 0.7$ y $P(\{s\}) = 0.5$. Si fuera una verdadera probabilidad, entonces por las condiciones 2 y 3, deduciríamos que:

$$1 \overset{(2)}{=} P(\Omega) = P(\{a\} \cup \{s\}) \overset{(3)}{=} P(\{a\}) + P(\{s\}) = 0.7 + 0.5 = 1.2$$

  Y como eso es falso, podemos decir que la P de ese alumno no es una verdadera probabilidad en sentido matemático.

- Un partido de fútbol se va a jugar y nos interesa el "signo" del partido de cara a rellenar una quiniela. Entonces el espacio muestral es $\Omega = \{1, X, 2\}$. Una probabilidad se puede definir asignando a cada suceso elemental un valor no negativo, de modo que todos sumen 1, y para cada suceso compuesto sumar los valores asignados a los sucesos elementales que contiene. Por ejemplo:

$$P(\{1\}) = 0.5, \quad P(\{X\}) = 0.3, \quad P(\{2\}) = 0.2.$$

  Y a partir de ahí, las demás:

$$P(\{1, X\}) = 0.8,\ P(\{1, 2\}) = 0.7,\ P(\{X, 2\}) = 0.5,\ P(\{1, X, 2\}) = 1,\ P(\varnothing) = 0$$

  Con estas asignaciones se verifican las 3 condiciones de la probabilidad, y por tanto estamos ante una correcta probabilidad matemática.

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

Observación

Las condiciones de la probabilidad matemática son muy intuitivas. Son las mismas que cumplen el proceso de "contar elementos de conjuntos" o de "medir áreas de superficies", con la salvedad que en las probabilidades el recuento o la medida total es 1. Por eso, una buena representación para trabajar intuitivamente con probabilidades es la representación de los sucesos como diagramas de Venn dentro de un conjunto Ω, y ver sus áreas como las probabilidades.

Se dice que un suceso A ocurre, cuando al realizarse el experimento, se observa un resultado que es un elemento del conjunto A. Hay 3 maneras muy habituales en que las personas asignamos probabilidades a los sucesos en los que nos fijamos, las cuales se detallan a continuación. La comúnmente aceptada en bachillerato es la **clásica.**

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

Definición

- **Interpretación clásica (ley de Laplace)**: cuando el experimento ocasiona una cantidad finita de resultados de los que ninguno es más creíble que los demás, entonces se reparte la probabilidad equitativamente entre todos ellos, de modo que la probabilidad de cualquier suceso A del espacio muestral Ω se asigna como:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables (en } A)}{\text{Casos posibles (en } \Omega)}$$

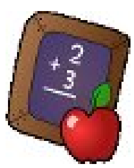
- **Interpretación frecuencialista**: si no está claro que los resultados del espacio muestral son todos igualmente creíbles, se puede atribuir la probabilidad a cada suceso repitiendo el experimento muchas veces y calculando el porcentaje (o fracción) de veces en los que el resultado fue uno del suceso en cuestion. En ese caso la probabilidad de cada suceso A del espacio muestral Ω se asigna como:

$$P(A) = \frac{\text{Núm. de veces con resultado en } A}{\text{Núm. de realizaciones del experimento}}$$

- **Interpretación subjetiva**: si no se confía en que todos resultados sean igualmente verosímiles, y tampoco es factible repetir el experimento en igualdad de condiciones un gran número de veces, uno siempre tiene el derecho de asignar la probabilidad de un suceso A del espacio muestral Ω como:

$$P(A) = \text{“El número que se me antoje”}$$

(es la típica de los aficionados deportivos). Mientras las dos primeras interpretaciones dan lugar a verdaderas probabilidades en sentido matemático, esta interpretación (la subjetiva) es más delicada y hay que ser muy cuidadoso atribuyendo probabilidades para que se cumplan las condiciones de la definición.



