Université de Bordeaux-I

UFR de Mathématiques et Informatique
IREM de Bordeaux
Ce Re Ma B (Unité associée 226)
COREM

ETUDES en DIDACTIQUE des MATHEMATIQUES

Article occasionnel n° 6

Titre : ***ELEMENTS POUR L'ETUDE DU SENS DE LA DIVISION***

Auteur : ***Guy BROUSSEAU***

Tirage IREM
1990

I. LES COMPOSANTES CONTEXTUELLES DES REPRESENTATIONS DE LA DIVISION CHEZ LES ELEVES ET LA CLASSIFICATION DE PROBLEMES

1. Représentations

1.1. Composantes contextuelles

Nous "reconnaissons" un objet lorsque certaines conditions sont réunies, même si nous ne sommes pas conscients de toutes ces conditions. Par exemple, un enfant ne classera pas comme "rectangle" les formes dessinées qui ne présenteront pas tous les caractères suivants:

1) La figure est suffisamment proche d'un rectangle mathématique, (les différences de longueurs entre côtés opposés par exemple sont indécelables à l'oeil nu et les angles sont droits. 1ère condition de forme : FR.

2) La figure n'est pas un "carré", 2ème condition de forme: FNC

3) La figure est disposée "sur sa base" par rapport à la feuille : condition de disposition (Disp)

4) Le rapport longueur/largeur n'est pas très grand (par exemple pas supérieur à 10) : condition de proportion (Prop)

5) La figure n'est pas minuscule, ni très grande : condition de taille (T).

Appelons composantes contextuelles ces conditions.

1.2. Représentations.

Pour traiter une situation, nous cherchons plus ou moins consciemment un concept qui réunit le maximum des composantes contextuelles que cette situation nous semble présenter. Il permet - d'envisager les éléments les plus intéressants en présence, leurs relations caractéristiques - et de raisonner sur les modifications possibles du système ou sur son évolution.

Nous appellerons "représentation" un tel concept complexe lorsqu'il s'applique à une famille assez vaste de situations. Cette représentation est caractérisée d'abord par un ensemble de comportements

REMARQUE : L'ingénierie didactique correspondant à ce chapitre est traitée dans le module 12 et 13 de "Rationnels et Décimaux" de N. et G. BROUSSEAU (page 263 à 331) inconsciemment liés les uns aux autres par l'élève : ce peut être la simple reconnaissance ou la dénomination d'un objet mais aussi un ou des calculs, un raisonnement... une décision... Ces comportements sont "conditionnés" par la présence d'un ensemble d'éléments caractéristiques liés par certaines relations. La liaison conditions/comportement reste stable dans une assez grande famille de variations (variables non pertinentes) mais se rompt pour certaines valeurs d'autres variables : les composantes contextuelles ou variables pertinentes.

Les relations que l'élève établit consciemment entre les parties de la situation qu'il reconnaît, grâce à ses représentations, ne sont pas toujours vérifiées réellement ni même logiques ou mathématiquement correctes. Une représentation a sa propre "logique", elle souffre de certaines limitations qui lui imposent un fonctionnement spécifique régulier, mais pas forcément cohérent ni universel.

L'essentiel pour une représentation est de permettre au sujet une lecture des situations, une anticipation de leur évolution et une analyse de leurs propriétés.

La division dans les entiers naturels.

Examinons par exemple la division dans les entiers naturels. Existe-t-il une représentation unique - qui permettrait à des élèves de traiter toutes les situaitons de division "de la même manière". Le comportament caractéristique serait il fait une division". Il suffit de lui demander d'expliquer pourquoi il fait cette opération dans différents cas : s'il évoque des éléments très différents, des opérations différentes, des explications différentes, avec des termes différents et qu'il ne soit pas capable de "représenter" un raisonnement par un autre, autrement que de façon formelle, c'est qu'il se réfère à des représentations différentes.

La discrimination en représentations différentes est délicate : certaines différences sont trop minimes pour qu'on les retienne comme un critère d'une représentation différente car les élèves traitent les situations correspondantes comme de simples cas particuliers d'une représentation connue, ou s'y ramènent par un raisonnement additionnel "simple". Mais si ce raisonnement "simple" n'est pas fait ni compris spontanément par un nombre suffisant d'élèves et que les élèves et le

.../...

maître soient obligés de développer toute une rhétorique subsidiaire pour les résoudre alors une "petite" différence peut conduire et créer une représentation différente.

Nous allons essayer dans le paragraphe suivant d'énumérer les principales représentations de la division que les élèves utilisent. Pour cela, nous devons commencer par reconnaître les critères pertienents : ceux qui font changer qualitativement les méthodes de calcul et les raisonnements des élèves. Les critères seront utiles aux maîtres mais aussi aux élèves.

2. Premier groupe de composantes contextuelles : les nombres.

2.1. Naturel ou rationnel ?

Si dans un problème, l'élève peut remplacer un naturel par un rationnel non naturel sans changer, ni sa conclusion, ni son raisonnement, ni son vocabulaire, c'est que sa représentation mobilise cet "élément" du problème en tant que rationnel. Il arrive qu'il ne le puisse pas, par exemple dans le problème des trois frères : la représentation du nombre de parts est associée à un naturel, on ne peut remplacer 3 par 3,2. Alors il apparaît qu'il faut distinguer deux représentations : l'une pour traiter le problème avec les naturels, l'autre avec les rationnels. Il se peut que l'une des représentaions "englobe" l'autre. Alors se pose un problème de didactique : est-il possible et avantageux d'enseigner (ou susciter l'apprentissage) de la représentation la plus générale directement, au risque de faire buter les élèves au moment de la reconnaissance et de l'application, ou vaut-il mieux enseigner d'abord la plus "concrète" au risque de créer plus tard des obstacles à la construction de modèles plus généreux.

Il serait avantageux d'enseigner seulement les structures mathématiques si elles pouvaient fonctionner directement comme conceptions. C'est impossible, mais il ne serait pas avantageux d'enseigner ou de donner un statut scolaire, même provisoire, à toutes les représentations, car, si elles donnent du sens, elles n'ont pas toutes une grande valeur scientifique ni même heuristique. Elles doivent être utilisées, organisées, maitrisées et certaines doivent être détruites.

.../...

Le critère "nature des nombres" peut être utilisé systématiquement par les élèves pour contrôler leurs raisonnements.

Si une situation de décision a du sens (dans une représentation des élèves) avec des nombres rationnels ou décimaux non naturels, elle le garde si tous les nombres deviennent des naturels. Ce changement de nature des nombres peut aider à se convaincre de la valeur de la solution d'un problème. Mais ce critère doit être manié avec précaution : on ne peut déduire sans autre examen, que si une situation de division n'a pas de sens avec les naturels elle n'en a pas non plus avec les rationnels : Exemple : "trouver un nombre qui, multiplié par 25 soit égal à 13" n'a de sens que si on admet les rationnels.

2.2. L'expression des nombres

Un naturel peut être exprimé par une fraction, une fraction - par un nombre suivi d'une fraction (nombres fractionnaires) ou par une écriture décimale... Chaque expression porte une représentation qui peut exclure la bonne interprétation du problème. Les élèves croient qu'une écriture décimale désigne forcément un décimal ou qu'une fraction ne peut pas être un naturel, etc... Remplacer une fraction (supérieure à 2) par le nombre fractionnaire fait apparaître un nombre naturel qui permet de récupérer la représentation par les naturels.

Exemple : une épaisseur de $\frac{28}{3}$ peut laisser les élèves perplexes mais $9\frac{1}{3}$ est compris. Par contre $\frac{3}{28}$ ne l'est plus puisqu'il n'y a pas de partie entière.

2.3. La taille des nombres

La grandeur des nombres peut interférer avec le type de représentation et le rendre inopérant

. par exemple, si l'élève doit concevoir une manipulation ou doit en contrôler le déroulement par une image mentale, des nombres supérieurs à 7 ou 8 obligent à un autre raisonnement. Les maîtres utilisent souvent la représentation des grands nombres par les petits pour

.../...

justifier leur raisonnement et considèrent cette pratique comme justifiée. Or, si elle facilite sensiblement la compréhension, c'est que les grands nombres rendent plus complexe le contrôle de l'élève sur l'action évoquée, donc c'est que leur représentation est influencée et même changée par la taille des nombres. Par conséquent, il est illusoire de faire appel à une évidence. Il y a donc un travail d'homogénéisation à provoquer pour montrer que ce que nous appelons l'opération mathématique n'est pas affectée par l'augmentation et la complexité effective des opérations concrètes ou des représentations qui lui sont liées.

Exemple :

. De même si le nombre est trop petit - compris entre 1 et 2, les élèves ne "comprennent pas le rôle de la partie "entière" trop petite et peuvent confondre 0,8 et 1,8

. Autre exemple : certaines représentations sont incompatibles avec des "nombres" inférieurs à 1, principalement si la représentation est celle des produits naturels :
Exemple : Par quel nombre faut-il multiplier 3,28 pour obtenir 1,84 ?

La nature des nombres et leur place dans l'opération (dividende, quotient ou diviseur) n'interviennent pas indépendamment. De plus, ces critères infèrent avec la formulation, les problèmes, le caractère explicite ou implicite des données, etc...

