www.sapientia.uji.es | 110

UNIVERSITAT JAUME•I

La geometria i l'estadística en l'aula de primària

Gil Lorenzo Valentín
Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano

La geometria i l'estadística en l'aula de primària

Gil Lorenzo Valentín
Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano

UNIVERSITAT JAUME I

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ

■ Codi d'assignatura: MP1025

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 109 [link de repositori]
Col·lecció Sapientia 110 [link de respositori]
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2015

ISBN: 978-84-16356-32-4

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDEX

Introducció

Presentem en aquest document un material per a la formació inicial i permanent del professorat d'educació primària, on es mostren propostes didàctiques per treballar els continguts referents a geometria i a estadística i probabilitat en aquesta etapa educativa, com a continuació de les publicacions referides a nombres naturals (col·lecció Sapientia, números 89 i 90, en valencià i castellà, respectivament) i a *Nombres enters i racionals, magnituds i mesura* (col·lecció Sapientia, números 96 i 97, també en valencià i castellà, respectivament), les quals és convenient conèixer per a una millor comprensió dels continguts que es desenvolupen en el present text.

Encara que els esmentats continguts estan treballats en publicacions d'altres autors, en aquesta pretenem oferir-los de manera unificada als nostres lectors en un text estructurat al voltant de les capacitats matemàtiques que cal treballar amb l'alumnat d'educació primària, per a completar així tots els blocs de continguts que es desenvolupen en aquesta etapa.

Cadascun dels temes compta amb una introducció que ens permet reflexionar respecte de dues qüestions que considerem importants. Una és l'evolució històrica dels continguts que estudiem: respecte de la geometria, el seu naixement com a resposta a necessitats derivades de situacions reals i el seu desenvolupament al llarg dels anys fins arribar a la matèria abstracta que és en la actualitat; i quant a l'estadística i la probabilitat, el seus orígens a partir de la necessitat de treballar amb moltes dades o quantificar la incertesa, fins convertir-se en una gran branca de les matemàtiques d'avui en dia. L'altra és l'aspecte teòric d'aquests conceptes, que s'exposa per tal de recordar-los i apropar-los al lector.

A continuació, com a part més important del text i com a nucli que justifica aquesta publicació, s'inclou en cada tema un extens apartat referent al tractament didàctic dels diferents continguts per tal de treballar-los en l'aula de primària i aconseguir, d'aquesta manera, el desenvolupament de la competència matemàtica de l'alumnat.

En l'esmentat apartat didàctic es presenten els continguts matemàtics a partir de la realitat i per a ser aplicats en ella. Com a conseqüència i atorgant-li la importància màxima a aquesta qüestió, totes les situacions que s'enuncien acompanyant el contingut didàctic del text formen part d'altres situacions més complexes que es treballen en l'aula, en les quals els conceptes matemàtics són essencials per a la seua interpretació i resolució. De vegades les activitats matemàtiques sorgiran del desenvolupament d'alguns projectes de treball globalitzats, en altres ocasions es plantejaran a partir de les necessitats que generen les altres matèries del currículum. Sols quan es detecten alguns continguts que no hagen aparegut en cap activitat com les esmentades abans, el docent afavorirà de manera intencionada l'aparició de situacions que provoquen les incògnites que els portaran al seu descobriment.

En tots els casos, partirem de les idees prèvies de l'alumnat sobre cadascun dels conceptes a treballar i, en particular, de les seues propostes personals i emergents de resolució de les diferents situacions que s'hi plantegen. Continuarem amb la recerca dels procediments generals de conceptualització geomètrica, de tractament de dades i de modelització de l'atzar, com a forma d'oferir-los les eines matemàtiques que socialment s'utilitzen per resoldre les situacions en les quals intervenen. Atenent les recomanacions del Parlament Europeu i del Consell d'Europa sobre les competències clau per a l'aprenentatge permanent, entenem que la competència matemàtica sols es concreta i cobra sentit en la mesura que els elements i raonaments matemàtics que s'estudien són utilitzats per enfrontar-se a aquelles situacions quotidianes que els necessiten. Per això, el seu desenvolupament en l'escola s'aconseguirà partint d'una àmplia varietat d'activitats reals, derivades d'altres camps del coneixement, de les situacions habituals que es donen en l'aula i de les pròpies experiències i vivències de l'alumnat. Es tracta, en definitiva, d'aconseguir que els xiquets i les xiquetes sàpiguen aplicar les destreses i actituds que els permeten raonar matemàticament, comprendre una argumentació matemàtica i expressar-se i comunicar-se en el llenguatge matemàtic per a donar una millor resposta a les situacions de la vida de diferent nivell de complexitat.

L'objectiu del material és proporcionar una eina per als professionals de la docència i per l'estudiantat del Grau en Mestre, que els ajude a reflexionar sobre els fenòmens educatius que ocorren a l'aula escolar i els permeta enfrontar-se a ells des d'un plantejament que considera l'ensenyament-aprenentatge de les Matemàtiques com una tasca interdisciplinària i globalitzadora, que parteix d'una concepció sociocultural de l'educació en general i de l'educació matemàtica en particular.

Respecte a l'estudiantat de Grau en Mestre d'Educació Primària de la Universitat Jaume I, aquest document representa un material complementari per les classes presencials, en les quals s'aprofundeix en el text relacionant la fonamentació matemàtica dels conceptes i la seua didàctica, mitjançant la realització de diferents activitats que es desenvolupen al llarg del curs acadèmic.

Pressuposem que, en les aules de primària on es treballen els continguts d'aquest document, es troben els materials didàctics estructurats que descriurem més endavant o altres semblants ideats i fabricats pels docents i/o l'alumnat, que hauran de compartir en la seua essència allò que és fonamental per a la construcció dels continguts matemàtics que es desenvolupen en aquesta publicació. Els esmentats materials constitueixen un suport imprescindible per al treball en l'aula referent als conceptes estudiats.

El present document no esgota les activitats que els mestres i les mestres han de realitzar a les aules. La gran varietat de possibles dispositius didàctics que poden oferir als xiquets i a les xiquetes és impossible de reflectir-la en qualsevol publicació. El nostre interès és posar l'atenció en el que han de treballar per fonamentar matemàticament els procediments emprats per l'alumnat i donar indicacions de com han de fer-ho. Mai esgotarem la creativitat didàctica que un docent ha de tenir en la seua tasca diària.

TEMA 1

Geometria

En aquest tema es treballa la relació que l'alumnat estableix amb l'espai i el coneixement i caracterització de tots els objectes que en ell hi trobem. Comença el tema amb una referència històrica sobre la geometria, seguida d'un recull teòric sobre els conceptes corresponents que necessitarà el docent de primària. Finalitza amb un extens tractament didàctic dels continguts geomètrics per al seu desenvolupament en aquesta etapa educativa.

1. Introducció

1.1. Històrica

Del grec *gea*, terra, i *metron*, mesura, la geometria, des dels seus orígens, va estar l'encarregada de resoldre problemes de la realitat. Un tipus de problemes es centrava en la mesura i reconstrucció de terrenys i camps de cultiu. Un altre es referia a la necessitat de fer construccions arquitectònicament estables, el que es podia aconseguir dotant-los d'una certa estructura geomètrica. La cerca de solució a aquests problemes proporcionava a la humanitat eines matemàtiques per controlar l'entorn i servir-se'n. Els grecs combinaren aquesta utilitat de la geometria purament pràctica, amb altres aspectes de caire teòric (Argüelles, 1989) i artístic (frisos, mosaics, sanefes, etc.).

Tot i que filòsofs com Aristòtil (segle IV aC) sostenen que la geometria va néixer a Egipte, gràfics i dibuixos del Neolític ja mostren interès per les distribucions espacials. Concretament en aquest país trobem el *Papir Rhind*, que es va publicar l'any 1700 aC. Conté una col·lecció de 84 problemes de caràcter aplicat, com ara càlcul d'àrees de terra, capacitat de magatzems, etc. En el problema 50 s'indica com calcular l'àrea d'un cercle amb una aproximació molt precisa de π; en el 51, l'àrea d'un triangle i, en el 52, l'àrea d'un trapezi isòsceles. En el problema 56 es demana calcular el volum d'una piràmide regular de base quadrangular, coneguts el costat de la base i l'altura. En aquestes i altres troballes egípcies s'observen patrons comuns per resoldre alguns tipus de problemes, encara que no hi ha evidència de cap document que sistematitze i justifique els processos emprats.

La civilització mesopotàmica i en concret els babilonis (molt avançats en matemàtiques), disposaven de molts coneixements geomètrics que els permetien resoldre problemes pràctics, com per exemple càlculs d'àrees de diferents superfícies. De la mateixa manera que en el cas dels egipcis, tampoc no es coneix cap escrit que generalitze els diferents procediments de resolució d'aquests problemes.

Els matemàtics grecs van recollir el llegat dels egipcis i dels mesopotàmics i progressaren fins a elaborar un cos de coneixements que sistematitzava els anteriors, justificant i demostrant els diferents processos i generalitzant els conceptes geomètrics necessaris per desenvolupar-los. Foren els seus màxims exponents Tales de Milet (segle VI aC) i Pitàgores (segles VI-V aC), amb els seus coneguts resultats pel que fa a l'estudi dels triangles.

Plató (segle IV aC), deixeble de Sòcrates (segle V aC) i mestre d'Aristòtil, va optar per la utilització de la matemàtica pura en la geometria. Va ser el fundador del que es coneix com l'Escola Platònica, i a aquesta li devem:

- La classificació dels políedres regulars (políedres convexos determinats per polígons regulars iguals, en els vèrtexs dels quals s'uneix la mateixa quantitat de cares, és a dir, vèrtexs uniformes). El mot políedre prové del grec *polýhedros*; de *polýs*, molt, i *hédra*, cara. Atesa la importància que l'Escola Platònica els hi va donar, avui en dia es coneixen com a sòlids platònics. Aquests són el tetràedre, el cub o hexàedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre, tots aquests regulars. Plató associa a aquests sòlids els elements foc, terra, aire, el material amb el qual es van formar les constel·lacions i el cel (Univers), i l'aigua, respectivament.
- La determinació de successives aproximacions a l'àrea del cercle mitjançant el mètode exhaustiu o per esgotament que, posteriorment, consolidarà Arquímedes.

Euclides va recopilar la matemàtica que es coneixia fins aquell moment en els tretze llibres que componen *Els elements*, al voltant de l'any 300 aC. És, possiblement, l'obra matemàtica més llegida (per ser la més editada) al llarg de la història. En els volums dedicats a la geometria va descriure, entre d'altres continguts, com construir figures amb regla i compàs, i va enunciar que només hi ha cinc políedres regulars.

A finals del segle XVI, Kepler imaginà una relació entre els cinc políedres regulars i les òrbites dels planetes del sistema solar aleshores coneguts (Mercuri, Venus, Mart, Júpiter i Saturn). Segons ell, cada planeta es movia en una esfera separada de la contigua per un sòlid platònic.

D'altra banda, els sòlids arquimedians, també coneguts com semiregulars (políedres convexos formats per polígons regulars de dos o més tipus amb vèrtexs uniformes) deuen el nom a Arquímedes que els va descobrir i estudiar al segle III aC. Tot i que el seu treball es va perdre, en tenim constància per un altre de Pappus d'Alexandria. Serà Kepler al segles XVI i XVII qui va demostrar que només poden haver-hi tretze políedres amb aquestes característiques (Dorce, 2013).

La geometria exposada és només una part de l'anomenada descriptiva, que s'ha desenvolupat al llarg dels segles mencionats. A partir del segle XVI comença a introduir-se la situació de les figures en el pla i l'espai mitjançant coordenades. Aquest fet és molt important, perquè origina una geometria més analítica i comença a abandonar-se la representació gràfica com a únic suport dels càlculs. Tot aquest coneixement de la matemàtica més geomètrica s'articula a partir de cinc axiomes exposats per Euclides, que cal considerar com a veritats absolutes. Mai no s'havien qüestionat, però tampoc demostrat. Un en concret, el cinquè, o axioma del paral·lelisme, diu que «per un punt exterior a una recta, es pot traçar només una paral·lela a ella». Fins al segle XIX, no es va posar en dubte aquest postulat, i seran Gauss (1777-1855), Bolyai (1775-1856) i Lobachewski (1792-1856), els quals, de manera separada, no només no l'asseveren, sinó que encaminen els seus estudis suposant la seua falsedat, i creen, així, la geometria hiperbòlica.

Amb els treballs de Riemann (1826-1866) sobre la geometria esfèrica i la teoria de la relativitat d'Einstein (1879-1955) incloent-hi el temps en la concepció geomètrica de l'Univers, es produeix l'explosió de les geometries no euclidianes.

L'existència d'aquestes geometries no euclidianes va provocar l'interrogant al voltant de què és la geometria. En 1872, el matemàtic alemany Felix Klein (1849-1925) va respondre a aquest interrogant amb la publicació del seu *Programa d'Erlangen,* on classifica les diferents geometries a partir de grups de transformacions geomètriques (Stewart, 2008: Dorce, 2014).

Actualment, aquesta part de la matemàtica investiga nous coneixements en els camps de la topologia i la geometria algebraica.

1.2. Al tema

L'objectiu del tema és, d'una banda, donar a conèixer tots els conceptes, elements notables, propietats i característiques de les figures geomètriques corresponents a educació primària i, de l'altra, com s'ha de fer la transposició didàctica d'aquesta part de la geometria en l'aula escolar.

2. Els primers passos per la geometria

2.1. Preliminars

L'evolució dels primers conceptes geomètrics, basada en el procés d'abstracció que la humanitat fa de les formes de l'entorn i de la seua idealització, ha produït la immensitat de ramificacions geomètriques que hi ha en l'actualitat. Són moltes les persones que han investigat i investiguen en la branca de les matemàtiques dedicada a la geometria, i que fan gran inversió d'hores en línies d'investigació de tal potencial d'abstracció, que ni tan sols podríem imaginar.

Però, l'essència més primitiva, intuïtiva o descriptiva d'aquesta primera geometria, la que s'encarrega del coneixement de l'espai (considerat com el conjunt de tots els punts existents) i de les figures geomètriques, és la que ens interessa per a l'aula de primària. I la raó és ben senzilla, cal dotar l'alumnat d'eines per a saber-se orientar al seu voltant (que, a més, està en contínua transformació), i per a ser capaç de descriure i classificar allò que l'envolta.

Si s'assumeix, com a punt de partida, la definició de figura geomètrica, com *qualsevol conjunt de punts en l'espai*, sembla lògic pensar que l'evolució natural dels conceptes matemàtics hauria de ser estudiar els punts, després les línies, més tard les superfícies i, per a finalitzar, els cossos geomètrics.

Aquesta concepció s'enfronta amb la percepció que hi ha en els xiquets i les xiquetes d'educació infantil i primària de la seua realitat i l'aproximació que poden fer a aquesta. Si s'atén a qüestions de psicomotricitat, de desenvolupament cognitiu i de coneixement general del medi on viuen, l'aproximació didàctica hauria d'adreçar-se primer als cossos geomètrics (poden agafar-los, manipular-los...), després a les figures geomètriques planes que els limiten, com els llindars d'aquestes figures i cossos, més endavant a les línies (costats o arestes) i, per a finalitzar, com a intersecció d'aquestes línies, als punts. En l'àmbit de la matemàtica formal, cal fer el recorregut contrari per a poder definir un objecte geomètric de més envergadura a partir de l'anterior.

