GARCÍA BACETE, F. J. (2001). L'aprenentatge de les matemàtiques a l'ensenyament obligatori. En F. J. García Bacete y F. Domènech (Coords.), *Psicologia de la Instrucció: Aprenentatge dels Continguts Escolars* (pp. 87-169). Castelló: Servei de Publicacions de la Universitat Jaume I. ISBN: 978-8480212985. Disponible en: Biblioteca Universitat Jaume I (signatura: LB1051 .P78 2001).

Capítol 2

L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES A L'ENSENYAMENT OBLIGATORI

Francisco-Juan García Bacete
Universitat Jaume I

Organitzador previ
Objectius
Continguts:

L'alfabetització matemàtica ha de ser una matemàtica bàsica i per a tothom, hauria de tenir tot allò que es considere que ha de saber qualsevol persona del nostre país (...). S'ha d'ensenyar a pensar, també s'ha d'ensenyar a fer servir el pensament adequat en cada oportunitat (...), qualsevol persona ha de tenir un domini ràpid dels nombres i de les formes, però cal no deixar de banda que la matemàtica serveix per a jugar pensant. L'aprenentatge de les matemàtiques i la seua metodologia a l'ensenyament obligatori és d'una importància fonamental en els nostres dies (Lluís Segarra, 1998).

Una mestra de P3 ens comenta la conversa que ha mantingut amb un xiquet:
- *Quantes potes té un gos?*
- *Tres!*
- *Si? Vegem, com ho saps?....*
- *(Es queda una estona pensatiu, es posa de quatre grapes a terra i compta mans i peus). Un, dos, tres, quatres...En té quatre.*
- *Ah! Molt bé. I l'elefant, quantes potes té?*
- *Quatre.*
- *Al cap d'uns quants dies li demana:*
- *Quantes rodes té un cotxe?*
- *Tres!*
- *A veure?*
- *Un, dos, tres, quatre. Quatre!*
- *Com ho saps?*
- *Per què les he comptades. Mira: dues al davant i dues al darrere.*
- *Les has comptades? Si no el veus!*
- *Sí que el veig, és al pàrquing.*

Pau i Raquel juguem amb un joc de construccions. Pau agafa les peces que li criden l'atenció i, intuïtivament, va provant d'ajuntar-les. Raquel, amb les instruccions a la mà, dóna voltes a la idea de fer l'avió que es mostra com a exemple, en selecciona les peces, fa el primers intents, torna a mirar les instruccions, rectifica. Pau fa una petita torre i quan Raquel li pregunta què fa, ell s'ho mira i en aquell moment pensa que podria construir un robot, però no sap com fer-li unes cames que es puguen bellugar. Prova diferents peces i no pot. Raquel el veu que s'enfada amb ell mateix i li proposa una manera possible de fer-ho. A Pau no el convenç, però ha descobert el tipus de peça que necessita. A poc a poc va construint el robot que ell desitjava fer. Raquel ha anat seguint les instruccions i va muntant l'avió, si bé alguna vegada ha hagut de desmuntar-ho tot per rectificar. Ja ha passat una bona estona i, emocionats, ens mostren el robot i l'avió acabats. (Ja em surt! Ja ho entenc! de Hellena Forreland i Núria López, mestres de l'escola Bellaterra).

De diàlegs i situacions com aquestes s'estableixen molts en qualsevol situació d'aprenentatge. Diàlegs oberts, on els xiquets manifesten de quina manera porten a terme el seus pensaments.... De totes maneres, a l'escola tendim a fer cada vegada menys diàlegs a mesura que avancen els cursos. Tenim tantes coses per ensenyar que ens costa molt parar atenció a veure com aprenen. (...) s'acostuma a donar estratègies i trucs per resoldre càlculs difícils. (...) D'aquesta manera es pretén ajudar a assolir estratègies. (...) però davant del càlcul 6 + 6 els xiquets i xiquetes verbalitzen un fum de respostes diverses, que fa que ens adonem que no cal pautar tant l'aprenentatge de tots els infants, ja que ells mateixos troben maneres de resoldre operacions com aquesta.
- *Em pose sis a la butxaca (i amb els dits acaba de comptar), set, vuit, nou, déu, onze i dotze.*
- *He comptat dues mans i he afegit els dos dits que faltaven.*
- *He fet cinc i cinc deu, i un i un dos.*
- *He mirat el rellotge i he vist que n'hi havia sis en un costat i sis a l'altre, per tant, dotze.*
- *He mirat el cuc dels nombres i n'he comptat sis després del sis.*
- *M'ho sé de memòria: sis i sis fan dotze.*

– *(Amb les mans) En tinc sis, amb quatre arribo a deu i me’n falten dos que són dotze*
Esther Bosch, Anna M. Fàbregas a. Silvia Margelí (mestres de primària i membres del grup Perímetre).

OBJECTIUS

Al final de la seqüència d'aprenentatge s'espera que els alumnes siguen capaços de:

1. Tindre una visió més global del que són les matemàtiques, com s'aprenen i com s'ensenyen.
2. Conèixer les característiques del llenguatge matemàtic.
3. Establir connexions entre els llenguatge quotidià i el llenguatge matemàtic.
4. Contribuir a eliminar les falses creences al voltant de les matemàtiques.
5. Poder explicar com aprenen matemàtiques els alumnes.
6. Conèixer les diferents aptituds implicades en l'aprenentatge de les matemàtiques.
7. Comprendre la realitat de l'ensenyament de les matemàtiques com resultat d'un complex conjunt de factors.
8. Descobrir la importància del context en l'aprenentatge de les matemàtiques.
9. Ser conscient que cada contingut matemàtic específic comporta les seues particularitats en el procés d'aprenentatge-ensenyament.
10. Valorar els diferents continguts matemàtics.
11. Ser sensible davant de la complexitat dels aprenentatges matemàtics i de la seua necessitat.
12. Identificar les principals fonts de les dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiques.
13. Conèixer els principis fonamentals per a dissenyar ambients d'aprenentatge matemàtic.
14. Conèixer les estratègies que utilitzen els alumnes per abordar les tasques matemàtiques.
15. Estar en disposició de poder avaluar i intervindre sobre les creences, les actituds, les emocions, les estratègies, els coneixements previs dels alumnes.

1. QUÈ PASSA AMB LES MATEMÀTIQUES?

1.1. La utilitat de les matemàtiques

Tots fem matemàtiques amb molta freqüència, malgrat que a vegades no ens adonem. Fem matemàtiques quan revisem el canvi després d'haver pagat en una tenda, quan estimen si podrem passar la cadira de braços per la porta del menjador, en localitzar un monument en un plànol de la ciutat, en omplir una gerro d'aigua sense que se n'isca i puga ser traslladat a la taula, quan seleccionem la temperatura del microones, en canviar cromos, ... Seria inimaginable una persona sense cap coneixement matemàtic que es poguera comportar còmodament en un entorn tan quantificat com el nostre.

Les matemàtiques han ocupat un lloc rellevant en tots els sistemes d'ensenyament. Es més, tradicionalment s'ha pensat que mentre en altres camps del saber un alumne podia aprovar simplement "estudiant", per a tindre èxit en les matemàtiques l'alumne havia de valer o havia de ser intel·ligent. La resolució de problemes matemàtics i la seua generalització a les situacions quotidianes s'ha convertit a partir del anys 80 en un dels objectius fonamentals de l'escolarització general (De Corte, 1993).

A les matemàtiques se li reconeixen grans beneficis i utilitats, que en un sentit global permet afirmar que les matemàtiques són un excel·lent mètode per a ensenyar a pensar.

- Desenvolupa les capacitats intel·lectuals generals (explorar. classificar, analitzar, generalitzar, estimar, inferir, abstraure, argumentar,..); desenvolupa la capacitat de raonament, educa la percepció i visualització espacial, estimula l'actitud crítica, aguditza la intuïció, fomenta la creativitat, la perseverança en el treball, ...
- Proporciona el llenguatge precís i concís que necessiten les ciències per a la fórmulació, interpretació i comunicació de les observacions que realitzen.
- Són una eina útil per a l'estudi de les diferents àrees curriculars (medi físic, econòmic, social i tecnològic, ...).
- Proporcionen contextos idonis per assolir majors nivells d'abstracció i formalització.
- Cada vegada es reconeix la seua contribució al desenvolupament de les capacitats de caire afectiu (autoestima, disfrutar, criticar,...), psicomotor (l'espai i la geometria en particular), social (cal col·laborar, respectar i compartir la informació per tal de resoldre els problemes) i de comunicació (expressió oral, escrita, simbòlica,

escoltar,...).

1.2. Experiència dels alumnes amb les matemàtiques escolars

Desgraciadament, la majoria dels estudiants tenen dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiques, i en molts casos desenvolupen una veritable aversió cap aquesta disciplina. Les dificultats solen ser suportables en els nivells escolars més baixos, però es tornen quasi insuperables quan s'introdueix el formalisme més abstracte de l'àlgebra o la geometria. Moltes de les dificultats estan estretament vinculades amb les arrelades creences cap a les matemàtiques i la forma com són ensenyades i practicades a l'escola (Martí, 1996), com veurem en l'apartat següent. Davant d'aquesta situació no resulta estrany que un gran nombre d'alumnes entren en un cercle viciós en el qual aprendre matemàtiques significa enfrontar-se amb una situació d'angoixa, que acaba reforçant aquestes creences.

El percentatge d'estudiants que presenten ansietat davant de les matemàtiques és molt elevat, entre el 28 % i el 50 % segons els estudis. Aquesta alta taxa ha portat a encunyar el terme "ansietat a les matemàtiques" per a referir-se als "sentiments de tensió, desvaloració, indefensió i desorganització mental que una persona pateix quan és instada a manipular nombres o a resoldre problemes de matemàtiques" (Tobías, 1978, citat per Polaino 1993). La relació entre ansietat i rendiment en matemàtiques sembla que és una "u invertida asimètrica" de forma que un nivell d'ansietat mitjà o elevat inhibeix el rendiment, atès que afecta els processos atencionals i cognitius, mentre que un nivell baix també el pot disminuir. Ara bé, els alumnes poden obtindre rendiments molt alts o molt baixos, amb independència dels seus nivells d'ansietat (Polaino, 1993).

L'ansietat a les matemàtiques esta bàsicament relacionada amb les percepcions que l'alumne te de les seues habilitats matemàtiques i la valoració que fa del seu rendiment previ, més que de les capacitats i el rendiment reals. També intervenen les expectatives èxit -bon predictor del nivell d'aprenentatge assolit- i el valor subjectiu que l'alumne dona a les matemàtiques -bon predictor de les intencions respecte de les matemàtiques-, les quals estan influïdes pel rendiment previ i per les percepcions de la pròpia capacitat. No obstant, no sembla que l'ansietat modere els resultats de les expectatives ni les del valor.

El baix rendiment en matemàtiques és un fet fortament contrastat en la majoria del països (Lapointe, Mead i Philipps, 1989). Aquesta realitat és preocupant per que suposa que una gran majoria d'estudiants presentaran serioses dificultats per enfrontar-se a un entorn cada vegada més complex i matematitzat, i per que les matemàtiques en la nostra cultura, on s'atribueix una gran importància a la comprensió lògica i numèrica, han adoptat un paper de filtre en el recorregut escolar cap a l'educació superior (Martí, 1996).

1.3. Creences al voltant de la naturalesa de les matemàtiques

Les actituds negatives envers les matemàtiques tenen diversos orígens, els cinc següents són els més importants (Macnab i Cummine, 1992): les percepcions i actituds generals cap a les matemàtiques que són transmeses als xiquets, la presentació de les matemàtiques a les aules, les actituds dels professors de matemàtiques cap als seus alumnes, la naturalesa del pensament matemàtic i la notació escrita de les matemàtiques. A més a més, es pot afegir a aquest llistat, les actituds dels professors de matemàtiques envers altres assignatures, les actituds dels professors d'altres assignatures envers les matemàtiques i la falta de coordinació dels programes com a factors que dificulten la vessant aplicada de les matemàtiques. D'algunes d'aquestes qüestions ens ocuparem a continuació.

Laurie Buxton al seu llibre *Do you Panic About Maths?* afirma que les creences sobre la naturalesa de les matemàtiques més freqüents que els pares transmeten als fills són:

- que són fixes, immutables, externes, intractables i irreals
- que són abstractes i no relacionades amb la realitat
- que són un misteri accessible a molt pocs

- que són una col·lecció de regles i fets que han de ser recordats
- que són una ofensa al sentit comú en algunes de les coses que assegura
- que és una àrea on es faran judicis sobre la vàlua personal
- que es refereix sobre tot a càlculs

En definitiva, les matemàtiques són com un territori desconegut en el qual un s'introdueix sense un plànol i sols amb unes poques ferramentes molt rudimentàries. L'estereotip sobre els professors de matemàtiques no ajuda a millorar aquestes creences, perquè són vistos com àrids, sarcàstics i impacients, imatge que la televisió i el cinema tracten de perpetuar.

La presentació que es fa de les matemàtiques a l'aula té, òbviament, una gran importància en les actituds dels alumnes. El domini de les regles és un dels principals ingredients de les matemàtiques, però moltes regles són presentades de forma que l'alumne les viu com una emanació d'una autoritat remota, que poden canviar sense més raons, fora del sentit comú, i totalment arbitràries. Molts xiquets i adults veuen una expressió o equació matemàtica com un entre misteriós divorciat de la realitat. La naturalesa de correcte-incorrecte de les matemàtiques, on no es té en compte la creativitat, l'esforç i la individualitat, fan créixer en l'alumne un sentiment de falta de control. La necessitat de rapidesa i seguretat a l'hora de fer matemàtiques és un altre dels tòpics que poden causar ansietat i malestar. En el mateix sentit, les matemàtiques solen ser presentades en la seua forma final, resolta, sense referència a la seua trajectòria històrica.

Els professors d'altres assignatures poden donar la impressió als seus alumnes que ells mateixos es veuen com a usuaris de ferramentes matemàtiques, però no com una assignatura digna de ser entesa. Al seu torn, els professors de matemàtiques poden no tenir massa interès en la forma com la seua assignatura és utilitzada en altres àrees del currículum, i en conseqüència ensenyen matemàtiques en un buit de significats. Tampoc resulta estrany que un tema matemàtic aparega en una altra àrea del currículum abans d'haver estat tractat en la classe de matemàtiques, o en una forma diferent a la qual va ser apresa en matemàtiques, o sense una revisió prèvia adequada. Aquesta situació va en detriment de l'alumne, ja que probablement reba una recepta per part del professor de l'altra assignatura, o fins i tot pot resultar un greu inconvenient per a quan més tard siga introduïda en matemàtiques. En aquest sentit, no resulta estrany l'enorme coincidència entre dificultats matemàtiques en classes de matemàtiques i els continguts de matemàtics que molts professors de ciències, geografia o economia domèstica identifiquen com a causes freqüents de dificultats dels seus alumnes (percentatges, raons, gràfics i taules, horaris i unitats mètriques)

En la Taula 1, Schoenfeld (1992, citat per Pérez, 1994 i ampliat per Martí, 1997) enumera les creences més generalitzades al voltant de les matemàtiques.

Incloure la Taula 1

Resulta clar que ningú que realment desitge donar-li valor a les matemàtiques en el context educatiu pot deixar d'estar profundament preocupat per aquestes qüestions.

2. QUÈ SÓN LES MATEMÀTIQUES?

2.1. De quines matemàtiques parlem?: Les matemàtiques pures o les matemàtiques aplicades?

Quan parlem de matemàtiques podem referir-nos a diferents subcamps de continguts que es caracteritzen per fer servir mètodes, estils de pensament i formes de representació diferents. Grouws (1992) parla de l'aritmètica, l'àlgebra, la geometria, l'estadística i la probabilitat. Però, en general no es qüestiona que les matemàtiques constitueixen un únic domini intel·lectual.

No obstant, la resposta a la pregunta què es la matemàtica? ha anant canviant al llarg de la història i continuarà canviant, perquè la història de les matemàtiques és coextensiva a la historia de les civilització, i intrínsecament depenent dels sistemes de símbols i dels mitjans gràfics per a visionar la informació, del artefactes físics i del recursos tecnològics per enregistrar les dades. Així, al llarg del segle 20 la matemàtica ha evolucionat des d'alguna cosa així com "la ciència del nombre i de l'espai" cap a una caracterització més abstracta com ara "la ciència dels patrons".

La matemàtica, d'una banda, troba les seues arrels en la percepció i la descripció dels esdeveniments en el temps, en la distribució dels objectes en l'espai —és a dir, el sentit comú, però, millor organitzat, com puntualitza Freudenthal—, i en la solució de problemes pràctics. D'una altra banda, més enllà d'aquesta activitat emergeixen estructures representades simbòlicament que poden convertir-se en objectes de reflexió i elaboració, amb independència de les seues arrels en el món real.

Aquesta dualitat és coneguda com la distinció entre matemàtics aplicats i matemàtics purs. Els matemàtics purs poden extraure patrons basats en descripcions de la realitat i treballar amb ells sota una base formal. Els matemàtics aplicats, d'una altra banda, estan preocupats per construir models de la realitat que puguen contribuir a generar resultats eficaços.

La connexió entre aquestes dues vessants de la matemàtica és l'activitat de modelatge. Normalment, el modelatge d'una situació real condueix a un rang de solucions, cap d'aquests pot ser considerada exclusivament "correcta", sinó que necessiten ser valorades en funció de criteris humans com ara utilitat, propòsit i complexitat. Introduir els alumnes en aquesta perspectiva tan prompte com siga possible pot ser considerat part del procés d'enculturació en les pràctiques dels matemàtics. Malauradament, s'ha donat una excessiva concentració en la perícia de realitzar càlculs.

2.2. Característiques del llenguatge matemàtic

Cada disciplina té les seues peculiaritats; conèixer-les garanteix una millor comprensió i resulta indispensable per a entendre els mecanismes de la seua adquisició i les estratègies més oportunes per a ensenyar-les (Martí, 1996). Els coneixements matemàtics constitueixen un cas extrem: a) l'abstracció i la generalització estan a la base del procés de construcció matemàtica, i ha donat lloc al llarg de la història a conceptes cada vegada més allunyats de significats intuïtius lligats a determinats contextos de la vida quotidiana; b) està format per un llenguatge nou, allunyat del llenguatge natural, farcit d'estranys signes, el significat dels quals no és del tot transparent per als no-iniciats.

És possible que les matemàtiques començaren quan els humans pogueren diferenciar i abstraure d'un determinat context la informació numèrica d'altres informacions (forma, pes, mida,..), i que si en un principi estaven lligades a un suport tangible (pedres, parts del cos, traços,...) cada vegada han estat més abstractes i més deslligades de representacions perceptivament més riques i quotidianes. La qüestió és que sovint aquesta representació més abstracta és entesa com la ideal, definida sols amb fins interns a la lògica de les matemàtiques i que difícilment admet ser representada de forma més tangible i inductivament més accessibles als alumnes (i a la majoria de professors!). Per exemple, si un professor després de dibuixar un punt a la pissara, diu que un punt és "allò que no comporta amplària ni longitud" pot tornar boig més d'un alumne. Aquesta tensió entre la representació abstracta i ideal i la representació més tangible i intuïtiva dels coneixements matemàtics sempre està present a la classe de matemàtiques.

També resulta intrínsec a les matemàtiques el fet de buscar definicions de conceptes, lleis o teoremes, tan generals com siga possible. I si bé tota generalització sempre comporta algun grau d'abstracció, la generalització constitueix per si mateixa un element essencial del coneixement matemàtic i planteja als alumnes dificultats especifiques. En alguns casos, una generalització és una extensió d'un cas particular ("tots els nombres acabats en 0, 2, 4, 6, i 8 són divisibles per 2" és més general d'aquell que expressa "tot nombre que acaba en 0 és divisible per 2"). En altres casos, la generalització no hi és tan evident i suposa un procés constructiu, que comporta una modificació i un enriquiment del cas particular (Enunciat: En tot triangle rectangle $c^2=a^2+b^2$; Generalització: En un triangle qualsevol $c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$; la generalització es converteix en un cas particular quan C = 90º).

Les dificultats més típiques associades a la generalització són: que la relació entre el cas general i els casos particulars no sempre és fàcil de captar pels alumnes (Un mestre demana als seus alumnes que plantegen una situació que s'adapte al formalisme: 4,6 + 5,3 = 9,9. Algunes respostes: Alumne 1: *"Jaume tenia 4,6 dolços. El seu millor amic li donà 5,3 dolços i, així, va aconseguir 9,9 dolços"*; Alumne 2: *"Papà em donà 4 lliures i 6 penics. Mamà em donà 5 lliures i 3 penics. Vaig ajuntar 9 lliures i 9 penics"*. Alumne 3: *"Joan tenia 4,6 cintes de vídeo, les va vendre i va aconseguir diners suficients per comprar 5,3 borses de caramels. Calculà, aleshores, quant tenia i resultà 9,9"*), les vinculades al concepte i l'ús de "variables" (Si cada costat d'un quadrat te "y cm", quin és el perímetre del quadrat? Una de les respostes habituals és y + y + y + y, expressió que no és simplificada (4y) atès que les lletres són vistes com noms atribuïbles als costats; quan l'alumne interpreta que "si a= 5 i b= 6, aleshores ab=56, en comptes de 30"), i les generalitzacions abusives (per exemple quan s'associa multiplicar a augmentar i dividir a disminuir; o la generalització de l'algoritme de la suma en aritmètica a l'àlgebra (4+0'5=4'5; 3a + 5b = 8ab o 5 + 3x = 8x).

El llenguatge formal de les matemàtiques. Una de les primeres intuïcions que tenen els alumnes quan estan a classe de matemàtiques és que aquesta disciplina empra un llenguatge molt peculiar, format per signes variats que van des dels més familiars com els nombres i els que representen operacions (+, -, x, :), fins a uns altres menys familiars com d, dx, lim, o qualsevol lletra que representa una constant o una variable (a, b, x, y), que acaben per donar a les matemàtiques un cert aire místic i secret. La utilització de signes no és, en matemàtiques, ni un luxe ni mera qüestió d'estil; sense la formalització el caràcter abstracte i general dels coneixements matemàtics es perdria en gran part. Els signes permeten abreviar, precisar i aclarir el coneixement matemàtic. Però, els signes per si mateix no tindrien massa interès si no estigueren regits per regles internes (càlcul aritmètic, demostració geomètrica, o un algoritme algebraic) que permeten operar amb aquests i obtindre noves expressions. Les regles estan basades en un raonament lògic deductiu i s'apliquen a partir de definicions fonamentals que no es demostren (axiomes), a partir dels quals es van generant altres fórmules igualment vàlides.

En la majoria dels casos les expressions simbòliques es combinen amb altres del llenguatge natural. Així, els diferents símbols de l'escriptura matemàtica s'han agrupat en quatre grans classes:

- Els logogrames, que consisteixen en signe especialment inventats per als conceptes emprats com a un tot. Per exemple, els dígits de 0-9, els símbols %, +, @, ...
- Els pictogrames, que es basen en icones en els que el símbol està estretament relacionat amb el significat. Per exemple, un quadrat per representar un quadrat
- Els símbols de puntuació (per exemple, (), :)
- Els símbols alfabètics, normalment procedents dels alfabets grec i romà

La història està farcida d'exemples que demostren com la invenció de nous símbols ha permès avançar les matemàtiques. La invenció d'un símbol —el zero— per a representar el lloc que es queda buit en una taula de comptar va permetre descobrir el principi de posició en la numeració, o la introducció de les lletres de l'alfabet per a distingir els valors donats dels desconeguts, va possibilitar la independència respecte de l'objecte que es representa.

L'expressió "llenguatge de les matemàtiques", d'acord amb Pimm (citat per Lago i Rodriguez, 1999), fa al·lusió a un ample conjunt de referents:

- Al llenguatge verbal emprat pels alumnes i el professor a l'aula de matemàtiques
- A la utilització de determinades paraules amb finalitats matemàtiques
- Al llenguatge dels textos (p.e., els problemes verbals convencionals o els llibres de text en el seu conjunt, incloent el material gràfic i altres modes de representació).
- Al llenguatge de les formes simbòliques escrites
- Al llenguatge emprat com recolzament per l'alumne quan està fent matemàtiques (p.e., "la parla interna")

D'aquesta forma, resulta clar que la gran dificultat que té l'alumne per a aprendre matemàtiques és dominar un llenguatge, tant pel que es refereix a la comprensió conceptual o semàntica, que el vincularia fonamentalment amb el coneixement quotidià, com el domini de les regles sintàctiques i els convenis de notació propis del simbolisme matemàtic, que el relaciona fonamentalment amb el coneixement científic. O el que és el mateix, l'alumne ha de fer compatibles el llenguatge quotidià i el formal, atès que els dos coexisteixen i són necessaris. El primer resulta més significatiu i familiar (el quadrat de la suma de dos nombres és igual a la suma del seus quadrats augmentat amb el doble del seu producte), però el llenguatge algebraic és més productiu pel seu grau de generalitat i capacitat de predir nous casos -$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$-.