2.4. La fonction mathématique des nombres

Les nombres peuvent être utilisés de différentes manières - dans des fonctions qui n'utilisent pas toujours toutes leurs propriétés.

On peut utiliser des naturels seulement pour "désigner" les éléments d'un ensemble. Une liste quelconque de nombres, même non consécutifs, fait l'affaire pourvu que chaque objet ait un nom distinct et un seul. On peut permuter les nombres entre eux sans altérer leur rôle : ni l'ordre, ni les opérations n'ont de signification. Le naturel alors employé dans une "fonction nominale" est un numéral pur. Ainsi, l'identification des voitures mobilise des <u>numéraux</u>. Ils permettent d'énumérer les éléments d'un ensemble.

.../...

Ou encore, pour faciliter l'énumération, ou si la structure d'ordre est signifiante, le nombre peut être mobilisé dans sa fonction ordinale Chaque nombre est alors un numéro. Les opérations n'ont toujours pas de sens mais la relation d'ordre, si. Selon les activités, différents types d'ordre peuvent être utilisés qui requièrent des types de nombres différents : Naturels rationnels ou décimaux, par exemple.

Nous nous intéressons ici à quatre autres fonctions sur lesquelles nous ne revenons pas car nous avons beaucoup insisté.

- La fonction cardinal, bien connue permet de définir dans les naturels l'addition et le produit (donc la division)
- La fonction "mesure" (dont la fonction cardinal est un cas particulier)
- La fonction "scalaire" pour désigner des rapports, en particulier des rapports de mesure
- La fonction "application linéaire".

A chacune de ces fonctions mathématiques, correspondent des définitions de la multiplication et par conséquent de la division, que l'on peut considérer comme différentes.

i/ Le produit de deux cardinaux en tant que cardinal de l'ensemble produit 3 x 4 pour 3 rangées de 4. Il lui correspond une division définie comme le cardinal d'un des ensembles composant le produit (ou encore comme cardinal de l'ensemble quotient obtenu avec la relation d'équivalence définie par l'une des composantes - si elle produit des classes équipotentes). Le cardinal ne peut pas être un rationnel non naturel.

ii/ L'opération qui "lie" le scalaire et le "vecteur" unitaire (3 fois quelque chose). Dans 3 m^2 on peut considérer 3 comme un nombre scalaire sans dimension physique opérant sur une unité 1 m^2. 3 x 1 m^2. Cette opération "est" une sorte de multiplication (scalaire) 3 fois une unité: 3 U. Le scalaire peut être un rationnel non entier (nous confondons ici pour l'instant le scalaire et le rapport).
Cette multiplication produit deux divisions, l'une qui fournit la "mesure", le vecteur, l'autre qui fournit le scalaire, le rapport.

.../...

iii/ Le produit de deux scalaires, qui apparaît en particulier dans les produits de mesure $3{,}5\ U_1 \times 4{,}2\ U_2 = ?$ (la grandeur produit pourrait se voir attribuer une unité telle que le scalaire du produit ne soit pas le produit des scalaires !). Il faudrait alors introduire un coefficient constant. Mais avec une convention convenable sur les unités on a :

$3{,}5\ U_1 \times 4{,}2\ U_2 = (3{,}5 \cdot 4{,}2)\ U_3 = 14\ U_3$. Alors, "trois virgule cinq multiplié par quatre virgule deux fois, c'est quatorze fois". Il lui correspond deux divisions aussi, (recherche des grandeurs) mais qui peuvent n'en former qu'une par exemple, si l'un utilise l'équivalence $3{,}5\ U_1 \times 4{,}2\ U_2 \equiv (3{,}5 \cdot 4{,}2)\ U_1 \times 1\ U_2$ qui permet de ne raisonner que sur une grandeur.

iv/ "L'opération" qui lie une application linéaire au vecteur auquel elle s'applique x 3,2 (4,5), l'application multiplée par 3,2 appliquée à 4,5.

C'est aussi une sorte de multiplication. Elle produit deux divisions: celle qui permet de calculer l'objet dont l'image est connue et celle qui permet de calculer l'application elle-même. L'objet est souvent une mesure, l'application est souvent identifiée à un scalaire, s'il est sans dimension. Mais si elle est accompagnée d'une équation ou dimension (des grandeurs, objet et images sont différents) la différence apparaît bien au point que l'application peut être lue à son tour comme une mesure :

Exemple : vitesse constante (km/h)

$$\begin{array}{ccc} \text{distance (km)} & \xrightarrow{\hspace{3em}} & \text{temps (H)} \\ 4 & \times \frac{1}{4} & 1. \end{array}$$

v/ La composition de deux applications linéaires est aussi une multiplication qui donne "deux" divisions correspondant à la recherche de chaque application.

Nous en verrons des exemples dans le module 13. Toutes ces fonctions peuvent être tenues par des naturels et la plupart par des rationnels non naturels. Quels que soient les efforts déployés pour "cacher" ces différentes fonctions, en unifiant tout de suite auprès des élèves la notion de nombre, les différences transparaissent dans le vocabulaire des problèmes persistent dans les représentations et font tromper les élèves. Une exploration détaillée et une homogénéisation consciente auront-elles de meilleurs résultats ?

.../...

3. Deuxième groupe de composantes contextuelles : types de grandeurs et types de calculs.

3.1. La représentation des opérations matérielles qui accompagnent et donnent du sens à le division peuvent évidemment différer selon <u>le domaine ou le type de grandeur</u> que l'on imagine.

Les partages d'une longueur, d'une surface, d'un poids en parties égales, suivent des procédures qui peuvent être fondamentalement différentes.

La taille des grandeurs à partager intervient aussi, indépendamment de l'unité choisie et donc de la taille des nombres qui interviennent dans la division.

Exemple : Pour partager matériellement 1,200 kilo de farine en 7, l'enfant prépare 7 choppes où il distribue grossièrement la totalité, puis l'égalise. Pour partager matériellement 1200 kilos de blé on prépare 7 places et on y distribue au fur et à mesure des quantités égales (sacs), que l'on compte.

D'autres caractéristiques de grandeurs peuvent intervenir: par exemple, les volumes creux et les capacités sont manipulés et représentés de façon très différentes des volumes pleins. Il n'est pas possible de donner ici une liste exhaustive de ces différences mais il est important d'examiner l'effet de la magnitude de la grandeur.

3.2. <u>La notion de dimension en mathématique et en physique.</u>

Les grandeurs (sauf le temps peut-être) sont présentées aux élèves de façon à ce qu'ils les matérialisent sur des objets : par exemple, un segment pour la longueur, un petit carré pour la surface, un petit cube pour un volume, etc...

Si cet objet subit une dilatation, c'eest-à-dire devient x fois plus grand et que la <u>mesure</u> de la grandeur représentée devienne n^d fois plus grande, d est la dimension de la grandeur. La longueur est de dimension 1, la surface de dimension 2.

Exemple : le volume est de dimension 3 : si on double les côtés

.../...

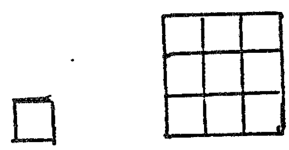
d'un cube, son volume devient 8 fois plus grand. $8 = 2^3$ donc la dimension est 3.

Remarques : Il existe des grandeurs de dimension non entière.
Les scalaires x 3 x 3,4 ne sont associés à aucun objet et sont de dimension 0.

Les grandeurs sont présentées aux élèves comme engendrées par la multiplication par un simple scalaire d'une valeur "unité" $12\ m^2 = 12 \times 1\ m^2$. Cette unité est fortement associée à un objet unité : segment de 1 mètre étalon, carré de 1 mètre de côté, etc...

Il faut remarquer que ce scalaire correspond bien à une dilatation pour un segment mais qu'il n'en est pas de même pour un carré ou un cube. Si "tout" devient 12 fois plus grand de façon à ce que "tout reste semblable, la dilatation est bien 12, les longueurs deviennent 12 fois plus grandes mais les surfaces deviennent 144 fois plus grandes et les volumes deviennent 1728 fois plus grands. Nous avons réduit l'image de notre bateau et toutes les longueurs étaient divisées par un certain nombre mais nous ne nous sommes pas occupés des surfaces).

Les enfants naturellement plus familiarisés avec les grandeurs de dimension 1 vont dont être conduits à confondre "multiplier par un scalaire" avec dilater ou bien "diviser" avec "réduire". Ils ne voient pas l'effet de la dimenseion. Ainsi, ils peuvent croire qu'un carré 3 fois plus petit est contenu 3 fois dans un carré "dilaté" par 3.



Il faut des expériences et un effort particulier pour distinguer la division de la réduction lorsque la dimension n'est pas 1.

En physique, les "dilatations" sont mises en évidence pas des changements d'unités. L'équation aux dimensions d'une grandeur dépend du choix des formules de définition et des grandeurs de référence (unités fondamentales).

Les grandeurs fontamentales, longueurs, masse et temps, les autres sont des grandeurs "dérivées". Dans l'enseignement,

.../...

à ces trois grandeurs fondamentales, il faut ajouter les grandeurs pour lesquelles les manipulations de comparaison de somme et de produit par un scalaire peuvent être définies directement.

Exemple : les capacités, la valeur marchande, les angles.

Celles pour lesquelles cette présentation directe n'est pas possible ou même n'est pas simple sont introduites à travers des formules.