Però l'estudi en espiral de la geometria en infantil i primària (tal com ocorre en altres blocs de continguts de matemàtiques), implica fer aproximacions a diferents tipus de conceptes geomètrics en qualsevol moment evolutiu de l'alumnat. I així, es podrà parlar de quadrilàters, per exemple, en diferents cursos i amb diferents intensitats de dificultat, i permetre una integració d'aquestes figures molt més progressiva que no pas l'estudi exhaustiu i absolut del concepte en un sol moment determinat.

En tot el treball que s'ha de desenvolupar en l'aula, cal tenir en compte la impossibilitat de materialitzar les figures geomètriques de menys de tres dimensions. Les rectes o triangles que es poden dibuixar o observar en un objecte, només són representacions perceptibles dels conceptes matemàtics abstractes. Perquè una recta, com a concepte, és un ens infinit i il·limitat que no té grossor i, per tant, no es pot construir físicament. Per la segona raó (la inexistència de grossària) s'arriba també a la impossibilitat de poder construir materialment un triangle, un cercle i, en general, qualsevol figura plana.

2.2. Geometries

Els canvis que afecten l'entorn dels xiquets i les xiquetes vénen donats per les modificacions de les figures geomètriques que s'hi troben. El que fa que unes figures geomètriques es transformen en unes altres són les *transformacions geomètriques*. En la realitat, una transformació és una deformació, una projecció, un desplaçament, etc. Matemàticament, aquestes transformacions les podem abstraure en aplicacions bijectives de l'espai en si mateix que agafen una figura geomètrica i la transformen en una altra. Però, quines propietats de la figura original es conserven en la figura transformada o homòloga? Dit d'una altra manera, quines seran les característiques invariables de la figura geomètrica original, per aquestes transformacions?

D'acord amb el *Programa d'Erlangen,* publicat per Felix Klein en 1872, l'estudi d'aquestes propietats invariables el fa la geometria i, com que hi ha diversos tipus de transformacions, podem parlar de diferents geometries.

Si estudiem més detingudament les transformacions que hi poden aparèixer, tenim:

1. *Transformacions topològiques*. Si es pot parlar d'una escala d'intensitat en les transformacions a les quals poden estar sotmeses les figures geomètriques, les que ocupen uns dels llocs més alts en aquella escala serien les transformacions topològiques, que deformen, estiren o contrauen, i provoquen grans canvis en la figura original però sense produir-li trencaments, per la qual cosa s'anomenen també bicontínues. Exemples d'aquestes transformacions serien les que es poden apreciar en la figura 1.

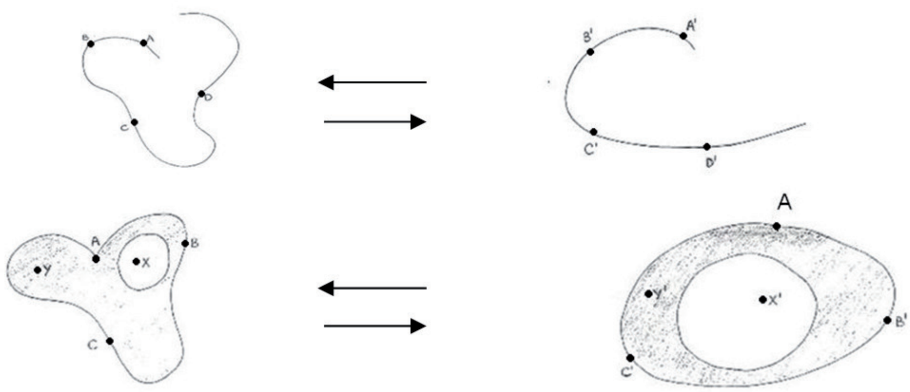


Figura 1. Exemples de transformacions topològiques

Com s'hi pot observar, aquestes transformacions no conserven longituds, ni angles, ni mesures de cap tipus, però sí que hi ha unes altres propietats que es conserven. Per exemple, el caràcter d'obert o tancat d'una figura; el seu interior i el seu exterior; l'ordre dels seus punts.

2. *Projeccions*. Si ara es compara una figura plana amb l'ombra que produeix sobre un pla (per obtenir sols una aproximació intuïtiva a estes transformacions), observarem que, segons on estiga el focus de llum (prop o en l'infinit) i com estiga el pla (paral·lel o no al que ocupa la figura) on es projecta aquesta ombra, hi trobarem diferents tipus de transformacions, anomenades *projeccions o transformacions projectives*.

   Totes elles conserven les línies rectes i corbes i també la convexitat, com es pot veure a la figura 2.

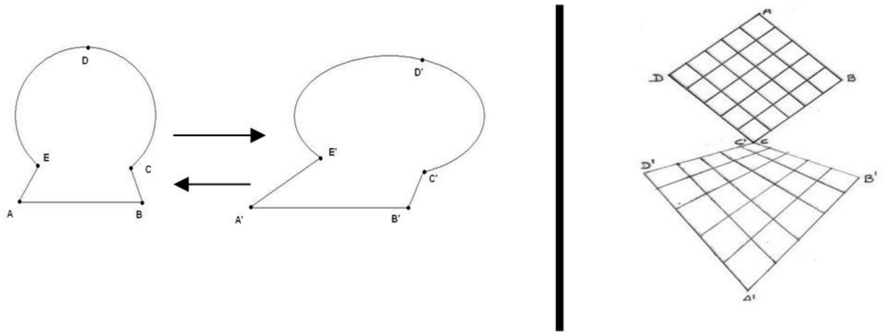


Figura 2. Exemples de projeccions

Algunes projeccions conserven a més el paral·lelisme i la proporcionalitat i s'anomenen *transformacions afins o afinitats* (figura 3).

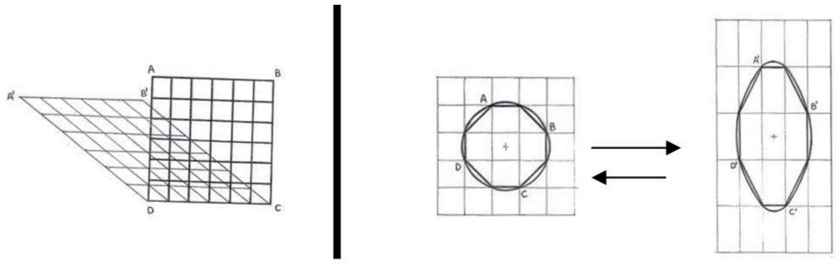


Figura 3. Exemples de transformacions afins

Dins de les afinitats, existeixen projeccions que augmenten o disminueixen la mida, però no canvien la forma. Són les anomenades *semblances* i tenim un exemple en el gràfic de la figura 4.

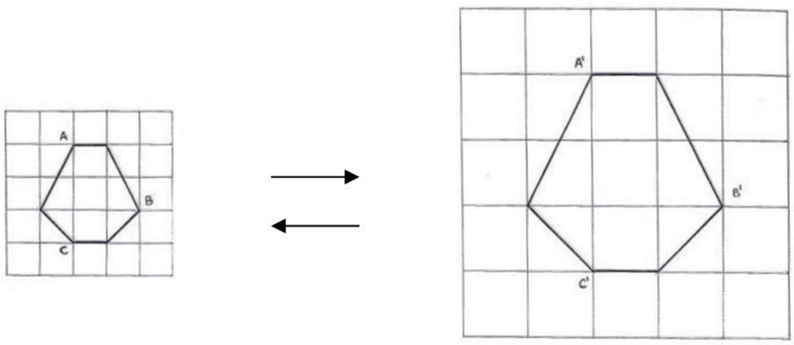


Figura 4. Exemples de semblances

3. *Moviments rígids*. Si comparem dues figures geomètriques iguals, una al costat de l'altra, podem considerar que s'ha produït un desplaçament. En tenim dos exemples en els gràfics de la figura 5.

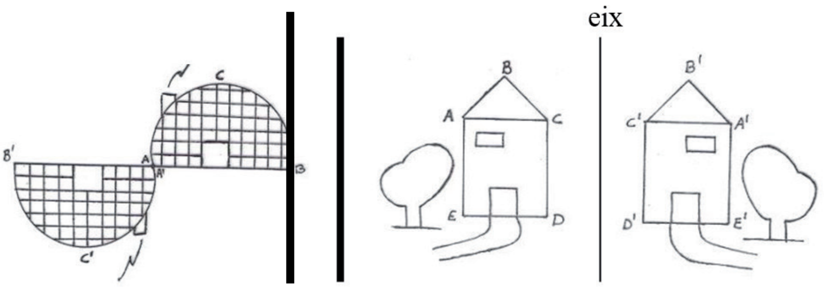


Figura 5. Exemples d'un gir i una simetria axial en figures planes

Observem que totes les dimensions d'una figura i de la transformada d'aquesta són iguals. En cada cas podem donar una explicació a l'obtenció de la segona figura, com el resultat de transformar la primera per un moviment rígid en l'espai, a conseqüència del qual hi ha un desplaçament, però no un canvi de dimensions, és per això que aquestes transformacions s'anomenen també *isometries*. Dins dels moviments rígids podem trobar tres tipus de transformacions diferents: translacions, girs i simetries axials (els gràfics anteriors corresponen als dos darrers).

Si agrupem les diferents propietats de les figures que es conserven en aplicar-hi les transformacions, es generen els següents camps d'estudi en la geometria:

Topologia

És la part de la geometria que estudia les propietats de les figures que es conserven quan se'ls hi aplica una transformació topològica, és a dir, l'ordre dels punts, l'interior i l'exterior de les figures, si són tancades o obertes, la frontera i la interesecció.

Aleshores, des del punt de vista topològic, un cercle és equivalent o homòleg a un quadrat, un triangle o un pentàgon..., per exemple. En tres dimensions, una esfera seria topològicament homòloga a un tetràedre o a un cub.

Geometria de les projeccions

Es pot definir com la geometria que s'encarrega d'estudiar les propietats de les figures geomètriques que es mantenen invariants quan se'ls hi aplica una projecció, és a dir, una transformació projectiva, una transformació afí o una semblança:

- Quan s'aplica una transformació projectiva a una figura geomètrica, les propietats específiques que es mantenen invariants són el caràcter de línia recta o corba i la convexitat de les figures.
- Quan s'aplica una transformació afí a una figura geomètrica, les propietats específiques que es mantenen invariants són el paral·lelisme, el punt mig i la proporcionalitat entre els segments d'una mateixa recta.

- Quan la transformació que s'aplica a una figura geomètrica és una semblança, les propietats específiques que es conserven són els angles i la proporcionalitat, i per tant, la forma de la figura.

El treball de l'estudi de les propietats invariants abans esmentades es pot considerar de manera global dins de l'anomenada geometria de les projeccions o, de manera individual, donant origen a tres camps geomètrics anomenats geometria projectiva, geometria afí i geometria de la semblança, respectivament.

Geometria euclidiana

Aquesta branca de la geometria, també anomenada mètrica, s'encarrega d'estudiar les propietats de les figures geomètriques que es mantenen invariants quan se'ls hi aplica un moviment rígid (gir, translació o simetria axial). Les figures homòlogues mantenen invariants les propietats de mesura de longituds i, com a conseqüència, de superfícies i volums.

2.3. Referents psicoevolutius

Una vegada s'ha presentat, a grans trets, quines són les matisacions de les diferents geometries, caldrà recórrer a elles cada volta que es presente una connexió amb el treball que es farà a les aules escolars i que en el cas d'educació primària es desenvolupa al punt 4 d'aquest tema.

Tampoc podem oblidar, el moment evolutiu de l'alumnat que hi tindrem al davant, i com aquest afecta a l'adquisició dels conceptes geomètrics. Jean Piaget (1896-1980), amb els seus quatre estadis del desenvolupament cognitiu dels xiquets i xiquetes de zero a quinze anys, estableix una connexió de la geometria amb la concepció espacial de l'alumnat.

En l'escola començarem estudiant els conceptes de la topologia per construir l'espai topològic, passant després als de les geometries projectiva i mètrica amb la finalitat de construir els espais projectiu i euclidià, respectivament.

Abans de desenvolupar els continguts i les capacitats geomètriques en l'aula de primària, es fa necessari fonamentar matemàticament els conceptes corresponents. Per donar resposta a aquesta necessitat es presenta a continuació una introducció teòrica de tot allò que el docent de primària pot requerir per portar a terme la seua tasca.

3. Fonamentació teòrica

3.1. Línies en el pla

Qualsevol línia oberta que es puga traçar sobre una superfície és una representació d'una transformada d'una recta o d'algun dels seus segments. De la mateixa manera, qualsevol línia tancada serà una representació d'una transformada d'una circumferència.

L'expressió analítica d'una recta o una circumferència (amb coordenades, dins d'un sistema de referència) sorgeix de la necessitat de controlar matemàticament aquestes manifestacions de la realitat on, de manera natural, apareixen.

Serà, doncs, útil conèixer mínimament aquestes consideracions de caràcter més formal, per a després connectar-les amb el que s'ha d'explicar en l'aula de primària.

3.1.1. Antecedents: pla, punts i vectors

Es considera el pla, com la porció de l'espai determinada per dues rectes diferents paral·leles o secants, on situarem dos eixos de coordenades perpendiculars (eix X i eix Y, o d'abscisses i d'ordenades, respectivament), i en el qual podem representar totes les figures geomètriques planes, entre d'altres: punt, vector, recta, circumferència..., que són les que estudiarem. Es considera de dimensió dos, precisament per ser dos els eixos necessaris per a determinar-lo, i s'anomenen habitualment amb lletres gregues (π, α, β...). En el pla trobem un punt important en el qual es tallen els dos eixos, que s'anomena origen de coordenades i que es fa correspondre amb la posició del 0 en aquests. A partir d'aquest punt i a intervals de la mateixa longitud se situen cap a la dreta i cap a dalt els nombres enters positius i en els altres sentits els negatius.

Qualsevol punt que es vulga situar en el pla ha de contenir informació ordenada respecte d'aquests dos eixos, primer de l'eix X i després de l'eix Y (figura 6).