L'ensenyament formalista de les matemàtiques les ha identificades exclusivament amb un llenguatge, com un conjunt de regles i normes desproveïdes de qualsevol significat, per tant resulta lògic que els alumnes es comporten com a veritables autòmats formals quan es tracta de treballar en matemàtiques, i que contesten "I què?" quan se'ls crida l'atenció després d'haver realitzat el següent procés de simplificació (2=10/5=4+6/4+1=6/1=6). El llenguatge natural juga una doble funció, d'una banda, assegura la vinculació amb l'objecte de referència i impedeix la pèrdua de significat que tot procés d'abstracció comporta, i, d'una altra banda, és essencial per a tornar als símbols matemàtics el significat referencial, és a dir, assegura la seua contribució a altres ciències —física, geologia, psicologia, ...— i al mon quotidià.

Mentre que el llenguatge ordinari és redundant i ambigu, ja que la seua funció és fonamentalment la comunicació, el llenguatge matemàtic es caracteritza per:

- és abstracte i general
- és un sistema de signes autocontingut
- és rigorós, precís i no redundant
- suprimeix les intencions, les emocions i els afectes
- és teòric, impersonal i atemporal
- la finalitat fonamental és la inferència i no facilitar la comunicació

Aprendre matemàtiques és aprendre una forma de discurs que, encara que estretament relacionat amb l'activitat conceptual, manté sempre la seua especificitat com a tal discurs. Per exemple, un mateix concepte com ara la multiplicació es representa de forma diferent en el llenguatge aritmètic (x) que en l'algebraic (. o juxtaposició -ab-). Una altra conseqüència que es deriva, és que en els llenguatges formals la construcció algorísmica del vocabulari és molt més estricta que en els llenguatges naturals, per exemple conjugar un verb irregular com si fóra regular no altera majorment el significat de la frase, però en el llenguatge algebraic qualsevol error pot alterar completament el significat d'una expressió. Els alumnes han d'aprendre a substituir els codis propis del llenguatge natural pels propis del llenguatge matemàtic, la qual cosa suposa un enorme obstacle cognitiu, perquè com afirma Bruner (1986, citat per Gómez-Granell, 1996) les persones en general i el xiquets en particular tenen un pensament de tipus narratiu orientat a la comprensió de fenòmens concrets, personals i intencionals.

Aquestes característiques del llenguatge matemàtic donen lloc a una sèrie de conseqüències molt importants i que són fonamentals a l'hora d'entendre les dificultats dels alumnes:

a) Els coneixements matemàtics són interdependents i la seua estructura és jeràrquica

Qualsevol disciplina, d'acord amb les connexions lògiques de la seua estructura, exigeix, per al seu aprenentatge, un ordre determinat de comprensió. Aquest caràcter jeràrquic resulta extremat en el cas de les matemàtiques, sols fa falta pensar en els nombre naturals, sencers, fraccionaris, racionals, irracional i imaginaris, per a poder entendre aquest caràcter integratiu. Aquest fet suposa que les dificultats inicials d'un alumne pronostiquen dificultats posteriors encara majors. Ara bé, per a alguns temes és preferible trencar la uniformitat de la seqüència lògica (Macnab i Cummine, 1992).

b) El significat formal dels conceptes matemàtics no sempre coincideix amb el seu significat informal

El que és fonamental en tot sistema formal és la consistència interna dels seus enunciats, axiomes i regles de transformació. L'alumne que obté un resultat en una suma en aplicar correctament l'algoritme, ha obtingut un resultat vàlid internament. Una altra cosa és que aquest resultat denote o represente certs aspectes i transformacions de la realitat. Com diu Gómez-Granell (1995), es pot parlar de dos significats matemàtics, un intern i formal, purament matemàtic; l'altre, referencial, que vincula el sistema formal de les matemàtiques amb alguns aspectes del món real. L'alumne pot tindre dificultats en qualsevol dels dos, però el veritablement difícil és que l'alumne coordine ambdós significats. Així, un alumne associa el nombre 9 amb Laudrup, una alumna sap sumar 16 i 9 comptant galetes, però en sumar en columna obté 15 (s'ha oblidat de portar-ne una), i considera que ambdues solucions són correctes. O ben segur que les dificultats que li planteja l'eliminació del signe "+" en l'equació següent $3x = 12$, quan afirmen que $x = 9$, no es donaria si el vincularen al següent enunciat: "calcula el nombre pel qual has de multiplicar 3 per a que et done 12".

c) El llenguatge matemàtic no és assimilable al llenguatge natural

Una tendència dels alumnes (generalment encertada per qualsevol tipus de coneixements) és partir del llenguatge natural (el que ja sap) per interpretar el llenguatge formal matemàtic (que és nou), però el llenguatge matemàtic sovint ha establert una ruptura amb el llenguatge natural tant pel que fa al significat dels conceptes com a les regles de sintaxi. Alguns casos ho reflecteixen clarament: quan un alumne diu que un quadrat no té cap diagonal i que un triangle en té tres (concepte intuïtiu de diagonal com a recta inclinada respecte de l'eix vertical i de l'horitzontal), quan el professor diu "siga n un nombre" i l'alumne respon "però n és una lletra", o aquest altre cas on el professor pregunta per la diferència entre 24 i 9 (en el sentit matemàtic de la resta) i l'alumne afirma que el primer és parell i l'altre imparell (en el sentit usual). Igualment es veu clarament quan es planteja el següent problema a estudiants universitaris: "En una aula hi ha sis voltes més alumnes que professors. Si se sap que hi ha 60 estudiants, quants professors hi ha? La resposta numèrica no els planteja cap dificultat, però si a continuació se'ls demana que escriguen una fórmula on es reflectisca la relació solen escriure $6E = P$ (en lloc de $6P = E$), d'acord amb l'ordre dels elements de la frase (sis voltes més alumnes que professors).

d) L'aplicació dels algoritmes no és independent del significat

Per a molts estudiants les matemàtiques consisteixen fonamentalment a aplicar les mateixes regles a problemes semblants. Com moltes d'aquestes regles són veritables algoritmes, una de les activitats preferibles dels alumnes és identificar aquells elements del problema que els permeta associar-lo amb determinada estratègia de càlcul ("és un problema de multiplicar", "és un problema de simplificar",...) amb la finalitat més general de categoritzar situacions que els permeta simplificar la carrega mental. La qüestió és que sovint fan servir indicis superficial i no veritables significats matemàtics. Un cas extrem és la tendència a aplicar un càlcul sempre que hi haja nombres (quina edat té el capità d'un vaixell que transporta 26 corders i 10 cabres?), o generalitzar algunes regularitats assimilades per l'alumne en un context (com és el dels nombres naturals, o l'aritmètica) a un altre diferent (per exemple als nombres fraccionaris, o l'àlgebra). Per exemple, quan un alumne respon que el valor del producte $(x-a)(x-b)....(x-z)$ és zero. O aquest altre on 100 alumnes de 101 de 4^t^ i 5^è^ varen donar solucions numèriques al següent problema: "Ahir 33 vaixells arribaren al port, i 54 l'abandonaren. A migdia, encara quedaven 40 vaixells. Quants vaixells romanien ahir de vesprada al port?". O el problema citat per De Corte (1993) sobre les respostes que una mostra ampla d'alumnes americans donen al següent problema: "Un autobús de l'exèrcit te capacitat per a 36 soldats. Si es volen traslladar 1128 soldats, quants autobusos faran falta?". El 70 % fa correctament la divisió (quocient 31 i resta 12), però un 18 % dóna com a resposta 31 autobusos, un 29 % que 31 autobusos i es queden 12 soldats, i tan sols un 23 % contesta que faran falta 32 autobusos.

El llenguatge matemàtic és sense dubtes un vehicle necessari per a comunicar el pensament racional, i encara que les seues relacions amb el llenguatge quotidià no sempre són harmòniques (fins i tot hi ha algunes paraules que tenen un significat en el llenguatge matemàtic —prim, matriu, arrel, índex,...— completament diferent del que tenen en el quotidià), aquest últim resulta essencial en el procés d'aprenentatge del llenguatge matemàtic (Fernández, 1988). Així, les dificultats en matemàtiques es redueixen notablement quan es fa servir el llenguatge quotidià per a explicar com s'obté la solució d'un problema o com es realitza algun càlcul (vegeu un exemple més endavant), el mestre parla i escolta els alumnes quan fan matemàtiques o es presta atenció als diferents aspectes que afecten l'habilitat dels alumnes en llegir matemàtiques —llenguatge quotidià, vocabulari tècnic, notació matemàtica, relació de les matemàtiques amb el context—. El test de Cloze ha estat desenvolupat per a valorar la comprensió lectora en matemàtiques.

En opinió de Gómez-Granell (1997), el que veritablement fa falta és redefinir l'autèntic sentit i els objectius del coneixement matemàtic que s'han d'ensenyar a l'escola, tan diferents del coneixement matemàtic quotidià com del científic, la qual cosa passa per:

a) Reconèixer l'especificitat del coneixement i del llenguatge matemàtic, la qual cosa ens situa tan lluny de les postures formalistes per a les quals el llenguatge és una mera sintaxi, com de les intuïtivistes o conceptualistes.
b) Reconèixer que el coneixement matemàtic té dues finalitats independents l'una de l'altra: incrementar el propi coneixement formal matemàtic, i vincular-lo amb els usos i aplicacions tant científics com socials que es donen del coneixement matemàtic.

Fora d'altres consideracions, la veritat és que els xiquets quan resolen a la classe de matemàtiques, per exemple, problemes de comprar i de vendre, el que realment estan fent és aprendre matemàtiques, perquè ni estan en el mercat ni van a perdre els seus diners.

2.3. L'àrea de matemàtiques als currículums oficials

Com ensenyen les matemàtiques els professors està en funció del model que va ser emprat per instruir-los a ells o de la formació inicial rebuda a les escoles de magisteri o al CAP. Model que, d'una altra banda, se'ls presenta com l'únic possible. No obstant això, també cal destacar el caire innovador adoptat per molts professors i col·lectius de renovació o formació permanent, entre els quals destaca com a pioner el Grup Zero de València.

En aquest sentit resulta rellevant que ens fixem en quina ha estat l'evolució dels diferents plantejaments matemàtics en el camp legislatiu, a partir de la Llei General d'Educació de 1970 (LGE).

Les matemàtiques en la LGE són enteses fonamentalment com una forma d'expressió, com un llenguatge en el qual es prioritzen els aspectes sintàctics i formalitzadors vers els semàntics i els personals i sociohistòrics. La meta de les matemàtiques és ordenar els coneixements i crear estructures formals, la qual cosa es reflecteix en el *boom* de les "matemàtiques modernes", que es caracteritza per pretendre que tot es treballe a partir de la teoria de conjunts. Els continguts que s'havia d'ensenyar es prescrivien per a cadascun dels cursos.

Com a aaspectes positius cal destacar la fonamentació que es fa del concepte de nombre i de cadascuna de les operacions, i una temporalització més ampla per a l'ensenyament dels continguts aritmètics. Entre els aspectes negatius cal assenyalar l'absència d'una teoria de l'aprenentatge i de metodologies pròpies que es va resoldre amb l'ús dels principis conductistes, l'abús de la teoria de conjunts, l'oblit de la resolució de problemes, i una excessiva focalització en la mecanització i domini dels algoritmes.

En1982 varen sorgir els programes renovats on el referent temporal és el cicle i no el curs. Llevat això, el model "conjuntista" arrela més i es continua pensant que la formalització és un punt de partida. Les teories piagetianes guien la selecció de continguts i d'activitats.

En el Reial Decret 20/1992 de la Generalitat Valenciana, es conceptualitza l'educació matemàtica com un procés, històric i personal, de construcció empírica i inductiva del coneixement matemàtic, vinculat a les experiències dels alumnes i a un context de resolució de problemes, en el qual es presta atenció tant a les destreses cognitives de caire general com a les que tenen un valor instrumental i aplicat. L'ensenyament obligatori ha de garantir que tots els estudiants tinguen l'oportunitat de cobrir les necessitats matemàtiques que genera una societat altament tecnificada com l'actual —comptar, classificar, raonar lògicament, prendre mesures, interpretar dades i gràfics, calcular,...—. La formalització i estructuració del coneixement matemàtic ja no hi és un punt de partida, sinó d'arribada.

Els criteris de selecció dels continguts matemàtics en l'educació primària han estat respectar el procés psicoevolutiu dels alumnes, potenciar els continguts procedimentals, presentar-los en contextos diversos —resolució de problemes, jocs, recerques,...—, incorporar els continguts insuficientment tractats —com ara la geometria o la mesura—, prestar atenció a elements tecnològics com ara l'ús de la calculadora i l'ordinador, eliminar l'arbitrarietat dels processos de E/A, acceptar que no es tracta d'unes matemàtiques exclusivament preparatòries d'aprenentatges posteriors més complexos, i situar en un lloc preferent els continguts relatius a les actituds envers les matemàtiques i les activitats matemàtiques. En definitiva, es tracta de primar l'ús i les aplicacions dels instruments matemàtics al llarg d'un procés de construcció progressiva dels conceptes i eines matemàtiques, i potenciar així les capacitats de raonament logicomatemàtic.

A l'àmbit de la Comunitat Valenciana, els continguts matemàtics es presenten estructurats en sis blocs. Els quatre primers presenten els diferents tipus de continguts —conceptuals, procedimentals i actitudinals— directament relacionats amb camps temàtics —aritmètica, geometria, mesurament, estadística i atzar—, i els dos últims expliciten continguts procedimentals i actitudinals més generals. La presentació dels blocs haurà de ser de forma interrelacionada i cíclica, atenent a les seues vinculacions i als diferents nivells de complexitat que poden adoptar els diferents continguts inclosos en cadascun dels blocs. A continuació es fa una relació dels blocs, seguits dels seus principals descriptors

Bloc 1: Nombres i operacions

- nombres naturals, enters, fraccionaris i racionals
- el sistema de numeració decimal
- comprensió i ús de les operacions
- càlcul algorísmic
- llenguatge aritmètic
- relació entre els nombres

Bloc 2: El mesurament

* magnituds i sistemes de mesurament
* fer mesuraments en diversos contextos
* escales, mapes, plànols i maquetes

Bloc 3: Geometria

* descripció de posicions i moviments
* reconèixer, descriure, classificar, nomenar i definir formes i configuracions geomètriques de tres, dues i una dimensió
* construir, dibuixar, modificar i explorar formes i configuracions geomètriques

Bloc 4: Estadística. Atzar. Probabilitat

* recollida, registre i recompte de dades
* presentació de dades
* anàlisis de dades
* lectura i interpretació de taules de freqüències, de gràfics estadístics i de mesuraments
* reconeixement del caràcter aleatori d'una experiència
* assignació de probabilitats
* situacions combinatòries

Bloc 5: Resolució de problemes

* resolució de problemes: fases, estratègies i mètodes
* jocs
* algoritmes

Bloc 6: Actitud davant de les matemàtiques

* interès per buscar solucions als problemes i situacions quotidianes i comprovar si les solucions trobades són lògiques, possibles, suficients
* valoració de la necessitat de reflexió, i raonament
* interès per aprendre, per descobrir què són les matemàtiques
* col·laboració activa i responsable en el treball en equip
* valoració de la importància d'exposar amb claredat els processos seguits en la resolució de problemes i les solucions d'aquests

* sensibilitat i gust per la presentació dels treballs de manera ordenada
* interès per trobar altres solucions a problemes ja resolts, i contrastar els resultats amb els companys
* descobriment de la importància d'analitzar críticament les informacions, judicis,... que presenten a través d'instruments matemàtics

3. COM S'APRENEN LES MATEMÀTIQUES?

En opinió de Resnick i Ford (1990), els psicòlegs, durant molt de temps, només s'han preocupat per aconseguir que els continguts matemàtics encaixaren en les lleis generals dels processos d'aprenentatge. Actualment, està sorgint una psicologia de les matemàtiques que se centra directament en els processos de pensament matemàtic i en la manera en què les persones arriben a comprendre l'estructura de les matemàtiques. Es tracta d'una psicologia que considera important el contingut i que estudia el comportament de les persones quan se'ls plantegen tasques complexes habituals a l'escola, en el joc o al treball. En aquest context, està construint-se una teoria de l'ensenyament matemàtic que es basa tant en el contingut com en els principis de l'aprenentatge i de la cognició, on conflueixen els interessos dels educadors (les tasques complexes o habituals), i dels psicòlegs de l'aprenentatge (com les persones executen les tasques matemàtiques o com les persones adquireixen les habilitats matemàtiques) i de la psicologia cognitiva (com les persones aprenen a pensar de forma matemàtica).

Resnick i Ford (1990) han organitzat els desenvolupament de la psicologia matemàtica al voltant de dues formes d'entendre les matemàtiques: les matemàtiques com a aritmètica o càlcul i les matemàtiques com a comprensió conceptual i com a resolució de problemes.

a) Quan es consideren les matemàtiques com a càlcul, les matemàtiques s'identifiquen amb l'aritmètica, amb un poc d'àlgebra al final de l'escolaritat, o l'aprenentatge de regles i procediments per a realitzar càlculs. Aquí trobem els treballs de Thorndike, els de Gagne i els de Case. El primer afirma que la millor forma d'assolir velocitat i exactitud en el càlcul són els exercicis i la pràctica. Gagne proposa les jerarquies d'aprenentatge com la millor forma d'organitzar l'ensenyament, i Case s'interessa per l'anàlisi de l'execució de tasques, mitjançant l'anàlisi dels errors, els estudis de velocitat de reacció o de simulació per ordinador.

b) Les matemàtiques com a comprensió conceptual i com resolució de problemes. En aquesta perspectiva es troben dues grans aproximacions: 1) d'una banda, es poden entendre les matemàtiques com una forma de pensar i raonar, i per tant considerar que l'objecte de les matemàtiques és la resolució de problemes. Aquesta orientació està fonamentalment representada per la Gestalt i les teories dels processament de la informació. 2) D'una altra banda, ens trobem amb les teories que reivindiquen la importància de l'aprenentatge dels conceptes fonamentals de les matemàtiques (conjunts, operacions, funcions,...), que el doten d'una ESTRUCTURA, i que porta a considerar les matemàtiques com un conjunt integrat de conceptes, regles i procediments, organitzats i interrelacionats entre si, que conformen una disciplina determinada.

Des de la psicologia hi ha tres formes diferents de definir el que és una estructura o tres tipus diferents d'estructures psicològiques: la Gestalt se centra en l'estructura del camp psicològic, és a dir, en la tendència de la percepció i del pensament a organitzar-se en agregats funcionals que dominen els elements objectius de l'experiència i que determinen les seues interrelacions. Per a Piaget el desenvolupament de les estructures lògiques de la ment humana són les que determinen la comprensió dels successos i manipulacions matemàtiques. Per últim, i com a resultat de l'aplicació del processament de la informació a l'estudi dels processos cognitius, ens trobem amb les estructures hipotètiques del coneixement o representacions cognitives dels conceptes matemàtics.

Al seu torn, Macnab i Cummine (1992) distingeixen entre les teories centrades en el pensament cognitiu en general, i que utilitzen les matemàtiques pel seu alt contingut cognitiu (Piaget, Gagne i Case), i les teories del coneixement especialment centrades en el pensament matemàtic (Bruner, Dienes, Skemp, la intuïció matemàtica proposada per la Gestalt, les orientacions constructivistes i les teories del processament de la informació).

L'anàlisi de la interrelació entre les teories psicològiques i l'ensenyament de les matemàtiques, permet a De Corte, Greer i Verschaffel (1997) identificar els següents moviments i figures clau: l'empirisme i l'associacionisme representat per Thorndike, la complexitat de la cognició dels xiquets representada per Piaget, els processos d'enculturalització representats per Vygotsky, l'estructura i l'insight en la solució de problemes matemàtics representats pels psicòlegs de la Gestalt i els treballs de Polya, i la doble revolució cognitiva, concretada en la utilització de l'ordinador i l'anàlisi de prototips de processament, i la incorporació dels aspectes no tan "racionals" (les actituds, la intuïció, les creences, les emocions, la mediació visual del pensament), que permet parlar del coneixement situat i de la metàfora de l'aprenentatge cognitiu.

A continuació, fent servir el esquema de teories generals i teories específiques, fem una breu presentació de les principals aproximacions anomenades en aquesta presentació.

3.1. Teories generals que fonamenten l'aprenentatge de les matemàtiques

El connexionisme de Thorndike. Des d'una perspectiva històrica, al behaviorisme se li ha de reconèixer la seua influència en establir la "tradició científica empírica", caracteritzada per la precisió, l'objectivitat i la lògica.

Els seus principis fonamentals són que les idees més complexes són construïdes a partir de l'associació d'altres més simples, i que l'acció realitzada depèn de la força del "vincles" entre la situació i les diverses accions possibles. Així doncs, l'aprenentatge tindrà lloc mitjançant l'enfortiment diferencial, per reforçament. L'extensió a l'educació matemàtica, i en especial a l'aritmètica, serà el disseny científic d'un programa d'associacions d'estímuls-respostes que incorpore recompenses apropiades.

Conceptualitza l'aprenentatge com un increment jerarquitzat on els errors han de ser evitats o extingits immediatament, l'ensenyament com el reforçament de la conducta, la motivació com a directament mediada per reforços i càstigs, i l'avaluació com referida als objectius conductuals. L'educació matemàtica sols està interessada per les respostes correctes, precises i inequívoques obtingudes mitjançant l'aplicació de procediments específics. Una aplicació directa es allò que es coneix com *ensenyament directe* que argumenta a favor d'"identificar explícitament allò que es vol que els alumnes aprenguen (objectius, vincles), l'exposició clara d'aquesta informació, considerable quantitat d'exercicis i de pràctica exclusivament sobre aquesta informació, i exàmens sobre aquesta mateixa informació".

El principal mètode són els exercicis i la pràctica. És a dir, presentar a l'alumne quantitats adequades d'exercicis en l'ordre adequat per a cada tipus de problema. Ara bé, Thorndike no es preocupà per donar resposta a quins vincles eren més fàcils, quina quantitat de pràctica era suficient, o quina era la millor manera d'organitzar la pràctica dels diferents tipus de vincles. També va insistir en què l'escola hauria d'afavorir les situacions reals i que únicament una part xicoteta d'exercicis haurien d'estar dirigits a la formació de vincles aïllats. Però, el ben cert, és que tothom recordem la quantitat de pàgines amb problemes idèntics amb l'única variació de les quantitats emprades que hem resolt a les classes de matemàtiques.

Jerarquies d'aprenentatge i anàlisi de tasques (R. Gagne). És una noció molt familiar per a molts professors de matemàtiques. És un procediment d'anàlisi d'una tasca, una tècnica o procés d'anar trobant components simples o subtasques, de forma que: a) cada subtasca és un component d'una tasca donada, i b) cada subtasca ha de ser dominada abans que la tasca puga ser realitzada amb èxit.

Aquest plantejament és totalment contrari a l'enfocament evolutiu. No importa la complexitat d'una tasca. Totes les tasques poden ser dominades si es proporciona als alumnes una jerarquia de subtasques apropiada, amb independència que aquesta haja de ser més o menys llarga.

Algunes crítiques que se li han plantejat són:

a) Per al que aprèn es tracta d'un procés d'aprenentatge sintètic, i pot ser que no sàpiga cap on va i que quede encallat en alguna de les subtasques.

b) No explica com s'aprenen les subtasques o obliga a desenvolupar procediments particulars que ajuden l'alumne en cada subtasca, que hauran de ser abandonats quan se situe en nivells superiors. Per exemple, en la suma de nombres sencers s'utilitza un model vectorial; però aquest model no és aplicable a la multiplicació de nombres sencers. Una altre exemple: en resoldre equacions simples l'alumne aprèn com a regla general "col·loca totes les incògnites a un costat i els termes independents a l'altre", però aquesta regla no és vàlida per a resoldre equacions quadràtiques pel mètode de factorització.

Piaget i la teoria genètica. Afirma que el coneixement no és una mera còpia de la realitat, sinó el resultat d'una construcció lògica. Distingeix entre dos tipus de coneixement: el físic o el coneixement dels objectes de la realitat exterior, i el logicomatemàtic que està format per relacions construïdes per cada individu. També planteja dues formes de conèixer: l'abstracció simple o de les propietats que es poden observar en els objectes i l'abstracció reflexiva, que és quan l'alumne crea relacions entre els objectes que no són directament observables (l'objecte A és major que l'objecte B).

Piaget planteja un desenvolupament que segueix linealment una sèrie d'estadis (manipulatiu, intuïtiu, operacions concretes, operacions formals), cadascun es caracteritza per una estructura cognitiva, estructura que delimita el nivell de competència de l'individu. El subjecte mitjançant processos d'assimilació i acomodació va progressant dins del mateix estadi, i d'un estadi al següent.