3.3. Le mode de définition

Une analyse précise des méthodes de création des grandeurs nous conduirait à utiliser des concepts d'intégration et de différenciation qui sortent du cadre de cette étude. Dans le contexte linéaire qui est celui de l'enseignement élémentaire ces concepts coïncident avec des concepts élémentaires. Nous nous autoriserons de cette remarque pour commettre un abus. Les grandeurs nouvelles peuvent être introduites :

* comme un "produit de mesures"

Exemple : le volume, la surface, sera une mesure "produit" de trois longueurs ou de deux longueurs

*comme un quotient

Exemples : La vitesse sera une mesure "quotient" comme la densité, la densité linéaire... ou la prise de l'unité. Il est utile de familiariser les élèves avec ces deux types de situations et de grandeurs et de les rendre sensibles aux différences de vocabulaire, de formulation, de manière de désigner les unités qui leur sont attachées.

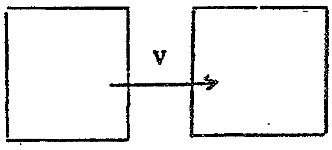
i/ Exemple de grandeur "quotient".

La vitesse est une grandeur, comme la longueur, mais il n'y a pas beaucoup d'occasions de considérer des sommes de vitesses dans la scolarité obligatoire (dans les problèmes de rencontre de trains par exemple mais le raisonnement va renvoyer aux distances dans un temps donné, c'est-à-dire aux grandeurs fondamentales. Même s'il peut arriver que l'on compare directement des vitesses et même qu'on les multiplie ou qu'on les divise par un scalaire (vitesses

.../...

de rotations et engrenages). Cette opération ne pourra guère s'expliquer à l'aide de soustractions répétées. Elle apparaîtra donc essentiellement comme "opérateur", fonction linéaire d'un ensemble de temps vers un ensemble de distances. Elle introduira plus souvent sous la forme A que B.

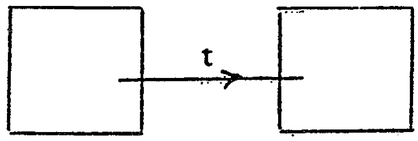
temps distance



h km

A

v distance



B

A quelle vitesse constante doit marcher un piéton qui veut faire 13 km en 2 h 15.

De quelle distance deux voitures qui roulent l'une vers l'autre en 2 h 15, si l'une roule à 80 km/h et l'autre à 104 km/h (2 h 15 c'est 9 quarts d'heures)

Cette présentation rend difficile pour les enfants la conception de vitesses variables et de vitesse instantannée.
L'unité est composée : km par heure ou m par secondes - et les élèves utilisent cette indication pour envisager et vérifier le schéma A avec ses unités.

ii/ <u>Exemple de grandeur produit</u> : le volume.

Le produit de mesures place les enfants devant une nouvelle structure mathématique : imaginons les volumes des prismes droits

une grandeur le volume v, dépend de deux autres, ici une longueur l et une surface s

le volume dépend de façon linéaire de chacune des deux autres: v (l,s)

.../...

Si la hauteur double seule, le volume double
$v(2xl,s) = 2 \times v(l,s)$

Si la surface de base double, le volume aussi $v(l,s)=2xv(l,s)$
de même on a :

$v(l,s + s') = v(l,s) + v(l,s')$

$v(l+l',s) = v(l,s) + v(l',s)$.

De telle sorte que l'on peut diviser matériellement des volumes soit en divisant l'une ou l'autre des composantes, soit en opérant sur plusieurs à la fois.

iii/ Il est possible de faire des présentations directes de certaines grandeurs dérivées.

Exemple : la surface : Nous appellerons m^2 la surface que l'on peut peindre avec cette quantité de peinture, ou que l'on peut recouvrir avec ce papier fin.

Mais si ces artifices peuvent favoriser certaines connaissances comme celles des unités de mesure et des changements d'unité, liées à la structure d'espace vectoriel de dimension 1, ils ne peuvent suffire à l'élève pour lui éviter les erreurs liées à ses représentations. Il est nécessaire de toute manière d'accepter la diversification des représentations et de la réduire dès que possible par l'image des mêmes structures mathématiques.

Dans ce domaine, il est raisonnable de mettre en garde les maitres et les élèves contre les déclarations dogmatiques et les croyances générales. La longueur n'est pas a priori une grandeur dérivée par rapport au volume mais il peut arriver qu'elle le soit :

une hauteur de pluie est définie par un volume d'eau par unité de surface.

4. Troisième groupe de composantes contextuelles : Le type de situations a-didactiques

L'apprentissage de la division est une occasion remarquable de mettre en évidence les traitements cognitifs d'un concept mathématique et leurs relations avec les types de situations a-didactiques.

.../...

4.1. Dialectique objet-outil

L'élève, dans un temps relativement bref, va être conduit :

i/ à considérer des actions se déroulant dans le milieu de référence, comme partages évoqués dans les énoncés de problèmes -actions qu'il peut être conduit à effecter lui-même ou à concevoir comme effectuées par d'autres et dont il anticipe le résultat. Ces actions servent de "guide" à ses propres actions ou calculs.

ii/ à considérer ces mêmes actions comme des objets d'études achevés, et à s'interroger sur certains de leurs éléments connus ou non connus. L'instrument (le moyen) de l'obtention du résultat est alors une démarche heuristique. Selon ce qui est connu ou non, on observe des types de solutions, de raisonnements et de calculs différents.
Exemple : la recherche du terme inconnu d'un produit fait envisager la multiplication ou le produit comme des éléments, des relations ou des actions de niveau i avec lesquels l'élève établit des relations au niveau ii/. Ce point de vue permet une nouvelle classification des problèmes selon ce qui est connu ou non ou plutôt selon que l'élève trouve dans i/: une représentation - guide de sa solution ou non.

iii/ à considérer l'outil heuristique de solution des problèmes du niveau ii comme des objets d'études et de théorisation : l'application réciproque peut être le résultat d'une objectivation des démarches du niveau ii/ la transformation d'un moyen en notion mathématique. Le passage d'un niveau à un autre peut être pour l'élève le résultat d'un apprentissage, d'une construction, et non pas seulement celui d'une juxtaposition. C'est un processus réflexif, c'est-à-dire qui prend chaque étape précédente comme objet d'étude. A ce processus - d'ailleurs limité - correspond un processus inverse d'application et de réalisation où le savoir se transforme en outil. Cette dialectique objet/outil ne se produit pas de façon spontanée par une simple activité intellectuelle. Elle est provoquée et appuyée par un système de situations a-didactiques spécifiques qui ne laissent que peu de traces dans les problèmes classiques.

.../...

4.2. Les structurations du milieu : Le problème ou l'exercice classiques.

Un énoncé classique comprend deux parties : une partie informative et une question.

i/ La partie informative évoque des éléments liés par des relations explicites et qui peuvent être des objets ou des personnes mis en scène dans une histoire (avec un déroulement temporel) ou un système (défini à un instant donné, mais susceptible d'évolution temporelle). Mais cette histoire ou ce système sont considérés comme déterminés, uniques, indépendants de la volonté, de l'action ou des conceptions de l'élève. Ils fonctionnent ainsi comme une réalité objective de référence à laquelle l'élève doit adhérer mais devant laquelle il est placé en spectateur dont le point de vue est fixé à l'évance. Cette réalité est évidemment une fiction didactique reconnue comme telle par chacun des protagonistes.

ii/ La question s'adresse à une personne extérieure à la "réalité" définie en i/ et à laquelle l'élève est invité à s'idnetifier. Cette personne est supposée capable de prévoir l'évolution du système, d'en envisager des transformations, et de façon générale, d'obtenir des informations supplémentaires sur lui, grace à ses propres représentations. Elle n'est pas autorisée à agir, ni à supposer qu'elle peut agir réellement sur lui.

De plus, la réponse à la question posée est concue comme devant s'imposer, dans les conditions i/ ainsi définies, à quiconque, presque indépendamment de tout projet didactique. La solution fonctionne donc comme connaissance objective et a-didactique de la réalité objective.

4.3. Les niveaux du milieu.

Les situations didactiques réelles font jouer des relations plus complexes, nécessaires pour ménager des possibilités d'évolution et de fonctionnement de la connaissance. Les énoncés classiques apparaissent dans ce contexte comme des contradictions, des images conventionnellement simplifiées de situations plus générales. Ils donnent du sens à la connaissance (en la contextualisant et en la personnalisant) non pas par référence avec la "réalité" objective mais par référence à certains jeux particuliers avec la réalité objective.

Dans ces situations, en usage dans les relations didactiques, nous pouvons distinguer au moins quatre personnes, quatre sujets distincts

.../...

auxquels l'élève peut s'identifier et donc cinq milieux avec lesquels il peut interagir selon des modes différents. Ces milieux étant emboîtés, nous les décrirons comme des niveaux du "milieu" de l'élève.

i/ Le milieu matériel. Au niveau le plus bas, les informations données à l'élève mettent en scène des acteurs "objectifs" (S5) confrontés à un milieu "objectif" (M5). M5 est le milieu matériel que rencontrent ces sujets S5 et sur lequel ils agissent.