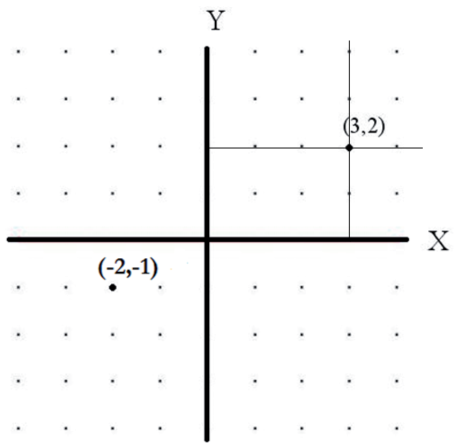


Figura 6. Representació dels eixos de coordenades amb la situació de dos punts

El punt és la mínima figura geomètrica. Analíticament es representa per un parell de nombres separats per una coma i a dintre d'un parèntesi, anomenats coordenades del punt. Per exemple, l'origen de coordenades es representaria per (0,0). El primer nombre indica el valor corresponent a l'eix X, i el segon, a l'eix Y. La representació gràfica d'aquest parell de nombres és una marca petita que se situarà en la intersecció de dues rectes imaginàries perpendiculars entre si, i paral·leles cadascuna d'elles a un dels eixos, que tallaran l'altre pels valors que hi apareixen al parell de coordenades (per exemple, el (3,2)). El punt no té grandària, ni forma i, per tant, no es pot deformar per cap transformació geomètrica, sí es pot desplaçar, però només això. Usualment s'anomena amb una lletra majúscula (***A***, ***B***, ***C***...).

Un vector fix en el pla, $\overrightarrow{AB}$, és un segment orientat que té l'origen en el punt ***A*** i l'extrem en el punt ***B***. Si posem coordenades als punts, $A=(a,a')\ i\ B=(b,b')$, les del vector seran, $\overrightarrow{AB}=(b-a,b'-a')$.

- ***Elements d'un vector***:
  - *Direcció:* Es defineix com la recta sobre la qual es troba el vector. Totes les rectes paral·leles a aquesta tenen la mateixa direcció.
  - *Sentit:* És el del recorregut de la recta quan ens traslladem de ***A*** a ***B***. És evident que cada direcció admet dos sentits, el de ***A*** a ***B*** i el de ***B*** a ***A***. Per tant, la manera de determinar-los serà diferent, així $\overrightarrow{AB}=(b-a,b'-a')$ i anàlogament $\overrightarrow{BA}=(a-b,a'-b')$.
  - *Mòdul*: És la distància entre ***A*** i ***B***, és a dir, la longitud del segment $\overline{AB}$. Es representa per $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ i es calcula a partir del teorema de Pitàgores segons: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b-a)^2+(b'-a')^2}$. Direm que un vector és unitari si el seu mòdul és **1**.

- ***Equipol·lència de vectors***: Dos vectors fixos, no nuls, són *equipol·lents* si tenen els mateixos mòdul, direcció i sentit. Gràficament, dos vectors són equipol·lents si quan unim els seus orígens i extrems s'obté un paral·lelogram (figura 7).

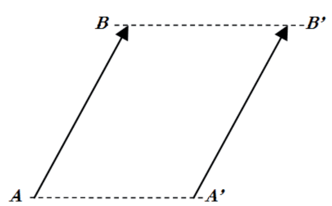


Figura 7. Representació de dos vectors equipol·lents

Aquesta relació entre vectors és una relació binària d'equivalència (vegeu annex). Cadascuna de les classes d'equivalència determinades per ella rep el nom de vector lliure (figura 8).

Quan volem fer ús d'un vector podem escollir, en comptes d'aquest, qualssevol dels que li són equipol·lents. Aquesta és la idea intuïtiva del concepte de vector lliure.

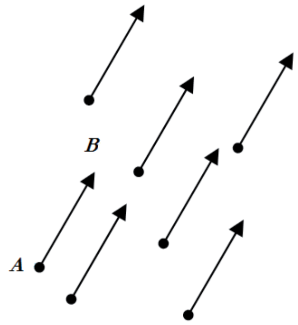


Figura 8. Representació d'alguns elements de la classe d'equivalència d'un vector lliure

Representarem els vectors lliures mitjançant un dels elements de la seua classe, que denotarem per lletres minúscules amb una fletxa horitzontal a sobre, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\ldots$ o bé mitjançant l'origen i l'extrem del vector elegit, $\overrightarrow{AB}$. En qualsevol dels casos, es pot acompanyar aquesta representació amb les coordenades del vector, que són les del vector equipol·lent que té l'origen en el punt (0,0).

3.1.2. La recta

Una recta en el pla queda determinada vectorialment per un punt **(a,b)** i un vector **(v,w)** que marcarà la direcció de la recta i que s'anomena vector director. Usualment les rectes s'anomenen amb una lletra minúscula (r, s, t...), com s'observa a la figura 9. La mateixa recta també quedarà determinada si agafem com a vector director el de sentit contrari a l'inicial, **(-v,-w)**. D'aquesta manera s'observa que en la direcció que determina una recta trobem també dos sentits oposats.

Qualsevol punt **(x,y)** de la recta s'obtindrà traslladant (vegeu 3.4.1.1) el punt fix **(a,b)**, segons un vector múltiple de **(v,w)**.

Així:

$$\mathbf{(x,y) = (a,b) + k \cdot (v,w)},\ k \in R$$

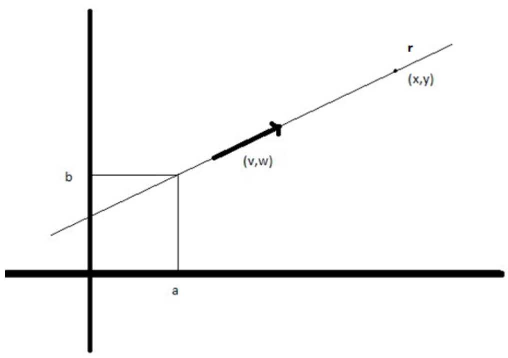


Figura 9. Representació de la determinació vectorial d'una recta

Nota: L'expressió anterior s'anomena equació vectorial de la recta, i forma part del llistat que rep el nom «equacions de la recta». En particular, el nom d'aquesta expressió ve donat pel marcat caràcter vectorial (de parell de valors, bàsicament) que té la pròpia configuració de l'expressió.

Les variacions purament analítiques que es fan d'aquesta expressió reben noms diferents que, d'alguna manera, recullen la característica principal per la qual tradicionalment s'ha usat o s'identifica aquesta expressió en concret.

Així, si a partir de l'expressió anterior se separen les coordenades, apareixen dues equacions, anomenades equacions paramètriques de la recta:

$$\begin{cases} x = a + k \cdot v \\ y = b + k \cdot w, \quad k \in R \end{cases}$$

El pas següent és intentar eliminar el paràmetre, per la qual cosa s'ha d'aïllar de les dues expressions i s'han d'igualar els resultats, s'obté així l'equació contínua de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-a}{v} = k \\ \dfrac{y-b}{w} = k \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-a}{v} = \frac{y-b}{w}$$

Per l'ús estès que en té, hi ha una expressió que s'obté quan es manipula mínimament l'expressió anterior, i que s'anomena equació punt pendent de la recta:

$$y - b = \frac{w}{v} \cdot (x - a)$$

També hi ha una expressió molt utilitzada que s'obté bé d'aquesta, bé de l'equació contínua, i que se'n diu equació explícita de la recta. Cal fer notar que fins aquesta, sempre estan molt localitzats els valors de les coordenades dels punts o els vectors. Només si sabem com és l'expressió teòrica, s'identifiquen. Una vegada s'ha superat la darrera equació i s'arriba a l'explícita, aquesta intuïció és perd i cal fer alguna mena de càlculs per a reconstruir els valors del vector o el punt. Així, l'expressió que s'obté té la forma de $y = m \cdot x + n$, però realment, el que s'ha calculat és:

$y = \dfrac{w}{v} \cdot x - \dfrac{w}{v} \cdot a + b$, on $m = \dfrac{w}{v}$ rep el nom de pendent de la recta i

$n = -\dfrac{w}{v} \cdot a + b$, és el valor de la ordenada en l'origen.

Únicament ens queda l'equació general o implícita de la recta, que només és una reordenació de l'anterior. Usualment s'escriu com $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, però realment l'expressió és: $\dfrac{w}{v} \cdot x - y - \dfrac{w}{v} \cdot a + b = 0$.

Qualsevol punt d'una recta la divideix en dues semirectes que tenen aquest punt com a origen i que s'anomenen oposades.

Totes les semirectes que tenen origen en un punt donat d'un pla (feix de semirectes) el recobreixen i permeten orientar-lo en dos sentits diferents. Si a partir d'una semirecta concreta recorrem el feix seguint el sentit de les agulles del rellotge, s'haurà orientat el pla en un sentit anomenat negatiu. En cas contrari el sentit serà positiu.

Qualsevol parell de punts d'una recta, $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, determina un segment $\overrightarrow{AB}$ format per tots els punts de la recta que es troben situats entre $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, i per aquests dos punts (extrems del segment) si és tancat. Si el segment no inclou cap dels extrems és obert i si no inclou un d'aquests és semiobert. En general, quan es parla de segments ens referirem a segments tancats.

La longitud d'un segment $\overrightarrow{AB}$ es calcula mesurant la distància entre els seus extrems i es representa per $\left|\overline{AB}\right| = \mathrm{d}(A,B)$, tal com s'ha especificat en el cas dels vectors en el punt 3.1.1.

La recta perpendicular a un segment pel seu punt mig s'anomena mediatriu.

Dos segments qualssevol poden tenir o no punts en comú. Direm que dos segments són concatenats quan tenen un extrem comú i són consecutius quan tenen un extrem comú i estan alineats.

Si considerem dues línies rectes al pla, les posicions que hi poden tenir són:

1. *Rectes secants:* tenen sols un punt en comú. Analíticament $r \cap s = \{P\}$ (figura 10).

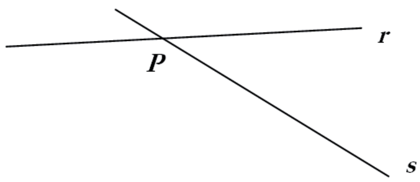


Figura 10. Representació de rectes secants en el pla

2. *Rectes paral·leles no coincidents:* no tenen cap punt en comú. Analíticament $r \cap s = \varphi$ (figura 11).

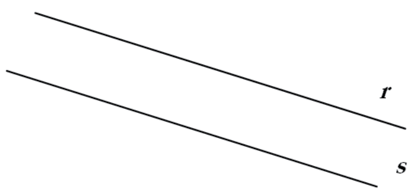


Figura 11. Representació de rectes paral·leles no coincidents

3. *Rectes paral·leles coincidents:* tenen tots els punts comuns. Analíticament $r \cap s = r = s$ (figura 12).

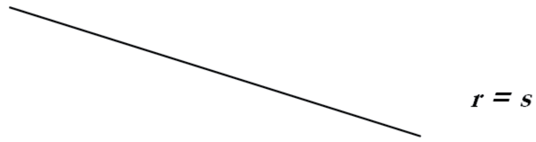


Figura 12. Representació de rectes paral·leles coincidents

Nota: Si considerem dues línies rectes en l'espai, caldria afegir un nou cas a aquests tres: *Rectes que es creuen en l'espai,* tampoc tenen punts en comú i no pertanyen al mateix pla. Analíticament $r \cap s = \Phi$ (figura 13).

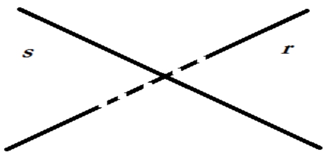


Figura 13. Representació de rectes que es creuen en l'espai

3.1.3. La circumferència

Definim circumferència com el lloc geomètric de tots els punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat centre. Aquesta distància fixa s'anomena radi. Cal notar que amb la paraula radi, ens referim també a cadascun dels segments que uneixen el centre amb un punt qualsevol de la circumferència.

La circumferència més senzilla possible seria aquella que està centrada al **(0,0)** (figura 14). Partirem d'aquesta i si anomenem **(x,y)** a qualsevol punt de la circumferència i ***r*** al radi, aleshores la definició anterior es tradueix a llenguatge formal com $d\left(\left(x,y\right),\left(0,0\right)\right) = r$.

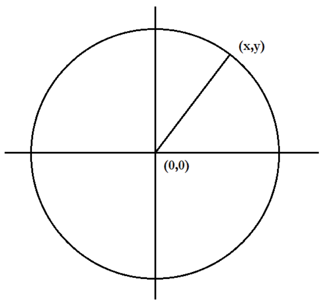


Figura 14. Representació d'una circumferència centrada en (0,0)

Com que la distància entre dos punts sempre és el mòdul del vector que els uneix, calculem el vector entre els punts **(x,y)** i **(0,0)**. Al restar les coordenades, el vector obtingut, seria **(x,y)**. Calculem el seu mòdul $\sqrt{x^2 + y^2}$ i substituïm aquesta expressió en l'anterior:

$$\sqrt{x^2+y^2}=r \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

Si el centre de la circumferència és qualsevol punt, $C(c_1,c_2)$ i el radi ***r*** (figura 15), el procediment seria igual, i l'equació a la qual s'arribaria seria:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$

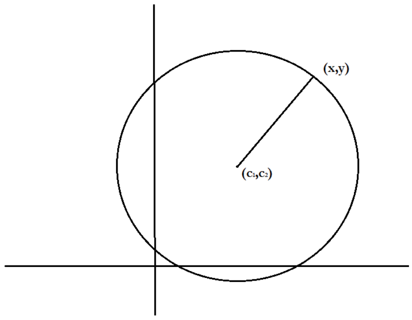


Figura 15. Representació d'una circumferència centrada en (c_1,c_2)

Per a ampliar el coneixement de la circumferència, definim a continuació alguns dels seus elements bàsics:

- *Corda:* segment que uneix dos punts qualssevol de la circumferència.
- *Diàmetre:* corda que passa pel centre de la circumferència.
- *Arc:* tram o porció de la circumferència comprés entre dos punts d'aquesta. Quan els punts són els extrems d'un diàmetre, l'arc s'anomena semicircumferència.

Quan calga calcular la longitud d'una circumferència de radi ***r***, utilitzarem la expressió $L=2\cdot\pi\cdot r$.

Si considerem ara dues circumferències distintes en el pla, les posicions relatives que hi poden tenir són:

1. Quan no tenen cap punt en comú (figura 16). Aquestes se situaran de dos possibles maneres, o bé exteriors o bé interiors. Un cas particular de les últimes serien les circumferències que comparteixen el mateix centre, anomenades concèntriques.
2. Quan tenen punts en comú (figura 16). Trobem ara dues possibilitats, un sol punt en comú o dos punts de contacte. En el primer cas poden ser tangents interiors o exteriors i, en el segon, s'anomenen secants.

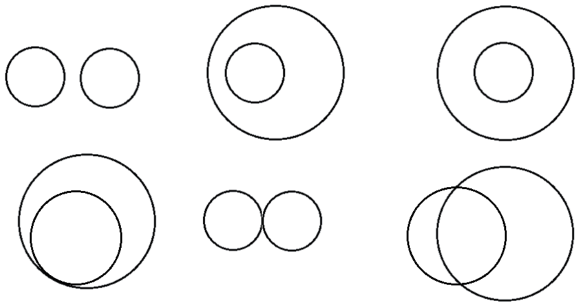


Figura 16. Representació de circumferències exteriors (dalt, esquerra), interiors (dalt, centre), concèntriques (dalt, dreta), tangents interiors (baix, esquerra), tangents exteriors (baix, centre) i secants (baix, dreta)

Si es considera una circumferència i una recta, les posicions relatives que poden tenir en el pla són les següents (figura 17):

a) *Recta tangent:* la recta i la circumferència sols tenen un punt en comú.
b) *Recta secant:* la recta i la circumferència tenen dos punts en comú.
c) *Recta exterior:* la recta i la circumferència no tenen punts en comú.