El conflicte cognitiu és el motor de l'aprenentatge: les noves idees poden entrar en conflicte amb les que el subjecte ja posseeix, donant lloc a una situació de desequilibre que cal resoldre. Aquesta teoria planteja la necessitat d'ajustar-se al nivell de desenvolupament de l'alumne. En un sentit estricte, limita el tipus de raonament i comprensió que pot esperar-se d'aquest alumne. Així, per exemple, en el període d'operacions concretes que es basa en la manipulació de materials físics només són possibles operacions amb resultats immediats (23 + 14 = 27), i no pot esperar-se que l'alumne realitze operacions amb resultats mediats (23 + 14 = 14 + 23; no implica un resultat immediat, però és possible trobar-hi un resultat), ni expressions que no tinguen cap resultat (2x + 3y; la necessitat de trobar un resultat pot explicar que els alumnes donen com a resultat 5xy). Una visió més positiva de l'ajustament, és aquella que reconeix la capacitat i la responsabilitat del mestre d'influir en el xiquet o xiqueta.

En el procés de desenvolupament de l'abstracció, Dienes considera sis etapes:

a) Primera etapa o fase de joc lliure. En aquesta primera fase el concepte d'entorn o d'adaptació a l'entorn és fonamental. L'aprenentatge no és ni mes ni menys que la resposta que el subjecte troba per tal d'adaptar-se a l'entorn. En aquest sentit, Dienes afirma que tots els jocs infantils consisteixen en una espècie d'exercici que permet al xiquet l'aprenentatge de situacions. En conseqüència, si l'entorn és incapaç de presentar-li uns estímuls per aconseguir l'aprenentatge d'una noció matemàtica determinada, caldrà inventar-lo, tal com ell va fer amb els "blocs lògics". En aquesta fase, l'alumne no pot manipular símbols per tal de produir seqüències lògiques.

b) Segona etapa o dels jocs estructurats. Després d'un període d'adaptació el xiquet s'adonarà que hi ha coses que no poden fer-se, que hi ha condicions per tal de d'assolir els objectius,... L'alumne comença a estar disposat a jugar d'acord amb unes restriccions que se li imposen artificialment, i que consisteixen en un conjunt de regles que el conduiran a les estructures matemàtiques proposades.

c) Tercera etapa. Jugar a jocs estructurats no és aprendre matemàtiques. És necessari que el xiquet faça abstraccions. La qual cosa s'aconsegueix quan fem que el xiquet jugue a jocs que tenen la mateixa estructura, però amb aparença diferent, de forma que acabe descobrint el que hi ha de semblant en els jocs practicats.

d) Quarta etapa. Abans de poder fer una abstracció plena, l'alumne necessita un procés de representació, que el permeta parlar del que ha entès, observar-lo des de fora, eixir-se del conjunt de jocs i reflexionar sobre aquests.

e) Cinquena etapa. Una vegada feta la representació, podrà examinar-la i adonar-se de les propietats de l'abstracció realitzada. És a dir, necessita fer una descripció d'allò que ha representat, per a la qual cosa necessita d'un llenguatge.

f) Sisena etapa. Atesa la impossibilitat de descriure totes les propietats, es prenen un nombre mínim (axiomes) i s'inventa un procediment per a deduir els altres (demostracions i teoremes).

Les idees de Case. Case considera que una de les principals raons de les dificultats en l'aprenentatge és el conflicte entre la "intuïció ingènua de l'alumne", i que aquest percep com a correcta, i el que indica l'anàlisi lògica i racional. En conseqüència, esperar la "bona disposició" de l'alumne no és una estratègia realista; la permanent extensió de la jerarquia tampoc resol el problema. Per a resoldre aquest conflicte Case suggereix complementar l'anàlisi de tasques amb l'enfocament evolutiu, i proposa un mètode en tres etapes:

1. Informar-se sobre com el xiquet tracta de realitzar la tasca si no sap com fer-la.
2. Motivar l'aprenentatge del mètode espontani, ressaltant les limitacions de les idees ingènues.
3. Dissenyar jerarquies d'aprenentatge, imposant la de menor càrrega de memòria possible.

En principi, no es pot esperar que els alumnes sempre cometen errors ni sembla que siga una bona estratègia invitar-los a cometre'ls. D'una altra banda, hem de ser conscients de la dificultat que suposa per al professor preveure quins procediments inadequats utilitzaran els alumnes, si n'hi ha, o donar raons hipotètiques per als errors que mai cometran. Per últim, exigir que les jerarquies tinguen la mínima càrrega pot resultar en jerarquies més ràpides, però també que estiguen menys ordenades o que exigisquen més treballs intermedis.

Vygostky i l'aprenentatge sociocultural. A diferencia de Piaget, per a Vygotsky l'ambient està format per objectes i per persones, de forma que són aquestes les que medien o actuen de pont entre el que aprèn i l'objecte d'aprenentatge (mediació social); però, d'una altra banda, tota relació entre persones està mediada pels objectes o instruments cultural generats per la humanitat per a poder desenvolupar-se (mediació instrumental). Així doncs, l'aprenentatge consisteix en l'apropiació per part del subjecte de la cultura (instruments culturals), que pel seu caràcter social i històric, fa impossible que el subjecte la faça seua sense la participació o l'ajuda dels agents socials (mediació social). La zona de desenvolupament pròxim (ZDP) és el mecanisme pedagògic elaborat per Vygotsky per tal de fer operativa la seua teoria.

Promoure la interacció entre alumnes i entre el professor i els alumnes, col·laborar, cooperar, compartir i treballar en equip, són propostes derivades fonamentalment del plantejament vygotskià, encara que no en exclusiva.

La perspectiva estructuralista i l'aprenentatge en espiral de Bruner. L'estucturalisme defensa l'aprenentatge dels principis bàsics de la matèria i la seua organització lògica. Per exemple, si aprenem que la resta és l'operació inversa de la suma ($a + b - b = a$; $a - b + b = a$) la podrem aplicar a situacions que van més enllà de "prendre prestat de la unitat superior". Altres principis unificadors són les nocions d'estructura de grup i d'anell, no com a tals, sinó en termes de les seues propietats —associativitat, commutativitat, distributivitat, identitat i element invers—.

Bruner descriu l'adquisició del coneixement com el domini successiu de tres sistemes de representació o codificació:

- Enactiva (accions). La representació implica un moviment físic, per exemple, la manipulació de materials concrets.
- Icònica (imatges). La representació es desprèn de l'objecte, però encara es visualitza. Per exemple, un alumne no necessita usar objectes per a calcular $4 + 9$, però mentalment pot visualitzar aqueixos objectes per a obtindre la resposta.
- simbòlica (símbols). Utilitza símbols per a representar idees i processos. El punt final és l'ús purament sintàctic dels símbols, el tractament dels símbols com si foren objectes reals. La regla "canvi de costat, canvi de signe" en la resolució d'una equació és un exemple.

Els que aprenen necessiten tindre experiència amb les tres maneres de representació. És per aquesta raó que Bruner proposa un currículum disposat en espiral, on les idees significatives són presentades al xiquet o xiqueta en els primers anys de forma que els puga comprendre, i progressivament són reintroduïdes de forma més complexa. Aquesta idea també és vàlida per a cada tema. Bruner també destaca la necessitat de partir de la motivació intrínseca de l'alumne.

L'estructuralisme ha estat criticat per l'excessiu èmfasi en el formalisme conceptual i notacional (l'abstracció formal és fonamental per al coneixement matemàtic, però tan sols la posseeixen alguns alumnes molt avantatjats en l'edat escolar) i per exigir un notable compromís del professor (ha de tindre una forta intuïció, tant de la natura del pensament matemàtic com de les formes en què treballa la ment infantil). Les etapes proposades responen a la pregunta com procedir, però no expliquen per què funciona allò que es fa. El resultat és que la percepció que gran part dels alumnes tenen de les matemàtiques està molt a prop a la d'un eriçó —moltes espines individuals però cap connectada directament amb l'altra—.

Teoria de la Gestalt. El punt de vista gestàltic introdueix la comprensió intuïtiva en l'aprenentatge de les matemàtiques. Una gestalt és la percepció que una forma completa és alguna cosa més que, simplement, les parts constituents. El model **::** pot ser percebut com un quadrat encara que els seus components siguen 4 punts. Si es percep la seqüència 149162536496481 no com una seqüència aleatòria de nombres, sinó com els quadrats de 1, 2, 3,...9 s'ha format una gestalt i la memorització és molt més fàcil. Els jocs que es basen a anar presentat parts d'una imatge fins que algú dels participants descobrisca la imatge es basen en el coneixement gestàltic.

Per tal que una explicació siga convincent s'ha de fomentar en l'estudiant el sentiment "ara veig perquè treballa així", és a dir, cal que tinga lloc algun pensament gestalt. Per exemple, si es considera la sostracció de nombres sencers com una suma complementaria, de forma que 5 - (-3) puga ser interpretat com què cal afegir a (-3) per tal que done 5, aleshores totes les sostraccions poden ser resoltes sense se cap regla formal (el signe - canvia de signe al nombre que precedeix, de forma que 5 - (-3) = 5 + 3). L'alumne d'aquesta forma assoleix una intuïció del procés de sostracció, és a dir, una gestalt.

Ara bé, com sap el professor l'estructuració cognitiva que està tenint lloc en la ment infantil?. El professor pot tractar de determinar-la a partir dels errors dels alumnes o reflexionant, però res revelarà necessàriament quines estructures realment estan actuant, i l'alumne no ens ho pot dir perquè no té consciència de la forma amb què intenta donar significat.

El processament de la informació. A pesar que hi ha diferents aproximacions a la definició del processament de la informació, totes tenen en comú que descriuen els processos de pensament en termes de manipulació de símbols, i que se centren en el procés de representació de la informació i a descriure com es produeix la cognició.

De la mateixa manera, la majoria d'autors estan d'acord a acceptar l'existència de tres nivells o estructures en el processament de la informació: sensorial o registre d'entrada, una memòria a curt termini o de treball i una memòria a llarg termini. A més a més de les estructures, la ment humana posseeix un repertori d'estratègies de resolució de problemes, que ajuden a interpretar-los, a trobar la informació, a generar relacions entre ítems emmagatzemats de forma independent, i a dissenyar un pla d'acció.

L'aprenentatge significatiu. Ausubel va definir un aprenentatge significatiu com aquell oposat a un aprenentatge repetitiu i mecànic. Es tracta d'un aprenentatge que es basa en la relació entre conceptes, d'una banda, i entre teoria i pràctica, d'una altra banda. El factor més important són els coneixements previs que ja posseeix l'alumne. En aquest sentit, el nou coneixement ha de guardar una distancia òptima amb els coneixements previs, perquè tant si és mínima com si ho és excessiva comporta un procés de desmotivació; en el primer cas l'alumne no sent la necessitat de modificar els seus esquemes de coneixement i en el segon cas l'alumne no té cap possibilitat de poder atribuir significats. Les condicions per tal que tinga lloc un aprenentatge significatiu són: que l'alumne tinga els coneixements o experiències prèvies necessàries on poder connectar els nous, que aquests siguen significatius i no arbitraris, i finalment que l'alumne tinga una actitud positiva cap a l'aprenentatge de les matemàtiques.

Wittrock destaca que l'alumne és qui ha d'assumir la responsabilitat de produir elaboracions mentals o de fer transformacions cognitives, com aara classificacions, induccions, deduccions, imatges mentals, resums o dibuixos, que li permeten establir relacions significatives. Ara bé, els professors han de prestar atenció a les diferències individuals en motivació i en el processament de la informació.

3.2. Teories especifiques de l'aprenentatge de les matemàtiques

La contribució de Skemp (1980): les formes de comprensió. Skemp afirma que les matemàtiques són un sistema de conceptes organitzats en diferents nivells d'abstracció i que l'aprenentatge de les matemàtiques depèn molt d'un bon ensenyament. L'alumne no té cap forma possible de comprendre o incorporar conceptes de nivell superior als que ja té, excepte que aquests li siguen comunicats.

Skemp distingeix entre dos tipus de comprensió: relacional, que es refereix a la comprensió relativa a com treballa alguna cosa i al per què treballa així, i comprensió instrumental, que sols implica el "com". D'aquesta forma, quan contrastem comprensió/aprenentatge rutinari, estem referint-nos a la comprensió relacional. D'una altra banda, en la seua opinió, la comprensió instrumental va més enllà de l'aprenentatge mecànic, i és per això que reivindica també la importància de les manipulacions rutinàries: la potència de les matemàtiques augmenta en la mesura en què s'incrementa el nombre de processos que poden realitzar-se sense pensar, i la nostra comprensió relacional augmenta en la mesura en què som capaços de realitzar amb èxit procediments instrumentals.

Byers i Herscovics han identificat dos tipus de comprensió més (teoria tetraèdrica):

* Comprensió formal. Capacitat d'utilitzar correctament formes matemàtiques escrites. Suposa el coneixement del que signifiquen els distints símbols escrits. L'ús incorrecte de la notació matemàtica pot deixar sense sentit la forma verbal, i explica els errors conceptuals en les següents equacions $2x + 3 = 9$ ($2x + 3 = 9 = 2x = \quad x = 3$) i $\sin x = 1/2$ ($\sin x = 1/2 = x = \sin 1/2 = 30º$).
* Comprensió intuïtiva. Es refereix a l'activitat mental de l'alumne que sense saber per què, i sense que se li haja mostrat cap mètode, permet conèixer com pot obtindre un resultat. Aquesta comprensió està molt lligada als principis de la Gestalt.

Skemp recomana que les experiències sensorials i motores precedisquen a les de paper i llapis, que el professor evite l'aprenentatge mecànic i s'assegure permanentment que l'alumne comprèn els conceptes. Cal, doncs, identificar com el xiquet s'enfronta amb situacions matemàtiques noves o relacionades, i no sols comprovar la seua habilitat —precisió i velocitat— a l'hora de resoldre còmputs mecànics. El coneixement de les definicions tampoc n'assegura la comprensió.

La teoria de l'aprenentatge de les matemàtiques proposada per Dienes. La proposta de Dienes es fonamenta en la teoria de Piaget i en la teoria de Bruner. Intenta combinar els principis psicològics i les capacitats cognitives dels alumnes amb els principis i les estructures matemàtiques. Una característica de la seua proposta és la utilització de materials i de jocs concrets en seqüències d'aprenentatge acuradament estructurades.

En el disseny de les seqüències d'aprenentatge es fan servir quatre principis:

* El principi dinàmic. Cal proporcionar l'alumne activitats que aporten experiències suficients.
* El principi constructiu o inductiu. Cal anar des del cas particular fins al general.
* El principi de la variabilitat matemàtica. Cal variar l'estructura matemàtica a partir de la qual el nou concepte es desenvolupa.
* El principi de la variabilitat perceptiva. Cal variar suficientment el marc experiencial per a promoure l'abstracció i evitar fixacions en casos particulars.

El treball més conegut de Dienes són els Blocs Aritmètics Multibase. En la representació en base sis, per exemple, existeixen cubs (normalment d'1 cm de costat), barres (equival a 6 cubs), plaques (equival a 6 barres) i blocs (equival a 6 plaques; les dimensions d'un bloc són 6 cm x 6 cm x 6 cm). Quan les regles es canvien en una base concreta, estan fent-se servir els principis dinàmics i constructiu; utilitzar el material en diferents bases es correspon amb el principi de variabilitat matemàtica; utilitzar un altre material diferent als blocs és una aplicació del principi de variabilitat perceptiva.

El model de Vergnaud. Vergnaud introdueix la noció de "camp conceptual", i el defineix com un conjunt de problemes o situacions problema que requereixen, per a abordar-los, utilitzar conceptes, procediments i representacions de diferents tipus. Els conceptes que formen part d'un mateix camp no poden estudiar-se inconnexament. Per descobrir camps conceptuals és necessari fer una anàlisi de la interdependència dels conceptes. Els camps conceptuals també mantenen relacions entre si.

D'acord amb Vergnaud, per a poder estudiar la formació d'un concepte cal considerar tres aspectes diferenciats: el camp conceptual, o conjunt de situacions de referència que donen sentit al concepte; el conjunt de propietats i relacions invariants que l'alumne ha d'extraure per tal de tractar la situació; i el conjunt de significants lingüístics i simbòlics susceptibles de representar el concepte i les seues propietats.

Las situacions didàctiques de Brousseau. Aprendre és sinònim d'adaptació a les diferents situacions que el medi planteja. La missió del mestre és triar aquelles situacions que faciliten aquestes adaptacions. Brousseau estableix que hi ha quatre situacions o tipus d'interacció del xiquet amb el saber, i que cada situació està associada a una dialèctica:

a) Dialèctica de l'acció. Se presenta al xiquet una situació que li planteja un problema, de forma que la solució al problema és precisament el coneixement que se li vol ensenyar. El xiquet actua sobre la situació i obté informació dels resultats de les seues accions, la qual cosa li permet millorar o desestimar estratègies i crear models implícits.

b) Dialèctica de la fórmulació. A vegades el saber es presenta com un missatge. Els alumnes intercanvien amb altres companys els resultats de la fase anterior. Com a resultat l'alumne genera un model explícit.

c) Dialèctica de la validació. Ara l'alumne ha de provar que el model que ha creat és vàlid, és a dir, ha de construir una demostració significativa. Una vegada que és acceptada per tots passa a formar part dels teoremes coneguts, i podrà ser utilitzat en la validació d'altres models.

d) Dialèctica de la institucionalització. Les situacions d'institucionalització tenen la missió de fer que el nou coneixement passe a formar part d'un coneixement social (per exemple, l'algoritme de la suma) i del patrimoni matemàtic que va més enllà de la classe.

3.3. Les aptituds i disposició per convertir-se en una aprenent competent

Per aptitud entenem qualsevol característica de l'estudiant que puga influir en la seua activitat i resultats, en el seu aprenentatge.

En aquest apartat ens hem centrat en el cas de la solució de problemes per diverses raons: la solució de problemes és una activitat nuclear de fer matemàtiques, és el principal objectiu de l'educació matemàtica i ha estat extensament estudiada en els darrers 15 anys. Actualment hi ha un consens ampli sobre quines són les principals categories d'aptituds que ajuden a explicar una solució de problemes habilitosa:

Coneixement de l'àmbit específic (coneixement matemàtic). El coneixement d'un àmbit específic inclou fets, símbols, convencions, fórmules, algoritmes, conceptes i regles. En l'estudi dels subjectes experts s'ha trobat que una persona solvent a resoldre problemes domina una base de coneixements àmplia de l'àrea de la qual forma part el problema, ben organitzada i de fàcil accés (Chi. Glaser i Far, 1988).

Les persones expertes a resoldre problemes categoritzen o representen els problemes en termes de l'estructura matemàtica que subjau, i no en funció de les característiques superficials com fan els subjectes més inexperts. S'ha pogut comprovar que la resolució de problemes senzills, incloent-hi els que requereixen realitzar la mateixa suma o resta, poden tindre diferents nivells de dificultat en funció de l'esquema o estructura conceptual que subjau (vegeu el cas del problemes orals additius). En un sentit invers, el coneixement base dels aprenents més inexperts inclou un major nombre d'habilitats defectuoses o amb concepcions errònies. Així, la concepció que "la multiplicació fa sempre els nombres més grans" és la responsable que molts alumnes facen servir una divisió en el cas que el multiplicador siga un decimal menor de la unitat.

Els experts no sols tenen un major domini de determinats tòpics concrets que els novells, sinó que el seu coneixement base està millor i més dinàmicament estructurat, cosa que es reflecteix en una accessibilitat més flexible. Així, no resulta estrany que el domini complet d'un "camp conceptual" requerisca llargs períodes de temps (Vergnaud, 1990) i que el rang de recursos als quals un subjecte pot accedir per a comprendre un problema influïsca en la seua resolució.

Així doncs, la solució de problemes requereix dominar tant les operacions aritmètiques bàsiques (algoritmes) com disposar del coneixement conceptual necessari per a comprendre i representar els problemes adequadament.

Mètodes heurístics. Els mètodes heurístics són estratègies sistemàtiques de recerca, anàlisi i transformació del problema. Els heurístics no són una garantia que la solució es trobe, però atès que indueixen a abordar la tasca de forma sistemàtica i planificada, sí que incrementen notablement les probabilitats d'èxit. Exemples heurístics són: analitzar acuradament el problema, realitzar recerques per mitjà de l'assaig i l'error, especificar els elements coneguts i els desconeguts, anar d'allò conegut a d'allò desconegut, aplicar l'anàlisi de mitjans/fins, descompondre el problema en submetes o en subproblemes, visualitzar el problema mitjançant gràfics o diagrames, treballar cap a darrere, a partir de la meta o solució desitjada, buscar un problema anàleg o relacionat que siga més fàcil.

Inicialment, l'ensenyament dels heurístics no va resultar molt exitós per dues raons: 1) Cada heurístic era ensenyat de forma aïllada, de forma que l'alumne no s'havia de plantejar el problema de quin calia triar en cada situació. 2) Les descripcions eren insuficientment detallades per a capacitar els alumnes a emprar-los. No obstant, en l'actualitat són perfectament realitzables i s'ensenyen conjuntament amb les habilitats metacognitives (Schoenfeld, 1992).

Coneixement i habilitats metacognitives. Encara que els nostres coneixements actuals sobre les habilitats metacognitives són prou confosos, la centralitat de la metacognició en l'aprenentatge està fora de tot dubte. Al parlar de metacognició ens referim a dos grans conjunts d'habilitats:

a) El primer component és el coneixement que tenim respecte del nostre funcionament cognitiu, de quines són les nostres capacitats i febleses cognitives. Alguns exemples són el coneixement que la nostra memòria pot fallar però que disposem d'ajudes per a retindre la informació, la consciència dels límits de la memòria a curt termini, les creences al voltant de les nostres capacitats generals o en camps específics, com ara les matemàtiques. D'acord amb Dweck i Elliot (1983), les accions específiques que un individu executa en una situació d'aprenentatge depèn de la concepció particular, estable o incremental, que manté respecte de la pròpia habilitat.

Els alumnes que són més eficaços en la resolució de problemes orals són més conscients de les activitats mentals que realitzen, expliquen més detalladament els mètodes que empren, justifiquen de forma més escaient les estratègies de solució, i són més precisos a l'hora de predir els problemes que han solucionat correctament.

b) El segon component està format pels mecanismes d'autocontrol i d'autorregulació, i pot ser definit com una estructura de control executiu que organitza i guia els nostres processos d'aprenentatge i pensament. Inclou habilitats com ara planificar un procés de solució, supervisar el procés quan ja està començat, avaluar-lo, suprimir o depurar les respostes o solucions, reflexionar sobre les nostres pròpies activitats de solució de problemes. Els solucionadors de problemes més habilidosos es caracteritzen per tindre un alt nivell d'autocontrol, açò és, per orientar-se de forma sistemàtica i persistent cap els objectius prefixats, regular de forma permanent la seua activitat, i efectuar les correccions oportunes si són necessàries.

Components afectius. El decisiu paper que desenvolupen els components afectius en els processos d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques fa temps que és conegut; això no obstant, la comunitat científica els ha oblidat per complet, adoptant una orientació exclusivament cap a les variables i processos cognitius. Un important estudi de la Universitat d'Ohio (1980) destaca la importància del desig de trobar la solució, de sentir que es troba al nostre abast i que efectivament el podrem resoldre.

Les creences, les actituds i les emocions són reaccions afectives implicades en l'aprenentatge de les matemàtiques. D'acord amb l'esquema proposat per McLeod (1990), aquestes reaccions formen un continu, amb diferències en la intensitat afectiva implicada (E-A-C), el grau d'estabilitat (C-A-E), o el grau d'interrelació amb els components cognitius (C-A-E).

McLeod va diferenciar entre creences sobre un mateix i creences envers les matemàtiques; mentre les primeres són una habilitat metacognitiva, les segones es corresponen amb la perspectiva amb la qual un individu s'aproxima a les activitats matemàtiques. Segons Schoenfeld (1992), les creences poden arribar a determinar les tècniques que seran emprades o rebutjades, durant quant de temps i amb quin esforç romandran amb l'intent de trobar solucions, i coses així.

Moltes de les creences envers les matemàtiques tenen una influència negativa o inhibitòria en l'aprenentatge de les matemàtiques (Greeno, 1991). És obvi que creences errònies com ara que les matemàtiques són un conjunt de regles i procediments que hem de memoritzar i aplicar de forma mecànica, sols hi ha un únic procediment correcte, resoldre un problema matemàtic és qüestió de sort, ... no afavoreixen una mentalitat forta i persistent davant dels nous i desafiants problemes.

La teoria de les emocions de Mandler (1989) suggereix interessants hipòtesis per a descriure i explicar les reaccions afectives dels estudiants davant de les activitats matemàtiques: a) els diferents processos cognitius poden ser diferencialment sensibles als afectes, i més especificat, que les activitats metacognitives són especialment sensibles a les emocions, mentre que els processos d'emmagatzemar i recuperació no ho són tant. b) Les respostes afectives varien segons la fase de resolució de problemes on es trobem (McLeod, 1989).