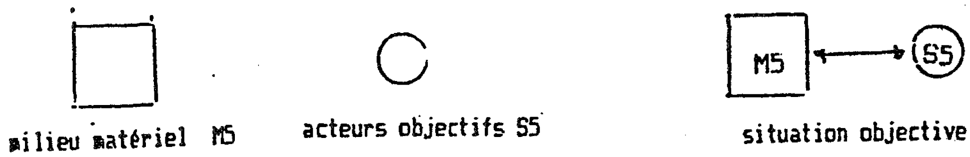


figure 1

ii/ Le milieu objectif. Le milieu matériel M5 et les acteurs S5 peuvent être proposés comme partenaires à l'élève lui-même qui les "connaît" et interagit avec eux. On reconnaît ici une situation d'action avec des partenaires et du matériel réel. L'élève se trouve alors devant un "milieu objectif" (M4) composé du couple (M5 ; S5), en position de sujet connaissant et agissant S4. Bien sûr, il peut, non seulement imaginer et se présenter S5, mais aussi s'identifier à lui par la pensée et comprendre son point de vue. Pour un observateur extérieur d'une situation d'action réelle, il n'y a pas de différence entre un sujet S5 et un sujet S4 mais pour l'acteur lui-même, il y a la différence qui sépare soit et les autres.

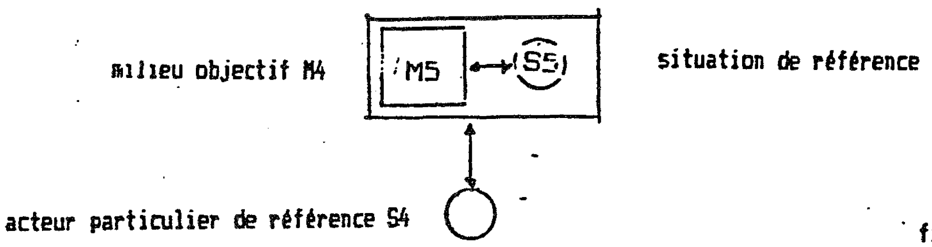


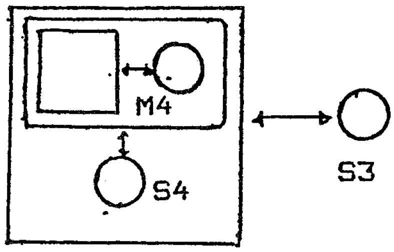
figure 2

iii/ Le milieu de référence. Une situation d'action peut devenir, par une intériorisation et/ou par le jeu d'un rapport social particulier, l'objet des préoccupations d'un sujet S3 pour qui elle forme alors un milieu M3 que nous appellerons "milieu de référence". Un élève qui s'imagine agissant sur M4 se trouve dans la position S3. Les rapports de S4 et de S3 avec leurs milieux respectifs sont radicalement différents.

.../...

Les premiers sont des rapports d'action, les seconds, plus réflexifs, se rencontrent dans des situations de formulation ou de preuve. Un élève peut se trouver dans une position S3 sans que la position S4 ait été réalisée ni même soit envisagée : Dans ce cas, le sujet S3 observe M4 sans imaginer entrer en interaction avec lui, ce qui peut limiter sensiblement ses possibilités de raisonnement.

milieu de référence M3



sujet épistémique S3
résolveur de problèmes

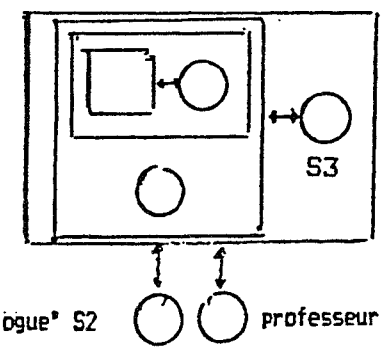
situation d'apprentissage a-didactique

figure 3

iv/ <u>Situation d'apprentissage a-didactique</u>. Ces rapports entre un sujet S3 réfléchissant à une situation de référence, avec, peut-être les ingrédients additionnels propres aux rapports sociaux dont nous parlions plus haut, sont du type de ceux qu'un professeur doit établir entre un élève réel et un problème. Pour lui, ces rapports constituent une situation d'apprentissage ou un exercice, dont il se sert pour son projet d'enseignement. Sa propre position est la position P2, et le milieu dont il s'occupe et avec lequel il interagit est le milieu de l'apprentissage a-didactique M2 formé de S3 et M3 (et de compléments M'3). Les relations du professeur P2 avec M2 sont une partie des relations constitutives de la situation didactique.

Mais l'élève, est, lui aussi invité par moment à considérer la situation d'apprentissage et les comportements qu'elle a suscités de sa part, ne serait-ce que lorsque le professeur les corrige et les commente, ou encore au cours de l'institutionnalisation des connaissances. A ce moment, l'élève se place dans une position nouvelle S2 face à un milieu M2 qui est celui de son apprentissage. C'est aussi la position qu'il prendrait en l'absence de tout professeur réel (position autodidacte). Il réfléchit alors à son apprentissage et aux fonctions, pour lui-même, de la connaissance.

milieu d'apprentissage M2



situation d'enseignement

sujet 'épistémologue' S2 professeur acteur P2

figure 4

v/ La situation didactique. Le professeur réfléchissant à son activité d'enseignement ou la préparant, envisage ses propres rapports avec ses élèves ; il se place ainsi dans une position P1, réflexive par rapport à la situation précédente qui se constitue alors pour lui, en un nouveau milieu M1 : le milieu didactique, ou situation didactique au sens du professeur. Cette position est similaire pour le maître à la position S3 pour l'élève. Remarquons que l'élève peut lui aussi se placer dans cette position (S1) pour observer, juger ou tirer parti de façon consciente de la situation didactique.

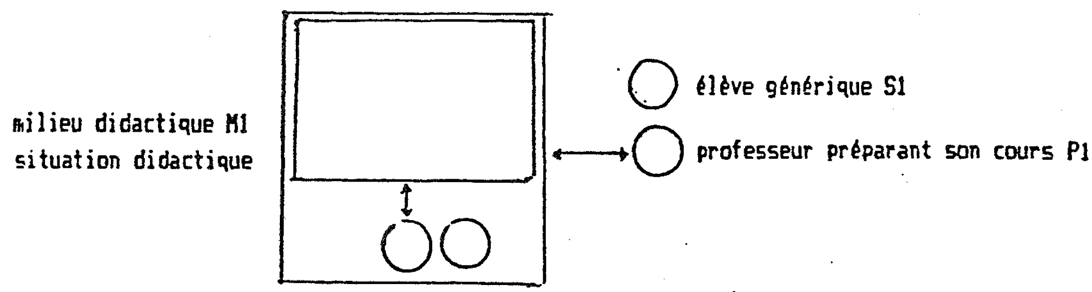
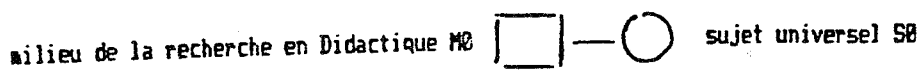


figure 5

vi/ La situation d'analyse de la didactique. Les rapports entre S1 et M1 peuvent évidemment être pris comme objets d'étude, par les acteurs de la relation didactique, comme par un observateur extérieur mis alors en position S0. La situation ainsi créée étant une situation d'analyse de la didactique.



La réitération du processus réflexif nous ferait sortir du champ de l'étude. De toute manière, le but de cette classification en niveaux de milieu et de situations est de permettre la prévision des relations sociales - aux jeux - qui correspondent aux différents régimes de fonctionnement de la connaissance dans les différents modes d'apprentissages utilisables en situation scolaire. Remarquons qu'à ce niveau repéré ici, peuvent s'introduire des éléments extérieurs avec des interactions spécifiques : le niveau Mn n'est pas nécessairement réduit au seul couple (Mn+1 , Sn+1).

.../...

Cette analyse est incomplète, bien sûr : l'élève et le professeur ne sont pas isolés du milieu scientifique et culturel (de la noosphère) et du milieu social et politique (les parents en particulier). De plus, son utilité repose sur l'hypothèse que les niveaux supérieurs du milieu fonctionnent de façon assez indépendante des niveaux inférieurs, hypothèse qui ne peut se réaliser, au mieux, que dans des conditions favorables.

4.4. Les types d'interactions et les types de situations.

L'alternative action/réflexion n'est pas la seule composante déterminant le type de situation. Il faut bien évidemment la croiser avec les modèles d'interactions sociales fondamentales, envisageables (action pure, formulation, validation, et institutionnalisation) qui mettent en scène les acteurs de la connaissance et motivent ou expliquent leurs changements de positions caractéristiques et sur lesquels nous ne reviendrons pas ici.