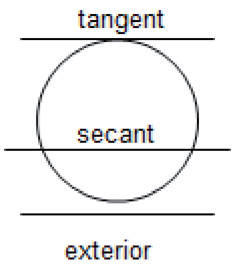


Figura 17. Representació de les posicions relatives d'una circumferència i una recta en el pla

De tots els tipus de línies que podem trobar en el pla, ens interessen particularment les obertes i les tancades simples (aquelles que no tenen cap punt per on la línia passa dues vegades). En el cas de les obertes, els principi i final d'aquestes són dos punts diferenciats, mentre que en les tancades, són el mateix punt. En general, obtindrem línies obertes simples a l'aplicar una transformació topològica a una recta, una semirecta o un segment i línies tancades simples a l'aplicar-la a una circumferència.

3.2. Superfícies en el pla

Una superfície plana és una figura geomètrica que resulta de considerar una part del pla determinada per línies d'aquest. En particular, qualsevol recta d'un pla el divideix en dues regions anomenades semiplans que inclouen la recta.

Una superfície plana és convexa (figura 18) quan conté tots els segments que uneixen qualsevol parell de punts d'aquesta. I còncava (figura 19) quan algun d'aquests segments no estiga contingut en la superfície.

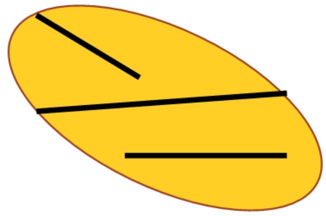


Figura 18. Representació d'una superfície plana convexa

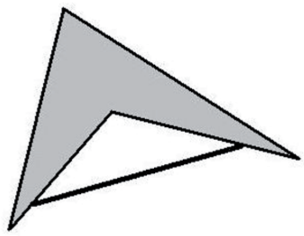


Figura 19. Representació d'una superfície plana còncava

3.2.1. Angles

Les primeres superfícies planes que s'han d'estudiar són les anomenades angles.

Quan dues rectes són secants, defineixen quatre regions en el pla. S'anomena angle a cadascuna d'aquestes regions, incloent-hi les semirectes d'origen comú que les defineixen. A aquest origen se l'anomena vèrtex de l'angle i les semirectes són els seus costats (figura 20).

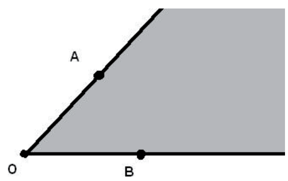


Figura 20. Representació d'una regió angular

Simbolitzem l'angle de dues maneres diferents: mitjançant només el vèrtex, $\hat{O}$, o bé amb una terna de punts composada per un punt de cada costat de l'angle i el seu vèrtex entre aquests, $A\hat{O}B$.

Quan les quatre regions són iguals, els angles s'anomenen rectes, i la seua amplitud angular és de 90º. Quan les semirectes que determinen l'angle són oposades, aquest s'anomena angle pla. La seua amplitud és igual a dos angles rectes, és a dir, 180º.

Els angles que tenen una amplitud menor que el recte s'anomenen aguts.

Els angles la amplitud dels quals està compresa entre un angle recte i un angle pla, s'anomenen obtusos.

Quan les dues semirectes que determinen l'angle són coincidents, l'angle que es forma s'anomena complet. La seua amplitud és igual a quatre angles rectes, és a dir, 360º.

Aquests cinc tipus d'angles són convexos. Seran còncaus la resta d'angles, és a dir, els que mesuren més de 180º i menys de 360º.

Dos angles s'anomenaran complementaris quan la seua suma de les amplituds és igual a 90º; seran suplementaris quan sumen 180º i conjugats quan sumen 360º.

En qualsevol angle, s'anomena bisectriu a la semirecta continguda en ell que té l'origen en el vèrtex de l'angle i el divideix en dues parts iguals.

3.2.2. Polígons

Definim línia poligonal com una col·lecció de segments concatenats no consecutius.

Una línia poligonal serà simple (figura 21) si no hi ha cap punt diferent dels extrems dels segments que pertanya a dos d'ells a la vegada. En cas contrari, s'anomena no simple (figura 22).

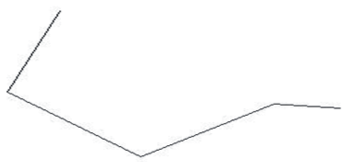


Figura 21. Representació d'una línia poligonal simple

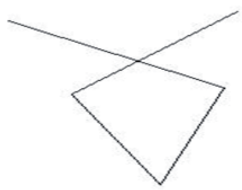


Figura 22. Representació d'una línia poligonal no simple

Si el primer i darrer segment d'una línia poligonal de més de dos segments tenen un extrem comú, aquesta serà tancada. En cas contrari serà oberta.

A partir d'aquests conceptes, definim polígon com la porció del pla limitada per una línia poligonal tancada simple, incloent-hi aquesta línia.

Cada segment de la línia poligonal s'anomena costat del polígon i si sumem les longituds de tots els costats d'un polígon, obtenim el perímetre d'aquest. Els extrems dels costats s'anomenen vèrtexs del polígon. El segment que uneix dos vèrtexs no consecutius d'un polígon s'anomena diagonal d'aquest.

Anomenarem els costats d'un polígon amb lletres minúscules: a, b, c...; i els vèrtexs amb lletres majúscules: A, B, C... En el cas dels triangles, s'acostuma a utilitzar la mateixa lletra per a un costat i per al vèrtex oposat.

Les semirectes que contenen dos costats concurrents d'un polígon i que tenen l'origen en el vèrtex comú a aquests costats determinen dos angles (figura 23). L'angle que conté al polígon s'anomena angle interior del polígon. Usualment s'anomenen angles del polígon als seus angles interiors.

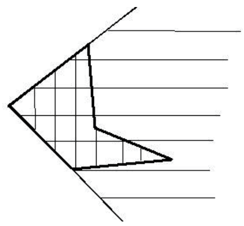


Figura 23. Representació d'un angle interior d'un polígon

La suma dels angles interiors d'un triangle és de 180º. Per a qualsevol polígon que tinga **n** costats, aquesta serà **(n-2) · 180º** (es comprova fàcilment si descomponem el polígon en triangles).

L'angle convex determinat per la semirecta que conté a un costat del polígon i la que prolonga un dels costats concurrents i té el seu origen en el vèrtex comú, s'anomena angle exterior del polígon (figura 24).

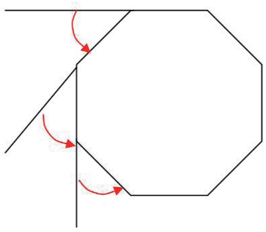


Figura 24. Representació d'alguns angles exteriors d'un polígon

La suma de tots els angles exteriors d'un polígon convex (obtinguts prolongant els costats en un mateix sentit del contorn), sempre fa 360º. En efecte, cada angle exterior és adjacent d'un del polígon, és a dir, suma amb aquest un angle pla. La suma dels angles exteriors i interiors val, per tant, tants angles plans com costats, i com els interiors sumen dos angles plans menys, aquesta és precisament la suma dels exteriors.

Un polígon es diu equilàter quan té els costats de la mateixa longitud. Es diu equiangle quan els angles interiors tenen la mateixa amplitud i es diu regular quan és equilàter i equiangle. Els polígons regulars tenen en l'interior un punt equidistant de tots els vèrtexs que s'anomena centre del polígon.

Els polígons s'anomenen pel nombre dels costats o angles. Així trobem: triangles, quadrilàters, pentàgons, hexàgons, heptàgons, octògons, enneàgons o nonàgons, decàgons, hendecàgons (*endecágonos* en castellà), dodecàgons, triskaidecàgons, tetradecàgons, pentadecàgons, hexadecàgons, heptadecàgons, octodecàgons, enneadecàgons, icosàgons..., triacontàgons (30)..., hectàgons (100), quiliògons (1.000)..., miriàgons (10.000). Per a construir el nom d'un polígon de més de 20 costats, però menys de 100, cal utilitzar la següent taula:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Desenes</th><th>i</th><th colspan="2">Unitats</th><th>Sufix final</th></tr>
<tr><td rowspan="10">-kai-</td><td>1</td><td>-hena-</td><td rowspan="10">-gon</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Icosi-</td><td>2</td><td>-di-</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Triaconta-</td><td>3</td><td>-tri-</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Tetraconta-</td><td>4</td><td>-tetra-</td></tr>
<tr><td>50</td><td>Pentaconta-</td><td>5</td><td>-penta-</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Hexaconta-</td><td>6</td><td>-hexa-</td></tr>
<tr><td>70</td><td>Heptaconta-</td><td>7</td><td>-hepta-</td></tr>
<tr><td>80</td><td>Octaconta-</td><td>8</td><td>-octa-</td></tr>
<tr><td>90</td><td>Enneaconta-</td><td>9</td><td>-ennea-</td></tr>
</table>

Per exemple, el nom de un polígon de 42 costats seria: tetracontakaidígon.

A continuació, estudiem més detalladament alguns polígons, per la rellevància que tenen en les aules d'infantil i primària.

3.2.2.1. Triangles

Un triangle és un polígon determinat per una línia poligonal simple tancada de tres segments. Tindrà, per tant, tres costats, tres angles i tres vèrtexs.

Podem anomenar els triangles en funció dels seus angles i dels seus costats.

Si atenem els ***angles***, la denominació produeix la següent classificació:

A. *Triangles acutangles,* són els que tenen els tres angles aguts (figura 25).

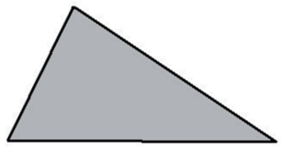


Figura 25. Representació d'un triangle acutangle

B. *Triangles rectangles,* són els que tenen un angle recte (figura 26). Els costats que determinen l'angle recte s'anomenen catets i el tercer costat, hipotenusa.

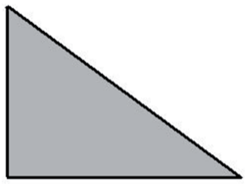


Figura 26. Representació d'un triangle rectangle

C. *Triangles obtusangles,* un dels tres angles és obtús (figura 27).

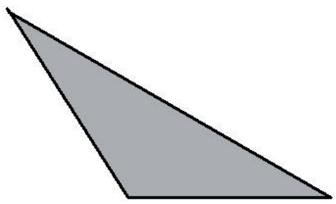


Figura 27. Representació d'un triangle obtusangle

Si atenem els ***costats***, les denominacions són:

A. *Triangles equilàters,* són aquells que tenen els tres costats d'igual longitud (figura 28).

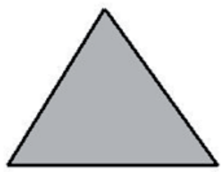


Figura 28. Representació d'un triangle equilàter

B. *Triangles isòsceles,* tenen dos costats d'igual longitud (figura 29).

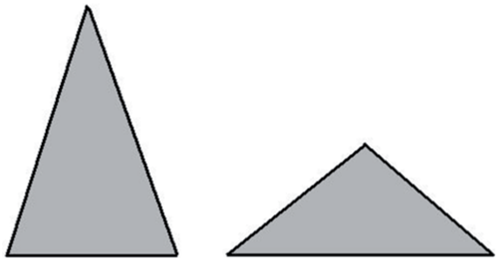


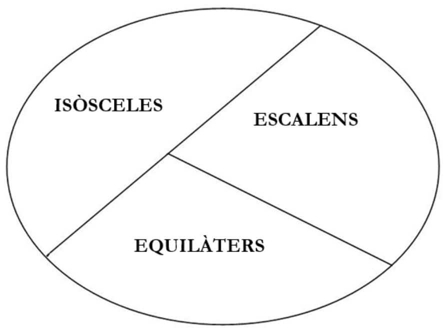
Figura 29. Representació de dos triangles isòsceles

C. *Triangles escalens,* els tres costats tenen diferent longitud (figura 30).

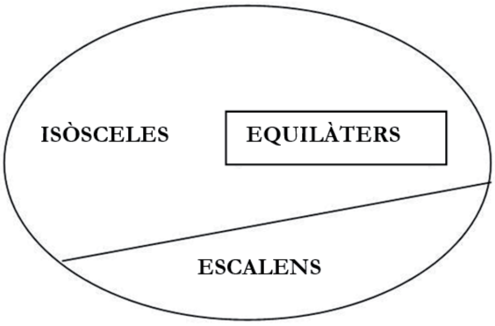
Figura 30. Representació d'un triangles escalè

Si ens fixem en els costats dels triangles en podem obtenir dues classificacions diferents. Una seria excloent i una altra inclusiva. La classificació excloent és aquella que presenta tantes classes d'equivalència (vegeu annex) com denominacions diferents hi ha. La inclusiva permet que en una mateixa classe puga haver-hi elements corresponents a més d'una denominació. La diferència es troba en la manera de definir els elements.

Per exemple: si es diu que «els triangles isòsceles són aquells que ***només*** tenen dos costats iguals», un triangle equilàter no és isòsceles. Per tant l'hem exclòs. És a dir, aconseguim una classificació excloent dels triangles que es pot representar de la següent manera:



Però si la definició considerada és «els triangles isòsceles són aquells que tenen almenys dos costats iguals», un triangle equilàter sí que és isòsceles. Per això, aquest tipus de classificació s'anomena inclusiva, perquè inclou. En aquest cas, obtenim dues classes d'equivalència, la dels triangles que tenen alguns costats iguals i la dels que els tenen tots diferents, és a dir, la dels isòsceles, que conté els equilàters com a subconjunt, i la dels escalens, respectivament:



A més d'interessar-nos la mesura dels costats, dels angles o del contorn d'un triangle, també ens pot interessar mesurar la seua superfície. Ja coneixem l'expressió que calcula el valor d'aquesta mesura (Pérez, Alcalde i Lorenzo, 2014), és a dir, l'àrea del triangle: $\frac{base \times altura}{2}$, on base serà la longitud del costat del triangle sobre del qual es recolza la figura, i altura serà la longitud del segment de la perpendicular a la recta que conté la base, pel vèrtex oposat (figura 31).

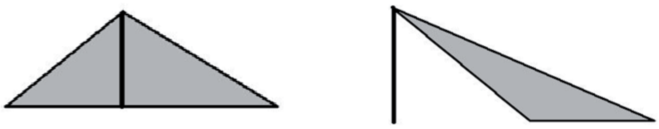


Figura 31. Representació d'algunes altures de dos triangles

Resoldre un triangle significa conèixer les mesures dels costats i dels seus angles. De vegades, aquests càlculs poden resultar complicats i requereixen l'ajuda de la trigonometria. En uns altres, se simplifiquen i s'utilitzen relacions entre els costats de triangles, com per exemple la que expressa el teorema de Pitàgores per als triangles rectangles: $a^2 = b^2 + c^2$, on **a** és la longitud de la hipotenusa, i ***b*** i ***c*** les dels catets. La comprovació gràfica és molt evident (figura 32).