Finalment, i encara que hem presentat les aptituds implicades en la solució de problemes de forma aïllada, és clar que un expert solucionador de problemes les aplica de forma integrada i interactiva: a) components d'una mateixa aptitud. Ja hem comentat la necessitat de fer servir conjuntament els esquemes conceptuals i les habilitats procedimentals en el cas dels problemes additius orals. b) entre diferents aptituds, com és el cas del càlcul del volum d'una piràmide truncada que relaciona el coneixement base —saber com es calcula el volum d'una piràmide— i una estratègia heurística —saber que el volum és la diferencia de les dues piràmides resultants—. La dissociació amb la qual són utilitzades en algunes ocasions també resulta escandalosa, com en el problema del trasllat dels soldats, on els estudiants apliquen mecànicament un algoritme sense un sentit d'allò que els nombres signifiquen en aquest context, i no activant una estratègia metacognitiva, com ara tornar cap a darrere i avaluar la solució.

Es pot concloure que la perícia en la solució de problemes matemàtics inclou alguna cosa més que la suma de les quatre categories d'aptituds descrites. The National Council of Teachers of Mathematics va introduir en 1989 la noció de *"disposició matemàtica"* per a referir-se a l'aplicació i disponibilitat integrada d'aquestes aptituds i a la tendència a pensar i actuar en termes positius. Les disposicions matemàtiques dels alumnes es manifesten en la forma que ells s'aproximen a les tasques —si amb confiança, voluntat per a explorar alternatives, perseverança i interès— i en la seua tendència a reflexionar sobre el seu propi pensament.

Perkins, Jay i Tishman (1993) han distingit tres components de la disposició. La inclinació és defineix com la tendència a enganxar-se en una activitat donada com a conseqüència de la motivació, els hàbits o altres factors. La sensibilitat es refereix a l'emoció i prestesa davant de les oportunitats per a implementar una conducta. La capacitat és l'habilitat real per a desplegar una conducta. Un exemple clar és el fet que els estudiants sovint tenen la capacitat per a solucionar certs problemes, però no l'exerceixen per una manca d'espontània inclinació i sensibilitat.

La inclinació i sensibilitat dels estudiants per a aplicar el coneixement i les habilitats adquirides també pot ser bloquejada per aspectes emotius. El model heurístic dels processos d'aprenentatge afectiu de Boekaerts (1993) afirma que expectatives i sentiments positius condueixen a una intenció d'aprendre i dominar la tasca, i expectatives i sentiments negatius generen una intenció de superar la tasca, de protegir l'autoestima, d'evitar els errors.

El concepte de disposició suggereix que l'organització de l'ensenyament no pot quedar restringida a un conjunt de metes discretes, i que és necessari oferir als estudiants una extensa experiència amb les diferents categories aptituds en una varietat de situacions durant llargs períodes de temps.

3.4. L'alumne com a constructor de coneixement

Quins tipus de processos d'aprenentatge condueixen a assolir la disponibilitat desitjada? La literatura aporta dades suficients per afirmar que els estudiants no ixen equipats de les escoles amb els coneixements, habilitats, creences i motivacions necessaris per abordar els nous problemes i les tasques d'aprenentatge de forma eficient i exitosa. D'acord amb De Corte (1993), aquesta realitat és conseqüència de la prevalença del model d'aprenentatge com a transmissió de la informació, on les activitats més freqüents dels alumnes són escoltar, mirar i imitar coses que el mestre o el llibre els diu o els mostra sense contextualitzar. És clar que aquesta concepció contrasta amb la que es deriva dels estudis empírics i teòrics sobre l'aprenentatge i la instrucció en general, i de les matemàtiques en particular, i que de forma esquemàtica és la següent:

- L'aprenentatge és un procés actiu i constructiu. De Corte i Verschaffel (1987) observaren en els estudiants de primer curs una ampla varietat de solucions a intentar resoldre problemes additius orals d'un sol pas, moltes de les quals no havien estat ensenyades a l'escola; és a dir, constituïm "invencions" dels alumnes. A més a més, moltes de les estratègies errònies són variants inventades d'un procediment correcte construïdes per l'estudiant en el moment en què arriba a un carrer sense se eixida. Una altra il·lustració és la utilització de l'estratègia "d'assaig i error" per a trobar l'estat inicial en problemes de canvi, conegut l'estat final i el canvi produït.
- L'aprenentatge és un procés social. Si portem els constructivisme a l'extrem, cal preguntar-nos, com és que els processos individuals, idiosincràtics de construcció de coneixement, poden portar a conceptes i habilitats matemàtiques comunes entre els aprenents. La solució deriva dels treballs de Mead i Vygotsky: l'aprenentatge és un procés social. L'aprenentatge és una re-creació interactiva del coneixement. La construcció del coneixement per part de l'individu té lloc mitjançant els processos d'interacció, negociació i col·laboració, gràcies als quals els aprenents es converteixen en membres aculturizats d'una comunitat i cultura matemàtica. L'aprenentatge i el pensament són conceptualitzats com a activitats interactives entre l'individu i la situació, i el coneixement és situat, "producte de l'activitat, el context i la cultura en la qual el coneixement és desenvolupat i usat".

Així doncs, assolir la disposició desitjada requereix la iniciació i mediació de processos d'adquisició constructiva en els estudiants. Sobre aquestes qüestions tornarem més endavant.

3.5. El procés d'aprenentatge de coneixements matemàtics específics

3.5.1. El pensament numèric o com aprenem a comptar

Es podria pensar a primera vista que aprendre a comptar consisteix sols en recitar una llista de paraules, com si d'una cançó de bressol es tractara. Però, comptar comporta el domini d'un nombre ampli de facultats: assenyalar únicament un objecte cada vegada, portar el control dels objectes que ja han estat comptats, l'assignació successiva d'un nombre als objectes particulars que constitueixen una sèrie, saber que el nombre amb què s'acaba de comptar una col·lecció pot ser utilitzat per a representar la mida de la col·lecció sencera. Però, encara que el xiquet arribe fins ací, pot ser que no s'adone que obtindria el mateix nombre fóra quin fóra l'ordre en què han estat comptats, o de la seua disposició en l'espai.

Comprendre el nombre comporta la formació de diverses relacions, i en especial l'existent entre el significat ordinal o ordre numèric (el lloc que ocupa un objecte en una col·lecció) i el significat cardinal o mesura numèrica (quantes coses hi ha en una col·lecció d'objectes). Moltes facetes del concepte de nombre han estat apreses en els primers anys, però la utilització coherent dels nombres no es produeix com a norma fins als 7 anys.

En l'estudi del desenvolupament del nombre en el xiquet es pot diferenciar entre dos models (Bermejo, 1990):

1) El model lògic o piagetià ressalta que la construcció del nombre és correlativa al desenvolupament de la lògica mateixa. S'afirma que el nombre és la síntesi d'una sèrie de

nocions prelògiques o prenumèriques: la conservació de la quantitat (o la percepció que la quantitat no varia independentment de la configuració dels objectes), la correspondència un-a-un (mètode directe per a comprovar l'equivalència entre conjunts), les nocions de seriació i d'inclusió de classes (que inclou les nocions de "més gran" i "més menut"), i la noció de la inclusió de la part en el tot.

2) El model de les habilitats numèriques afirma que l'entrenament dels alumnes en habilitats numèriques, com ara comptar (agafar tants objectes com hi ha en un model, comptar a partit d'un nombre, descomposició de nombres, jocs,...), afecta positivament el rendiment acadèmic i millora les habilitats lògiques. En aquest sentit no es pot concloure que les operacions lògiques siguen un prerequisit per a assolir les habilitats numèriques.

Molts autors s'han proposat la identificació d'estadis en el desenvolupament del concepte de nombre. En aquesta línia destaquen els treballs de Schaffer, Egleston i Scott (1974, citats per Dickson, Brown i Gibson, 1991)

Estadi 1. Aconseguiments previs al recompte

Criteri: No compten correctament col·leccions de 5 o més objectes. Sembla que els xiquets menuts poden reconèixer sense comptar el nombre d'objectes de col·leccions molt menudes, les d'un i dos elements amb tota seguretat, i, a voltes les de tres i quatre. És el que es coneix amb el nom de "síndrome un, dos, tres, molts".

Característiques:

* Reconeixen agrupacions de dos objectes, i de vegades de tres o quatre (probablement per reconeixement d'una pauta visual o auditiva, encara que cap la possibilitat que siga per recompte)
* Distingeixen, visualment i verbalment, entre col·leccions majors i menors en els casos en els quals almenys una d'aquestes és inferior a cinc elements
* Distingeixen entre col·leccions majors i menors de mida arbitrària, sempre que els objectes apareguen alineats per mostrar l'existència o no d'una correspondència biunívoca

Estadi 2. L'aspecte ordinal

Criteri: Saben comptar correctament una col·lecció de cinc o més objectes (assignació ordenada de noms a una seqüència d'objectes durant un procés de recompte), però sols en la meitat o menys de les vegades apliquen correctament la regla de cardinalitat (saber que el nombre amb què finalitza el recompte indica el mida del conjunt i que aquesta és un propietat estable de la col·lecció).

Encara que poden reconèixer agrupacions com en l'estadi anterior, el més probable és que compten. Coneixen la naturalesa del procés de recompte, però poden ser imprecisos a l'hora d'executar-la, sobretot a partir de nombres majors de quatre. En paraules de Gelman i Gallistel (1978, citats per Dickson, Brown i Gibson, 1984, 1991), aquests xiquets han captat dos del principis principals del recompte:

- principi d'ordre estable: l'operació de comptar exigeix la repetició d'una llista de noms de nombres en un ordre sempre idèntic. Existeix un tendència per part dels xiquets a tractar d'autocorregir les seqüències de nombres fins que s'aproximen a la correcta *(un, dos, tres, quatre, vuit, deu, onze,... no s'ha de repetir; un, dos, tres, quatre, cinc, deu, onze,... no s'ha de repetir; un!, dos!, tres..., quatre, cinc, deu, onze,... no!, després de moltes autocorreccions un, dos , tres, quatre, cinc, sis, set, onze! Uf!*

- principi de biunivocitat: cada nombre ha d'estar aparellat a un i sols a un dels objectes. Alguns dels principals errors són:

* de partició del conjunt d'objectes comptats i no comptats, produint error per doble recompte o per omissió;
* d'assignació de noms de nombres, com p. e. utilitzar dues vegades el mateix nom;
* de coordinació de noms i objectes comptats; p. e. recitar dos noms de nombres mentre s'assenyala un sol objecte, o assenyalar dos objectes mentre es diu únicament un nom.

Errors en la regla de cardinalitat o la resposta a: quants n'hi ha? A vegades els xiquets pensen que la resposta és la seqüència completa de recompte, i no sols un únic nombre. Tampoc comprenen que el total serà el mateix amb independència de l'objecte a partir del qual comença a comptar o de l'ordre en què han estat comptats. És a dir, no comprenen que la mida d'una col·lecció és una característica estable de la col·lecció.

Estadi 3. Cardinalitat

Criteri: Els xiquets saben aplicar la regla de cardinalitat, però no comprenen la mida relativa del nombres. És a dir, davant de dues col·leccions de 6 i 7 objectes, són capaços de comptar-les, saber que en una hi ha 6 objecte i en l'altra 7, però no saben que 7 és major que 6.

Reconeixen ràpidament les agrupacions menudes, el procés de recompte guanya en exactitud i automatisme i ja comprenen que poden començar a comptar per qualsevol objecte i en qualsevol ordre que la quantitat no variarà. També han après a identificar el nombre d'objectes amb el nombre més alt assolit en el recompte, encara que el recompte —realitzat per si mateix o per un altre— no siga correcte i no coincidisca amb el nombre d'objectes reals; davant d'una col·lecció de sis objectes, si el recompte és un, dos, tres, quatre, cinc, sis diran que hi ha sis objectes, però si el recompte és un, dos, tres, cinc, sis, vuit, dirà que n'hi ha vuit.

No obstant això, davant de la pregunta quants caramels prefereixes 6 o 7 tenen molts problemes. És a dir, no saben fer servir el procés invers de comparar col·leccions segons l'ordre del seu nombre cardinal; amb parells més menuts, com tres i quatre, o que es diferencien en quatre o més unitats s'obtenen més encerts, encara que similars als que obtenen els de l'estadi dos.

Estadi 4. La mida relativa dels nombres

Criteri: capacitat de reconèixer el major de dos nombres menors o iguals a 10. A més a més, són més precisos que els dels altres estadis.

Tot indica que la majoria de xiquets de cinc anys tenen una comprensió adequada i operativa dels deu primers nombres naturals en la modalitat oral, encara que no és completa com es mostra en els experiments de Piaget de conservació (aspecte cardinal) i de seriació (aspecte ordinal). Però, sí que sembla que és suficient per a resoldre problemes additius senzills exposats de forma oral.

Finalment, cal ressenyar que la representació simbòlica dels nombres (identificar una grafia de nombre amb el nom que li corrrespon i viceversa) és posterior al coneixement oral, atès que és necessari comprendre la importància de la posició de les xifres dins dels mateixos nombres o el principi del valor relatiu. En l'intent de d'assolir-lo són importants els treballs d'agrupament d'objectes i la seua representació escrita, exercicis de lectura i escriptura de nombres, d'ordenació en la recta numèrica, efectuar sumes i restes mentalment, descomposicions de nombres, multiplicacions i divisions per potències de deu, realitzar estimacions de quantitats esperables.

3.5.2. La comprensió dels problemes orals. El cas dels problemes additius

En l'estudi de les operacions aritmètiques es poden distingir dues línies d'investigació (Bermejo, 1990): una se centra en l'estudi de la seqüència evolutiva del concepte de suma a partir del processos de solució de problemes orals, i l'altra està més interessada en la quantificació i se centra en l'anàlisi de tasques additives amb objectes, guarismes o combinacions.

En aquest apartat ens centrarem en la primera línia on el principi de recompte constitueix el punt de partida de les diverses operacions aritmètiques. El recompte es converteix directament en operació additiva. Mitjançant un procés de repetició apareix la multiplicació i quan invertim la suma s'arriba a la resta. El cicle es tanca amb la divisió o aplicació reiterada de l'operació sostractiva.

Per a Kamii (1986), l'observació i la manipulació són necessàries en començar l'aritmètica, però també afirma que són la part menys important, fins i tot poden resultar perilloses si impedeix pensar als xiquets. En la seua opinió, cal deixar els alumnes que sumen quantitats lliurement, sense imposar-los un mètode. En aquest sentit estima que la introducció de l'addició en forma de problemes verbals, i no l'addició escrita, seria l'objectiu idoni per als alumnes de primer.

Atenen a les relacions semàntiques es poden diferenciar quatre tipus de problemes additius:

1. **Causa-canvi**. Es caracteritzen per la realització d'una acció, explícita o implícita, que incrementa o fa disminuir una quantitat inicial. Per exemple, *Anna té 7 cromos i Alícia li'n regala 3 més. Quants cromos té ara Anna?* Es poden fer diferents combinacions segons se sàpiga la quantitat inicial, la magnitud del canvi o el resultat del canvi. Un altre autors els anomenen problemes d'afegir (*Anna té 7 caramels i en compra 3 més, quants caramels té?*)

2. **Combinació**. Es tracta de situacions en les quals apareixen dues quantitats disjuntes, que poden considerar-se aïlladament o com a parts d'un tot, sense que medie cap tipus d'acció . Per exemple, *Anna té 7 cromos i Alícia en té 3, quants cromos tenen entre les dues?* Es diferencien tres tipus de problemes segons el lloc en què es trobe la incògnita. També s'anomenen problemes part-part-tot o d'unió (*Anna té 7 caramels de menta i 3 de fresa, quants caramels té en total?*)

3. **Comparació**. Suposen la relació entre dues quantitats disjuntes, bé per determinar la diferència entre elles, bé per calcular una de les dues quantitats coneixent l'altra i la diferència entre les dues. Per exemple, *Anna té 7 cromos. Alícia en té 3. Quants cromos té Anna més que Alícia?*

4.- **Igualació**. Són una mescla de problemes de comparació i de canvi. Per exemple, *Anna té 7 cromos. Alícia en té 3. Quants caldrà donar-li a Alícia per tal que en tinga els mateixos que Anna?*

Altres autors afegeixen els problemes de sostracció complementaria (*Anna li dóna 3 caramels a Alícia. Ara li'n queden 7. Quants caramels tenia abans de començar?*) i els problemes de sostracció vectorial (*Aquest matí Anna s'ha menjat 3 caramels. A l'hora de berenar té 7 caramels més que en el desdejuni. Quants caramels ha comprat a la vesprada?*).

Cadascú d'aquests problemes es subdivideix en funció del lloc en el que es trobe la incògnita, (primer terme, segon terme o el resultat), la direcció suggerida pel succés (increment o disminució) o la relació (més que o menys que).

Luceño (1986) coincideix amb Holmes (1985) en afirmar que la sostracció és l'operació inversa de la suma, que operativament es tracta de desfer el que ha fet la suma. Aquest autor redueix a tres les situacions en què la resposta és una resta: La situació de "llevar" o trobar un residu, la recerca del complement que falta per a igualar a una altra magnitud o problemes de "tornar", i situacions on es tracta de comparar dues magnituds i que requereix que calculem la diferencia —benefici o pèrdua—.

Atenent l'estructura semàntica, la classificació feta per a l'addició és vàlida per al cas de la sostracció. Així, en el cas dels **problemes de canvi**, s'anomenen de separació o de pèrdua. Per exemple, *Anna té 7 cromos. En dóna 3 a Alícia. Quants li'n queden ara?* o *Anna té 7 cromos i en perd 2. Quants li'n queden ara?*. **O els de combinació o part-tot**, *Com que Anna té 5 caramels, 3 de fresa i la resta de llima. Quants caramels són de llima?* El problema *Anna té 10 cromos. Alícia en té 4 menys que Anna. Quants cromos té Alícia?* és un cas de **comparació**.

Cadascun d'aquests problemes pot ser representat de forma diferent; així, els problemes de canvi responen a un diagrama de fletxes, els de combinació a un diagrama circular, i els de comparació a un diagrama de barres. Willis i Fuson (1988, citats per Beltran 1997) ensenyaren els alumnes a emprar els dibuixos esquemàtics que representen les diferents estructures. Aquesta estratègia els permetia detectar el tipus de dificultat: si l'origen de les dificultats era el procés de representació l'alumne triaria inadequadament els dibuixos, si era degut a una incomprensió de les relacions entre les quantitats triaria adequadament el dibuix, però la inserció dels nombres seria inadequada. També es podia donar que l'estratègia de solució seleccionada fóra equivocada, fent servir una suma quan es tractara d'una resta o viceversa, o d'errors en l'execució de l'algoritme seleccionat.

Els alumnes poden recórrer a procediments concrets o l'ús d'objectes concrets (blocs, dits,...) o a procediments mentals a l'hora de resoldre el problemes additius (Baroody, 1988). Entre les primeres trobem "el compte concret total" on es compten cadascun dels dos conjunts per separat i després s'ajunten, l'estratègia de "pautes digitals" o l'estratègia de "reconeixement de pautes visuals".

Entre les estratègies mentals, es troben les de recompte i les numèriques. Les de recompte poden consistir a comptar-ho tot començant pel primer sumand des de l'un (p.e, 2 + 3, 1, 2, 3 (és un més), 4 (són dos més), 5 (són 3 més), 5), o poden començar la seqüència de comptar des del cardinal del primer sumand i continuar amb el segon sense la representació prèvia dels conjunts (3 + 4; 3; 4 (+1), 5 (+2), 6 (+3), 7 (+4)) o bé començant sempre a partir del cardinal major, amb independència de quin siga el primer sumand. Aquestes últimes són modalitats de comptar parcial. Per últim, les estratègies numèriques es basen en la memòria i la utilització de regles, com ara compondre o descompondre nombres en grups de 5 o en grups de 10. Per exemple 5 + 4, com se sap que 5 + 5 són 10, si li'n lleve 1 seran 9. Altres exemples són la "regla del zero" (l'addició que implica un zero no canvia l'altre nombre), "el doble més -o menys- un" (les combinacions com 7+8 poden considerar-se com el doble de 7+7 més 1 o com el doble de 8+8 menys 1), "dobles per recomposició" (les combinacions com 5+3 poden convertint-se en el doble de 4+4 llevant 1 del terme major i afegint-lo al menor).

Vergnaud i Durand (1983) observaren que problemes que estructuralment exigien la mateixa tasca, fins i tot amb les mateixes quantitats, eren resolts amb desfasaments d'uns quants anys. Amb l'objectiu d'analitzar les dificultats cognitives que plantegen els problemes verbals additius, aquests autors, atenent les diferents formes alternatives en què els problemes additius podien ser fórmulats, dissenyaren un complet conjunt de problemes additius simples (que només requerien fer una suma o una resta). Vergnaud parla d'estats (E), estats relatius (R) i transformacions (T). Aquests elements poden relacionar-se de cinc formes diferents:

1) Dues mesures que es componen en una tercera. *Tinc 5 boletes de vidre i 3 de ferro, en total tinc 8 boletes.*

2) Una transformació que opera sobre una mida per a donar una altra mida. *Tenia 7 boletes. He jugat una partida i n'he perdut 3. Ara en tinc 4.*

3) Dues transformacions que es componen en una tercera. *Jugue una partida i guanye 3 boletes. Jugue una altra i en perd 5. En total n'he perdut 5.*

4) Una transformació que opera sobre un estat relatiu per a donar un altre estat relatiu. *Dec 7 boletes a Pau. Li'n torne 3. Ara li'n dec només 3.*

5) Dos estats relatius que es componen en un tercer. *Dec 7 boletes a Pau i ell me'n deu 3; així doncs, sols li'n dec 3.*

A més a més, i dins de cada tipus, es pot diferenciar segons que les transformacions siguen del mateix signe (guanye-guanye, perd-perd) o de diferent signe (guanye-perd, perd-guanye), on es trobe la dada que desconeixem (final, principi, enmig), i la relació en termes de valor absolut de les dues quantitats conegudes. També insistiren en la importància de la representació del problema que fan els alumnes.

Aquest autors també prestaren atenció a les estratègies que eren emprades pels alumnes: el procediment del "complement" que consisteix a buscar el que és necessari afegir a l'estat inicial per tal de trobar el final. El procediment de la "diferència" que consisteix a restar de l'estat final l'estat inicial. El procediment "canònic d'inversió" que consisteix a canviar de signe la transformació i aplicar-la a l'estat inicial. El procediment de "l'estat inicial hipotètic" o "de tempteig" que consisteix en el fet de, partint d'un estat inicial aplicar-hi la transformació directa i veure si obtenim l'estat final, en cas negatiu modifiquen l'estat inicial, i així successivament.

En el cas de la sostracció, Baroody (1988) determina els següents procediments:

a) Concrets o amb objectes o dits, que representen el seu concepte informal de restar com "llevar": representa el minuend, hi lleva un nombre d'elements igual al sustraend, i compta els elements que queden per tal de determinar la resposta.

b) Mentals:

1) Retrocomptar o comptar de forma regressiva: expressar el minuend, comptar cap a darrere tantes unitats com indique el sustraend i donar l'últim nombre comptat com la resposta buscada. Aquest procediment també respon a la seua idea intuïtiva, i funciona bé quan les quantitats són menudes, o encara que siguen grans, el sustraend és molt menut i minuend i sustraend estan molt allunyats.

2) Mètodes flexibles. Sorgeixen quan el xiquet s'enfronta amb quantitats grans i inventa un

procediment de comptar progressivament. Aquest procediment consisteix a partir del sustraend i comptar cap endavant fins arribar al minuend, alhora que es porta el compte del nombre de passos fets. Aquest procediment té avantatges quan el sustraend és relativament gran o minuend i sustraend estan relativament pròxims.

Carpenter i Moser (1983, citats dins Hernàndez i Soriano, 1997), arrepleguen les següents estratègies:

* Separar de: es representa en primer lloc la quantitat major i a continuació se li "lleva" la quantitat menor.
* Comptar cap darrere a partir de: el xiquet compta cap a darrere a partir del major dels nombres tantes vegades com representa el menor, de forma que l'últim nombre de la seqüència és la resposta.
* Separar a: se separen objectes de la col·lecció més gran fins a tindre exactament el nombre representat pel menor. La resposta són els objectes separats.
* Comptar cap a darrere: compta des del nombre major fins que arriba al nombre menor. Els numerals emesos durant el recompte són la resposta.
* Afegir a: es forma la col·lecció major, seguidament la menor, i a continuació s'afegeix a aquesta ultima sense comptar tants objectes com siguen necessaris per a igualar ambdues. La resposta són els objectes afegits.
* Comptar a partir del que hi ha (donat): comença a comptar a partir del nombre més menut donat fins a arribar al més gran. Comptant el nombre de numeral emesos tindrem la resposta.
* Aparellament. Es formen les dues col·leccions que respresenten els termes de la resta i s'estableix correspondència un-a-un. Els objectes no aparellats són la resposta.
* Fet conegut. Quan la resposta del xiquet es basa en el record d'un fet numèric, com és el cas de l'algoritme (8 - 4= 4; 4 + 4 = 8).
* Fet derivat: la resposta es deriva d'un fet numèric conegut. Exemple: 11-5 = 6 perquè 5 + 5 = 10, permet trobar la resposta afegint-ne sols un més.