Ces types d'interaction ne sont pas tous compatibles avec tous les niveaux de milieu mais ils permettent de donner une description assez fine, en première approche, des différentes formes de fonctionnement de la connaissance et du savoir dans les relations didactiques.

i/ L'acteur générique S5. Il effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, répertoriées et qui sont supposées connues de l'élève puisqu'elles doivent lui être communiquées. Il s'agit donc de procédures, d'algorithmes. Pour les mêmes raisons, les relations que vérifie M5 sont explicites, de même que celles que S5 entretient avec M5, ce ne sont pratiquement jamais des situations de communication ou de preuve, mais cela pourrait l'être.

ii/ L'acteur particulier S4. Il agit mais ses opérations ne sont pas nécessairement explicitables et en partiuclier ses opérations mentales et cognitives. Il communique pour l'action, le plus souvent sans pouvoir créer de moyens sémiologiques nouveaux. Il construit des messages en utilisant les codes connus de ses interlocuteurs sans les modifier sensiblement. Toutes les preuves qu'il utilise restent elles aussi implicites.

iii/ Le sujet épistémique S3 envisage les actions de S4 (lui-même à l'occasion), soit pour communiquer des renseignements sur l'action, soit pour débattre de son adéquation. Il peut concevoir une action sur M3 mais mentalement, ce qui suppose au moins une représenta-

.../...

tion sinon une formulation. Les actions de S4 doivent être à ce niveau, formulables, explicitables et ses opérations cognitives reconnues. S4 étant un acteur particulier, ses activités cognitives ne sont pas nécessairement repérées culturellement ni formulables. Les codes de communications peuvent alors faire l'objet d'un travail direct. Les moyens de preuves et les théories peuvent rester implicites.

iv/ Le sujet épistémologue S2 prend connaissance des procédés de connaissance et d'apprentissage. Il agit essentiellement en intervenant dans des débats et en communiquant des preuves explicites. Il travaille avec ses apirs ou avec son professeur sur les théories mathématiques qui servent aux niveaux supérieurs. Bien sûr, il prend des décisions et agit (au sens de S4) : il décide de refaire un exercice, relit un texte...

4.4. Complémentarité interniveaux

Les différents niveaux du milieu s'appuient les uns sur les autres lors du traitement cognitif d'un concept mathématique. Cet appui se manifeste par des relations de nécessité structurelle et de complémentarité et par des relations temporelles de succession et de production : une situation produit les éléments de la suivante. Au cours de la genèse ou de l'apprentissage, ces situations s'organisent en processus. Les relations interniveaux sont les instruments de processus tels que l'obsolescence des connaissances ou celle des situations didactiques ou encore tels que la transposition didactique (en tant que processus).

5. Quatrième groupe de composantes contextuelles : la technique d'obtention du quotient ou du reste.

Nous avons abondamment traité cette question dans les paragraphes précédents, nous nous contenterons d'énumérer ces techniques:

1. la recherche directe, par des manipulations de matériel ou par des dessins, par la remémorisation d'une table apprise par coeur, ou par l'écriture sous forme de fraction

2. La soustraction répétée

3. La mise sous forme de produit : matériellement, ou par tâtonnements type devinette

.../...

4. L'encadrement systématique par des multiplications ou par des soustractions

5. La soustraction répétée et poursuivie

6. Le renvoi dans les naturels grâce à une multiplication appropriée du diviseur et du dividende.

Cette dernière technique très utilisée dans les classes n'a pas été traitée jusqu'à ce moment dans ce cours : la disposition de la division nouvelle proposée ici, qui rend automatique le placement des virgules, rend inutile ce procédé dans la technique de clacul. Il sera l'objet plus loin d'une étude particulière en tant que connaissance et moyen heuristique au moment où les applications linéaires seront utilisées pour obtenir des modèles résolubles (par exemple dans les problèmes de parts inégales).

Exemple : 324,38 : 1,2 sera disposée ainsi :

	2	
1,2 x 2 = 2,4	3 2 4	3 8
(1,2 x 200 = 240)	- 2,4	
mais il suffit de positionner la virgule comme les unités pour l'opération dans N	8 4	

puis se poursuit

	2 7 0	
1,2 x 2 = 2, 4	3 2 4	3 8
1,2 x 6 = 7,2	- 2,4	
1,2 x 7 = 8,4	8 4	
	8,4	
	0 0	

	2 7 0	3 1...
1,2 x 2 = 2,4	3 2 4	3 8
1,2 x 6 = 7,2	- 2 4	
1,2 x 7 = 8,4	8 4	
1,2 x 3 = 3,6	8 4	3 8
	-	3 6
		0 2 0
	-	1,2
		0,8

.../...

Dès ce moment-là, la technique de renvoi dans les naturels pourra être utilisée par les élèves.

REPRESENTATIONS ET DIDACTIQUE DU SENS DE LA DIVISION

. BROUSSEAU Guy
Département de Mathématiques/IREM - BORDEAUX-I

Les didacticiens éprouvent encore de grandes difficultés à établir une relation claire et rationnelle entre des observations d'élèves ou de classes, des déclarations sur les processus d'enseignement, la production de moyens "nouveaux" d'enseignement et la prévision de leurs résultats.

Conscient de ce problème, le GRECO a réservé une partie de ses moyens pour encourager les efforts et les échanges sur la théorisation et la méthodologie. C'est une tâche malcommode, car chaque groupe de chercheurs tend à occuper la fermeture de sa problématique, de son propre système théorique et de sa méthodologie, à se définir par le sujet mathématique qui le préoccupe, et sur cette base à limiter ses échanges avec les autres groupes au strict nécessaire. Malgré ces tendances le GRECO a accompli dans cette direction d'importants progrès, qui promettent, dans les années à venir des avancées décisives pour l'établissement de la didactique des sciences comme secteur scientifique de recherches.

Ces progrès, visibles dans les exposés présentés à ce colloque, ne se cristallisent pas encore sous forme de thèmes explicites, et les déclarations de didactique ont tendance à être repoussées dans les introductions et dans les conclusions des articles pour laisser la place à des descriptions de comportements de maîtres ou d'élèves.

C'est pourquoi nous avons délibérément choisi de présenter un essai d'étude directe d'une question de didactique et de ses méthodes d'approche ; même le choix du sujet mathématique y a été subordonné à la problématique de la didactique.
Il s'appuie sur un ensemble de travaux, achevés ou en cours, concernant la division, son enseignement et la conception que s'en font les élèves de la scolarité obligatoire. En fait, il s'agit d'étudier sur un exemple favorable, comment s'opère et surtout pourrait s'opérer la gestion du sens des notions mathématiques dans le processus d'enseignement.

---/---

1. L'enseignement du "sens" et ses difficultés théoriques

1.1. Enseignement des savoirs, recherche de la compréhension

Les enseignants de l'école élémentaire font une distinction entre :

. celles de leurs activités qui visent l'acquisition des savoirs institutionnalisés tels que les algorithmes de calcul, les définitions canoniques ou les propriétés fondamentales,

. et celles qui visent la compréhension et l'usage de ces savoirs.

Cette distinction s'explique :

Dans les pratiques dites "traditionnelles", ces types d'enseignements sont nettement différents, par leurs techniques mais aussi par les contrats didactiques qui les orientent.

Les savoirs du premier type sont beaucoup plus faciles à "administrer" dans un contrat social : ils sont "identifiables", descriptibles, leur acquisition est vérifiable de façon simple ; il existe dans la culture au moins une technique contrôlable et connue de tous, réputée, sinon suffisante, du moins basique.

1.2. Pourquoi ces deux activités sont-elles perçues comme opposées ?

Plus qu'une simple distinction, on rencontre une opposition : La société voudrait bien que l'enseignement obtienne des élèves la compréhension en plus de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés. Des efforts répétés sont tentés dans ce sens (chaque "réforme" vise en fait ce but) mais en l'absence d'une solution "évidente" qui, pour l'instant, devrait respecter la technique basique, toute modification finit par échapper au "contrôle" social ; la recherche de la compréhension se trouve alors directement opposée à celle de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés qu'elle est accusée d'abandonner. Ces deux activités ne sont pas logiquement ou techniquement contradictoires, mais elles apparaissent telles, dans le modèle culturel qui régit le contrat didactique.

Chaque réforme s'achève par un écrasement plus pesant de l'enseignement élémentaire sur les pratiques dogmatiques et la visée d'objectifs formels. Obligés de "défendre" un minimum d'objectifs de compréhension, les enseignants répondent par des procès contre le formalisme, le dogmatisme,... et par un éloge de leurs "antagonistes" (supposés par définition être, de plus, adaptés aux élèves) sans parvenir à produire sinon des méthodes, du moins des contrats didactiques satisfaisants.

1.3. Forme et contenu.

Ces conditions ont conduit les enseignants à reporter sur la connaissance la discrimination qui leur est imposée, et à distinguer dans le savoir une forme et un contenu (ou un sens). La forme est ce qui peut être identifié, choisi comme objet d'enseignement, le sens, ce qui permet à la forme de fonctionner, comme solution de problème par exemple. Ainsi, l'enseignement de la technique de la division est organisé pour mémoriser un algorithme que les élèves auront à charge de mettre en oeuvre à l'occasion d'exercices réputés illustrer les différents sens de la division. La compréhension peut toutefois y intervenir localement comme moyen d'accélérer ou d'affermir l'apprentissage de la technique de calcul.

Nous pouvons distinguer au moins deux composantes de la compréhension :

◊ L'une s'exprime en termes de nécessités logiques ou mathématiques ou de façon plus générale, syntaxiques. L'élève qui comprend peut "raisonner" sur son savoir, l'analyser ou le combiner à d'autres, le reformuler ou le valider par un recours à divers systèmes plus ou moins formels, mais identifiables eux aussi. En ce sens, produire une preuve d'un théorème, ou la solution d'un problème est une certaine preuve de compréhension.