Ejemplos

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

- En apuestas deportivas, sobre el signo de un partido de fútbol ($\Omega = \{1, X, 2\}$), hay apostantes que piensan y actúan de modos algo diferentes:
  - Unos apuestan completamente al azar. Hay tres resultados y les parece que es tan fácil que resulte uno que otro. Por tanto rellenan la apuesta sin mirar quién se enfrenta. Para estos jugadores las probabilidades de cada suceso son:

$$\begin{array}{llll} P(\varnothing) = 0 & P(\{1\}) = 1/3 & P(\{X\}) = 1/3 & P(\{2\}) = 1/3 \\ P(\{1, X\}) = 2/3 & P(\{1, 2\}) = 2/3 & P(\{X, 2\}) = 2/3 & P(\{1, X, 2\}) = 1 \end{array}$$

    (enfoque clásico).
  - A otros apostantes, ese método les parece una atrocidad (cuando por ejemplo juega el mejor equipo contra el peor). Estos apostantes creen que mirando los enfrentamientos anteriores se estima mejor las probabilidades de lo que puede ocurrir en el próximo. Así, estos jugadores sí que se fijan en qué equipos son los que se enfrentan y acuden a un almanaque o a estadísticas que publican los medios de comunicación, y apuestan sobre el resultado que más veces ha ocurrido en el pasado. Para estos apostantes, las probabilidades son proporcionales a las frecuencias con las que han ocurrido los sucesos en partidos anteriores **(enfoque frecuencialista).**
  - A otros apostantes les parece que las estadísticas están para romperse, y sí se fijan en qué equipos se enfrentan, pero no se informan sobre lo que ocurrió en el pasado porque, además, creen que cada año es distinto (tal vez distinto entrenador, distintos jugadores, distinto presidente, distinto presupuesto, distintos tantos otros factores que influyen en el resultado). No consideran que cada partido es la repetición del mismo

experimento, y tras reflexionar unos instantes, reparten las probabilidades de manera muy subjetiva, y apuestan por aquel resultado que han considerado más probable **(enfoque subjetivo).**

- En el lanzamiento de un dado perfecto y anotación de su resultado, es razonable usar la interpretación clásica. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se asigna una probabilidad de $1/6$ a cada suceso individual, y para un suceso A como "resultado par":

$$P(\text{“resultado par”}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = 1/2$$

  (los casos favorables al suceso, sobre los casos totales del espacio muestral).

- Cuenta una anécdota que el prestigioso estadístico Karl Pearson no confiaba en el enfoque clásico para el experimento del lanzamiento de una de sus monedas. $\Omega = \{C, X\}$. La tomó y la lanzó 24000 veces, obteniendo 12012 caras. En este caso el enfoque frecuencialista indica que

$$P(\{C\}) = \frac{12012}{24000} = 0.5005$$

  El resultado es casi el mismo que habría obbtenido usando el enfoque clásico, que otorga 0.5 a cada resultado.

- Un alumno ha estudiado bastante para preparar un examen. Por eso no cree que tenga sólo un 50 % de probabilidades de aprobar (que es lo que diría el enfoque clásico). En su estudio ha realizado 5 exámenes de años anteriores y los ha aprobado todos, pero tampoco cree que eso le asegure el aprobado, porque son pocos exámenes, y además el profesor de este año no es el mismo que puso aquellos exámenes (el enfoque frecuencialista tampoco le convence). De manera subjetiva se estima en 0.80 la probabilidad de aprobar.

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

Las condiciones de la probabilidad permiten deducir propiedades para calcular o comparar probabilidades de otros sucesos.

Propiedades

Si P es una probabilidad, entonces se cumple que:

1. $P(\varnothing) = 0$. La probabilidad del suceso imposible es 0

2. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$. La probabilidad de un suceso que es subconjunto de otro, es siempre menor o igual que la del suceso que lo contiene.