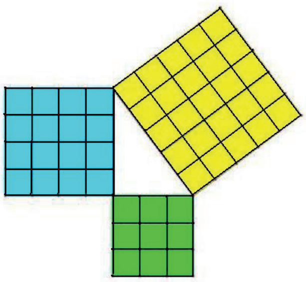


Figura 32. Representació geomètrica del teorema de Pitàgores

És a dir, l'àrea del quadrat de costat la hipotenusa, coincideix amb la suma de les àrees dels quadrats els costats dels quals són els catets.

3.2.2.2. Quadrilàters

Un quadrilàter és un polígon determinat per una línia poligonal simple tancada de quatre segments. Tindrà, per tant, quatre costats, quatre vèrtexs i quatre angles.

Hi ha diferents tipus de quadrilàters. Segons les característiques que hi considerem per cadascun d'ells, n'obtindrem diferents classificacions.

Així, si atenem el paral·lelisme dels costats trobem tres grans classes de quadrilàters: paral·lelograms (tenen els dos parells de costats oposats paral·lels), trapezis (tenen sols un parell de costats oposats paral·lels, que s'anomenen bases) i trapezoides (no tenen cap costat paral·lel a un altre).

Els quadrilàters que componen cadascuna d'aquestes classes es poden determinar per les següents definicions:

A. *Paral·lelograms.* En funció de la igualtat dels costats i/o dels angles, obtenim les quatre subclasses següents:

A.1. Quadrats (figura 33).
- Els quatre angles són d'igual amplitud (equiangle). I, a més, són de 90º.
- Els quatre costats són d'igual longitud (equilàter).

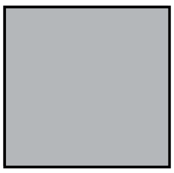


Figura 33. Representació d'un quadrat

A.2. Rectangles (figura 34).
- Els quatre angles són d'igual amplitud (equiangle). I, a més, són de 90º.
- Els costats oposats són d'igual longitud. Els consecutius no ho són.

Figura 34. Representació d'un rectangle

A.3. Rombes (figura 35).
- Els angles oposats són de la mateixa amplitud. Els no oposats no ho són.
- Els quatre costats són d'igual longitud (equilàter).

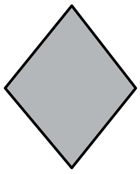


Figura 35. Representació d'un rombe

A.4. Romboides (figura 36).
- Els angles oposats són de la mateixa amplitud. Els no oposats no ho són.
- Els costats oposats són d'igual longitud. Els consecutius no ho són.

Figura 36. Representació d'un romboide

B. *Trapezis*. En funció de la igualtat dels costats i/o dels angles, obtenim les dues subclasses següents:

B.1. Trapezis isòsceles (figura 37).
- Les longituds dels costats no paral·lels són iguals.
- Els angles que comparteixen un mateix costat bàsic són iguals dos a dos.

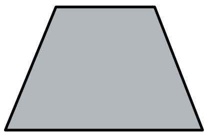


Figura 37. Representació d'un trapezi isòsceles

B.2. Trapezis escalens (figura 38).
- Les longituds dels costats no paral·lels són diferents.

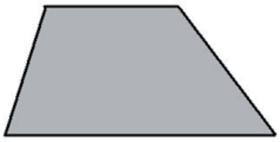


Figura 38. Representació d'un trapezi escalè

Quan en un trapezi escalè un dels costats no paral·lels és perpendicular a les bases, s'anomena trapezi rectangle (figura 39).

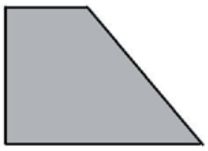


Figura 39. Representació d'un trapezi rectangle

C. *Trapezoides*. No tenen cap costat paral·lel i no s'exigeix igualtat de costat ni d'angles (figura 40).

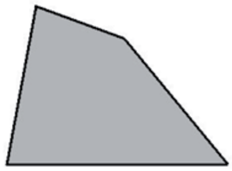


Figura 40. Representació d'un trapezoide

Amb aquestes definicions s'aconsegueix una classificació excloent dels quadrilàters, que es pot representar de la següent manera:

PARAL·LELOGRAMS	TRAPEZIS	
QUADRATS	T. ISÒSCELES	TRAPEZOIDES
RECTANGLES		
ROMBES	T. ESCALENS	
ROMBOIDES		

Si es vol obtenir una classificació inclusiva dels paral·lelograms hem d'incorporar alguns canvis en les definicions anteriors. Per a facilitar la comprensió de la nova classificació, ens inclinem per mantenir les tres grans classes de la classificació inicial dels quadrilàters, modificar les definicions dels paral·lelograms i deixar sense canvis les dels trapezis i trapezoides.

Així considerarem:

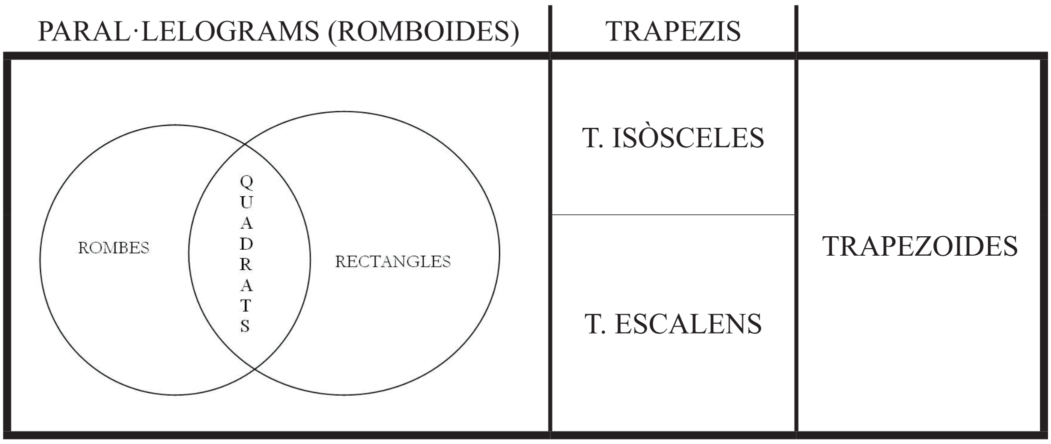
Romboide com el quadrilàter que té els costats oposats d'igual longitud.

Rombe com el que té els quatre costats d'igual longitud.

Rectangle com el que té els quatre angles rectes.

Quadrat com el que té els quatre costats d'igual longitud i els quatre angles rectes.

Segons les definicions exposades, la idea general de paral·lelogram s'identifica amb el concepte de romboide. A més, els quadrats estan inclosos en les classes de rectangles i de rombes. Aleshores la representació gràfica d'aquesta classificació inclusiva serà:



3.2.2.3. Pentàgons

Un pentàgon és un polígon determinat per una línia poligonal simple tancada de cinc segments. Tindrà, per tant, cinc costats, cinc angles i cinc vèrtexs. Podem considerar pentàgons regulars i irregulars. Encara que habitualment s'associa la idea d'aquest polígon a un pentàgon regular, hem de tenir en compte que existeixen també altres pentàgons que no ho són, tant convexos com còncaus (figura 41).

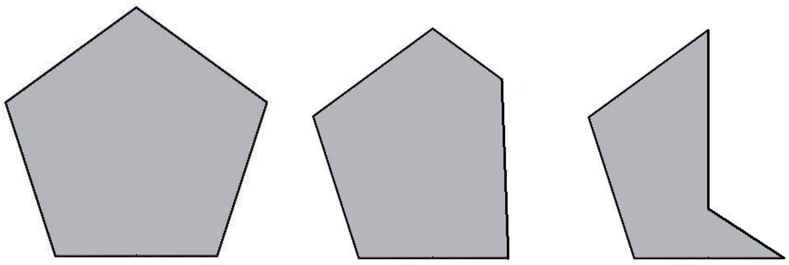


Figura 41. Representació de pentàgons: regular convex (esquerra), irregular convex (centre) i irregular còncau (dreta)

El pentàgon regular ha estat molt utilitzat al llarg de la història en els àmbits de la construcció, la religió, les creences i l'art.

Les rectes que contenen els costats del pentàgon regular es tallen en punts exteriors a aquest, determinant una figura que s'anomena pentacle (figura 42) i que correspon al tipus de polígons coneguts com estrellats. Si unim els punts de tall esmentats trobem un nou pentàgon.

Figura 42. Representació d'un pentacle

En l'art, el pentacle també s'ha utilitzat durant tota la història. Un dels casos més significatius és el quadre de Dalí, *Leda atòmica* de 1949, on l'harmonia de les formes s'aconsegueix per la inscripció de totes les figures en un pentacle regular, com es mostra en la figura 43.

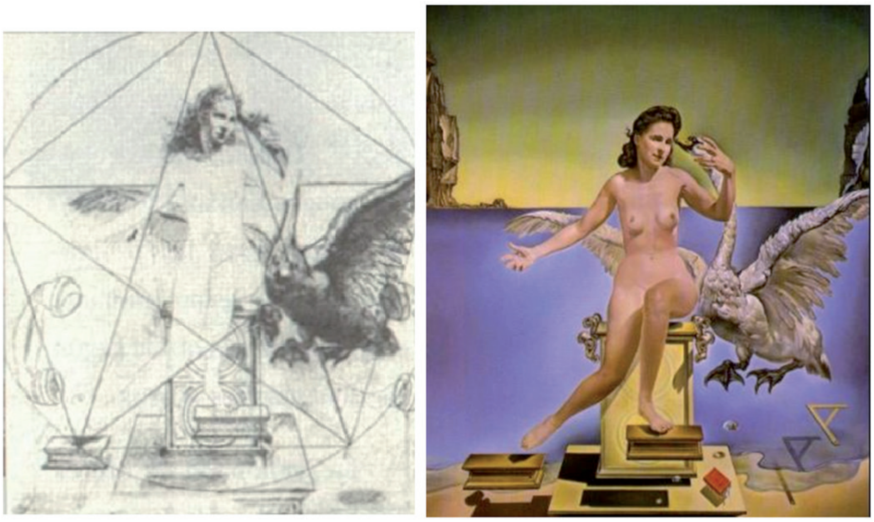


Figura 43. Representació de l'esbós i el quadre *Leda atòmica* de Dalí, 1949

3.2.2.4. Hexàgons

Un hexàgon és un polígon determinat per una línia poligonal simple tancada de sis segments. Tindrà, per tant, sis costats, sis angles i sis vèrtexs. Podem considerar hexàgons regulars i irregulars. Encara que habitualment s'associa la idea d'aquest polígon a un hexàgon regular, hem de tenir en compte que existeixen també altres hexàgons que no ho són, tant convexos com còncaus (figura 44).

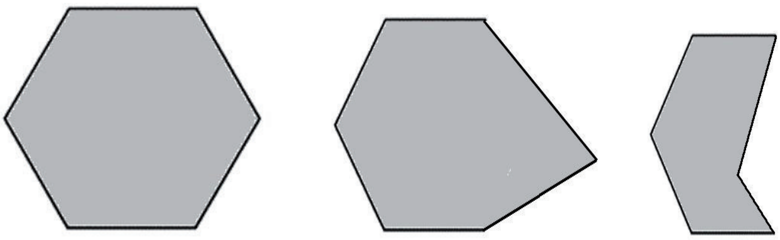


Figura 44. Representació d'hexàgons: regular convex (esquerra), irregular convex (centre) i irregular còncau (dreta)

Una característica que es repeteix en tots els polígons regulars és que es poden dividir en triangles isòsceles iguals unint el centre amb tots els vèrtexs del polígon. Particularment, en l'hexàgon regular, aquests triangles són equilàters (figura 45).

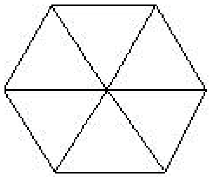


Figura 45. Representació d'un hexàgon dividit en triangles equilàters

L'hexàgon és un polígon amb molta presència en la natura. La imatge més comuna és la xarxa de cel·les de secció hexagonal que formen les abelles als ruscs o les facetes dels ulls d'alguns insectes (figura 46).

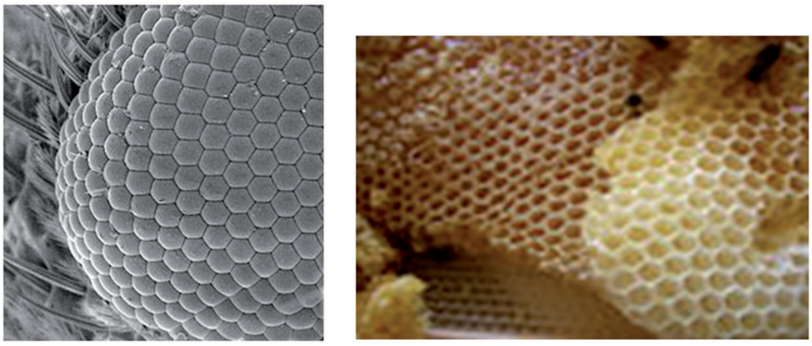


Figura 46. Representació de formes hexagonals a la natura: facetes de l'ull d'un insecte (esquerra), ruscs d'abelles (dreta)

En l'àmbit de la química, l'hexàgon apareix també en moltes de les formes en les quals el carboni es presenta en la natura, en particular la coneguda com carboni 60 que presenta una estructura tridimensional semblant a la d'un baló de futbol com la que mostra en la figura 47.

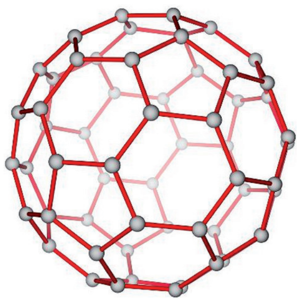


Figura 47. Representació de l'estructura tridimensional del carboni 60 (imatge proporcionada per www.pdm.com.co)

Una vegada estudiats exemples de polígons amb un nombre parell i imparell de costats es fa innecessari detenir-se en l'estudi detallat de polígons amb més costats, atès que els conceptes vistos fins ara es repeteixen de manera semblant.

3.2.3. Consideracions sobre els polígons

3.2.3.1. Mosaics

Els mosaics són imatges composats per peces que tradicionalment han estat utilitzats per l'art. El seu origen se situa en construccions de civilitzacions antigues (Grècia, Roma, figura 48) i posteriorment se n'han trobat també en altres cultures arribant fins als nostres dies.

Figura 48. Imatge d'un mosaic romà en Carranque: La Casa de Materno (proporcionada per flickr.com)

Estan compostos per peces de ceràmica o vidre, l'objectiu de les quals és formar una figura plana sense deixar cap fragment de superfície per cobrir. Cadascuna d'aquestes peces s'anomena tessel·la, i per aquesta raó als mosaics també se'ls coneix com tessel·lacions.

Matemàticament, s'han estudiat els possibles recobriments del pla quan les tessel-les són polígons regulars. Les conclusions d'aquest estudi són:

1. Si utilitzem només polígons regulars d'un sols tipus, les xarxes que es poden obtenir són les que es mostren a la figura 49.