La classificació dels diferents tipus de problemes ha permès establir quatre nivells evolutius (Bergerson i Herscovics, 1990, citats per Lago i Rodriguez, 1999):

- Al voltant dels 5 ó 6 anys els xiquets poden treballar amb una sola quantitat (per exemple, saben com comptar-la). Aquest coneixement és suficients per resoldre els problemes de canvi més senzills , els d'addició en els que la incògnita es situa en el resultat. Aquest nivell de coneixement no els permet resoldre els problemes de comparació ni els de combinació.
- Entre els 6 i els 7 anys relacionen de manera causal el canvi que es produeix en el conjunt inicial i l'acció que el provoca. Ara són capaços d'estimar la direcció del canvi (augment o disminució) i de relacionar-la amb les operacions matemàtiques d'addició i sostracció.
- Sobre els 7 ó 8 anys han adquirit l'esquema part-part-tot que els capacita per abordar situacions estàtiques en les que ells mateixos tenen que dotar-les d'una estructura. Ja poden resoldre problemes de canvi amb a incògnita en el primer terme i els de combinació.
- A partir dels 9 ó 10 anys els xiquets disposen dels esquemes necessaris per a solucionar els diferents problemes de comparació.

Una **multiplicació** pot ser interpretada inductivament com una suma de sumands iguals, o com repetir una quantitat. Segons Holmes (1985) la multiplicació pot ser interpretada de quatre formes diferents: a) la unió de col·leccions equivalents, b) una addició repetida, c) un producte cartesià, d) una raó. En correspondència amb aquestes situacions, Dickson, Brown i Gibson (1991) han identificat els següents tipus de problemes:

1) *Els problemes de Sumes Repetides (o de Canvi o de Raó)* descriuen una proposició que es repeteix a mode de regla i que vincula les dues dimensions rellevants; aquesta

proposició informa del número de voltes que ocorre la repetició i es pregunta pel que passa desprès de les successives repeticions. *4 xiquetes tenen 12 cromos cadascuna. Quants en tenen en total?* Sembla que els xiquets, sovint, troben més fàcil interpretar el significat d'una multiplicació recorrent a un procediment que bàsicament és una situació de divisió. Situacions típiques de divisió són els clàssic problemes de repartició o divisió pel multiplicador (*una xiqueta té 48 cromos. Vol colocar-los en 4 muntons iguals. Quants n'ha de posar en cada muntó?*) i els d'agrupament o divisió pel multiplicant (*una xiqueta té 48 cromos i vol colocar-los en paquets de 4 cadascun. Quants paquets necessitarà?*)

2) *Els problemes de multiplicació de Comparació* representen una quantitat a partir d'una altra, en el text apareguen una quantitat referent i una quantitat comparada (*"Anna té 4 caramels. Alícia en té dotze vegades més. Quants caramels té Alícia?*). Aquests problemes es defineixen mitjançant una funció escalar entre el número d'objectes en el conjunt referent i el número d'objectes en el conjunt comparat, per això també es coneixen com problemes de factor multiplicant. Com en el cas anterior, en aquesta categoria també és possible formular dos tipos de problemes de divisió: a) partitius o aquells que se pregunta per la quantitat referent (*"Alícia té 48 caramels. Si Alícia en té dotze vegades més caramels que Anna, quants caramels té Anna?"*), b) aquells en els que es pregunta per la funció escalar (*"Anna té 4 caramels i Alícia 48. Quantes vegades té Alícia els caramels d'Anna?"*).

3) *Els problemes de multiplicació de Producte Cartesià* són els més difícils i impliquen la presència de dues dimensions diferents que es combinen per a obtindre una tercera ("*La nina d'Anna té 4 faldes i 12 camises. De quantes maneres diferents pot vestir-se?"*). Aquests problemes, a diferència dels anteriors, són simètrics (els papers assignats a cada conjunt resulten intercanviables), per la qual cosa sols admeten una formulació en termes de divisió (*"Anna pot formar 48 conjunts diferents de pantaló i jaqueta. Si en té 4 jaquetes, quants pantalons en té?"*).

En quant als procediments de resolució de problemes, la sequència és la mateixa que en el problemes additius. En un principi, els xiquets representen l'acció o relació present en l'enunciat i en procediments informals o intuïtius de comptar cap a davant i capa a darrere. El xiquet també pot recórrer a crear una col·lecció per a representar el multiplicant, o emplenar una pauta digital per a representar-lo (3 x 2, alça 3 dits i a continuació compta dues voltes esta pauta), comptar a intervals, ...

Finalment, comença a utilitzar estratègies mentals basades en el coneixement de fets numèrics. Gómez (1988) proposa els següents procediments: commutar (si sap que 4 x 5 = 20, podrà fer servir 5 x 4 = 20), doblar (multiplicar per 2 és doblar, multiplicar per 3 és simplement afegir el doble, multiplicar per 4 és doblar i doblar), afegir un zero (per a la multiplicació per 10), zero i meitat (multiplicar per 5 és multiplicar per 10 i desprès la meitat del resultat), descomposicions (tècniques d'un més -6 x 4 = (5 + 1) x 4 = 20 + 4 = 24- i d'un menys - 9 x 3 = (10 - 1) x 3 = 30 - 3 = 27, o les particions dels factors), patrons (1 x 9 = 9; 2 x 9 = 18; 3 x 9 = 27, ...on les unitats decreixen d'una en una i les desenes creixen d'una en una).

3.5.3. Els algoritmes matemàtics

La paraula "algoritme" procedeix d'Al Khwarizmi, malnom, antropònim d'un matemàtic de Corasmània que visqué a Bagdad, autor del llibre *Kitab al jabr wa'l mugabala*. De la distorsió del títol de l'obra també es deriva el terme "àlgebra". Un algoritme és un una sèrie finita de regles que s'han d'aplicar en un ordre determinat a un nombre finit de dades per arribar amb certesa a un resultat. Ha d'estar format per instruccions fàcils d'interpretar, poder expressar-se en una sèrie finita de passos, cadascun dels quals ha de poder ser definit per una sola instrucció i s'ha de detindre quan s'ha assolit un resultat.

Entre els algoritmes numèrics, els més simples són els additius i els multiplicatius. Resultaria totalment ingenu pensar que sempre s'han ensenyat els mateixos algoritmes actuals o que han estat ensenyats sempre de la mateixa forma. El professor Segarra (1998) ens mostra maneres curioses de sumar (la suma àrab), de restar (la sostracció a la manera hindú), de multiplicar (multiplicació hindú) i de dividir (divisió egípcia).

Gómez (1998) assenyala cinc mètodes d'ensenyar els algoritmes numèrics al llarg de la història:

- *El mètode de regles*: un bon calculista hindú o àrab no sols havia de saber calcular bé, sinó que havia de fer-ho de la forma més ràpida possible. L'interès es trobava a desenvolupar els mètodes més còmodes, simples, segurs i breus possibles. Així, n'hi havia prou a presentar les regles amb els exemples corresponents.
- *El mètode raonat*: Amb l'arribada del currículum obligatori es pensa que no és suficient presentar la regla, sinó que és necessari justificar els procediments i els motius que la sustenten.
- *Mètode de les repeticions*, d'acord amb les directrius de Thorndike, l'ensenyament és entès com una seqüència de passos i l'objectiu fonamental és assolir l'automatisme, cosa que es pot assolir a base de repeticions.
- *Mètode intuïtiu*. El raonament s'ha de basar sempre en imatges molt concretes, per això s'ha de començar per mesurar, pesar, retallar, dibuixar. La intuïció té gradacions segons s'empren objectes, imatges o símbols, o segons les formes de representació.
- *Mètode orientat a l'estructura*.. L'aprenentatge significatiu d'un algoritme implica comprendre les seus relacions amb els "conceptes dels sistemes de base de numeració" —valor de posició, ordre de les unitats, agrupaments i formes equivalents d'escriure un nombre— i amb les "propietats de les operacions" —distributiva, associativa i commutativa—. La notació vertical, contreta, simbòlica i formal, sorgiria després. Atès que l'estructura matemàtica no és evident en els procediments, els materials manipulatius han resultat d'una gran ajuda per a la seua comprensió.

Tots els mètodes han estat objecte d'objeccions; el reglat perquè oculta la lògica dels procediments; el raonat perquè exigeix al xiquet un nivell de reflexió per al qual no està preparat; el de les repeticions, perquè és mecànic; l'intuïtiu, perquè se centra en la materialització del procediments i propietats i no a mostrar l'estructura de les matemàtiques; i el mètode orientat a l'estructura perquè relega la pràctica quan no l'elimina definitivament. La solució passa per no abandonar-los, sinó per triar de tots ells els aspectes positius. Per a Case (1982, citat per Bermejo 1997) el pilar fonamental de la instrucció és procurar no excedir la capacitat de processament d'informació de l'alumne, fet que es concreta en dos objectius: 1) demostrar a l'alumne que la seua estratègia actual ha de millorar i 2) minimitzar la càrrega d'informació en la memòria de treball, bé reduint el nombre d'ítems als quals s'ha que prestar atenció o fent que tota la informació rellevant siga familiar. Dins Bermejo (1997) trobem un exemples del "mètode de cares" ideat per Case.

D'acord amb els principis expressats el paràgraf anterior, i com ja s'ha comentat en el cas dels problemes, és convenient afavorir la comprensió de situacions numèriques emprant materials concrets. Dos programes resulten il·lustratius: a) Instrucció per aparallament (*mapping instruction*) de Resnick i Omanson (1987). Consisteix a resoldre simultàniament tasques de sostracció mitjançant la utilització de blocs (tipus Dienes) i la utilització dels símbols escrits (nombres); igualment, se suposa que la verbalització del procediment per part de l'alumne és important per a transferir la comprensió dels blocs al procediment escrit; b) La proposta de Fuson (1992; i Briard, 1990) empra targetes per a escriure cadascun dels dígits de l'addició i blocs de base deu. En una primera fase es treballa la utilització dels blocs (cubs xicotets, barres, quadrats, cubs grans) i la seua relació amb els numerals (unitats, desenes, centenes i milers), es practiquen les "llevades" —compensacions— i es verbalitza la traducció dels blocs en nombres i viceversa. En una segona fase es presenten simultàniament tasques additives i sostractives i s'utilitzen els blocs. Una descripció més detallada podem trobar-la dins Bermejo (1997).

Holmes afirma que no s'hauria de començar la instrucció de la computació de l'addició si els alumnes no tenen assolits uns prerequisits. Entre aquests figuren el coneixement del significat de l'addició, coneixement de la base i del valor de la posició, habilitat en addició mental amb multiples i potències de 10, estimació de sumes, coneixement intuïtiu que l'ordre i l'agrupament dels sumants no afecten la suma, ... habilitat en addicions per terminacions (es tracta del reconeixement de models de terminacions on el primer sumand és menor de 10, p.e ., 2 + 5 = 7; 12 + 5 = 17; 22 + 5 = 27, o és igual o major de 10, p.e., 14 + 7 = 21; 24 + 7 = 31; 34 + 7 = 41). Altres autors destaquen l'estratègia de "fent deu" (p.e., 45 + 8 = 45 + (5 +3) = (45 + 5) + 3 = 50 + 3 = 53.

Holmes (1985) distingeix tres formes per a construir l'algoritme de la suma:

- Racional:

$$\begin{array}{r} 46 = 40 + 6 \\ \underline{+48} = \underline{40 + 8} \end{array}$$

$$80 + 14 = 80 + (10 + 4) = (80 + 10) + 4 = 90 + 4 = 94$$

- Forma llarga

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{+48} \\ 14 \\ \underline{80} \\ 94 \end{array}$$

- Forma curta

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (+1)} \\ ..46 \\ \underline{+48} \\ 94 \end{array}$$

En el cas de la sostracció, Luceño (1986) proposa distingir dos grans casos: A) Sense compensació o sense llevar-ne. Respon al sentit de "llevar-ne o traure" o "descobrir la resta". Es contemplen tres fases: a) manipulativament, amb objectes; b) gràficament, mitjançant la representació amb dibuixos i c) simbòlicament, mitjançant l'operació o algoritme. B) Amb compensacions d'ordres o reagrupaments, es contemplen tres nivells i per a cada un es donen també les tres fases anteriors.

Cas 1: un sols reagrupament i sense se zeros en el minuend (365 - 137)

Cas 2: un sols reagrupament i amb zeros al minuend (750 - 543)

Cas 3: reagrupament en totes les xifres del minuend (832 - 654)

Per arribar a les formes abreujades o a l'algoritme habitual, cal basar-se en la propietat que "si se suma el mateix nombre al minuend que al subtrahend, la diferència no varia".

De la mateixa que per a l'addició, Holmes (1985) considera dos tipus: sense reagrupaments i amb reagrupaments. Per a aquest últim cas distingeix tres tipus d'algoritmes:

a) Forma racional

$$\begin{array}{r} 83 = (80 + 3) = (70 + 13) \\ \underline{-36} = -(30 + 6) = \underline{-\ (30 + 6)} \end{array}$$

$$(40 + \quad 7) = 47$$

b) Forma llarga

$$\begin{array}{r} 83 \\ \underline{-36} \\ 7 \\ \underline{40} \\ 47 \end{array}$$

c) Forma curta

$$\begin{array}{r} 83 \\ {\scriptstyle (+1)} \\ \underline{-36} \\ 47 \end{array}$$

Luceño pensa que és la força del costum la que manté les dues últimes, però que el procediment de préstec és més comprensible.

En el cas de la multiplicació, Holmes (1985) proposa els següents procediments:
a) Forma racional

$$\begin{array}{rl} 63 = & 60 + 3 \\ \underline{\times\ \ 2} = & \underline{\quad\ \times\ \ 2} \\ 126 & 120 + 6 = 126 \end{array}$$

b) Forma llarga

$$\begin{array}{r} 63 \\ \underline{\times\ \ 2} \\ 6 \\ \underline{120} \\ 126 \end{array}$$

c) Forma curta

$$\begin{array}{r} 63 \\ \underline{\times\ \ 2} \\ 126 \end{array}$$

Luceño (1986) proposa els següents procediments:
1) Multiplicació en la qual el multiplicador té un dígit
a) Sense agrupament
Fórmula abreujada

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times\ \ 2} \\ 48 \end{array}$$

Descomposició del multiplicand en unitats, desenes,...

$$\begin{array}{rl} 24 = & 20 + 4 \\ \underline{\times\ \ 2} = & \underline{\quad\ \times 2} \\ & 40 + 8 = 48 \end{array}$$

b) Amb reagrupaments
Fórmula abreujada

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{\times\ \ 4} \\ 92 \end{array}$$

Descomposició del multiplicand en unitats, desenes,...

$$\begin{array}{rl} 23 = & 20 + 3 \\ \underline{\times\ \ 4 =} & \underline{\quad\ \times 4} \\ & 80 + 12 = 80 + (10 + 2) = (80 + 10) + 2 = 92 \end{array}$$

En direcció de dreta a esquerra

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{\times\ \ 4} \\ 12 \\ \underline{80} \\ 92 \end{array}$$

En direcció d'esquerra a dreta

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{\times\ \ 4} \\ 80 \\ \underline{12} \\ 92 \end{array}$$

2) Multiplicació en la qual el multiplicador té diverses xifres.
Als mètodes anteriors, se n'afegeixen dos de nous
Diagonals

243

x 76
121
248
122
481
18468

Enreixats

2	4	3	x
1 4	2 8	2 1	7
1 2	2 4	1 8	6

1 8 4 6 8

3.5.4. El procés de resolució de problemes

L'objectiu fonamental de les matemàtiques en la majoria dels currículums occidentals és que l'alumne es convertisca en un "solucionador competent de problemes". La justificació és doble. D'una banda, destaquen els seus valors formatius en el desenvolupament d'estratègies de pensament i raonament. D'una altra banda, el caràcter aplicat de les matemàtiques; les matemàtiques constitueixen un poderós instrument per a resoldre problemes de caràcter científic i per analitzar i resoldre certes activitats quotidianes, com ara demanar un préstec, jugar a la loteria, etc.

Pérez (1994) informa que en la literatura és possible trobar fins a 14 significats diferents de l'expressió "solució de problemes". No obstant això, Webster (1979, citat per Pérez, 1994) exposa que tots aquests significats es poden resumir en dos:

1) Qualsevol activitat procedimental que es faça en matemàtiques. És el que de forma genèrica s'entén per *"exercicis matemàtics".* Es poden distingir dos tipus: 1) La repetició d'una determinada tècnica prèviament exposada pel professor, com ara llistes de sumes i restes, càlcul mental o resolució d'equacions de segon grau. L'objectiu és la consolidació i l'automatització de la tècnica o procediment. 2) Un segon tipus d'exercicis són aquells en els quals cal aplicar una fórmula o procediment, com quan li proposem al xiquet que ens diga quants animals hi ha en total en una granja si saben que hi ha 7 vaques i 5 cavalls.

2) Plantejar-se i intentar resoldre una qüestió difícil o sorprenent. La persona es troba davant d'una dificultat que l'obliga a plantejar-se un camí per tal d'arribar a la meta. Aquesta accepció arreplega la idea de *problemes matemàtics*. Alguns autors només accepten aquesta denominació quan no hi ha cap algoritme conegut que porte a la solució. No obstant, també es pot considerar l'existència d'un problema en funció del grau de novetat que supose per a l'alumne.

En 1945 el matemàtic hongarès G. Polya, va escriure l'obra *How to solve it,* que ha sigut crucial per a entendre la resolució de problemes. Basat en la manera de procedir d'un expert quan s'enfronta amb la tasca de resoldre un problema, Polya distingeix quatre fases: comprendre el problema, concebre un pla, executar el pla, comprovar la solució. Cadascuna de les fases s'acompanya d'un guió a tall d'autoqüestions que l'alumne pot plantejar-se en el procés de resolució (Bagazgoitia, Castañeda, Fernández i Peral, 1997)

Burton, Mason i Stacey (1988) en el seu llibre "pensar matemàticament" han exposat tres fases: a) inicial o d'abordatge, que consisteix a comprendre de què tracta el problema i de representar-lo adequadament, b) d'atac, assajar la primera hipòtesi i reconduir el procés quan siga necessari i assajar noves hipòtesis, i c) de revisió, reflexió i extensió, que comprèn el control dels càlculs, la verificació que la resposta respon al que era esperable, pensar en la possibilitat que el problema es poguera resoldre de manera diferent o més clara, i les seues relacions amb altres problemes. En castellà és recomanable consultar la guia de pautes per a la resolució de problemes elaborada per García (1992).

Per a Mayer (1983, citat en Pérez, 1994), els quatre passos enumerats per Polya es poden resumir en l'activació automàtica de dos processos: a) El primer procés és la traducció del problema, cosa que implica que una persona comprenga o definisca el problema i el traduïsca a una sèrie d'expressions i símbols matemàtics. Aquest procés exigeix la presència de coneixements lingüístics, coneixements semàntics i coneixements esquemàtics, que faciliten la comprensió de la tasca, permeten la seua representació i ajuden a elaborar un pla per a resoldre-la. b) El segon procés és la solució del problema, és a dir la utilització estratègica o ordenada i orientada a metes d'una sèrie de fets, tècniques i destreses dins d'un context matemàtic, així com la interpretació dels resultats com a solució plausible. Aquest procés exigeix un coneixement heurístic o estratègic que ajude a establir metes, els mitjans adients per assolir-les, i un coneixement operatiu o algorítmic que permeta portar-les endavant.

Traducció i definició del problema. Convertir la informació que inclou el problema a termes matemàtics, és a dir, arribar a una representació que permeta resoldre'l. Això implica que l'alumne puga comprendre el llenguatge i les expressions per mitjà de les quals expressa el problema (conèixer les expressions orals i escrites —coneixement lingüístic—, comprensió del context en què s'inscriuen els fets —coneixement semàntic—), ser capaç de reconèixer els conceptes matemàtics als quals es fa referència (coneixement al voltant del tipus de problema que estem resolent, decidir quines dades són o no rellevants o determinar les accions que han de realitzar-se) i que el subjecte assimile el problema als coneixements que té emmagazetnats a la memòria. Tots aquests coneixements se solen donar com sobreentesos, no obstant, la seua absència pot donar lloc a veritables dificultats per trobar la solució.

En la taula 2 s'enumeren alguns factors no matemàtics que dificulten la traducció de problemes matemàtics (Pérez, 1994).

Incloure laTaula 2

a) Coneixements lingüístics i semàntics. La manera d'expressar el problema pot mostrar certes ambigüitats lingüístiques o semàntiques que poden motivar diferents formes de comprendre un problema. El llenguatge quotidià, com ja s'ha vist, és més ambigu i contextual que el matemàtic, el qual exigeix un alt grau de precisió.

La paraula "és" pot adoptar quatre expressions simbòliques diferents: igualtat, pertinença a una classe, existència i participació. Pot ser que l'ambigüitat de la pregunta porte a solucions diferents. Per exemple, si preguntem "quants duros tenia Maria a la vidriola?", l'alumne pot interpretar quantes monedes de 5 pessetes o quants grups de cinc pessetes ixen del total de pessetes que té a la vidriola.

L'ordre i forma de presentació de les dades també planteja dificultats. Els novells, i la majoria dels alumnes ho són, solen fer una traducció a símbols numèrics molt ràpida, de forma literal, frase a frase. Si llegiu el següent problema: *"Compre un caramel per set pessetes, el venc per vuit, el torne a comprar per nou i el venc per deu. Guanye alguns diners? Si la resposta és positiva, especifica quants"*, ens adonareu que la forma com està plantejat ens dirigeix a realitzar un càlcul de guanys i pèrdues de forma lineal i successiva. Però, si en comptes de ser un objecte es tractara de dos (*Compre un caramel per set pessetes, i el venc per vuit. Compre un xiclet per nou i el venc per deu. Guanye alguns diners?*) seria més fàcil que ens adonàrem que el benefici és de dues pessetes.

b) Coneixements esquemàtics. La traducció del problema també es pot veure influïda pel significat que evoquen els trets lingüístics o pel confrontament amb els coneixements quotidians que té el subjecte.

De Corte (1993) mostrà que la dificultat dels problemes aritmètics varia en funció del tipus d'esquema que evoca el plantejament. Així, el grau de dificultat varia entre els següents problemes, encara que en tots es fa la mateixa operació amb els mateixos nombres. El problema *"Joan té 3 pomes. Anna té 7 pomes. Quantes pomes tenen entre els dos?"* que evoca un esquema de combinació entre dos conjunts és més fàcil que el problema *"Joan té algunes pomes,* *li'n dóna 3 a Anna. Joan té ara 7 pomes. Quantes pomes tenia Joan al principi?"* que evoca un esquema de canvi en el temps, i aquest és més senzill que el problema *Joan té 3 pomes. Anna té 7 pomes més que Joan. Quantes pomes té Anna?"* que evoca un esquema de comparació.

Altres dificultats es deriven del contrast entre el caràcter hipotètic de les dades matemàtiques davant les dades reals que s'empren en el llenguatge quotidià, i les diferències entre les teories personals o coneixements previs i les teories matemàtiques. Luria observà que subjectes sense escolaritzar que eren capaços de fer operacions aritmètiques senzilles de multiplicació i divisió tenien molts problemes quan les dades que se'ls donava no coincidien amb les de la realitat (p.e que la distància entre dues ciutats no és la que ells coneixen o que les creïlles són molt més barates que el preu que tenen al mercat). Les operacions "del compte la vella" sobre quin producte ens interessa més quan anem a comprar o la improbabilitat que en la Loteria Primitiva isca una sèrie ordenada (2, 4, 6, 8, 10, 12) revelen la presencia de coneixements sobre alguns conceptes matemàtiques derivats de l'experiència quotidiana.

El coneixement esquemàtic també s'utilitza per a inferir el tipus d'informació que és rellevant. La presència de dades irrellevants per a la solució ocasiona molts problemes. Si preguntem la probabilitat que una persona acabe convertint-se en advocat o en enginyer, i la informació que donen, d'una banda, és el percentatge d'enginyers i d'advocats que hi ha en la mostra de la qual s'ha extret el subjecte i, d'una altra banda, la descripció sobre el caràcter i els costums de la persona que està sent avaluada, ens adonem que la presència d'aquesta segona informació influeix en el fet que el subjecte no preste l'atenció adequada a les dades objectives. En aquest sentit, la presència d'un coneixement previ (siga correcte o incorrecte des del punt de vista matemàtic) en la línia que les persones d'una determinada professió es caracteritzen per tindre uns trets propis, afecta a la rellevància de la resta d'informació.

En la taula 3 es presenten algunes tècniques que ajuden a la traducció o comprensió de problemes. L'objectiu general és incitar els alumnes a reflexionar abans d'actuar i que planifiquen el seu propi procés de resolució.