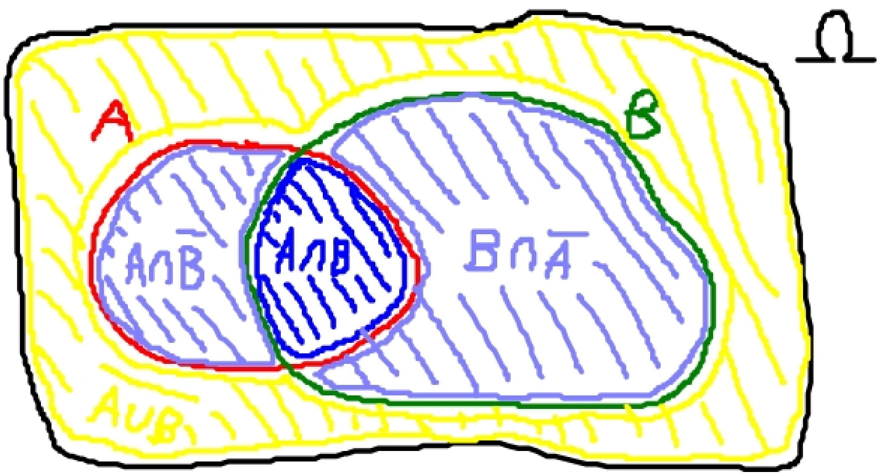
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. La probabilidad del complementario, es decir, de que no ocurra A.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. La probabilidad de la unión, es decir, de que ocurra alguno de los sucesos A o B (o ambos a la vez).

5. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. La probabilidad del suceso diferencia, es decir, de que ocurra el suceso A pero no el B.

6. $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. La probabilidad de la disyunción exclusiva, es decir, de que ocurra el suceso A o el B, pero no ambos a la vez (sólo uno de los dos).

Estas propiedades pueden parecer complejas, pero si se representan los conjuntos como diagramas de Venn y se piensan las probabilidades como áreas, son bastante naturales, como se puede ver en la figura a continuación



MOOC UJI:

Ejercicios

Ejercicio 1. Tienes un dado común con seis caras y las coloreas del modo siguiente: de color azul la cara 1, de color morado las caras 2 y 3 y de color negro las caras 4, 5 y 6.

1. Calcula la probabilidad de que resulte una cara con una cantidad par de puntos.

2. Calcula la probabilidad de que resulte una cara de color morado.

3. Calcula la probabilidad de que resulte una cara que no es de color morado.

4. Calcula la probabilidad de que resulte un número de puntos par o color morado.

Solución:

1. En este caso el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y además encaja en la interpretación clásica, porque se puede suponer que todas las caras son igualmente creíbles. Entonces:

$$P(\text{“par”}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Ahora el espacio muestral sería $\Omega = \{a, m, n\}$, pero se ve que no valdría la interpretación clásica, porque el azul sólo está en una cara y los otros colores en más caras (siendo entonces más probables). Podemos trasladar la pregunta sobre colores al otro espacio muestral (de los números), para poder usar el enfoque clásico:

$$P(\{m\}) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Como se pide la probabilidad del complementario del suceso del apartado anterior, aprovechamos la propiedad del complementario. Entonces:

$$P(\overline{\{m\}}) = 1 - P(\{m\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Este se puede resolver de dos formas.Directamente escribiendo la unión de los conjuntos

$$P(\text{“par o morado”}) = P(\{2, 4, 6\} \cup \{2, 3\}) = P(\{2, 3, 4, 6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

O aplicando la propiedad de la probabilidad de la unión (aunque entonces hay que calcular la intersección de los conjuntos),

$$\begin{aligned} P(\text{“par o morado”}) &= P(\{2, 4, 6\} \cup \{2, 3\}) \\ &= P(\{2, 4, 6\}) + P(\{2, 3\}) - P(\{2, 4, 6\} \cap \{2, 3\}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(\{2\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

MOOC UJI. La Probabilidad en las PAU

Ejercicio 2. Realizas el experimento aleatorio que consiste en dar la vuelta al azar a una ficha de dominó y sumar los puntos que tiene. Escribiremos S_i el suceso que consiste en destapar una ficha y que sus puntos sumen i. Se pide:

1. Probabilidad de que sume 3 puntos.

2. Probabilidad de que no sume 3 puntos.

3. ¿Cuál es el resultado más probable?