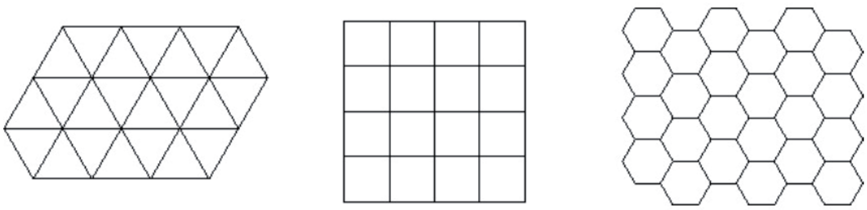


Figura 49. Xarxes de tessel·les d'un sol polígon: triangle equilàter (esquerra), quadrat (centre) i hexàgon regular (dreta)

Cal notar que només es troben aquestes tres xarxes perquè per a recobrir el pla és necessari que en un punt donat els angles dels polígons que concorren sumen 360º, i això només passa amb aquests tres polígons regulars.

2. Si s'utilitza més d'un tipus de polígon regular, sols es compleix la condició anterior en els casos de les combinacions de la figura 50.

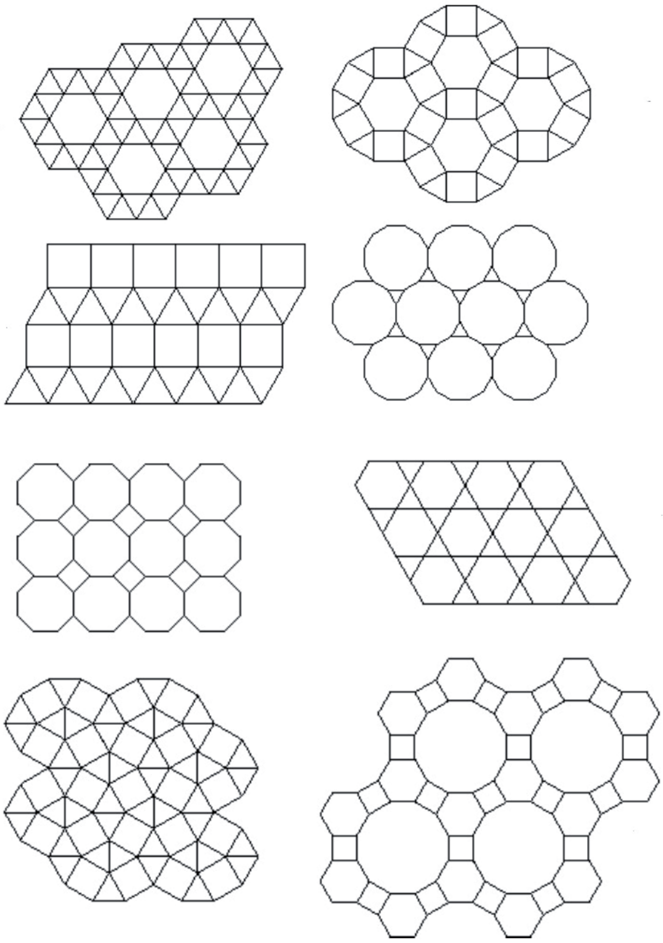


Figura 50. Xarxes de tessel·les amb formes de diferents polígons regulars

3.2.3.2. Circumferència circumscrita i inscrita en un polígon

Direm que una circumferència està circumscrita a un polígon regular quan és exterior al polígon, i els punts de contacte amb aquest són els vèrtexs del mateix. També es pot dir que el polígon regular està inscrit en la circumferència (figura 51).

De la mateixa manera, la circumferència estarà inscrita en el polígon regular quan és interior al polígon i els punts de contacte d'una i l'altre són el punt mig de cada costat. Podem dir també que el polígon regular està circumscrit a la circumferència.

En els dos casos, el centre de la circumferència i el del polígon regular coincideixen.

La circumferència està present en la construcció de qualsevol polígon regular i ha estat l'eina usual per a construir-los inscrits en ella al llarg de la història.

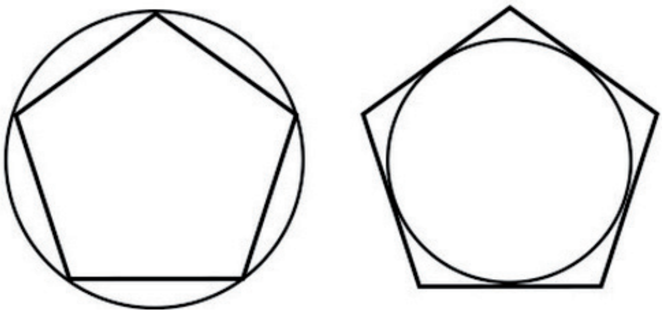


Figura 51. Representació de circumferències: circumscrita a un pentàgon (esquerra) i inscrita en un pentàgon (dreta)

3.2.3.3. Polígons regulars: simetries

Una figura serà simètrica quan, a partir d'un eix de simetria, es desenvolupe d'igual manera a cada costat d'aquest. L'eix de simetria és una recta que no existeix en la realitat, però que la podem imaginar. Els polígons regulars, per ser equilàters i equiangles, tenen igual nombre d'eixos de simetria que de costats. Les dues figures següents ens serviran per a il·lustrar els casos generals:

1. Quan el nombre de costats és imparell, els eixos de simetria són les bisectrius dels angles interns, que passen pel punt mig dels costats oposats al vèrtex de cada angle. Com que hi ha tants angles com costats, el nombre d'eixos de simetria coincideix amb el de costats. Un exemple pel cas d'un triangle equilàter, el trobem en la figura 52.

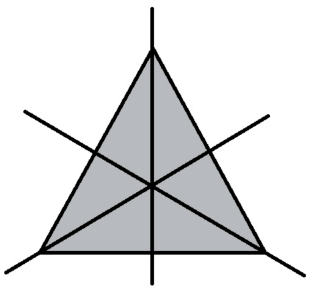


Figura 52. Representació dels eixos de simetria d'un triangle equilàter

2. Quan el nombre de costats és parell, hi ha dos tipus d'eixos de simetria. Les bisectrius dels angles interns, que en aquest cas coincideixen per cada parell d'angles oposats, i les rectes que passen pels punts mitjans de costats oposats. Per aquest fet, el nombre d'eixos de simetria que són bisectrius, serà la meitat del nombre d'angles del polígon i el nombre d'eixos de simetria que passen pel centre dels costats oposats, serà la meitat del nombre de costats. Si sumem aquestes dues quantitats, obtindrem el nombre total d'eixos que coincidirà amb el nombre de costats, novament. Un exemple pel cas d'un quadrat, el trobem en la figura 53.

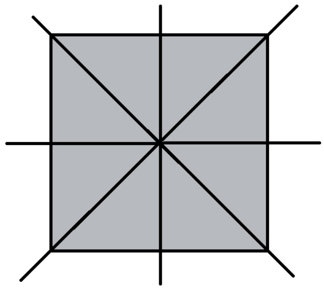


Figura 53. Representació dels eixos de simetria d'un quadrat

Quan el polígon no és regular, no es pot garantir el nombre d'eixos de simetria, però això no nega que en tinga.

3.2.3.4. Perímetre i àrea d'un polígon regular

Aquestes mesures són necessàries a l'hora d'estudiar els polígons regulars. Ja es coneix el perímetre d'un polígon que, en el cas dels regulars es pot calcular multiplicant el nombre de costats per la longitud d'un d'aquests, i l'àrea, que és la mesura de la superfície del polígon.

Per a calcular l'àrea d'un polígon qualsevol cal dividir-lo en triangles, i sumar les àrees de cadascun d'ells. Com ja s'ha comentat en el punt 3.2.2.4, en el cas dels polígons regulars els triangles són iguals i isòsceles. Aquest fet facilita la construcció de l'expressió per a calcular l'àrea d'un polígon regular: $\frac{perímetro \times apotema}{2}$ on l'apotema del polígon és l'altura de cadascun dels triangles isòsceles en els quals s'ha descompost (considerant els costats del polígon com a bases dels triangles).

3.2.4. Cercle

Definim cercle com la porció del pla limitada per una circumferència, incloent-hi també aquesta línia. També es podria definir com el lloc geomètric dels punts del pla la distància dels quals a un punt anomenat centre, ***C***, és menor o igual que un valor ***r*** anomenat radi. Analíticament i per analogia amb el cas de la circumferència, l'equació del cercle que té com a centre el punt $C(c_1, c_2)$ i com a radi ***r***, és:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 \leq r^2$$

Per a calcular l'àrea d'un cercle, utilitzarem l'expressió $A = \pi \cdot r^2$.

Tenint en compte les definicions dels elements bàsics de la circumferència incloses en el punt 3.1.3, podem definir algunes superfícies notables relacionades amb el cercle:

- *Angle central*, és el que determinen dues semirectes que contenen dos radis i té el vèrtex en el centre del cercle (figura 54). Cal adonar-se que hi ha dos angles centrals representats en la figura: el que es troba ombrejat que és convex i el seu conjugat que és còncau.

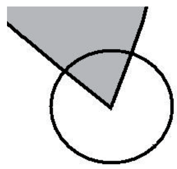


Figura 54. Representació d'un angle central

- Sector circular, és la intersecció d'un cercle amb qualsevol angle central del mateix (figura 55). Quan l'angle central és un angle pla el sector circular és un semicercle. Per a calcular l'àrea d'aquesta figura usem: $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360°}$, on ***n*** és el nombre de graus de l'angle central que determina el sector circular.

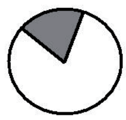


Figura 55. Representació d'un sector circular

- *Segment circular*, és la porció de cercle compresa entre una corda i l'arc corresponent (figura 56). Cal notar que qualsevol corda determina dos segments circulars, ja que els seus extrems delimiten dos arcs en la circumferència. Quan la corda és un diàmetre, el segment circular s'anomena semicercle, que també es pot definir com la porció de cercle compresa entre una semicircumferència i el diàmetre que la defineix.

  Per a calcular l'àrea d'aquesta figura distingirem dos casos: (a) quan el sector circular associat al segment és convex, haurem de restar a l'àrea del sector la del triangle determinat pel centre del cercle i els extrems de la corda; (b) quan el sector circular associat és còncau, cal afegir a la seua àrea la de l'esmentat triangle.

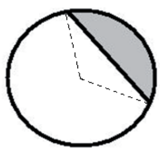


Figura 56. Representació dels dos segments circulars d'un cercle determinats per la mateixa corda

- *Corona circular*, és la porció del pla delimitada per dues circumferències concèntriques (figura 57), l'àrea de la qual es calcula restant-ne les dels corresponents cercles.

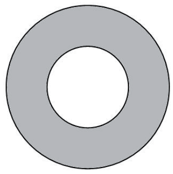


Figura 57. Representació d'una corona circular

3.3. Figures en l'espai

Com s'ha comentat en el punt 3.1.1, dues rectes secants determinen un pla. Si es considera una tercera recta no coplanària amb aquestes i que siga perpendicular a les dues, apareix una nova dimensió que completa les que ja tenia el pla. Aquestes tres dimensions configuren l'ens geomètric anomenat espai, que és el conjunt de tots els punts existents, introduït en 2.1.

Qualsevol pla de l'espai el divideix en dues regions anomenades semiespais, que inclouen el pla.

3.3.1. Angles en l'espai

Si considerem dos plans en l'espai, les posicions que hi poden tenir són:

1. *Plans secants*, tenen només una recta en comú (figura 58). Analíticament $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

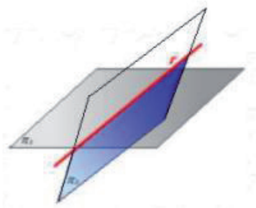


Figura 58. Representació de dos plans secants en l'espai

2. *Plans paral·lels no coincidents*, no tenen cap punt en comú (figura 59). Analíticament $\pi_1 \cap \pi_2 = \varphi$.

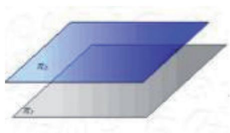


Figura 59. Representació de dos plans paral·lels no coincidents

3. *Plans paral·lels coincidents*, tenen tots els punts en comú (figura 60). Analíticament $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$.

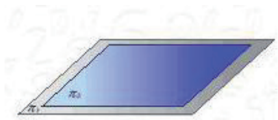


Figura 60. Representació de dos plans paral·lels coincidents

Quan dos plans són secants, determinen quatre regions a l'espai. S'anomena angle díedre o simplement díedre, a cadascuna d'aquestes regions, incloent-hi els semiplans que les delimiten (figura 61). La recta comú als dos semiplans s'anomena aresta de l'angle díedre. Obtenim la mesura d'aquest angle si mesurem l'amplitud de l'angle pla que determinen dues semirectes d'origen comú contingudes en cadascun dels semiplans i que siguen perpendiculars a la recta d'intersecció d'aquests.

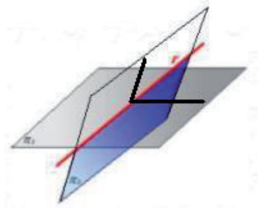


Figura 61. Representació dels elements d'un angle díedre

Quan el nombre de plans que considerem en l'espai és superior a dos, la quantitat de posicions en les quals ens els podrem trobar augmenta considerablement. Ens fixarem únicament en les situacions on tots els plans tenen sols un punt en comú i considerarem les semirectes d'origen comú en eixe punt, de manera que el pla determinat per cada dues semirectes consecutives deixa a totes les altres al mateix semiespai. Anomenarem angle políedre convex la intersecció de tots els semiespais determinats pels plans que cada parella d'aquestes semirectes consecutives defineix (figura 62).

L'origen comú de les semirectes és el vèrtex de l'angle, cadascuna d'elles és una aresta de l'angle políedre i la porció de superfície plana limitada per cada dues semirectes consecutives (l'angle bidimensional que determinen) s'anomena cara de l'angle.

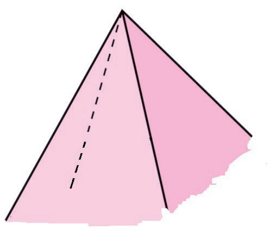


Figura 62. Representació d'un angle políedre

En el cas de tres plans amb un punt en comú, l'angle rep el nom d'angle tríedre o simplement tríedre. Quan el nombre de plans que determinen l'angle, ***n***, és igual o superior a quatre, s'anomenarà bé amb les arrels gregues o bé amb l'expressió angle políedre amb ***n*** cares.

La mesura d'un angle políedre s'obté al sumar les amplituds de tots els angles bidimensionals que determinen les parelles d'arestes consecutives del mateix. L'amplitud de l'angle ha de ser menor que 360º, doncs si s'arribara a aquesta quantitat de graus, la superfície que formarien les cares de l'angle políedre seria un pla en l'espai i deixaria de limitar un angle poliedre.

3.3.2. Cossos geomètrics

A més de les superfícies planes, en l'espai podem trobar superfícies que no ho són i que s'anomenen corbes. A diferència de les superfícies planes finites, que sempre són obertes, les superfícies finites corbes poden ser obertes o tancades (quan no envolten o sí envolten una zona de l'espai, respectivament).