◊ L'autre s'exprime plutôt en termes de sémantique. "Comprendre" c'est alors être capable de reconnaître des occasions d'utiliser le savoir et d'investir ainsi des champs nouveaux, que ce soit par des moyens réthoriques comme les métaphores, les métonymies... ou par d'autres plus inconscients et plus flous.

1.4. Le sens en théorie des situations.

Quelques travaux rassemblés sous ce nom un peu ambitieux, tendent à mettre en correspondance des savoirs et des formes de savoir avec des conditions portant sur leur situation d'apprentissage. Leur objet principal est la gestion et la manipulation du sens des acquisitions. Le sens d'une connaissance reconnue comme telle par l'élève (institutionnalisée) est formé :
- du "tissu" des raisonnements et des preuves dans lesquels elle est impliquée avec évidemment des traces des situations de preuves, qui ont motivé ces raisonnements,
- du "tissu" des reformulations et des formalisations à l'aide desquels l'élève peut

.../...

la manipuler, accompagné d'une certaine idée des contraintes de communication qui les accompagnent

- des modèles implicites qui lui sont associés - soit qu'elle les produise, soit qu'elle en résulte - et des traces des situations d'action qui les fonctionnalisent ou qui simplement les contextualisent.

- et des rapports plus ou moins assumés entre ces différentes composantes, rapports essentiellement dialectiques. L'enchaînement "question/réponse" par exemple : les questions tendent à s'articuler entre elles, indépendamment des réponses reçues et les réponses font de même de leur côté. Articuler de "bonnes" réponses avec de "bonnes" questions conduit à reformuler alternativement et pertinemment (nous dirons dialectiquement) les unes et les autres.

La dialectique outil-objet fait qu'un modèle implicite, moyen de solution, tend à devenir un objet d'étude ou d'explicitation et que le résultat d'une théorisation - objet d'étude - peut devenir un outil d'analyse... Le sens d'une connaissance inclut les questions auxquelles elle aide à répondre et celles qu'elle permet de poser. Il englobe les situations où entre cette connaissance dans des rapports théorie/application et actif/réflexif (cf. DOUADY [9]).

Parmi les pincipaux buts et résultats positifs de cette démarche théorisante, il faut relever la classification et l'explication des situations classiques mais surtout la production de nombreuses situations didactiques nouvelles, en particulier sur la division. Ces situations, dont le déroulement est beaucoup plus contrôlable, sont conçues pour amplifier le sens des connaissances acquises et se sont montrées capables de le moduler.

1.5. Critique des propositions actuelles.

Un des points faibles les plus évidents de la technologie développée à ce jour dans le cadre de ces théories, c'est l'absence de propositions d'un contrat didactique convenable pour la recherche de la compréhension :

◊ les premières réalisations proposaient un contrat où le sens était "à la charge unique du professeur" : par un choix approprié des situations d'apprentissage et de leur enchaînement, le professeur devait construire "seul" le sens des connaissances enseignées dans la tête de l'enfant, sans autre participation de sa part que la prise en charge "docile" et la résolution des problèmes proposés.

◊ Puis survint la mise en évidence :

• d'abord de la nécessité d'une certaine institutionnalisation des savoirs,

.../...

. ensuite, de l'existence d'obstacles de diverses origines - c'est-à-dire d'erreurs que l'élève doit rejeter explicitement en incluant ce rejet dans ses connaissances. Cet apport implique que le sens doit être désormais, sinon enseigné de la même façon que les savoirs institutionnels, du moins assumé comme objectif et comme conséquence, négocié, consenti, explicité à l'occasion. Il en résulte que l'épistémologie qui gère l'enseignement ne peut plus rester fantômatique et naïve comme elle l'est aujourd'hui.

Les problèmes sont "comment ?" quelles situations ? quelles stratégies ? quels contrats didactiques ? quels observables ? quelles modifications de la conception épistémologique du public ou des professeurs ?

1.6. Difficultés paradoxales :

Les premières difficultés que rencontre le projet de proposer un contrat d'enseignement de la compréhension sont les paradoxes de l' adaptation des situations : inadaptation à l'exactitude de la connaissance et à l'inadaptation à l'adaptation ultérieure :
Favoriser la "compréhension" d'une situation d'apprentissage - d'autant plus "incomplète" par définition qu'elle figure tôt dans le processus, c'est prendre le risque d'apprentissages "incontrôlés" (ce que l'élève développe lui-même) qui se révèleront faux, ou au moins sources d'erreurs et qui seront difficiles à reprendre ou à négocier dans les étapes ultérieures. A l'inverse, institutionnaliser excessivement ce qui touche au sens conduit à un alourdissement de l'enseignement et à une sclérose, voire à une falsification du savoir.

2. Objet de la recherche : le sens de la division.

2.1. L'enseignement du sens soulève les questions suivantes :
1°) Comment provoquer la mise en oeuvre pertinente et fonctionnelle des connaissances (l'aspect implicite de la compréhension)
2°) Comment gérer (accepter/rejeter, ignorer...) assumer et négocier (avec les élèves et le public) les erreurs provoquées par ce fonctionnement
3°) Comment reprendre en cours d'apprentissage un savoir fonctionnel et donc "mal fait"
Mais la question centrale de cette recherche est la suivante :

une activité réflexive (laquelle, dans quelles conditions, etc...) peut-elle améliorer la compréhension des notions et l'efficacité des apprentissages (comment le vérifier...)

.../...

2.2. Il s'agit donc :

- d'étudier diverses situations non réflexives et la façon dont elles agissent sur le sens d'une connaissance
- de créer des situations nouvelles où ce sens ferait l'objet d'un travail réflexif commun aux élèves et aux maîtres afin de les comparer aux premières
- d'observer et de préciser les stratégies didactiques et leurs conditions limites
- d'identifier les variables de ces situations et d'estimer la possibilité d'utiliser ces dernières sur d'autres connaissances.

2.3. La connaissance choisie a été "la division"

Cette notion a fait l'objet :
- d'études d'ingenierie manipulant assez bien les modèles implicites, les formulations et les preuves
- et d'études des erreurs et des représentations des élèves - ce qui permet de se concentrer sur la question centrale.

Son apprentissage dure assez longtemps - du CP où les enfants "partagent" en deux ou trois parts égales jusqu'à la terminale ou plus (division dans les p-adiques par exemple) et implique plusieurs changements de la structure numérique utilisée (N,Q..) qui provoquent les difficultés visées par la recherche.
Dans les classes, les enseignants pratiquent spontanément, à son propos, des analyses des erreurs des élèves et des commentaires sur les types de problèmes et sur les genres de solutions, mais le plus souvent leurs commentaires ne se fondent pas sur des traits objectifs établis expérimentalement mais sur des réflexions heuristiques. Et c'est l'enseignant seul qui détermine les critères de ses classifications.

La "division" présente des difficultés certaines mais raisonnables pour les élèves et son intérêt est évident. Elle présente donc un défi et un espoir honorable, aussi bien théorique que pratique.

Pour éviter une trop grande spécificité de la recherche (et l'illusion d'une trop grande généralité) les mêmes questions sur le sens sont mises à l'étude parallèlement sur des notions différentes (la continuité et les réels par exemple). Notamment avec Mme ORUS BAGUENA sur un sujet plus vaste : le traitement des raisonnements logiques des élèves en classe : pour permettre au professeur de donner un statut honorable à la pensée naturelle des élèves ("logique"), qu'ils devront ensemble "reconnaître"

.../...

sans la confondre avec la logique mathématique et sans l'apprendre ni l'accepter comme moyen de preuve, nous introduisons des exercices et des jeux de classification, d'agrégation de données et de coalition.

3. Méthodes de la recherche et organisation.

3.1. L'étape finale consiste à observer des leçons "spontanées" ou "expérimentales", à identifier les stratégies du maître et celles des élèves, à observer leurs effets sur "les résutlats" et à comparer et expliquer les relations que l'on a pu établir. Ces observations cliniques et statistiques ne peuvent se dérouler convenablement que si leurs éléments principaux, conditions et observables, ont été analysés à l'avance : Notre étude a donc compris d'abord une étude des variables pertinentes de la connaissance de la division. Il s'agit de repérer des caractères dont la valeur, la présence ou l'absence, influe sur les possibilités de reconnaissance ou de résolution d'un problème de division : cette influence peut être un blocage de la reconnaissance ou un changement net du mode de résolution ou une modification significative de la fiabilité du calcul ou de la conviction de l'élève.
Les caractères n'influent pas toujours seuls, leur action dépend des valeurs des autres caractères. Il est intéressant de repérer la modalité d'action de ces caractères ; l'élève est-il capable de les traiter explicitement et indépendamment comme des prédicats avec ses connecteurs logiques (caractères "décantés" au sens de WERMUZ) peut-il seulement remarquer différentes modalités d'un autre prédicat suivant les valeurs de celui-là (le caractère est une composante contextuelle d'un prédicat amalgamé et l'élève peut effectuer une centration sur elle) ou bien ce caractère est une composante contextuelle complètement "inconsciente" à l'élève.
Cette étude expérimentale des variables est d'autant plus indispensable que la phase didactique va conduire les maîtres et les élèves à les utiliser dans la relation didactique. Nous avons choisi le modèle de reconnaissance de WERMUZ en prévision de ce moment [13].

3.2. La connaissance dont les enseignants s'occupent en tant que but ou en tant qu'obstacle à leur activité n'est pas une simple collection de composantes ; celles-ci sont organisées en conceptions.

Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des "raisonnements semblables" ou traitées à l'aide de propriétés et de connaissances

.../...

logiquement et fortement liées.

Des conceptions sont différentes si l'une ne permet pas d'appréhender sans difficulté les problèmes que l'autre permet de maîtriser. Un même élève peut utilliser plusieurs conceptions en ignorant leurs relations ou au contraire en les reliant en une conception plus générale. L'ensemble de ces conceptions, ainsi articulé et les problèmes qu'elles peuvent traiter, forment le champ conceptuel de la notion mathématique. L'étude du champ conceptuel de la division est indispensable dans cette recherche qui doit préciser la façon dont il est modifié au cours de l'enseignement.

3.3. Recherche de situations fondamentales et ingénierie.

Notre hypothèse de base envisage une activité réflexive de l'élève sur ses productions et ses connaissances ou plus précisément sur leur sens et leurs rapports. Il faut donc réaliser ce sens en un "objet" étudiable par l'élève et même constructible par eux : appelons cet objet "modèle didactique explicite du sens" (MDES). Nous avons retenu comme MDES la représentation classique sous forme de collections de problèmes étant entendu que c'est la structure de cette collection qui est essentielle, nous avons choisi de représenter le sens par une hiérarchie de partitions opposant des classes de problèmes considérés comme équivalents.

La classification serait justement le but du travail des élèves et elle est donc provisoirement ouverte. Les critères que les élèves pourront mettre en évidence au fur et à mesure seront l'outil de la classification. Ces critères fonctionnent comme un modèle didactique implicite du sens (MDIS). Nous avons besoin que le maître en ait une représentation "de travail" pour guider ses stratégies. Nous avons là encore cherché un "modèle" acceptable pour ces enseignants. Le modèle de WERMUZ axé sur la "reconnaissance" convient bien à la tendance des maîtres à surestimer les propriétés ostensives des situations d'enseignement, même s'il est métaphorique. Les élèves auront à se saisir de ces variables.

4. Premiers résultats.

4.1. Les variables pertinentes identifiées.

Nous avons repéré quatre groupes de composantes contextuelles :

1er groupe : les nombres :
La structure mobilisée (naturels, rationnels, décimaux...)
L'expression des nombres (fractionnaire ou décimale)
La taille des nombres (inférieurs à 1, entre 1 et 2, petits nombres, grands nombres)

.../...

La fonction mathématique des nombres (cardinale, mesure, scalaire, application linéaire... etc) ces différentes fonctions engendrent des types de produits différents (cf. BROUSSEAU 81) donc des divisions différentes (produit de cardinaux, scalaires-mesure, produit de scalaires, applications d'une homothétie de R à une mesure, compostion d'applications multiplicatives,... etc)

2ème groupe : les types de grandeurs.

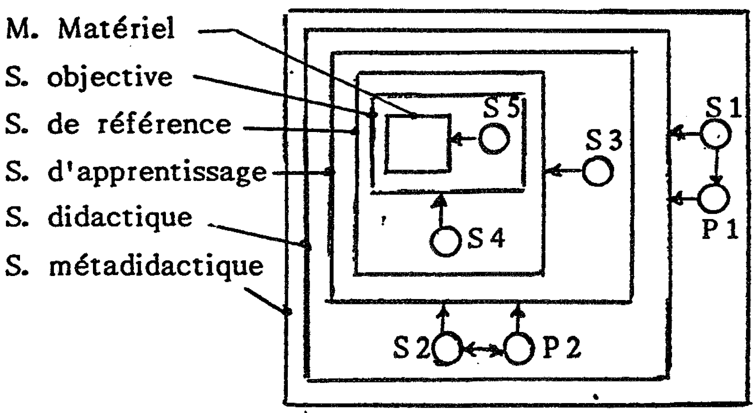
Domaines physiques
Dimensions (et effets des dilatations)
Modes de définitions (grandeurs-produit, grandeurs-dérivées, grandeurs-quotient)

3ème groupe : La situation didactique.

La variable la plus surprenante concerne les relations "effectives/invoquées" que la situation établit entre l'élève, le maître et le milieu.
Les divers types de situations, didactiques et a-didactiques, en évidence sont les suivantes :

situation a-didactique objective
situation de référence a-didactique
situation d'apprentissage "a-didactique"
situation d'enseignement (situation didactique)
situation métadidactique.

Elles sont emboîtées selon une relation de "situation agie" à "situation objet d'étude;" le schéma global étant le suivant :



S 1 sujet universel
S 2 élève générique
S 3 sujet de l'apprentissage
S 4 sujet agissant
S 5 secteurs objectifs
P 1 Professeur préparant son cours
P 2 Professeur enseignant
<— agit sur ou observe

L'élève peut s'identifier aux différentes positions épistémiques, le rôle et le sens du savoir est différent à chaque niveau, les connaissances changent de niveau et de statut au fur et à mesure de l'apprentissage. Les possibilités offertes ou non à l'élève de jouer ou de simuler les différents rôles contribuent de façon importante à la formation et à l'évocation du sens des connaissances (BROUSSEAU [6]).

.../...

4ème groupe : Les techniques de calcul enseignées précédemment.

Manipulations de "partage"
Soustractions répétées
Mise en facteur (tâtonnements, devinette...)
Encadrement systématique
Renvoi dans les naturels
Soustraction répétée poursuivie
La présentation des calculs.

Nous avons en particulier vérifié une fois de plus l'importance, pour une présentation des calculs, de laisser une certaine souplesse au déroulement en vue de la correction des erreurs et de permettre des contrôles automatiques sur la position des chiffres ou l'ordre de grandeur des résultats comme dans une abaque.

4.2. Les conceptions de la division repérées : le champ conceptuel.

Nous avons identifié les conceptions classiques suivantes au niveau primaire :

4.2.1. Les partages

La répartition globale égalisée
La répartition égalisée répétée
L'attribution régulière
L'attribution proportionnelle préparée
La distribution régulière
Le modèle unificateur (nombre de parts, valeur d'une part)
La recherche du reste.

4.2.2. Recherche du terme inconnu d'un produit.

Le partage retrouvé (additions répétées)
Tâtonnements et encadrements successifs (erratiques, systématiques)
La composante d'une mesure produit (recherche directe en dimension 2, unidimensionalisation...)
La dérivation
Le partage prolongé
L'approche euclidienne

4.2.3. La division "fraction"

Fractionnement de l'unité
La commensuration
L'estimation décimale d'un rationnel

4.2.4. L'application linéaire

La recherche du correspondant de 1
Le rapport (de mesures, scalaires...), l'invariant dans une homothétie
L'application (classe de couples, ou relation) divisé par
La recherche de l'image
La réciproque de l'application multiplicative.

4.2.5. La composition d'applications linéaires

Recherche d'une des applications composantes
L'inverse d'une application

4.3. Procédures et difficultés des élèves.

La détermination des conception (dont on a vu un exemple dans RATSIMBA-RAJOHN[10] aboutit à des pronostics que les observations pourraient infirmer ; pour interpréter certains problèmes exprimés à l'aide de décimaux, certains élèves essaient de se ramener au cas des entiers naturels en supprimant la partie décimale. Nous avons essayé de prévoir les difficultés que cette pratique peut produire suivant la taille des nombres et la dimension du diviseur (scalaire ou non) sur des élèves ayant dans les naturels le modèle de la soustraction répétée, par comparaison avec des élèves ayant une conception "recherche par tâtonnement du terme inconnu d'un produit". (voir tableau 1 ci-après)

On s'attend à des réussites d'autant plus faibles que la case est grisée en plus sombre, et à discriminer au moins deux populations qui réalisent chacune une distribution avec, entre elles, des différences significatives aux endroits attendus.

5. Etude et pré-expérimentation de la situation didactique de classification des problèmes par les élèves

5.1. La situation se présente comme un concours entre les élèves qui doivent apporter le plus possible d'énoncés de problèmes "de division". Des points sont symboliquement attribués "aux problèmes" en fonction de leur intérêt et de leur nouveauté.

La situation doit conduire les élèves à remarquer que des énoncés se ressemblent, que l'on passe de l'un à l'autre par des variations automatiques, que la donnée d'un problème et de ses variables permet d'en faire une espèce de problème-type.