Solución:

1. El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, desde el 0 que se obtiene al sumar los puntos de la ficha “blanca doble”, hasta el 12 que se obtiene al sumar los puntos de la ficha “seis doble”. Sin embargo con este planteamiento no podemos resolver el problema con el enfoque clásico, por que el 0 y el 12 aparecen sólo con una ficha

(cada uno), mientras que el 3, por ejemplo, aparece con dos fichas: la “tres blanca” y la “dos uno”.

El enfoque clásico se puede usar con el espacio muestral de las fichas, ya que se va a elegir una al azar, y todas son igual de probables. Si escribimos cada ficha como la pareja de número de puntos que tiene en cada mitad, entonces el espacio muestral se puede escribir como

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 00, & 01, & 02, & 03, & 04, & 05, & 06, \\ & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ & & 22, & 23, & 24, & 25, & 26, \\ & & & 33, & 34, & 35, & 36, \\ & & & & 44, & 45, & 46, \\ & & & & & 55, & 56, \\ & & & & & & 66 \end{array} \right\}$$

La razón de por qué lo hemos escrito de esa forma escalonada se verá después. Lo importante es que tiene 28 elementos y que la probabilidad de cada uno es entonces 1/28.

El suceso “sumar 3” se puede representar como

$$S_3 = \{03, 12\}$$

Así pues

$$P(S_3) = P(\{03, 12\}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}.$$

2. En este caso aprovechamos la propiedad del complementario:

$$P(\overline{S_3}) = 1 - P(S_3) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

3. Hay que calcular por separado todas las probabilidades de S_0, S_1, S_2, etc. hasta S_{12}. Tal y como está escrito el espacio muestral, cada suma se puede ver en una diagonal.

$$P(S_0) = P(\{00\}) = \frac{1}{28} \qquad P(S_1) = P(\{01, 12\}) = \frac{1}{28}$$

$$P(S_2) = P(\{02, 11\}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} \qquad P(S_3) = P(\{03, 12\}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$P(S_4) = P(\{04, 13, 22\}) = \frac{3}{28} \qquad P(S_5) = P(\{05, 14, 23\}) = \frac{3}{28}$$

$$P(S_6) = P(\{06, 15, 24, 33\}) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \qquad P(S_7) = P(\{16, 25, 34\}) = \frac{3}{28}$$

$$P(S_8) = P(\{26, 35, 44\}) = \frac{3}{28} \qquad P(S_9) = P(\{36, 45\}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$P(S_{10}) = P(\{46, 55\}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} \qquad P(S_{11}) = P(\{56\}) = \frac{1}{28}$$

$$P(S_{12}) = P(\{66\}) = \frac{1}{28}$$

Mirando las fracciones con el denominador común, se ve que el resultado más probable es el 6.

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

Ejercicio 3. Considera el experimento aleatorio que consiste en tirar una moneda 3 veces y registar el resultado en el orden en que se ha dado. Consideramos los sucesos $A = \{CCX, CXX, XCC\}$, $B = \{CCX, CXX, CCC, XXX\}$ y $C = \{CCX, CXX, XCX\}$. Calcula:

1. ¿Cuál de los tres sucesos tiene mayor probabilidad?
2. La probabilidad de que ocurra alguno de esos sucesos.
3. La probabilidad de que ocurran los tres sucesos.
4. La probabilidad de que no ocurra ninguno de los tres sucesos.

Solución:

MOOC UJI. La Probabilidad en las PAU

1. Con el experimento que se describe, el espacio muestral son todas las posibilidades de cara y cruz en grupos de tres y con el orden relevante. Entonces:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$

Como parece que la moneda no tenga preferencia por la cara o la cruz, todos los resultados son igualmente creíbles, por lo que el enfoque clásico nos sirve para asignar las probabilidades:

$$P(A) = \frac{3}{8}, \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{3}{8}$$

Por tanto B es el suceso más probable (tiene más casos favorables que A y C).