Un cos geomètric és una figura geomètrica que resulta de considerar una part de l'espai limitada per una superfície tancada simple (la que sols delimita una regió interior en l'espai) incloent aquesta superfície. Aquestes figures també s'anomenen sòlids.

Anàlogament a superfície plana, còncava i convexa, es poden definir cossos geomètrics còncaus i convexos.

Per al treball que es realitza a dintre de l'aula de primària, considerarem dos tipus de cossos geomètrics: els políedres i els cossos redons. Els primers estaran delimitats per polígons, i els segons per superfícies corbes i/o superfícies planes no poligonals.

3.3.2.1. Políedres

Són els cossos geomètrics limitats per superfícies tancades simples composats per polígons. A cadascun d'aquests polígons se l'anomena cara del políedre. Els costats dels polígons s'anomenen arestes del políedre i els seus vèrtexs són també vèrtexs del políedre. En cadascuna de les arestes es forma un angle díedre, i en cadascun dels vèrtexs, un angle políedre.

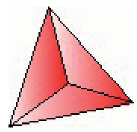
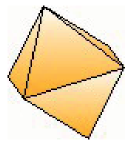
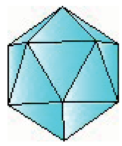
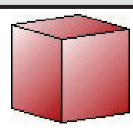
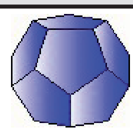
Qualsevol políedre convex té, almenys, quatre cares, quatre vèrtexs i sis arestes. Un vèrtex d'un políedre pertany, almenys, a tres cares i a tres arestes. En qualsevol políedre convex es compleix la fórmula d'Euler, que relaciona el nombre de cares (C), de vèrtexs (V) i d'arestes (A), segons l'expressió: $C + V = A + 2$.

Podem classificar els políedres en funció de les següents característiques: la regularitat de les cares, la igualtat d'aquestes i la igualtat dels angles del mateix tipus que es formen en el políedre. Així obtindrem dues classes, la dels políedres regulars i la dels que no ho són. Si un políedre verifica les tres condicions anteriors direm que és regular o platònic. Si no verifica alguna de les condicions anteriors, direm que és irregular. En particular, si verifica la primera i la tercera però no la segona, direm que és arquimedià.

Políedres regulars

Estudiarem quins són els políedres regulars que existeixen i com es construeixen a partir dels polígons que els delimiten.

Tenint en compte que la mesura d'un angle políedre ha de ser menor que **360º** i que, com a mínim, en cada vèrtex han de concórrer tres cares, ens apareixen els següents sòlids platònics:

CARES	*Nombre de cares per vèrtex*	*Suma dels angles*	*Políedre*	*Representació*
Triangles equilàters	3	$\mathbf{3 \cdot 60^{o} = 180^{o}}$	TETRÀEDRE REGULAR	
	4	$\mathbf{4 \cdot 60^{o} = 240^{o}}$	OCTÀEDRE REGULAR	
	5	$\mathbf{5 \cdot 60^{o} = 300^{o}}$	ICOSÀEDRE REGULAR	
	6	$\mathbf{6 \cdot 60^{o} = 360^{o}}$	No existeix	
Quadrats	3	$\mathbf{3 \cdot 90^{o} = 270^{o}}$	CUB O HEXÀEDRE-REGULAR	
	4	$\mathbf{4 \cdot 90^{o} = 360^{o}}$	No existeix	
Pentàgons regulars	3	$\mathbf{3 \cdot 108^{o} = 324^{o}}$	DODECÀEDRE REGULAR	
	4	$\mathbf{4 \cdot 108^{o} = 432^{o}}$	No existeix	
Hexàgons regulars	3	$\mathbf{3 \cdot 120^{o} = 360^{o}}$	No existeix	

I com es veu, a partir de l'hexàgon regular, no es pot formar cap angle políedre perquè la suma de tres angles de qualsevol altre polígon regular sempre serà superior a 360º i, per tant, no es podrà determinar cap políedre. Aleshores, només es poden formar políedres regulars amb triangles equilàters, quadrats, i pentàgons regulars.

Cal fixar-se un poc en la construcció d'aquests cossos:

Quan són triangles equilàters:

A partir de la xarxa que ja s'ha estudiat de triangles equilàters (vegeu 3.2.3.1), ens fixem en una part només, la que forma un hexàgon (figura 63).

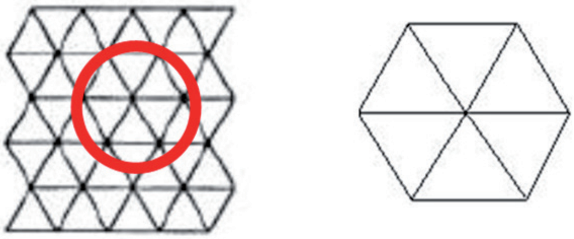


Figura 63. Representació d'una xarxa de triangles equilàters (esquerra) i una selecció de sis (dreta)

És clar que aquest hexàgon no es pot doblegar per a formar una figura susceptible de ser un cos geomètric (com es pot veure en el quadre anterior). Caldrà, doncs, llevar triangles per a poder fer- ho.

Si es lleva un dels triangles, aleshores el cos que es pot formar tindrà vèrtexs en els quals confluiran cinc cares que són triangles equilàters. Perquè el cos acomplisca totes les condicions per a ser regular, necessitem quinze triangles equilàters més, i el que s'obté rep el nom d'icosàedre regular (figura 64).

Figura 64. Representació de la construcció d'un icosàedre regular

Si es lleven ara dos triangles equilàters, el cos que es pot formar tindrà vèrtexs en els quals conflueixen quatre triangles equilàters. Per a completar el cos regular en aquest cas, necessitem quatre triangles equilàters més, i el que s'obté és un octàedre regular (figura 65).

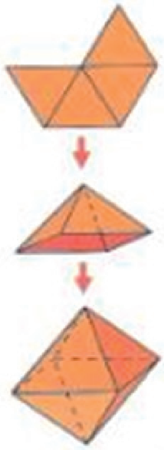


Figura 65. Representació de la construcció d'un octàedre regular

Per últim, si són tres els triangles que es lleven, el cos que es pot formar tindrà vèrtexs en els quals confluiran tres triangles equilàters. Sols necessitarem un altre per a completar el cos geomètric que s'anomena tetràedre regular (figura 66).

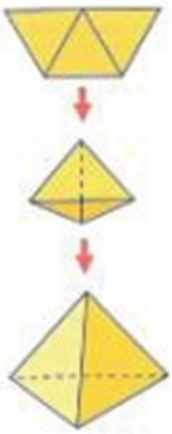


Figura 66. Representació de la construcció d'un tetràedre regular

Nota: En general, qualsevol políedre, les cares del qual siguen totes triangles equilàters, s'anomena deltàedre.

Quan són quadrats:

A partir de la xarxa formada per quadrats (figura 67) i agafant-ne només quatre, es pot seguir un procediment semblant.

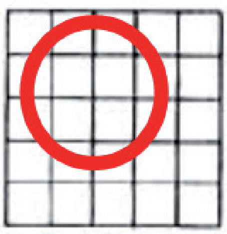


Figura 67. Representació d'una xarxa de quadrats

Com que necessitem tres cares per a aconseguir un vèrtex, només es pot llevar un dels quadrats. Faran falta tres quadrats més per a completar el cos geomètric que s'anomena hexàedre regular o cub (figura 68).

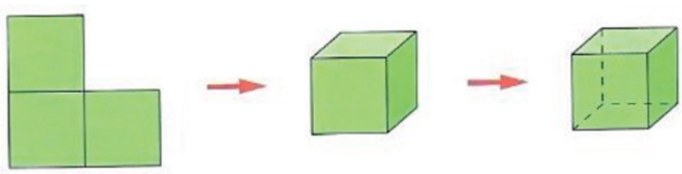


Figura 68. Representació de la construcció d'un cub

Quan són pentàgons regulars:

En aquest cas no es pot partir d'una xarxa plana, no existeix, ja que amb pentàgons regulars no es pot recobrir el pla, però sí que es pot formar un políedre. En construir el vèrtex fent coincidir tres cares en aquest, la suma dels angles que el formen és menor que 360º, doncs cadascun dels angles interiors d'un pentàgon regular mesura 108º.

En aquest cas necessitarem nou pentàgons més per a completar el cos que s'anomena dodecàedre regular (figura 69).

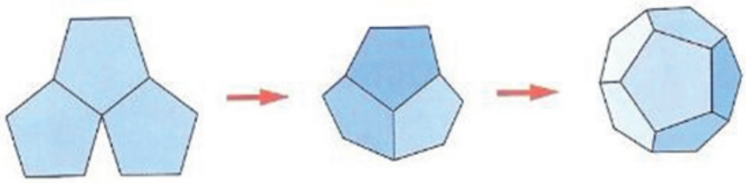


Figura 69. Representació de la construcció d'un dodecàedre regular

Dins del conjunt de tots els políedres, trobem unes famílies molt particulars, la dels prismes i la de les piràmides que, per la gran varietat de cossos que contenen i per la seua presència en la realitat, seran les primeres que estudiarem.

Prismes

Un prisma és un políedre limitat per dos polígons iguals i paral·lels (homòlegs en una translació –vegeu 3.4.1.1–) i tants paral·lelograms com costats tinguen aquells (figura 70). Els polígons esmentats s'anomenen cares bàsiques o bases i els paral-lelograms, cares laterals. L'altura del prisma és el segment de la perpendicular a les dues bases comprès entre elles.

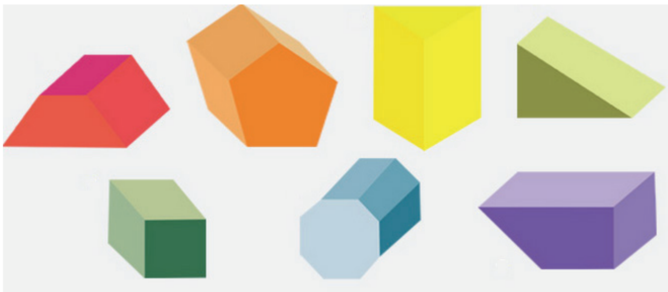


Figura 70. Representació de prismes de diferents bases

Si les bases del prisma són polígons còncaus o convexos, el prisma s'anomena còncau o convex, respectivament.

Si totes les cares laterals són rectangles, seran perpendiculars a les bases, i és per això que s'anomena prisma recte. Si les cares laterals no són perpendiculars a les bases, es denomina prisma oblic (figura 71).

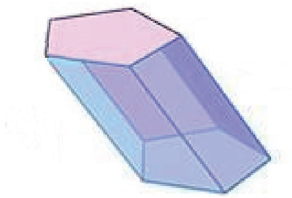


Figura 71. Representació d'un prisma oblic

Si les bases d'un prisma recte són polígons regulars, el prisma s'anomena regular.

Les arestes laterals d'un prisma són segments iguals i paral·lels entre si. En els prismes rectes són perpendiculars a les bases.

Segons que les bases siguen triangles, quadrilàters, pentàgons, etc., el prisma es denomina triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

El desenvolupament pla d'un prisma és el resultat de desplegar i col·locar damunt d'un pla totes les seues cares de manera que cada dues contigües estiguen unides per una aresta. Vegem, per exemple, a la figura 72, el cas d'un prisma regular hexagonal.

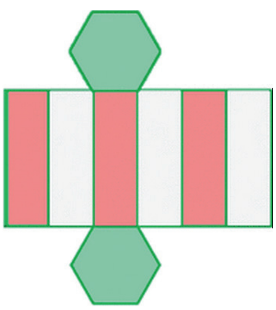


Figura 72. Representació del desenvolupament pla d'un prisma regular hexagonal (imatge proporcionada per narceaeduplastica.weebly.com)

És important destacar que l'expressió «desenvolupament pla d'un cos geomètric» es refereix sols al de la superfície que limita el cos i no al del cos complet que és sòlid i macís i que, evidentment, no es pot desenvolupar en un pla.

Paral·lelepípedes:

Un paral·lelepípede és un prisma les cares del qual són totes paral·lelograms. Cada dues cares oposades són iguals (figura 73).

Si les bases són quadrats, aquest paral·lelepípede seria un prisma quadrangular, ja esmentat abans.

Si totes les cares són rectangles, s'anomena ortòedre. Si són quadrats, s'anomena hexàedre regular o cub, també esmentat abans. Si són rombes, s'anomena rombòedre.

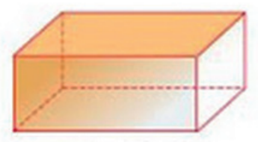


Figura 73. Representació d'un ortoedre

Per a calcular l'àrea total d'un prisma, cal sumar l'àrea de les dues bases i l'àrea lateral (suma de les àrees de les cares laterals). Amb aquesta idea, calcularem també l'àrea total d'un ortòedre i d'un cub.

Pel que fa al volum, caldrà només calcular l'àrea d'una de les bases i multiplicar-la per l'altura.

Piràmides

Una piràmide és un políedre que té com a cara bàsica o base un polígon qualsevol, i com a cares laterals triangles amb un vèrtex comú, que es denomina vèrtex, cúspide o àpex de la piràmide, en el què tots els triangles formen un angle poliedre. L'altura és el segment de la perpendicular a la base traçada pel vèrtex de la piràmide, que té per extrems el propi vèrtex i la intersecció d'aquesta perpendicular amb el pla que conté la base de la piràmide.

Si la base de la piràmide és un polígon còncau o convex la piràmide s'anomena còncava o convexa, respectivament.

Si les cares laterals són triangles isòsceles (poden ser també equilàters), la piràmide s'anomena recta. En cas contrari, serà obliqua (figura 74).

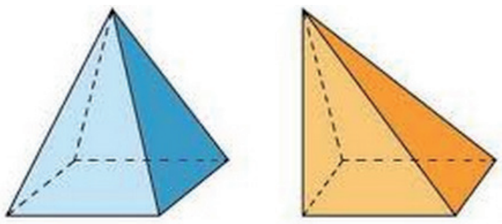


Figura 74. Representació d'una piràmide quadrangular recta (esquerra) i d'una obliqua (dreta)

Si la base d'una piràmide recta és un polígon regular, aquesta s'anomena piràmide regular. El vèrtex de la piràmide regular es projecta sobre el centre de la seua base.

En una piràmide regular totes les arestes laterals són de la mateixa longitud i les cares laterals són triangles isòsceles iguals. Les altures dels triangles es denominen apotemes de la piràmide.

Segons les bases siguen triangles, quadrilàters, pentàgons, etc., la piràmide es denomina triangular, quadrangular, pentagonal...

Veiem en la figura 75 un exemple del desenvolupament pla d'una piràmide regular quadrangular.