Incloure la Taula 3

<u>Solució de problemes</u>. Aquesta part del procés exigeix un coneixement heurístic o estratègic i un coneixement operatiu o algorítmic o, en paraules de Polya, "un pla per a trobar una solució" i "executar el pla".

Com ja hem vist en l'apartat 3.3 (aptituds per a convertir-se en un aprenent competent), la resolució de problemes matemàtics depèn del domini que l'alumne tinga en quatre àmbits (De Corte, 1993): els coneixements conceptuals d'aquest àmbit específic, de la disponibilitat d'una gamma ampla d'estratègies heurístiques (estratègies sistemàtiques d'anàlisis i transformació dels problemes), de les habilitats metacognitives que posseeix o del coneixement sobre quan i com ha d'utilitzar els coneixements (coneixement relatiu al mateix funcionament cognitiu i les activitats vinculades a l'autocontrol dels processos cognitius), i de certs components afectius (creences, actituds, emocions).

Recentment, De Corte i Verscahaffel (1987, 1997, citats en Lago i Rodríguez, 1999) han desenvolupat un model de cinc fases sobre la resolució de problemes matemàtics: representació del problema, selecció i execució de les operacions aritmètiques i finalment, la interpretació i verificació. En aquest model es reconeix explícitament la importància dels processos cognitius i metacognitius en la resolució de problemes matemàtics, especialment en les fases d'interpretació i verificació. D'acord amb aquest plantejaments, en els darrers anys han sorgit models d'intervenció en l'àmbit de les dificultats d'aprenentatge. Montague proposa els següents passos: lectura comprensiva, parafrasejar amb les pròpies paraules (per exemple, què em demanen, què estic buscant?), visualitzar un diagrama (per exemple, la representació), hipotetitzar un pla per a trobar la solució (per exemple, quant passos tinc que donar per tal de trobar la solució?), estimar la resposta numèrica, calcular la solució i comprovar que tot va bé.

Bagazgoitia, Castañeda, Fernández i Peral (1997) per a cadascun dels heurístics enunciats en la taula 4 proposen una interessant col·lecció de problemes resolts, de problemes per a practicar i de problemes per a resoldre. Els usuaris de la proposta són els alumnes i els professors del nou batxillerat.

Incloure la Taula 4

En la mateixa línia, Payró i Vinós (1998) suggereixen canviar la majoria dels exercicis que es treballen a les classe del primer cicle d'ESO, i en el seu lloc, proposen resoldre veritables problemes, dels quals no es coneix el camí de resolució, amb l'ajut de materials diversos (calculadora, monedes, boles, baralla de cartes, fitxes,...). Per tal de portar en davant la seua proposta presenten algunes estratègies de resolució de problemes, i les il·lustren amb activitats diverses. Les estratègies que treballen són

Estratègia A: Començar pel més fàcil, simplificar o particularitzar. Disminuir el nombre d'elements donats per a simplificar el problema i passar després a generalitzar el resultat.

Estratègia B: Experimentar i buscar regularitats. Es basa en la tècnica d'assaig i error que consisteix a escollir un valor, aplicar a aquest valor les condicions indicades pel problema, provar si hem arribat a l'objectiu (si no és així, es repeteix el procés amb un altre valor).

Estratègia C: Organitzar i codificar. Per a organitzar millor les dades i els possibles camins que porten a la solució es recorre a símbols, croquis, gràfics, figures, diagrames, esquemes, etc.

Estratègia D: Modificar el problema. Dividirem el problema en parts més menudes i resoldrem cadascuna per separat. Passos a fer: descompondre el problema plantejat en problemes més menuts, resoldre els subproblemes, combinar els resultats fins arribar a la solució del problema global.

Estratègia E: Analogia o semblança. Buscar similituds o relacions amb situacions, problemes o jocs resolts anteriorment. Evidentment, la utilització d'aquesta estratègia serà més fàcil com més rica siga l'experiència de l'alumnat en la resolució de problemes i jocs.

Estratègia F: Explorar simetries. Aquesta estratègia es pot aplicar a les figures o a les expressions algebraiques que tenen parts intercanviables i no modifiquen les figures o expressions inicials.

Finalment, assenyalem les principals dificultats en la resolució de problemes identificades per De Corte (1993, i Verscahffel (1997)):

- Utilització inadequada de l'estratègia de la paraula clau. Davant del problema *"Tomàs i Susanna visitaren una granja en la qual hi havia gallines i porcs. Tomàs digué: hi ha 18 animals. Susanna contestà: Sí, i tenen 52 potes en total. Quants animals de cada classe hi havi a la granja?, e*ls subjectes de tercer sumaren 18 i 52 (perquè diu "en total") mentre que els subjectes de 5è dividien 52 entre 18 (perquè diu "quants de cada")
- L'abordatge mecànic dels problemes verbals. Un 40 % del alumnes d'11 anys es limitaren a sumar les quatre quantitats que apareixen en el problema següent *" Una escola va rebre 18 caixes de llibres de matemàtiques amb 21 llibres cadascuna. Un altre dia es van rebre 16 caixes amb 32 llibres cadascuna. Quants llibres de matemàtiques es van rebre en l'escola?*
- Concepció errònia del significat d'una operació, o del que es pot esperar quan apliquen una operació. Així, el significat associat a la multiplicació que fa els nombres més grans és la responsable que el percentatge de subjectes de 6è que encertaren els tres problemes següents fóra del 98 %, 99 % i 32 %, respectivament (*Els espinacs costen 65 pessetes el quilo. Joan compra 3 quilos. Quantes pessetes ha de pagar? Un terró de sucre costa 0,4 pessetes. Quant costaran 60 terrons?. Un litre de llet costa 85 pessetes. Joan compra 0.8 litres. Quants diners ha de pagar?).*
- No analitzar el significat de la situació problema (interpretació). És el cas del problema del trasllat dels soldats al qual ens hem referit amb anterioritat
- Els alumnes rarament verifiquen els seus processos de solució, o en tot cas sol comproven que l'operació ha estat executada correctament. No intenten verificar si el

problema s'ha representat adequadament, ni si l'operació seleccionada era la més apropiada, ni si la resposta ha estat interpretada correctament.

3.5.5. El cas de la geometria.

Pierre i Dina Van Hiele eren uns professors de matemàtiques d'ensenyament secundari que fa algunes dècades observaren en els seus alumnes els mateixos errors i dificultats any rere any. Allò els va portar a elaborar una explicació per a aquesta situació. El model Van Hiele descriu com evoluciona en geometria la forma de pensar dels estudiants i dóna al professorat unes pautes pràctiques per a organitzar les seues classes. La seua proposta ha estat utilitzada per organitzar recentment l'ensenyament de la geometria en tot el període d'ensenyament de primària i secundària als Estats Units; amb anterioritat ja ho havia estat a l'URSS i a Holanda.

El seu model està format per cinc nivells de raonament, els quals suposen una forma distinta de comprendre els conceptes matemàtics, la qual cosa es tradueix en una manera diferent d'identificar, classificar, demostrar, relacionar,... Aquests nivells són seqüencials i s'adquireixen de forma ordenada.

Primer nivell. És global i descriptiu. Es caracteritza perquè els alumnes utilitzen una visió global dels conceptes. Les justificacions dels alumnes fan referència amb freqüència a objectes físics, o al nom del concepte o a característiques visuals. Per exemple, una figura s'identifica amb un rombe perquè es pareix a un rombe o perquè té un pic cap amunt i un altre cap a baix. Perceben les figures com una totalitat, com una forma completa.

Segon nivell. Experiencial i analític. El alumnes treballen directament amb un o dos objectes particulars, i comencen a descobrir els seus elements, parts i propietats, encara que sense establir relacions entre ells. Els alumnes generalitzen aquestes característiques en tots els casos, per això les seues definicions són llistes de propietats certes per a aqueix concepte, encara que solen incloure més de les suficients i ometen alguna de les necessàries. Per exemple, un estudiant pot definir *un rectangle com un quadrilàter, amb dos parells de costats paral·lels, uns més llargs que els altres, i amb dues diagonals*, exigint, no obstant, implícitament, en dibuixar i identificar rectangles, que els seus angles siguen rectes. Comprenen les classificacions disjuntes de les figures, però tenen problemes amb les inclusives. Per exemple, pot memoritzar o recitar les definicions del quadrat i del rectangle, però no entén que els quadrats siguen un subconjunt dels rectangles.

Tercer nivell. Educativa. Els alumnes són capaços d'establir relacions entre les propietats d'una figura i entre unes figures i unes altres. Les figures es relacionen i classifiquen de forma lògica. Entenen una definició com un conjunt de condicions necessàries i suficients, comprenen les classificacions inclusives i els canvis en les classificacions quan es modifica alguna de les definicions originals (si definim un trapezi com un quadrilàter amb dos costats paral·lels, resulta que tots els paral·lelograms seran trapezis, mentre que si aquests els definim com els quadrilàters amb sols dos costats paral·lels, els paral·lelograms i els trapezis són famílies disjuntes). Comprenen la necessitat de demostrar les seues afirmacions, i consegueixen fer-ho d'un forma informal i establir algunes implicacions simples; també són capaços d'entendre demostracions formals curtes si se les donen fetes, però encara no tenen l'experiència suficient per a organitzar la seqüència completa necessària per a realitzar una demostració formal.

Quart nivell. Adquireixen plenament la capacitat de raonament lògic formal típic de les matemàtiques. Poden entendre els raonaments lògics i les demostracions formals, el paper de la deducció com a un mitjà de construir teories, admeten la possibilitat de realitzar una demostració per diferents camins i també que existesquen definicions equivalents d'un mateix concepte. Queda clar el paper de les definicions, dels axiomes, però encara sense fer raonaments abstractes.

Quint nivell. Desenvolupa teories sense necessitat intuïció. Adquireix un raonament rigorosament deductiu. El nivell es caracteritza per la capacitat d'utilitzar diferents sistemes axiològics, és a dir, diferents geometries. Aquesta etapa sol adquirir-se més enllà dels estudis de secundària.

Pastor i Gutiérrez (1994) exemplifiquen com podem treballar un mateix problema en funció del nivell de raonament de l'alumne. Per exemple: *Demostrar el nombre de diagonals que té un polígon de n costats*. En un primer nivell, l'exercici que es proposa és identificar, traçar o comptar el nombre de diagonals en diversos polígons concrets. L'exercici es pot fer dibuixant, o utilitzant geoplans i varetes, i després discutir en grup. També es pot limitar el problema a polígons d'un nombre concret de costats. En un segon nivell, per tal de poder arribar a una relació general, és aconsellable que els alumnes completen una taula amb les següents columnes: nombre de costats del polígon, nombre de diagonals del polígon, nombre de diagonals des d'un vèrtex, ... En un tercer nivell, encara que es continua treballant amb objectes concrets, les justificacions han d'anar més enllà del simple recompte, i ja podem incloure la utilització de variables, "n" en aquest cas. Ja resulta adequat enunciar el problema amb els termes utilitzats al principi. Com que la relació no és evident es pot guiar la recerca i la posterior demostració. La justificació no pot limitar-se a detallar la relació numèrica observada per al nombre de diagonals des d'un vèrtex per a un polígon de n costats (4-3, 5-3, 6-3, ...n-3), han d'explicar la raó d'aquesta fórmula, i des d'aquest punt obtindre d'immediat la fórmula general (nombre de diagonals des d'un vèrtex x nombre de costats/2). En un quart nivell cal proposar als alumnes que elaboren per si mateixos demostracions formals. No obstant això, de vegades és necessari "una idea feliç" per a poder triar un camí adequat, per això se'ls pot indicar que pensen en el nombre de diagonals que ix des de cada vèrtex.

4. PROPOSTES INSTRUCCIONALS

4.1. Com s'ensenyen les matemàtiques

4.1.1. El context d'aprenentatge i l'aprenentatge de les matemàtiques.

L'aprenentatge de les matemàtiques i la solució de problemes no s'esdevé en un buit cultural i social, sinó que són activitats construïdes socialment i culturalment. Aquest aspecte ha estat oblidat molt sovint, fet que ha donat lloc a resultats no desitjats. Aquí es tracta de trobar respostes a les diferències existents entre cultures, països o grups socials distints, de quins són els coneixements matemàtics amb els quals arriben els alumnes a l'escola i a les diferències entre l'aprenentatge matemàtic dins i fora de l'escola, o al fet que determinats efectes d'aprenentatge poden ser explicats atenent la cultura construïda a l'aula de matemàtiques.

- *Els estudis comparatius* analitzen les diferències en cognicions i en rendiments matemàtics entre diferents països, així com les ferramentes, les tradicions, les creences, les actituds i les pràctiques que fonamenten l'aprenentatge de les matemàtiques en aquests països. Cal distingir els estudis a gran escala, on es comparen un gran nombre de països, i els estudis comparatius a xicoteta escala, on el nombre de països sol ser de dos o tres, com per exemple el Projecte Michigan, on es compararen Japó, Taiwan i els Estats Units.

En aquest projecte es van analitzar els factors estrictament escolars i els ambientals que podien explicar la superioritat dels estudiants japonesos i de Taiwan, sobretot dels primers, sobre els nord-americans. Entre els factors escolars es va trobar que al Japó es dedica més temps a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, l'organització de la classe respon majoritàriament a una estructura global, es dóna un major èmfasi en la verbalització i la reflexió, als alumnes, se'ls dóna a conèixer les metes del que fan i se'ls ofereixen més oportunitats per poder construir la seqüència d'activitats a l'aula, els professors japonesos són més competents que els nord-americans, hi ha alguns tòpics que s'introdueixen entre 1 i 3 anys abans.

Entre els factors ambientals, i a més a més dels aspectes més generals com són la major participació en cerimònies o el tipus de jocs a què es juga, destaquen les diferències entre les llars japoneses i nord-americanes i, concretament a nivell de creences i implicació dels pares, tal com queda reflectit en la taula 5

Incloure la Taula 5

- *L'etnomatemàtica* es refereix a l'estudi sobre com les matemàtiques són practicades, expressades i transmeses dins de "grups socialment identificables". Les matemàtiques són un producte cultural present en totes les societats (comptar, mesurar, dissenyar, classificar,...), però, al mateix temps hi ha importants diferències entre els "distints grups socials". Des d'aquesta perspectiva s'han estudiat les matemàtiques de les cultures indígenes no occidentals i les matemàtiques informals presents en les cultures occidentals. El coneixement informal fa referència a dos àmbits distints, el coneixement matemàtic precoç o anterior a l'ingrés dels xiquets a l'escola, i la resolució d'activitats quotidianes per part de grups amb diferents grau de instrucció matemàtica o formal.

Amb quins coneixements matemàtics arriben els alumnes a l'escola? Durant els primers anys tots els xiquets desenvolupen una sèrie de coneixements bàsics, intuïtius i implícits, experiencials, que els permet donar resposta a situacions concretes i específiques en les quals les informacions numèriques i geomètriques són rellevants. Així, per exemple a una edat molt precoç són capaços de percebre la "nombrositat", d'ordenar diferents col·leccions d'objectes segons el nombre d'elements (12 mesos), d'utilitzar diferents formes d'etiquetatge per a diferenciar col·leccions fins a 3 elements (18 mesos), o d'identificar una correspondència numèrica entre una sèrie d'elements visibles i una sèrie d'estímuls auditius.

Segons Resnick (1989) els xiquets abans de la seua escolarització formal desenvolupen certs esquemes o conceptes preverbals de quantitat que els permet discriminar entre conjunts de quantitats diverses que se'ls presenta visualment. L'adquisició del llenguatge comporta el desenvolupament d'altres formes de coneixement matemàtic: d'una banda, els conceptes protoquantitatius que expressen quantitat sense precisió numèrica —gran, xicotet, molts, pocs,...—, i d'un altra, comptar com a primera forma d'expressió quantitativo-numèrica, com un primer pas cap a la fórmulació de judicis quantitatius exactes. Els infants presenten una rica varietat d'estratègies de recompte material (basades en l'ús d'objectes manipulatius concrets) i estratègies de recompte verbal (comptar cap endavant i cap endarrere).

Cap als 3 o 4 anys presenten coneixements sobre el recompte basats en una sèrie de principis numèrics, que els permet disminuir la dominància dels senyals perceptius i lingüístics: correspondència un a un entre els objectes comptats i la paraula utilitzada per a comptar-los, mantindre un ordre fix en les paraules que s'utilitzen per a comptar, saben que l'ordre en què els objectes són comptats és irrellevant, i utilitzar l'última paraula per a representar el nombre d'objectes de la col·lecció (Gelmann, 1983, citat per Martí, 1996). També en el període preescolar són capaços d'utilitzar el principi de composició additiva per tal de descompondre un nombre en alguns dels seus components (de 7 a 9 en van 2) o compondre nombres a partir del seus components (9 = 2 +7).

En el camp de la notació també s'assenyala la precocitat amb què diferencien els diferents sistemes notacionals —dibuixos, lletres, nombres—; en la notació matemàtica, i contràriament a l'escriptura, les unitats es separen, existeix major proporció d'elements repetits,... També presenten coneixements bàsics en l'àmbit geomètric (que la distància més curta entre dos punts és la recta, sensibilitat als canvis de mida,...) o topològic (diferencien figures obertes de les tancades, elements interns i externs, pròxims i llunyans,...).

Com es pot comprovar, els alumnes abans d'ingressar a l'escola disposen d'una base intuïtiva i d'alt valor adaptatiu de coneixements matemàtics; però, aquests coneixements són poc flexibles, romanen implícits, estan escassament articulats i depenen de situacions i objectes específics. És clar que l'escola va més enllà (complexitat, sistematització, formalització), però, per què xiquets i xiquetes amb una capacitat espontània de tractat aspectes fonamentals de l'àmbit matemàtic, presenten serioses dificultats en l'aprenentatge escolar de les matemàtiques?

Com és l'aprenentatge de les matemàtiques fora de l'escola i en el context escolar? L'adquisició i l'ús del coneixement matemàtic en situacions quotidianes ha estat objecte de nombrosos estudis als darrers anys. Comparar com s'adquireix i com s'utilitza el coneixement matemàtic en contextos extraescolars i en contextos escolar és important perquè pot ajudar a tindre dades més fiables sobre els mecanismes d'adquisició i sobre la relació entre el coneixement matemàtic i el seu ús en contextos significatius. Nunes (1992) ens aporta informació molt interessant sobre el que ocorre fora de l'escoles:

- Els procediments utilitzats per resoldre problemes difereix d'un context a l'altre, i de forma general, són diferents als que s'ensenyen i s'aprenen a l'escola.
- Són procediments menys formalitzats i tenen una natura oral, no escrita.
- En general, són procediments molt eficaços, amb un valor funcional molt alt i amb una gran flexibilitat per adaptar-se a les dades numèriques concretes.
- Solen estar basats en aspectes significatius específics de la situació, més que en regles generals.
- A pesar de les diferències, els procediments emprats per resoldre problemes a l'escola i fora es basen en els mateixos principis matemàtics bàsics (recompte, composició additiva, concepte d'unitat,...).
- Alguns problemes que amb els coneixements escolars podrien ser resolts aplicant procediments complexos (per exemple, de multiplicació per la unitat seguida de zeros), són transformats en problemes més senzills i resolts mitjançant coneixements menys complexos (composició additiva, per exemple).

Gómez-Granell (1997) resumeix els resultats de l'adquisició i l'ús dels coneixements matemàtics de la següent forma:

1. Les persones amb escàs nivell d'escolarització són capaços de crear els seus propis procediments per a solucionar els problemes que els planteja la seua activitat quotidiana. En general, aquest procediments són molt diferents dels que s'aprenen a l'escola.
2. L'habilitat per a resoldre problemes de la vida quotidiana no correlaciona amb l'habilitat per resoldre problemes de raonament formal o problemes de tipus escolar o acadèmic

Així doncs, si d'una banda és cert que hi ha tipus de coneixements matemàtics que es poden desenvolupar al marge de la instrucció formal, també ho és que hi ha d'altres que no es poden desenvolupar al marge de la instrucció escolar. Per exemple, les persones no-escolaritzades, siguen adults o menuts, tenen grans dificultats per entendre el principi de la propietat commutativa de la multiplicació, de forma que si han sumat 6 vegades 12 per a resoldre la multiplicació 6 x 12, tornaran a sumar 12 vegades 6 quan se'ls planteja la multiplicació 12 x 6. Sembla que els coneixements adquirits en situacions quotidianes són sempre de caràcter additiu i que la multiplicació requereix estratègies de descontextualització i d'explicitació de les relacions que no apareixen en les situacions quotidianes.

En general, els problemes de la vida quotidiana en què intervenen les matemàtiques tenen les següents característiques:

* El problema és identificat i definit pel mateix subjecte; a més a més, la definició del problema es construeix a mesura que l'activitat avança. El problema i la solució es generen simultàniament.
* Està socialment contextualitzat i té una finalitat pràctica, les dues coses li donen un interès i un nivell d'implicació personal elevats. No es tracta d'aprendre matemàtiques o construir coneixement matemàtic, fins i tot el subjecte no és conscient en molts casos d'estar realitzant una activitat matemàtica.
* Les solucions poden ser diverses i no necessàriament exactes. No hi ha un únic mètode, el subjecte es pot inventar un mètode. L'experiència personal influeix enormement en la solució.

Si observem un exemple típic de problema escolar, com el que cita Gómez-Granell (1997), de seguida ens adonarem que els problemes escolars estan més orientats a aprendre un mètode de resolució o aplicar un algoritme que a trobar una solució, que no hi ha un veritable problema, que estan perfectament definits, que tenen un únic mètode de resolució i un únic resultat, que estan descontextualitzats de l'experiència quotidiana, perquè no tenen una repercussió pràctica per al subjecte,...

De tots és conegut que un escarabat té 6 potes i una aranya en té 8. Un col·leccioniste troba un dia 14 d'aquests animals. Si haguera calçar-los necessitaria 47 parells de sabates. Quants escarabats i quantes aranyes hi va trobar?

Des d'una perspectiva comparativa, Resnick (1987), Nunes i col·ls. (1983) informen sobre les diferències entre aprendre en l'escola i fora de l'escola (vegeu la taula 6):

Incloure la Taula 6

La cultura de l'aula de matemàtiques. Els estudis confirmen que gran part dels coneixements, de les creences, de les actituds i els valors cap a les matemàtiques dels alumnes estan en funció de la seua participació en les activitats diàries en les classes de matemàtiques. Des d'una perspectiva antropològica i sociològica, cal preguntar-se com és possible el desenvolupament més o menys tranquil de les classes de matemàtiques si professor i alumnes interpreten l'aula des de diferents perspectives? La resposta és el *"contracte didàctic"*. Les interaccions en l'aula estan regulades per normes i rutines, que en la majoria de les voltes romanen implícites, que són construïdes a poc a poc en les interaccions diàries, i que encara que la seua finalitat siga reduir la complexitat de l'aula, acaben per dificultar les autèntiques formes de comunicació. Així, per exemple, el professor està autoritzat a demanar als alumnes que treballen en la forma que ell o ella tenia prevista, o els alumnes entenen que quan un professor reitera la mateixa pregunta és un signe que les respostes anteriors són errònies.

De la mateixa forma, moltes conseqüències no desitjades o imprevistes són el resultat directe de les característiques negatives de la cultura de l'aula i, per tant, cal que les coneguem i que intentem evitar-les. Certes creences errònies o estratègies superficials —mirar el títol del capítol, buscar paraules a l'enunciat del problema que ens informe quina operació cal realitzar, seleccionar l'operació que ha estat ensenyada més recientment,...— que els alumnes fan servir després d'anys d'haver rebut ensenyament matemàtic formal no han estat ensenyades explícitament i intencionadament pel professor, però els alumnes les han après a partir de la realització de les tasques diàries. A continuació presentem alguns exemples.

Després d'uns anys d'escolarització els alumnes desenvolupen la creença incorrecta que les matemàtiques són un conjunt de regles i procediments que un ha d'usar de forma mecànica i que tenen poca o cap relació amb la realitat. Aquesta creença respon a la naturalesa irreal i desprovista de significat dels problemes que es resolen a les classes de matemàtiques (naturalesa estereotipada) i a la forma en què són analitzats i resolts en aquestes classes (orientació al producte). Sols així són explicables les situacions següents. *En una classe es demana als alumnes que formen parelles, a cada parella se li entreguen 5 pilotes amb la consigna que han de compartir-los. Un alumne talla la cinquena pilota en dues meitats*. En resposta a un problema un estudiant de primer grau va dir: *"No estava segur si sumar o restar, però al fina he decidit restat perquè la suma em donaria un resultat superior a 20"* (Nota: el nombre 20 era el límit superior de domini numèric del primer grau de les escoles belgues).

Malgrat que l'ensenyament de les matemàtiques s'ha modificat enormement als darrers anys, i que l'ensenyament concret varia d'una escola a una altra, moltes de les practiques educatives tenen certes característiques difícils d'eliminar i responen a una forma d'entendre i de fer matemàtiques a l'escola (Stodolsky, 1991).