TABLEAU 1

nature différente
avec le dividende
Enoncé 2

me nature
: dividende
oncé 1

Diviseur	0 < diviseur < 1	1 < diviseur < 2	2 < diviseur
< quotient < 1	0,30:0,80 0,80:0,30 tâtonnements 0 x 0 ou 0 divisé par 0, sinon comme ci-contre 0,80 1 0,30 1 comme ci-contre ou ci-dessous 0,80 F/1 0,30 F/1	0,80:1,25 Tâtonnements multiplicande plus grand que le produit pas de modèle dans N. 1,25 1 pas de première soustraction possible 1,25 F/1	380:450 Tâtonnements multiplicande plus grand que le produit pas de modèle dans N 450 1 pas de première soustraction possible 450 F/1
< quotient < 2	1,70:0,90 Tâtonnements Il faut multiplier 0 par 1 Difficultés plus grandes 0,90 1 La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 0,90 F/1	1,80:1,25 Tâtonnements Il faut multiplier par 1 Difficulté 1,25 1 La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 1,25 F/1	380:200 Tâtonnements Il faut multiplier par 1 Difficulté 200 1 La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 200 F/1
< quotient	380:0,75 Tâtonnements : pas de difficulté mais quotient plus grand que le dividende ou division par 0 : Difficulté 0,75 1 Soustraction répétée pas de difficulté Division réduite : diviser par 0 : Difficulté 0,75 F/1	380:1,80 Tâtonnements ou fonction linéaire - pas de difficulté Division par 1 : Difficulté 1,80 1 Soustraction répétée Division réduite : diviser par 1 : petite difficulté 1,80 F/1	380:14,2 Tâtonnements ou fonction linéaire Pas de difficulté 14,2 1 Soustraction répétée : pas de difficulté Division réduite à N : 380 : 14 - Pas de difficulté 14,2 F/1

En faisant varier systématiquement les données d'un problème pour essayer d'en absorber un autre dans la même classe, ils travaillent leurs propres représentations et leurs méthodes de lecture des énoncés et explicitent les variables non pertinentes. A cette occasion, ils éprouvent les limites que leurs conceptions leur impose et peuvent éventuellement les remettre en question par l'étude des variables pertinentes identifiées.

Le concours est ouvert pendant une période assez longue - deux semaines - et éventuellement repris au cours de l'année.

La dimension des modes d'attribution de points est le moteur de la construction du sens ; il indique ce qui est intéressant ou non, mais il n'est pas un but et le concours doit redevenir assez symbolique dès que les élèves et le maître ont de connivence compris qu'il n'est qu'un moyen et que le plaisir se trouve dans la réflexion et le débat eux-mêmes et dans la maîtrise de nouveaux problèmes.

Il est important de noter que l'action de classer et le fait de déterminer des variables et de discuter des conceptions est beaucoup plus important que la classification obtenue ou que la connaissance institutionnalisée des conceptions acceptées ou rejetées. Le maître doit connaître les difficultés que les enfants vont rencontrer et surmonter et les conceptions probables mais il doit savoir qu'il n'est pas essentiel d'aboutir à la classification , même celle momentanément proposée par les chercheurs. Il est bien plus essentiel d'étendre le champ exploré et de se mettre d'accord sur la validité des solutions que sur les types de problèmes ou l'appartenance d'un problème à tel ou tel type : ensisager la question et y répondre suffit.

5.2. L'activité se déroule selon des cycles.

Chaque cycle comprend :

- une phase de recherche d'énoncés par les élèves, individuellement ou par petits groupes
- une phase de vérification et de résolution collective de ces problèmes
- une phase de classification des problèmes et de recherche des critères.

Dans le cycle suivant, les élèves chercheront de "nouveaux" énoncés en utilisant les critères dégagés et la classification obtenue. Au fur et à mesure du travail, cette classification évolue et se "complète".

.../...

Consigne : "Nous continuons notre concours d'énoncés.
. Aujourd'hui, vous devez proposer des problèmes qui conduisent à faire une division. Vous écrivez l'énoncé et vous posez seulement l'opération mais vous préparez dans votre tête la justification de ce calcul pour la donner oralement à vos camarades. Vous pouvez commencer par des exemples simples ou que nous avons rencontrés mais ne compliquez pas, introduisez par une phrase le dividende et demandez le quotient. Ce sont les occasions de faire la division qui nous intéressent. Par contre, essayez de mettre le plus possible des décimaux ou des fractions qui ne sont pas égales à un naturel dans les énoncés et dans les solutions A LA CONDITION QUE LE PROBLEME GARDE DU SENS".

La consigne suggère aux élèves de tenter des rapprochements mais ne donne aucun moyen pour décider de l'intérêt des énoncés. Il est normal qu'avant d'entreprendre des discussions, ils essaient de tâter l'opinion du maître et que le maître se prête à ce jeu pour les encourager à mettre en évidence des caractères de différenciation : de petites différences d'abord - même nombres, mêmes grandeurs... avant de s'enhardir. La mise au point d'une stratégie du maître est le point délicat de cette situation. Nous espérons que l'observatoin d'un certain nombre de situations de ce type permettra de préciser les caractères les plus facilement imaginés par les élèves.

5.3. La préexpérimentation a permis d'obtenir les résultats et les convictions suivantes. (*)
Les élèves produisent volontiers des énoncés de problèmes et leur intérêt progresse avec leur habileté dans ce domaine.
Les élèves et le maître sont conduits à analyser leurs énoncés et à préciser ce qu'est un problème ("Qu'est ce qui est demandé ? Quelle opération donne ce résultat à partir des données...") à distinguer des justifications ou des moyens de substitution. La notion de problème est très floue chez les élèves.

Ils identifient le type de problème par l'opération que l'on fait pour le résoudre, ou avec une opération qui figure dans la solution. Ainsi : "5 livres identiques coûtent 160 francs. Prix d'un livre ?" est classé problème de multiplication par un élève qui dit : j'ai trouvé 32 et 32 x 5 = 160. Déterminer ce qu'est un problème de division est donc une activité cognitive et culturelle complexe (prendre 1/4 c'est multiplier par 1/4, compter combien de quarts c'est diviser par 1/4 !). Ce ne peut être seulement le résultat intuitif d'une activité empirique.

(*) La préexpérimentation s'est déroulée à l'Ecole pour l'Observation "Jules Michelet de TALENCE dans les classes de Mmes BROUSSEAU, DARDERES-COMET et M. BERT (CM 1)

◊ L'explicitation des méthodes de comparaison et de recherche de classes d'énoncés ou de nouveaux énoncés à provoqué chez les élèves une intense activité - essais de nombres différents tirés de formulations etc...

Nous avons observé des substitutions systématiques et des observations sur l'engendrement des problèmes. "Avec un problème de multiplication je peux faire 2 problèmes de division".

◊ Nous avons observé :

- Des créations de catégories et leurs justifications ("on partage quelque chose en parts égales", "on ne partage pas l'argent comme un ruban, mais pour les nombres c'est pareil").
- Des créations de critères : nombres, plausibilité, précision, intelligibilité etc... "si on change les nombres, l'opération ne change pas" "mais on peut trouver des problèmes idiots : un ruban de 375 km" ou "1,523712 m"."Le nombre des frères qui partagent l'héritage 3,2". Ca n'a pas de bon sens !.
- Des tentatives de suppression d'un critère : "on partage 5/6 de gâteau entre 2 enfants" n'est pas admis, au début, dans la même catégorie que le partage d'un ruban, parce que "on fait pas les mêmes opérations", ni le problème "3,750 kg est vendu 270 francs. Prix du kg ?". Mais on observe "270 francs peut être la quantité à partager également, le prix du kg serait la valeur d'une part, chaque kg doit recevoir une même part du prix total et s'il reste une fraction de kg elle doit recevoir la même fraction du prix d'un kg".
- Des reclassifications ou des classifications différentes :

  de nombreuses reformulations du même problème

5.4. Autres situations

Nous avons préparé d'autres situations encore en cours de préexpérimentation plus proches de la maïeutique utilisée ordinairement dans des classes et une situation de jeu plus formel où les élèves doivent "deviner" des énoncés de problèmes à partir d'un jeu de questions portant sur des caractères. La mise au point d'un tel jeu est un exercice essentiel d'analyse didactique, même si le résultat n'est pas entièrement satisfaisant et ne peut pas être proposé encore à l'expérience.

6. Conclusions

L'étude de la reconnaissance chez l'élève de la division, et des problèmes de division serait en soi un sujet suffisamment intéressant pour les psychologues et vraisemblablement pour certains enseignants aussi.Ce n'est qu'un prologue pour une recherche en didactique, et il n'est pas évident qu'il puisse être mené à bien sans une meilleure connaissance et une plus grande variété de situations proposées.

.../...

L'étude de procédés spontanés de création et de gestion du sens, qu'ils soient empiriques (comme l'ostention, la présentation répétée, la variabilité contextuelle ou non), qu'ils séparent l'apprentissage de l'algorithme de celui du sens, ou au contraire, qu'ils les intégrent comme dans les processus (action formulation preuve, institutionnalisation) qu'ils prétendent être définitifs (a - génétique) ou qu'ils ménagent des reprises ou même une genèse, cette étude est indispensable mais commence à peine.

Il est essentiel d'obtenir des informations plus précises sur les conceptions des élèves qui sont réellement différentes et sur la façon dont elle font ou non obstacles aux reprises, les travaux ci-dessus préparent ces études.

Les situations didactiques mises en préexpérimentation semblent bien influencer et développer le sens, et la compréhension des connaissances de la division. Mais leur conduite exige de la part des enseignants des stratégies raffinées, qui paraissant critiques et qui, en tout cas, ne sont pas faciles à communiquer à des maîtres peut entrainés à modifier leur contrat didactique.

La possibilité de faire accepter une solution technique à l'ensemble de la société, condition nécessaire pour modifier certains équilibres qui régissent le contrat didactique, passe par la banalisation de l'usage (et du discours) d'une didactique scientifique comme moyen culturel de correction et d'ajustement du fonctionnement du système d'enseignement. Le contrôle culturel et technique implique, non seulement le développement de la recherche de bon niveau dans ce domaine, mais sans doute aussi la création d'organismes d'ingénierie didactique impliqués dans la formation des maîtres, dans la production des moyens d'enseignement et dans "l'expertise didactique".