2. Aquí hay que probar $P(A \cup B \cup C)$, y lo hacemos calculando primero la unión de esos tres sucesos. Como $A \cup B \cup C = \{CCX, CXX, XCC, CCC, XXX, XCX\}$, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

3. Se trata ahora de calcular $P(A \cap B \cap C)$, y la intersección la podemos calcular inspeccionando los elementos comunes a los tres sucesos. Como $A \cap B \cap C = \{CCX, CXX\}$, entonces

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

4. La probabilidad de que no pase ninguno de ellos sería $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, ni A, ni B, ni C. Pero también se puede leer como lo contrario de que pase alguno, es decir $P(\overline{A \cup B \cup C})$. Entonces, aprovechando la propiedad del complementario:

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 4. En una ciudad se habla el idioma local, el nacional, y otros idiomas. Un 30 % de los habitantes habla el idioma local, el 80 % habla el idioma nacional, y el 15 % habla ambos idiomas. Calcula:

a) ¿Qué porcentaje de la población habla alguno de los dos idiomas (local, nacional o ambos)?

b) ¿Qué porcentaje de la población no habla ninguno de los dos idiomas (local y nacional)?

c) ¿Qué porcentaje de la población habla sólo un único de esos dos idiomas?

Solución:

MOOC UJI: La Probabilidad en las PAU

a) Por el enunciado podemos destacar los sucesos L = "personas que hablan idioma local" y N = "personas que hablan idioma nacional". Si se toma una persona al azar, se puede usar el enfoque clásico para atribuir probabilidades proporcionales a la fracción entre casos favorables y casos totales.

$$P(L) = \frac{30}{100} = 0.3,\ P(N) = \frac{80}{100} = 0.8 \text{ y } P(L \cap N) = \frac{15}{100} = 0.15.$$

En el primer apartado se pide $P($"L ó N"$)$, es decir, la unión. Usando la propiedad de la unión se obtiene:

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) - P(L \cap N) = 0.3 + 0.8 - 0.15 = 0.95$$

b) Ahora se pide $P($"ni L ni N"$)$, es decir $P(\overline{L} \cap \overline{N})$. Usando las propiedades de sucesos y probabilidades (leyes de DeMorgan + probabilidad del complementario + probabilidad de la unión) se obtiene paso a paso:

$$P(\overline{L} \cap \overline{N}) = P(\overline{L \cup N}) = 1 - P(L \cup N) = 1 - (P(L) + P(N) - P(L \cap N)).$$

Usando los datos:

$$P(\overline{L} \cap \overline{N}) = 1 - (0.3 + 0.8 - 0.15) = 1 - 0.95 = 0.05.$$

Un 5 % no habla ninguno de los dos idiomas.

c) Hablar sólo uno de esos dos idiomas significa la disyunción exclusiva (donde hablar uno excluya que hable el otro), es decir $L \Delta N$. Usando la propiedad:

$$P(L \Delta N) = P(L) + P(N) - 2P(L \cap N) = 0.3 + 0.8 - 2 \cdot 0.15 = 0.8$$

También se puede resolver directamente, desmenuzando los sucesos: hablar sólo uno de esos dos idiomas significa "habla local" Y (intersección) "no habla nacional" o bien (UNIÓN) "no habla local" Y (intersección) "habla nacional". En símbolos: $(L \cap \overline{N}) \cup (\overline{L} \cap N)$. Además, son disjuntos: no es posible que alguien hable el local y no el nacional, y al mismo tiempo hable el nacional y no el local. Entonces:

$$P((L \cap \overline{N}) \cup (\overline{L} \cap N)) = P(L \cap \overline{N}) + P(\overline{L} \cap N).$$

Por una parte

$$P(L \cap \overline{N}) = P(L) - P(L \cap N) = 0.3 - 0.15 = 0.15$$

y por otra

$$P(\overline{L} \cap N) = P(N) - P(L \cap N) = 0.8 - 0.15 = 0.65.$$

Así que en total

$$P((L \cap \overline{N}) \cup (\overline{L} \cap N)) = P(L \cap \overline{N}) + P(\overline{L} \cap N) = 0.15 + 0.65 = 0.8.$$

Todas estas situaciones se pueden resolver de modo intuitivo representando los sucesos como diagramas de Venn y colocando las probabilidades de cada conjunto o "trozo" de conjunto. Si se tienen claras las ideas de unión, intersección y complementario, se puede esquivar el uso de la notación matemática (ver la siguiente figura).