Incloure la Taula 7

Aquestes practiques educatives estan basades en la creença que allò més important és dominar un llenguatge nou que sols coneix el professor, que es pot adquirir memoritzant la regla de càlcul adequada, la qual cosa es pot assolir repetint exercicis de forma solitària. Així doncs, els alumnes s'adonen que el més important és "trobar la fórmula adequada a la situació adequada", per a la qual cosa busca indicadors que l'ajuden a identificar la fórmula adient, que a més a més s'ha de fer al més aviat possible i sense cap error, i tot això sense necessitat de comprendre el que està fent. Molts dels errors es deriven d'aquesta unió entre les pràctiques educatives i l'economia cognitiva molt pròpia del sistema de processament de la informació.

4.1.2. Les cognicions del professor al voltant de les matemàtiques

Fins a principis dels anys 80, la recerca de l'ensenyament s'havia centrat en aspectes fragmentats, aïllats i fonamentalment externs a l'ensenyament i s'havia oblidat del contingut que era ensenyat. Des de la meitat dels 80 els científics han començat a analitzar les cognicions del professor, adoptant com focus d'interès els continguts que estan sent ensenyats. En l'àmbit de les cognicions del professor sol distingir-se entre el coneixement i les creences dels professors.

El coneixement dels professors. El coneixement dels professors no és un tot monolític, i es poden diferenciar clarament tres components o categories:

a) Els coneixements matemàtics. Inclou els conceptes, procediments i les estratègies de solució de problemes dins d'un domini d'instrucció determinat, així com les interrelacions entre aquests i les vinculacions amb les d'altres àrees afins.

En general, se sap que l'ensenyament d'un tòpic determinat requereix que un professor domine suficientement aquest tòpic. Però, també es disposa de dades empíriques que confirmen que els professors de primària i secundària no reunien els requisits necessaris. Un gran nombre de professors en el període d'iniciació tenen els mateixos errors conceptuals respecte de la multiplicació i la divisió amb decimals majors i menors de la unitat que presenten els alumnes als 10-12 anys, o en les relacions que hi ha entre divisió partitiva i divisió quotitiva, entre divisió i sostracció o entre divisió simbòlica i la seua aplicació al món real.

Encara que el grau de coneixement matemàtic del professor manté relacions molt pobres amb els resultats dels estudiants, també és cert que en la mesura en què els investigadors han fet descripcions més detallades i específiques del coneixement matemàtic dels professors en tòpics concrets (riquesa i varietat del problemes que plantegen als alumnes, la qualitat del discurs matemàtic) s'ha incrementat la mida de les correlacions.

b) Els coneixements pedagògics. Un bon ensenyament de les matemàtiques requereix també coneixements i habilitats pedagògiques. Una part d'aquest coneixement és general, però una altra part, està especificament relacionat amb els continguts matemàtics. Aquest últim, inclou diversos subsistemes:

- Coneixement de les estructures de les classes de matemàtiques i de les rutines de l'ensenyament de les matemàtiques.
- Coneixement respecte dels diferents tipus de problemes, de representacions gràfiques o de qualsevol altres per a introduir nocions o habilitats matemàtiques concretes.
- Coneixement dels materials instruccionals disponibles, com ara textos escolars, software per a calculs, materials manipulatius,... i coneixement respecte de la seua aplicabilitat.

Per a la majoria d'aquests coneixements hi ha evidència empírica de diferències entre els professors, i del seu impacte en el comportament docent i en els resultats dels alumnes.

c) Els coneixements de com els alumnes pensen i aprenen. És tracta del coneixement que el professor té dels conceptes i procediments que els alumnes aporten a l'aprenentatge d'un tòpic determinat, de les falses concepcions i dels procediments deficients que han desenvolupat, de les etapes de domini per les quals és probable que passen, i de la competència i comprensió dels estudiants concrets. Aquesta última àrea és la que ha rebut més atenció.

Els professors han demostrat tenir bona capacitat predictora de la qualitat dels treballs dels alumnes, però tenen més dificultats per anticipar les estratègies preferides d'un estudiant en concret. La qual cosa porta a pensar que els professors experimentats no fonamenten les seues decisions instruccionals en una avaluació acurada, individualitzada i orientada al procés del coneixement dels seus alumnes. És més, sembla que els professor es mouen al llarg d'un conjunt predeterminat d'habilitats i conceptes que esperen que els seus estudiants coneguen, és a dir, que segueixen un guió predeterminat.

Les creences dels professors. Thompson (1992) ha documentat clarament que hi ha importants diferències entre els professors en les creences sobre la natura i significat de les matemàtiques, les metes importants de les matemàtiques escolars, el rol del professor i de l'alumne en les classes de matemàtiques, la idoneïtat de certs materials o procediments d'avaluació, i coses així. També s'han trobat relacions entre les creences del professor i la concepció que té de les matemàtiques, d'una banda, i entre els punts de vista que manté respecte l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques i la seua conducta docent, d'una altra banda.

El rang de punts de vista sobre les matemàtiques va des d'una visió estàtica, un cos unificat de coneixement absolut i infal·lible, fins a concebre les matemàtiques com un camp de la creació i invenció humana en contínua expansió. Aquests punts de vista diferents es veuen reflectits en diferències en les creences i preferències davant d'importants qüestions de l'educació matemàtica, com ara la importància d'un lloc de control apropiat, què constitueix evidència del nivell de comprensió de l'alumne, el propòsit de la planificació de les lliçons de matemàtiques,...

I és més, amb independència del nivell de consciència/inconsciència, les creences juguen un paper significatiu en modelar els patrons de conducta instruccionals. No obstant, les seues relacions són complexes, ja que hi ha diverses fonts que poden complicar-la: el context social en el qual les matemàtiques són ensenyades, el fet que algunes creences siguen més unes manifestacions verbals i eslògans que teories instruccionals operatives, o la manca d'un fort coneixement base que impedeix reconèixer oportunitats per a aplicar les idees i els coneixements matemàtics.

Els investigadors també han prestat atenció a la qüestió si les cognicions dels professors poden ser canviades. Aquests és el cas del treball desenvolupat per Carpenter i col·laboradors, i que han denominat "instrucció guiada cognitivament (CGI)". Les idees base són que els processos d'E/A són excessivament complexos per a poder ser anticipats i que la solució de problemes està mediada pels pensaments i les decisions que prenen els professors. Conseqüentment, per a aconseguir canvis significatius en la seua pràctica la millor estratègia serà ajudar els professors a prendre decisions informades, més que entrenar-los per tal que actuen d'una forma determinada. Els professors que participaren, una vegada familiaritzats i entrenats amb els coneixements i creences, prestaven significativament més atenció a la solució de problemes i menys a l'aprenentatge de fets que els professors control, animaven més els seus alumnes a emprar una varietat d'estratègies i els escoltaven com resolien els problemes, i creien que la instrucció de les matemàtiques havia de basar-se més en el coneixement base dels alumnes. D'una altra banda, els seus alumnes mostraren major coneixement de fets i informaven d'una major confiança i comprensió en la solució de problemes.

4.1.3. Les dificultats dels alumnes en l'aprenentatge de les matemàtiques

Els orígens de les dificultats en les matemàtiques són molt diversos. Macnab i Cummine (1992) els agrupen en quatre categories: el desenvolupament cognitiu del alumnes, dificultats atribuïbles a l'organització de l'escola i de la classe, dificultats degudes a actituds i emocions cap a les matemàtiques, i dificultats originades pel la mateixa naturalesa de les matemàtiques. Les tres primeres categories ja han estat revisades en diversos apartats d'aquest capítol; ara, el nostre interès se centra en la naturalesa de la matemàtica, on es poden distingir vuit fonts de dificultats.

1) La naturalesa abstracta dels conceptes implicats. Per a molta gent les matemàtiques són una terra misteriosa en la qual la claretat del món quotidià és reemplaçada per formes ambigües, incertes i canviables.

Exemple. Al principi el xiquet aprèn a associar les paraules "de", "voltes" i "producte" amb el símbol "x" de l'operació denominada multiplicació, que interpreta com a suma reiterada de nombres naturals. Així, tres grups de quatre, tres vegades quatre, el producte de 3 i 4 i "3 x 4" denoten la mateixa operació 4+4+4. El xiquet entén que és una operació sobre nombres naturals per la qual les coses es fan més grans. Però, que passa quan l'operació de multiplicar s'estén als nombres fraccionaris i sencers? Encara que el xiquet aprèn molt prompte la idea que la meitat d'una poma s'obté en dividir-la en dues parts iguals, i més tard que ½ de 12 és 6, obtenen la resposta novament per divisió, ara, amb les fraccions, se li diu que aquest procés s'anomena també multiplicació i que s'utilitza el mateix símbol "x". Sorpresa!. La qüestió és que moltes idees matemàtiques s'aprenen en un context particular i sorgeixen així certes característiques relacionades amb aquest context que no forma part integral del concepte. El mateix passa, per exemple, en l'aprenentatge de les funcions trigonomètriques sinus, cosinus i tangent, associades inicialment amb triangles rectangles.

2) La complexitat dels conceptes. El professor que infravalora la complexitat de les idees matemàtiques està generant moltes dificultats. Per exemple, tractem de definir què és una fracció, un nombre sencer o una matriu de 2x2. Probablement, la majoria dels alumnes només recorden definicions restringides a la forma escrita (un nombre sencer és un nombre amb signe més o menys davant). Una resposta a la complexitat és construir jerarquies d'aprenentatge.

Els professors han recorregut a tres estratègies per tal d'enfrontar-se amb el problema de la complexitat. Cadascuna té el seu mèrit, però també és defectuosa en algun sentit.

- Mitjançant de l'abstracció. Les definicions es presenten de la forma més abstracta com siga possible, per tal que no s'associe amb particularitats del context. Un exemple és la pràctica habitual d'introduir la multiplicació de nombres sencers:

  Calcular 2 x (-3)

  a) 2 x (3 + (-3)) = 2 x 0 = 0

  b) Aplicant la distributiva, s'obté: (2 x 3) + (2 x (-3)) = 0

  c) Sumant -6 a cada costat ens resulta 2 x (-3) = -6

- Mitjançant l'analogia, la comparació amb alguna situació familiar o amb algun paregut superficial. D'introduir 5x com 5 taronjes, resulta que 5x + 3 x = 8x (vuit taronjes), però tambè que 5x + 3 y = 8xy (vuit fruites).
- Mitjançant l'autoritat o "fes com jo et diga".

3) La naturalesa jeràrquica de les matemàtiques. Si bé és cert que la naturalesa de les matemàtiques siga probablement la més jeràrquica. No és menys cert que si permetem que aquesta jerarquia en el contingut domine la seqüència d'aprenentatge, és del tot probable que sorgisquen dificultats i avorriment. Les estratègies més usuals per tal de disminuir una adhesió massa estricta a la naturalesa seqüencial de l'assignatura han estat:

- Mirant cap a davant. El professor inicia un tema parlant del que farem, dels objectius esperats o dels problemes finals que han de ser resolts. Aquest és el cas de la noció d'equilibri en la resolució d'equacions simples (2x + 1= 13; 2x és menor que 13 en 1, per tant 2x = 12; x és la meitat de 12, per tant x = 6).
- Canviant de tema. Es tracta de la idea del currículum en espiral. Un tema no s'introdueix d'una vegada i per a sempre, sinó que es torna a aquest en diverses ocasions, cada vegada amb més profunditat.
- Començar de nou. Introduir el tema nou a partir d'alguns temes previs, no necessàriament des de l'anterior.

4) La naturalesa lògica de les matemàtiques. L'aspecte deductiu formal de les matemàtiques és considerat com un dels principals focus de les dificultats. La falta d'atenció al pensament lògic en els currículums de matemàtiques és insatisfactòria. Certament és tracta d'una destresa d'alt nivell, però resulta necessària en tots els nivells de competència matemàtica. Abandonar-la en favor d'una aplicació instrumental de les regles és sempre una mala pràctica. Però, al contrari, una consideració excessiva de l'aspecte deductiu pot portar a entendre que els problemes poden ser resolts mitjançant el pensament intel·ligent, sense necessitat de confiar en mètodes rutinaris, regles formals o conjectures aleatòries. En el mateix sentit, cal pensar que les demostracions són necessàries, però no com a punt de partida, sinó d'arribada d'una explicació.

5) La notació formal. La notació formal és indispensable per al desenvolupament de les matemàtiques. En certa forma, les matemàtiques es fan visibles gràcies a la notació, però moltes de les dificultats sorgeixen de la separació entre l'apariencia visual i el significat fonamental. Exemples: a) 3x - x = 3. b) l'ús anòmal de la juxtaposició com a símbol de la multiplicació: ni 28 és 2 x 8, ni se sol escriure x2 en comptes de 2x, ni l'expressió sin 30^0 equival a sin x 30^0 ni és correcte escriure sin 2x com 2 sin x. c) La notació d'índexs és una altra àrea on l'aparença visual també introdueix dificultats. Per exemple, ja que a^2 significa dues as multiplicades entre si, a^0 haurà de significar cap a multiplicada per si mateix, es a dir, zero; d) La utilització indistinta del símbol = per a representar identitats i equacions pot causar confusions. $x(x + 2) = x^2 + 2x$ és una identitat, mentre que $x(x + 2) = 3x + 2$ és una equació.

La millor forma d'abordar tals conceptes equivocats és animar els alumnes a pensar sobre el significat del que fan. Però, una pressió excessiva en aquest sentit pot desvirtuar el propòsit principal que anima a emprar la notació formal: poder realitzar processos matemàtics, sense haver de justificar cadascuna de les seues etapes individuals.

6) Els algoritmes formals. Quina importància tenen els algoritmes en l'ensenyament escolar de les matemàtiques? En un sentit real les matemàtiques acaben en els algoritmes. Ara bé, en el procés algoritmic l'habilitat de raonar no éstà implicada i, a més a més, moltes vegades els alumnes arriben a la conclusió que els algoritmes són l'essència de les matemàtiques. Per la qual cosa un èmfasi excessiu en els algoritmes va en detriment del desenvolupament del pensament matemàtic. Haurien de ser eliminats?. No, els algoritmes són dignes quan permeten fer amb tècniques més simples el que d'una altra manera seria un procés costós o impossible. Per exemple, la fórmula πr^2 permet calcular l'àrea d'un cercle de radi r per a la qual no existeix una alternativa practicable. També seria desitjable que entengueren per què funciona. Un altre algoritme molt potent és el que ens permet calcular el màxim comú divisor entre dos nombres a i b, on a = bq + r, i el maxim comu divisor entre b i r. MCD (28374, 13436) = MCD (13436, 1502) = MCD (1502, 1420) = MCD (1420, 82) = MCD (82, 26) = MCC (26, 4) = 2, on en cada etapa es calcula el residu de dividir el major nombre dels dos pel menor.

7) El concepte i l'us de les variables. El concepte de variable en matemàtiques està molt lluny de ser simple. Gran part de la dificultat consisteix en el fet que moltes de les tasques d'àlgebra a l'escola primària no tenen un sentit de variabilitat. En el context quin és el valor de b si b + 4 = 9, la lletra b sempre té un valor específic; en el context quin és el valor de 3a + 4 quan a= 1, a =2, a = 3, en realitat es tracta d'una qüestió de càlcul numèric disfressat, o quan els alumnes responen que el resultat de sumar 5 a 3x és 8x. En altres contextos difícilment es pot eludir el veritable concepte de variable, com quan se'ls pregunta quin és el n-èsim nombre imparell (solució: 2n -1), o que troben l'expressió del perímetre d'un rectangle d'àrea 24 cm en funció de la longitud del rectangle (solució: 2 (l + 24/1)).

8) Els conceptes espacials i el pensament geomètric. La naturalesa visual de la geometria suposa un ampli nombre de dificultats per als quel'aprenen. No hi ha una forma d'evitar el conflicte entre el particular i el general. Per exemple, podem considerar un triangle qualsevol, però en el moment en què el dibuixem resulta un triangle molt específic en forma, mida i orientació i, inevitablement, posseeix propietats que no pertanyen a tots els triangles. Una altra dificultat és l'aparença visual ambigua que té la representació bidimensional d'un objecte tridimensional; per exemple, els angles rectes no ho semblen, les línies paral·leles semblen divergents.

Una altra dificultat és la relació entre l'experiència visual i pràctica (observacional i d'aproximació) i el pensament lògic i l'exactitud teòrica. Un alumne que retalla els tres vèrtexs d'un triangle i els disposa costat per costat pot estar raonablemement convençut que la suma dels angles dels triangles que ha mesurat és aproximadament 180^0, però una qüestió diferent és saber que la suma dels tres angles de qualsevol triangle de qualsevol mida són 180^0. Que la longitud de la circumferència d'un cercle siga π voltes la longitud del diàmetre o les longituds amb un valor numèric irracional (la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles amb els costats iguals de longitud 1 és $\sqrt{2}$) no són accessibles a l'experiència.

4.2. Com s'han d'ensenyar les matemàtiques

Els xiquets i xiquetes aprenen en la mesura en què les experiències de la classe de matemàtiques els permet crear les seues pròpies idees, a comprendre els conceptes matemàtics. El professor ha de preguntar-se pels errors que els alumnes fan, donar-los moltes oportunitats per a prendre decisions i per a usar i fer servir el que ja saben, treballar amb materials concrets (objectes), pictòrics (imatges, diagrames) i simbòlics, però sempre aquestes situacions han d'activar les manipulacions mentals i els processos cognitius. Per a fer possible tot això, el mestre haurà de pensar sobre com aprenen els nens abans de plantejar-se com ensenyar. És important tindre present que ensenyar és ajudar els xiquets i xiquetes a comprendre el significat de les idees matemàtiques.

4.2.1. Estratègies instruccionals

A continuació, de forma breu, presentarem les propostes instruccionals elaborades per diferents autors. Per a Schoenfeld, el professor ha de ser un model de comportament que assenyale als alumnes tots i cada un dels passos que utilitza quan soluciona problemes ("si el mestre no ho diu, la majoria dels alumnes no ho captaran") i un entrenador de les habilitats estratègiques dels alumnes. A més a més, la discussió del procediments emprats per diferents alumnes i l'anàlisi dels errors comesos són dues estratègies instruccionals que poden afavorir la comprensió matemàtica de l'alumne.

Hernández i Soriano (1997) assenyalen que els models cognitius ens doten de quatre principis bàsics per ensenyar matemàtiques en l'ensenyament primari: promoure l'ús dels processos cognitius (rebre, interpretar, organitzar, aplicar, recordar i solució de problemes), emfasitzar l'aprenentatge de conceptes i generalitzacions, emfasitzar la motivació intrínseca, considerar les diferències individuals entre els aprenents. La proposta per a ensenyar matemàtiques d'Hernández i Soriano descansa sobre tres pilars:

- Un currículum basat en els processos, en espiral i globalitzat.
- Una organització de l'aula flexible que possibilite els diferents agrupaments i que els alumnes puguen adoptar una actitud activa i experimental, per a la qual cosa cal disposar de materials variats i començar a incorporar les noves tecnologies.
- Que els professors es comporten com a professionals. és a dir, a més del seu treball directe amb els alumnes, també han de llegir, pensar, visitar, reflexionar, investigar.

Macnab i Cummine (1992) proposen un model d'ensenyament, tant en un sentit preventiu com correctiu, centrat en les dificultats d'aprenentatge. Entre les estratègies preventives destaquen les següents: no introduir noves idees massa de pressa, no introduir les idees en un marc massa específic que després no ajude a futurs desenvolupaments, assegurar-se que els diferents aspectes d'una idea estan clarament diferenciats, no introduir notació formal o presentar una idea o una tècnica abans que puga ser assimilada a les estructures de coneixements existents, evitar una complexitat notacional innecessària, no introduir tècniques formals massa prompte o sense l'apropiada motivació. Exemples d'estratègies de correcció són: considerar un exemple simple del problema, en un context algebraic considerar un exemple numèric, demostrar que existeix un defecte en el mètode de l'alumne, tornar a explicar el principi que justifica la tècnica, usar mètodes alternatius d'explicació, mostrar com s'ha derevisar la correcció d'una resposta. Per a cadascuna de les estratègies suggereix procediments concrets i els il·lustra amb exemples.

Finalment, Martí (1996) suggereix una sèrie d'estratègies-guia de caràcter molt general que admeten concrecions variades en funció de les necessitats concretes de cada cas:

A) Respecte a la matèria:

1) Assolir un equilibri entre el llenguatge formal i el significat. Les matemàtiques no serien el que són sense el seu llenguatge formal; però, la prioritat mai ha de ser el domini de subtileses formals desvinculades del seu significat. Per tal d'aconseguir-ho hem de partir dels coneixements intuïtius de l'alumne i presentar el coneixement matemàtic de forma contextualitzada, insistint en el significat referencial del llenguatge matemàtic. En concret, és tracta d'establir una relació entre la notació matemàtica i altres tipus de sistemes notacionals (llenguatge oral, escrit, objectes -àbacs, palets,..- dibuixos, gràfics, esquemes,...) i estendre'l en la mesura que siga possible a diferents situacions; molt sovint un coneixement intuïtiu queda ancorat en una situació molt

concreta.

2) Plantejar els coneixements matemàtics directament vinculats a la resolució de problemes. Una de les característiques fonamentals de les matemàtiques és el seu caràcter instrumental: el coneixement matemàtic s'aplica per a resoldre problemes en altres àmbits. En conseqüència, l'ensenyament de les matemàtiques perdrien gran part del seu sentit si no està associat a situacions de resolució de problemes, de situacions significatives, que exigeixen el descobriment d'una o de diverses solucions. En aquest context, no es pot confondre resoldre situacions problemàtiques amb els exercicis ("problemes") que el professor planteja per tal de garantir l'adquisició de rutines de càlcul. Aquesta forma d'actuar pot ajudar els alumnes a abandonar la idea que fer matemàtiques és aplicar la mateixa regla de forma repetida, o que la solució sempre és única, o que les matemàtiques no serveixen per a res.

B) Respecte de l'organització de la classe

3) Potenciar el treball en grups reduïts. L'ensenyament de les matemàtiques a l'aula hauria de prendre en consideració el caràcter social de les matemàtiques, afavorint en la mesura que siga possible, processos d'adquisició interactius, i en concret, el treball en grups i el treball col·laboratiu i cooperatiu.

4) Utilitzar altres instruments d'aprenentatge, com ara l'ordinador i la calculadora. L'aprenentatge no hauria de ser vist exclusivament com un procés personal, que té lloc al cap de l'alumne, hauria d'incorporar-se el punt de vista que es tracta d'un procés que es desenvolupa en part gràcies a la interacció que establim amb instruments de diferent índole (compàs, escaire, transportador, calculadora, ordinador...).

C) Respecte dels alumnes

5) Atendre als processos metacognitius en la seua doble vessant, ser conscient de la pròpia activitat cognitiva (comprendre el que estem fent) i controlar i regular la dita activitat (dispondre de l'estratègia adequada per portar endavant allò que fem). És a dir, per fer matemàtiques es necessari identificar el significat matemàtic i referencial de la situació i al mateix temps saber quins coneixements hem d'utilitzar. Concrecions a l'aula són fer variacions contextuals del problema, demanar els alumnes que busquen situacions en les quals es pot aplicar un determinat procediment, treballs en grup on l'alumne ha d'explicitar el que sap, establir comparacions entre com resol el problema el professor i l'alumne,...

6) Fomentar la motivació dels alumnes. Per a destacar la importància de motivar l'alumne en classe de matemàtiques hem de ser conscients, d'una banda, que l'aprenentatge escolar de les matemàtiques ni és una mera continuació de les adquisicions informals ni té lloc de forma espontània (el concepte de proporció, la comprensió de quantitats intensives -Km/h, alumnes/classe,..-, mai tindria lloc sense una instrucció formal) i d'una altra banda, que es tracta de coneixements que demanen dels alumnes un grau alt d'implicació cognitiva. En general, diríem que l'alumne té la sensació que no controla els aprenentatges matemàtics. Qualsevol estratègia que comporte donar-li autonomia, doncs, estaria contribuint a incrementar la seua motivació.

4.2.2. Disseny d'ambients d'aprenentatge

De Corte (1993) delimita el següent marc per al desenvolupament d'entorns d'aprenentatge significatius: 1) Una orientació conceptual de la instrucció, que es basa en l'anàlisi cognitiva del contingut i que adopta com a meta la comprensió i la construcció de significats. 2) Ensenyament i aprenentatge dels mètodes heurístics i de les estratègies metacognitives en un àmbit específic. 3) S'accepta com a punt de partida la naturalesa activa i constructiva dels processos d'aprenentage. 4) L'aprenetatge és més sòlid quan els contextos i les tasques són significatius per als alumnes i afavoreixen la interacció social, en general, i la resolució de problemes en grups menuts, en particular.

Aquesta aproximació té l'origen en el paradigma de la cognició contextual i ha estat definida por Brown, Collins i Duguid (1989): "Els mètodes cognitius intenten entrenar els alumnes en el marc de pràctiques autèntiques, mitjançant l'activitat i la interacció social, de manera semblant a com té lloc l'aprenentatge competent". Aquest model implica quatre dimensions (Collins, Brow i

Newman, 1989):

Els continguts. Un entorn d'aprenentatge ideal hauria de centrar-se en l'adquisició de totes les categories de coneixements dominades i aplicades pels experts.

Els mètodes d'ensenyament. Per ajudar els alumnes, el mestre pot aplicar sis mètodes diferents, agrupats en tres categories:

1) Les tècniques basades en l'observació, la pràctica guiada i el reforç: el modelat (observacions de l'alumne dels comportaments experts), l'ensinistrament (observació que realitza el professor de l'execució de l'alumne per a retroalimentar-lo), la bastida (el professor proporciona ajuda directa a l'alumne durant la realització de la tasca).

2) Els mètodes que busquen alertar explícitament els alumnes respecte de les pròpies activitats cognitives i metacognitives: l'articulació (qualsevol tècnica que ajude els alumnes a especificar i a fer explícits els seus coneixements i procediments), la reflexió (procés que porta l'alumne a comparar les estratègies pròpies amb las dels expertes i amb les d'altres aprenents).

3) L'exploració pretén incrementar l'autonomia de l'aprenent, aixi com el descobriment, identificació i definició de nous problemes.

La seqüència de les tasques d'aprenentatge. Els dos principis bàsics que guien les seqüències d'aprenentatge són la complexitat i diversitat progressiva i la presentació d'habilitats globals abans que les parcials

El context d'aprenentatge social. Els autors descriuen una sèrie de directrius: oferir els alumnes tasques i problemes tan semblants com siga possible als que apareixen en les situacions d'aplicació, promoure l'observació del comportament dels experts, incrementar la motivació intrínseca, fomentar l'aprenentatge cooperatiu, organitzar diàlegs entre els alumnes sobre els processos de resolució de problemes.

A continuació presentem exemples d'estudis d'intervenció:

Ensenyament de mètodes i habilitats metacognitives proposada per Schoenfeld respecte de la solució de problemes a nivell

Schoenfeld observà que les activitats autorregulatories estaven completament absents en més del 60 % dels intents de solució realitzats per parelles d'estudiants de secundària i universitat a les quals se'ls demanà que solucionaren problemes geomètrics no familiars durant 20 minuts. La típica estratègia emprada es pot resumir de la següent forma: llegir el problema, decidir tan ràpidament com siga possible què cal fer, fer-ho sense considerar cap alternativa, fins i tot si no podien avançar". Per això va decidir desenvolupar un mètode centrat en l'ensenyament dels aspectes estratègics de la resolució de problemes (mètodes heurístics dins del context d'una estratègia de control que ajude a decidir l'heurístic més idoni). L'estratègia consisteix en cinc fases, que encara que consecutives, no han de trencar el sentit d'unitat:

1. Anàlisi orientada a la comprensió del problema mitjançant la construcció d'una representació adequada.
2. Disseny d'un pla global de solució.
3. Exploració per tal de transformar el problema en una tasca rutinària. Aquesta fase és l'heurístic central de l'estratègia.
4. Implementació o posar en marxa el pla.
5. Verificació de la solució.

A més, durant les activitats de grup, Schoenfeld normalment preguntava les qüestions següents:

- Què fas?
- Per què fas això?
- Si el que fas és exitós, de quina forma ajuda a trobar la solució?

La "instrucció ancorada" proposada pel Grup de Cognició i Tecnologia de la Universitat de Vanderbilt (CTGV)

Aquesta proposta sorgeix en resposta al problema del "coneixement inert". És a dir, aquell coneixement que està disponible i pot ser recordat quan és sol·licitat, però no és espontàniament aplicat en situacions on és rellevant per resoldre un nou problema". La principal explicació és que el coneixement no ha estat condicionat, és a dir, que l'estudiant no coneix sota quines condicions el seu coneixement pot ser aplicat. I com assenyala el CTGV, els processos instruccionals mateixos són força responsables del coneixement inert, per no propiciar aprenentatges significatius.

La principal meta és capacitar els estudiants perquè capten les característiques fonamentals de situacions problema i experimenten els canvis que es produeixen en la seua percepció i comprensió de "l'àncora" com ells la veuen des del nou punt de vista. Pensant aquesta meta, el punt inicial de la "instrucció ancorada" és la creació de contextos de solució de problemes rics, autèntics i interesants que puguen servir de base per a desenvolupar ambients generatius d'aprenetatge que oferisca als estudiants nombroses oportunitats per a descobrir, explorar i plantejar problemes.

Així, han desenvolupat uns videodiscs de complexos problemes d'espais denominats macrocontexts perquè tenen una ampla base i capaciten els estudiants a explorar i modelar un problema de l'espai que inclou problemes matemàtics en diferents ocasions i des de diferents perspectives. Encara que per a CTGV no és necessari la utilització de tecnologia, aquesta sí que és preferible, i en concret els videodiscs, perquè com a mitjà permet presentar la informació de forma més rica, realista i dinàmica que el material textual. Com a condició necessària cal treballar la cultura de la classe on les "àncores" són situades. Un exemple és *The Aventures of Jasper Woodburry* relatiu a la planificació d'un viatge, basat en un conjunt de principis de disseny derivats de recerques prèvies que proporcionen a l'estudiant tipus específics d'activitats de solució de problemes. Els principals principis són:

- Presentació en format vídeo.
- Format narratiu (presentacions en forma d'una història ajuda a crear un context significatiu).
- Estructura generativa (fer que els estudiants mateixos generen la resolució de la història, la qual cosa implica identificar problemes i arreplegar informació rellevant, estimula la seua implicació en els processos d'aprenentatge).
- Dades incrustades en la història (tota la informació necessària per a resoldre el problema és inclosa en la història).
- Complexitat del problema (els problemes són intencionadament complexos de forma que els estudiants aprenguen a tractar amb la complexitat).

Educació Matemàtica Realista (RME) de Freudenthal Institute at the University of Utrech

A Holanda, un grup d'investigadors dirigits des de 1971 per Freudenthal, ha desenvolupat un programa educació matemàtica per a l'escola primària com a reacció a l'orientació mecanicista predominant en la instrucció de l'època. RME concep la matemàtica com una activitat humana, això que aprendre matemàtiques és fonamentalment fer matemàtiques o matematitzar. La idea tradicional és que l'alumne primerament ha d'adquirir el sistema formal de les matemàtiques, i realitzar aplicacions més tard. D'acord amb Freudenthal, això és el contrari de com s'ha desenvolupat el coneixement matemàtic, on la realitat no és tan sols un domini d'aplicació del coneixement, sinó, i en primer lloc, una font del modelatge matemàtic que capacita els aprenents a constituir objectes mentals, això és, les nocions intuïtives que precedeixen el concepte

Naturalment, l'ambient ha d'estar adaptat als alumnes per a poder facilitar el procés de reinvenció del coneixement matemàtic. El disseny d'ambients d'aprenentatge realista es basa en un conjunt de principis interrelacionats:

- L'aprenentatge de les matemàtiques és una activitat constructiva. Els alumnes construeixen el seu coneixement explorant i modelant situacions reals. Als alumnes, se'ls presenta situacions reals en format de problema de forma semblat a la "instrucció ancorada".
- Progressar cap a nivells d'abstracció superiors. La progressiva esquematització implica

un increment en el nivell d'abstracció dels procediments emprats pels alumnes.

- Animar els alumnes a realitzar produccions lliures i a reflexionar. Tindre en compte les produccions dels alumnes porta a la reflexió, cosa que és un important vehicle per assolir alts nivells d'abtracció.
- L'aprenentage s'esdevé a través de les interaccions socials i la cooperació. Intercanviar idees, comparar estratègies de solucions i discutir els arguments és essencial quan es fa matemàtica.
- Interconnexió dels diferents components del coneixement. De fet, els fenòmens reals que hi ha sota els conceptes matemàtics estan interrelacionats de múltiples formes i constitueix un tot estructurat.

RECURSOS I MATERIAL DIDÀCTIC

Bibliografia recomanada

Alsina, C., C. Burgués, J. M. Fortuny, J. Giménez i M. Torra (1997). *Enseñar matemáticas*. Barcelona, Graó.

Bagazgoitia, A., F. Castañeda, Fernández i J. C. Peral (1997). *La resolución de problemas en las matemáticas del nuevo bachillerato.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós.

Chevallard, Y., M. Bosch i J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Dickson, L., M. Brow i O. Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor.

Hernàndez, F. i E. Soriano (1997). *La enseñanza de las matemàticas en el primer ciclo de la educación primària. Una experiencia didàctica.* Múrcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Macnab, D.S. i J. A. Cummine (1992). *La enseñanza de las matemàticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad.* Madrid: Visor Distribuciones.

Martí, E. (1996). "Psicopedagogía de las matemáticas", dins J. Escoriza, R. González, Barca, A. i González, J. A. (Eds.), *Psicología de la instrucción*, vol 5 (pp 1-29). Barcelona: EUB

Payró, J. i P. J. Vinós (1998). Estratègies per a la resolució de problemes de primer cicle d'ESO. *Guix*, 244, 29-34.

Villella, J. (1996). *Sugerencias para la clase de matemáticas*. Buenos Aires: Aique Grupo Editorial

Monogràfics de matemàtiques en revistes periòdiques

- La Resolución de Problemas en Matemáticas, *Aula de Innovación*, nº 6
- Enseñar geometría, *Aula de Innovación*, nº 22
- Pensamiento Numérico, *Aula de Innovación*, nº 50
- Matemáticas, de la calle a la clase, *Aula de Innovación*, nº 58
- La investigació en matemàtiques, *Guix*, nº 244
- La gestión de la clase de matemàticas, *Uno revista de Didáctica de las matemáticas*, nº 16

Altres recursos

- Guies d'ensenyament per als professors d'aquests nivells d'educació.
- Llibres de text de continguts matemàtics d'aquests nivells d'educació.

ACTIVITATS D'APRENENTATGE

1. Enumereu activitats matemàtiques que fem sovint en la nostra vida quotidiana.
2. Descriviu breument la vostra experiència amb les matemàtiques. Què és el que més recordeu de les matemàtiques estudiades? Analitzeu els vostres records al fil del que ja sabeu. Podeu

establir una organització en funció de la nota en l'assignatura de matemàtiques l'últim any que l'havíeu cursat, l'atractiu que tenien aquestes classes per a vosaltres,...

3. Pregunteu a alumnes de diferents edats què són les matemàtiques. Classifiqueu les respostes.
4. Analitzeu les repercussions possibles de les diferents creences en l'aprenentatge de les matemàtiques.
5. Quines són les veritables matemàtiques, les pures o les aplicades? Quins han de ser els objectius de l'aprenentatge de les matemàtiques a l'escola?
6. Quines són les peculiaritats del coneixement matemàtic?
7. Comenteu les característiques del llenguatge matemàtic i les seues repercussions. Busqueu altres exemples que ens ho faça més fàcil entendre-les.
8. Quina conceptualització de les matemàtiques hi ha als currículums oficials?
9. Plantegeu un problema a un grup d'alumnes (2 o 3) i escolteu el seu diàleg.
10. Acudiu a una aula de matemàtiques i anoteu els diàlegs que s'hi produeixen.
11. Utilitzeu el test de Cloze per avaluar el nivell de comprensió lectora matemàtica de dos alumnes.
12. Elaboreu una graella on apareguen sintetitzades les característiques de les principals teories de l'aprenentatge de les matemàtiques.
13. A quines definicions respon el concepte d'estructura en matemàtiques?
14. Elaboreu un parell de jerarquies d'aprenentatge de dues tasques matemàtiques.
15. Interpreteu el valor de cadascuna de les aptituds implicades en l'aprenentatge de les matemàtiques.
16. Què és la disposició matemàtica?
17. Elaboreu activitats per a avaluar els estadis de desenvolupament del nombre.
18. Elaboreu enunciats de problemes verbals (de suma, resta i multiplicació) amb diferents estructures semàntiques. Feu que els resolguen 5 alumnes i analitzeu les estratègies emprades.
19. Realitza la pràctica 18 "la solución de problemas aritméticos. Desfases evolutivos y análisis de errores infantiles" del llibre "Prácticas de enseñanza para psicólogos en contextos escolares" dels professors García Bacete i Doménech Betoret en la col.lecció "material docent" publicat per la Universitat Jaume I
20. Trieu una operació (suma, resta, multiplicació) i observeu què és el passa quan intentem ensenyar diferents algoritmes a un mateix alumne.
21. Realitzeu un mapa conceptual del procés de resolució de problemes matemàtics.
22. Busqueu en els llibres de matemàtiques enunciats de problemes i observeu la forma de resoldre'ls. En el cas d'alumnes que no troben la resposta adequada, analitzeu-ne les causes, i practiqueu amb ells alguna estratègia que els ajude a resoldre'ls amb èxit.
23. Compara diferents classificacions d'estratègies de solució de problemes
24. Seleccioneu alguns dels problemes resolts en el llibre de Bagazgoitia i cols (1997) i feu que els resolguen alumnes de batxiller. Compareu les estratègies emprades?
25. Quina diferència hi ha entre el problemes de la vida quotidiana i el problemes de matemàtiques a l'escola?
26. Enumereu les principals causes de les dificultats en les matemàtiques.
27. Quines dificultats són implícites a la naturalesa de les matemàtiques. Aporteu exemples diferents.
28. Pregunteu a professors de matemàtiques de diferents nivells educatius quines són les principals dificultats dels seus alumnes. Aprofiteu l'ocasió per demanar-los també quin és el seu concepte de les matemàtiques i què cal que els alumnes de primària aprenguen
29. Enumereu diferències en l'aprenentatge de les matemàtiques que puguen tindre l'origen en el context d'aprenentatge.
30. Busqueu un paral·lelisme entre el marc proposat per De Corte per a dissenyar ambients d'aprenentatge i les propostes instruccionals d'altres autors.
31. Analitzeu el grau de correspondència entre aquests principis instruccionals i les teories de l'aprenentatge estudiades anteriorment.

32. Descriviu experiències innovadores d'ensenyament de les matemàtiques.
33. Aprofiteu-vos dels nombrosos exemples que es donen en el text i verifiqueu empiricament què és el que passa a les aules
34. Trieu un contingut matemàtic específic, i en col·laboració amb altres companys i l'assessorament del professor, elaboreu un treball descriptiu o d'investigació.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Azcarate, P. i J. M. Cardeñoso (1994). La naturaleza de la matemática escolar: problema fundamental de la didáctica matemática. *Investigación en la Escuela, 24,* 79-88.

Bagazgoitia, A., F. Castañeda, Fernández i J. C. Peral (1997). *La resolución de problemas en las matemáticas del nuevo bachillerato.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. Dins J. Beltrán i C. Genovard (Eds.), *Psicologia de la Instrucción I. Variables i procesos bàsicos* (571-594). Madrid. Sintesis Psicológica.

Boekaerts, M (1993). Being concerned with well-being and with learning. *Educational Psychologist, 28,* 149-167.

Bosch, E., A. Fàbregas i S. Margelí (1998). El càlcul mental al cicle inicial: treballar amb les estratègies. *Guix, 244,* 9-14.

Collins, A., J. S. Brown i S. E. Newman (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. Dins L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction: Essay in honor of Rober Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Corte, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un método de investigación basado en la investigación. Dins J. Beltrán, V. Bermejo, M. D. Prieto i D. Vence (Eds.), *Intervención psicopedagógica* (pp 145-168). Madrid: Pirámide.

De Corte, E., B. Greer i L. Verschaffel (1996). Mathematics teaching and learning. Dins D. C. Berliner y R. C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology* (pp.491-422) . New York. Macmillan Library Reference, USA.

Dickson, L., M. Brow i O. Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor.

Dweck, C. S. i E. S. Elliot (1983). Achievement motivation. In P. Mussen (Ed.), *Handbook of Child Psychology, Vol 4* (pp. 643-692). New York: Wiley.

Fernández, F. (1998). El paso de la aritmética al álgebra. Una propuesta didáctica. *Aula de Innovación Educativa, 50,* 17-21.

Forrellad, H. i N. López (1998). Ja em surt! Ja ho entenc! *Guix, 244,* 21-28.

García, J. E. (1992). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. *Aula de Innovación Educativa, 6,* 14-21.

Gómez, B. (1998). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula de Innovación Educativa, 50,* 11-16.

Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la educación matemática. Dins M. J. Rodrigo. i J. Arnay (comp.). *La construcción del conocimiento escolar* (pp 195-215). Barcelona: Paidós.

Grouws, D. A. (1992, Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.

Hernàndez, F. i E. Soriano (1997). *La enseñanza de las matemàticas en el primer ciclo de la educación primària. Una experiencia didàctica.* Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Holmes, E. (1985). *Children learning mathematics. A cognitive approach to teaching*. New Jersey: Prentice Hall.

Lago, M. O. I P. Rodríguez (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. Dins J. Beltrán i C. Genovard (Eds.), Psicología de la Instrucción II. Áreas curriculares. (pp. 75-95). Madrid: Síntesis.

Luceño, J. L. (1986). *El número y sus operaciones básicas: su psicodidáctica*. Alcoy: Marfil.

MacLeod, D. B. (1990). Information-processing theories and mathematics learning: The role of affect. I*nternational Journal of Educational Research, 14,* 13-29.

Macnab, D. S. i J. A. Cummine (1992). *La enseñanza de las matemàticas de 11 a 16. Un enfoque* *centrado en la dificultad.* Madrid: Visor Distribuciones.

Martí, E. (1996). Psicopedagogía de las matemáticas. Dins J. Escoriza, R. González, Barca, A. y González, J. A. (Eds.), *Psicología de la instrucción*, vol 5 (pp 1-29). Barcelona: EUB

Martí, E. (1997). Constructivismo y pensamiento matemático. Dins M. J. Rodrigo i J. Arnay (comp.). *La construcción del conocimiento escolar* (pp 217-242). Barcelona: Paidós.

Mayer, R. E. (1983). Trinking, problem solving, and cognition. New York: Freeman.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. Dins D. A. Grouws (1992, Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-574). New York: MacMillan.

Pastor, A. i A. Gutierrez (1994). Analizando las reacciones de los estudiantes en clase de geometria. El modelo de Van Hiele. *Aula de Innovación Educativa*, *22*, 5-10.

Payró, J. i P. J. Vinós (1998). Estrategies per a la resolució de problemes de primer cicle d'ESO. Guix, 244, 29-34.

Pérez, M. (1994). La solución de problemas en matemáticas. Dins I. Pozo, *La solución de problemas* (pp 54-83). Madrid: Santillana.

Pérez, R. (1998). Arte i matemáticas. *Aula de Innovación Educativa, 58*, 12-14.

Perquins, D.N., E. Jay i S. Tishman (1993). Beyond abilities: A dispositional theory of thinking. *Merrill Palmer Quarterly, 39,* 1-21.

Polaino, A. (1993). Procesos afectivos y aprendizaje: intervención psicopedagógica. Dins J. Beltrán, V Bermejo, M. D. Prieto y D. Vence (Eds.), *Intervención psicopedagógica* (pp 148-140). Madrid: Pirámide.

Resnick, L. B. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. Dins R. A. Charles i E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessment of mathematical problem solving* (pp. 32-60). Rston, VA: National council of Teachers Mathematics/Hillsdale, NJ: LEA

Resnick, L. B. i W. W. Ford (1990). *La enseñanza de las matemáticas y los fundamentos psicológicos*. Ministerio de Educación y Ciencia/ Paidós.

Segarra, LL. (1998). Maneras curiosas de sumar, restar, multiplicar i dividir. *Aula de Innovación Educativa*, *58,* 24-25.

Segarra. LL. (1998). El joc matemàtic, joc d'investigació. *Guix, 244,* 5-8.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacgnition, and sense-making in mathematics. Dins D. A. Grouws (1992, Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematics thinking and problem solving*. Hillsdales, NJ: LEA

Stodolsky, S. S. (1991). *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales*. Barcelona. Paidós.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Dins D. A. Grouws (1992, Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: MacMillan.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. Dins P. Nesher i J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the psychology of Mathematics Education* (pp., 14-30). Cambridge, UK.: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. i C. Durand (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. Dins C. Coll (1983). *Psicologia genética y aprendizajes escolares.* Madrid: Siglo XXI.

Villella, J. (1996). *Sugerencias para la clase de matemáticas*. Buenos Aires: Aique Grupo Editorial

- Els problemes de matemàtiques sols tenen una solució.
- Sol hi ha una manera de resoldre cada problema (normalment coincideix amb la regla que el professor acaba d'explicar a classe).
- No s'espera entendre les matemàtiques; s'espera poder memoritzar-les i poder aplicar de forma mecànica el que s'ha après.
- Fer matemàtiques és una activitat solitària, realitzada per individus aïllats.
- Una vegada entesos, els problemes es resolen ràpidament (cinc minuts com a màxim)
- Les matemàtiques que s'ensenyen a l'escola tenen poc o res a veure amb les matemàtiques del món real i són irrellevants per als processos de descobriment i invenció
- Les matemàtiques no han de tindre necessàriament sentit
- Comprendre realment les matemàtiques és una acció que sols està a l'abast d'alguns genis

Taula 1: Creences al voltant de les matemàtiques

- Diferències en el significat d'una mateixa expressió en el llenguatge quotidià (més ambigu i contextual) i el llenguatge matemàtic (més precís).
- Diferents significats matemàtics d'una mateixa expressió o paraula (p. e., "és").
- L'ordre i forma de presentació de les dades.
- Presència de dades irrellevants per a la solució de problemes.
- Caràcter hipotètic dels problemes matemàtics ("dades matemàtiques" davant "dades reals").
- Diferència entre les teories personals i les teories matemàtiques.

Taula 2: Factors no matemàtics

- Expressar el problema en altres paraules.
- Explicar als companys en què consisteix el problema.
- Representar el problema en un altre format (gràfics, diagrames,..).
- Indicar quina és la meta del problema.
- Assenyalar on resideix la dificultat de la tasca.
- Separar les dades rellevants de les irrellevants.
- Indicar les dades amb què es compta per resoldre el problema.
- Assenyalar quines dades no-presents necessitaríem per resoldre el problema.
- Buscar un problema semblant que hàgem resolt.
- Analitzar alguns problemes concrets quan el problema és molt general.
- Buscar diferents contextos (escenaris, tasques,...) en els quals es puga presentar aquest problema,

Taula 3: Tècniques que ajuden a la traducció o comprensió del problemes.

- Codificació. Diagrames. Esquemes. Recompte.
- Visualització gràfica.
- Modificació de problemes. Reducció a problemes més senzills.
- Suposar que el problema està resolt.
- Particularitzar. Generalitzar.
- Fórmulació de conjectures.
- Principi d'inducció.
- Reducció a l'absurd.

Taula 4: Alguns heurístics de solució de problemes (Bagazgoitia i col·ls., 1997)

Japó	**EUA**
L'esforç és la principal atribució causal de l'aprenentatge	Les capacitats innates són la principal atribució causal de l'aprenentatge
Es prioritza l'extensió del currículum de les matemàtiques envers de la lectoescriptura	Es prioritza l'extensió del currículum de la lectoescriptura envers de les matemàtiques
Avaluació més crítica dels problemes matemàtics dels fills	Avaluació menys crítica dels problemes matemàtics dels fills
Expectatives d'èxit matemàtic més altes	Expectatives d'èxit matemàtic més baixes
Disponibilitat d'ajuda davant de les dificultats matemàtiques dels fills	Rebuig a ajudar els seus fills quan aquests presentaven dificultats

Taula 5: Diferències entre les llars japoneses i nord-americanes

A l'escola	**Fora de l'escola**
Activitat individual	Activitat en grup
Activitats de raonament pur	Utilització d'ajudes i ferramentes (llibres, calculadores,..)
Aprenentatge basat en símbols i independent dels objectes i successos concrets	Íntimament vinculats amb els objectes i els successos
L'escola se centra en l'ensenyament de coneixements i habilitats generals d'àmplia aplicació	Es posa l'èmfasi en les habilitats requerides en una situació específica
Les matemàtiques sempre són un fi en si mateix (solucionar el problema, mostrar un grau de competència determinat, ...)	Les matemàtiques són un mitjà al servei d'alguna altra meta, forma part d'una altra activitat que li dóna sentit (canviar una moneda, cuinar, pesar productes,...)

Taula 6: Diferències entre l'aprenentatge a l'escola i l'aprenentatge fora de l'escola

- Poca variació en els mètodes instruccionals.
- Organització rígida de la classe: exposició del professor seguida de respostes i de sessions d’exercicis.
- Ensenyament prioritàriament algoritmic.
- Escassa rellevància dels aspectes semàntics (significat del llenguatge matemàtic).
- Es prioritza l’execució de sèries d’exercicis per consolidar determinades destreses.
- Escassos esforços per tal de contextualitzar els coneixements matemàtics.
- Èmfasi en el treball individual.
- Poc interès per conèixer els coneixements implícits dels alumnes.

Taula 7: Pràctiques educatives habituals en l’ensenyament de les matemàtiques

57