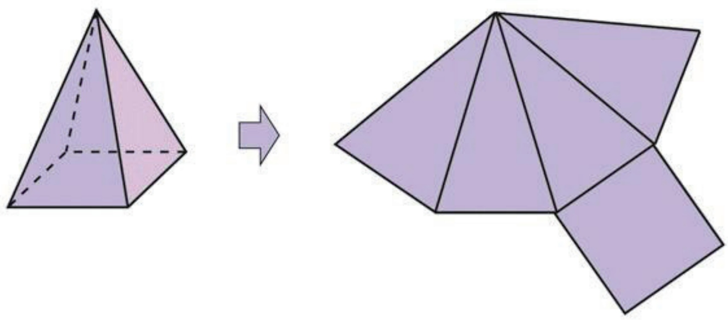


Figura 75. Representació del desenvolupament pla d'una piràmide quadrangular

Pel que fa a l'àrea total de la piràmide, cal sumar l'àrea de la base i l'àrea lateral (suma de les àrees de les cares laterals).

En el cas del volum de la piràmide, caldrà multiplicar per $\frac{1}{3}$ el volum d'un prisma que tinga la seua mateixa altura i les bases del qual siguen polígons iguals a la base de la piràmide.

Tronc de piràmide

Quan es trunca una piràmide per un pla paral·lel al de la base, el cos comprés entre els dos plans es denomina tronc de piràmide (figura 76).

Un tronc de piràmide té dues bases que són polígons semblants (homòlegs en una semblança –vegeu 3.3.2.4–). L'altura del tronc és el segment de la perpendicular als plans que contenen les dues bases, comprés entre aquestes.

Si la piràmide és regular, el tronc de piràmide corresponent també s'anomena regular. Les cares laterals són trapezis isòsceles iguals. L'altura de cadascun d'ells es denomina apotema del tronc de piràmide.

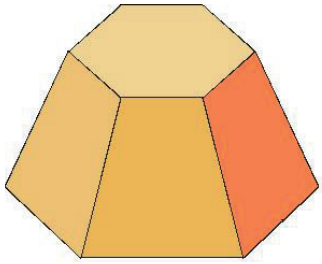


Figura 76. Representació d'un tronc de piràmide regular hexagonal

Pel que fa a l'àrea total del tronc de piràmide, cal sumar les àrees de les bases i l'àrea lateral (suma de les àrees de les cares laterals). Si el que es vol calcular és el volum, cal observar les dades proporcionades i, si és necessari, s'ha d'usar el teorema de Tales per a obtenir aquest volum com la diferència entre el volum de la piràmide completa i el de la que es lleva per aconseguir el tronc.

3.3.2.2. Cossos redons

Seran aquells cossos geomètrics limitats per superfícies tancades simples on totes les cares siguen superfícies corbes i/o planes no poligonals.

Encara que existeixen molts cossos d'aquest tipus, ens interessarem particularment per aquells que deriven del cercle o que contenen cercles entre les superfícies que els delimiten.

Començarem parlant dels cossos de revolució que són els sòlids que resulten en girar una figura plana al voltant d'un eix, anomenat eix de revolució. En funció de com siga aquesta figura, obtindrem diferents cossos. Estudiarem a continuació els més representatius per a l'aula de primària: el cilindre i el con rectes, i l'esfera.

Cilindre

Si es fa girar una recta, anomenada generatriu, al voltant d'un eix paral·lel a ella, es genera una superfície infinita, en forma de tub, que denominem superfície cilíndrica circular recta.

El cilindre circular recte, d'ara endavant cilindre recte, és el cos geomètric que s'obté en fer girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats, o bé el cos que queda delimitat en tallar una superfície cilíndrica per dos plans paral·lels entre sí i perpendiculars a l'eix de revolució. La intersecció dels plans amb la superfície cilíndrica dóna lloc a dues circumferències que determinen dos cercles.

Aquests dos cercles són les bases del cilindre i a la superfície cilíndrica compresa entre aquestes se l'anomena superfície o cara lateral del cilindre. L'altura, ***h***, és el segment de la perpendicular als plans que contenen les bases comprés entre aquests, i el radi de les bases és el radi del cilindre, ***r***.

De manera anàloga als políedres, podem obtenir el desenvolupament pla d'un cos redó. En la figura 77 es mostra un cilindre recte i el seu desenvolupament pla.

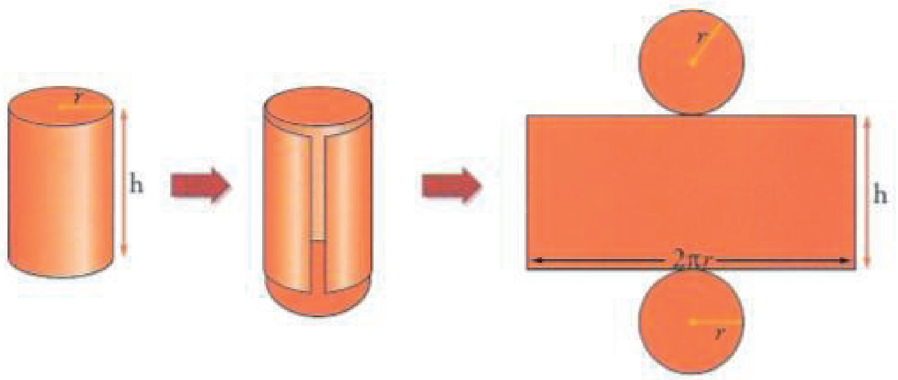


Figura 77. Representació d'un cilindre recte i el seu desenvolupament pla d'aquest

Els càlculs de les mesures de la superfície i el volum d'aquests cossos s'han de realitzar d'acord amb les indicacions que a continuació s'especifiquen.

Si el que es vol és calcular l'àrea total, caldrà sumar l'àrea lateral i l'àrea de les bases, segons les expressions:

- Àrea lateral: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$
- Àrea de les bases: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r^2}$

Si el que es vol és calcular el volum, cal multiplicar l'àrea d'una base per l'altura, així l'expressió serà: $\pi \cdot \mathbf{r^2 \cdot h}$

Quan la generatriu del cilindre circular no és perpendicular a les bases, el cilindre s'anomena oblic, com es mostra en la figura 78.

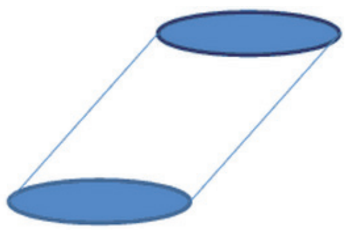


Figura 78. Representació d'un cilindre oblic

Es pot estendre la idea de cilindre, tant recte com oblic, a uns altres cossos redons les bases del quals no són cercles, sinó superfícies planes que poden estar delimitades per el·lipsis o altres tipus de línies corbes tancades planes (figura 79).

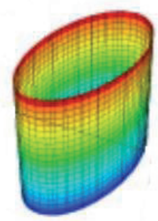


Figura 79. Representació d'un cilindre el·líptic

La superfície cilíndrica també es pot entendre com la superfície generada per una recta que es desplaça paral·lela a si mateixa i tangent a una línia corba tancada que s'anomena directriu.

Con

Si fem girar una recta anomenada generatriu al voltant d'un eix, al qual talla, es genera un superfície infinita, en forma de dos cucurutxos amb el vèrtex comú, que denominem superfície cònica.

Si fem girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets, obtenim un cos geomètric anomenat con circular recte, o simplement, con recte. També podem aconseguir aquest cos si considerem l'espai que queda delimitat al tallar la superfície cònica anterior pel vèrtex i per un pla perpendicular a l'eix de revolució. La intersecció d'aquest pla amb la superfície cònica dóna lloc a una circumferència que determina un cercle.

Aquest cercle és la base del con i a la superfície cònica compresa entre aquesta i el vèrtex se l'anomena superfície o cara lateral del con. El segment de la generatriu comprés entre el vèrtex i la base és la generatriu del con, ***g***. L'altura, ***h***, és el segment de la perpendicular al pla que conté la base del con traçada pel vèrtex i comprés entre aquest i l'esmentat pla. El radi de la base és el radi del con, ***r***. En el cas dels cons rectes, l'altura uneix el vèrtex amb el centre del cercle de la base.

De manera anàloga al cilindre, podem obtenir el desenvolupament pla d'un con, com es mostra en la figura 80.

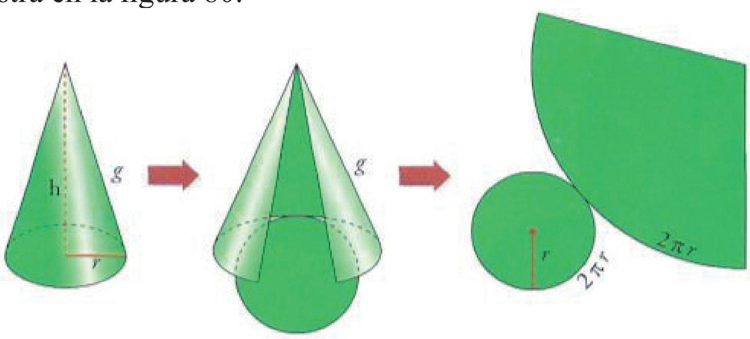


Figura 80. Representació d'un con circular recte i el seu desenvolupament pla

Els càlculs de les mesures de la superfície i el volum d'aquests cossos es realitzen d'acord amb les indicacions que a continuació s'especifiquen.

Si el que es vol és calcular l'àrea total, cal sumar l'àrea lateral i l'àrea de la base, segons les expressions:

- Àrea lateral: $\pi \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$
- Àrea de la base: $\pi \cdot \mathbf{r}^2$

Anàlogament al cas del volum de la piràmide, per a calcular-ne el d'un con, cal multiplicar per $\frac{1}{3}$ el volum d'un cilindre que tinga la seua mateixa altura i les bases del qual siguen cercles iguals a la base del con. És a dir: $\mathbf{1/3} \cdot \pi \cdot \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{h}$.

Quan el pla que conté la base del con circular no és perpendicular a l'eix de revolució, el con s'anomena oblic (figura 81). En aquest cas, l'altura del con no passa pel centre de la base.

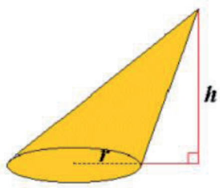


Figura 81. Representació d'un con oblic

Es pot estendre la idea de con, tant recte com oblic, a uns altres cossos redons la base del quals no és un cercle, sinó una superfície plana que pot estar delimitada per el·lipsis o uns altres tipus de línies corbes tancades planes.

La superfície cònica també es pot entendre com la superfície generada per una recta que es desplaça mantenint fix un dels seus punts i de manera tangent a una línia corba tancada que s'anomena directriu.

Tronc de con

Si es talla un con per un pla paral·lel al que conté la base, el cos geomètric comprés entre els dos plans, es denomina tronc de con (figura 82).

El tronc de con recte és un cos de revolució que es genera fent girar un trapezi rectangle al voltant del costat perpendicular a les bases. Té dues cares bàsiques circulars i l'altura és el segment de la perpendicular als plans que contenen les bases comprés entre aquests. La generatriu, ***g***, és el segment que ha generat la superfície lateral i, per tant, és el costat del trapezi no perpendicular a les bases.

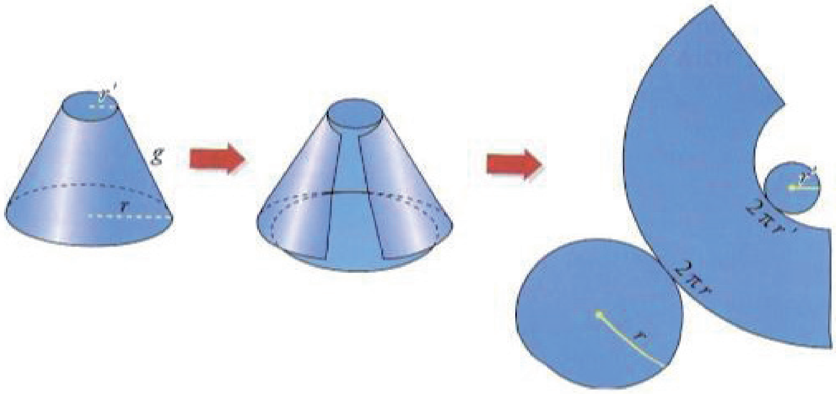


Figura 82. Representació d'un tronc de con recte i el seu desenvolupament pla

Per calcular l'àrea total, cal sumar l'àrea lateral a més de l'àrea de les bases, segons les expressions:

- Àrea lateral: $\pi \cdot \mathbf{(r + r') \cdot g}$
- Àrea de les bases: $\pi \cdot \mathbf{r^2} + \pi \cdot \mathbf{(r')^2}$

Si el que es vol calcular és el volum, caldrà observar les dades proporcionades i si és necessari s'ha d'usar el teorema de Tales per a obtenir-lo com la diferència entre el volum del con que es trunca i el del que es lleva per aconseguir el tron de con.

Esfera

L'esfera es genera fent girar un semicercle al voltant d'un eix que conté el diàmetre que el determina. També es pot definir com el lloc geomètric dels punts de l'espai la distància dels quals a un punt anomenat centre és menor o igual que un valor ***R*** anomenat radi.

La superfície de l'esfera, anomenada superfície esfèrica, es genera en fer girar una semicircumferència al voltant del diàmetre. Només es pot desenvolupar sobre el pla aproximadament, però no de manera exacta. No obstant això, es pot mesurar l'àrea mitjançant una fórmula senzilla: $\mathbf{4} \cdot \pi \cdot \mathbf{R^2}$.

Curiosament, si imaginem un cilindre que s'hi ajusta per complet a l'esfera, l'àrea lateral d'aquest cilindre és $\mathbf{2}\ \pi\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{2R} = \mathbf{4} \cdot \pi \cdot \mathbf{R^2}$ i coincideix amb l'expressió anterior (figura 83).

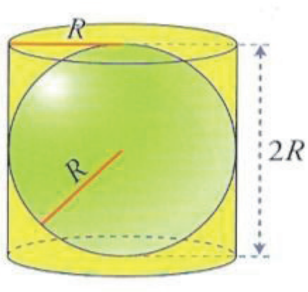


Figura 83. Representació d'una esfera ajustada per un cilindre circular recte

Pel que fa al volum, aquest coincideix amb les dues terceres parts del volum del cilindre: $\mathbf{2/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3}$.

A continuació es defineixen algunes figures derivades de l'esfera i la superfície esfèrica.

Anomenem casquet esfèric (figura 84) cadascuna de les dues parts de la superfície esfèrica que resulten de tallar-la amb un pla. Si el que es talla és una esfera, les dues parts resultants s'anomenen segments esfèrics d'una base. Si el pla secant passa pel centre, obtindrem, respectivament, dues semisuperfícies esfèriques o dues semiesferes.

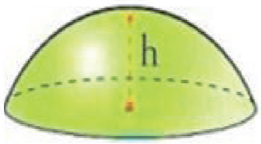


Figura 84. Representació d'un casquet esfèric

A la porció de superfície esfèrica compresa entre dos plans paral·lels que la tallen, se l'anomena zona esfèrica (figura 85). Si el que es talla és una esfera, la figura resultant s'anomena segment esfèric de dues bases.

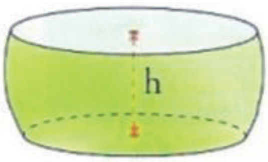


Figura 85. Representació d'una zona esfèrica

Si es considera un angle díedre, l'aresta del qual conté el diàmetre de l'esfera, la seua intersecció amb la superfície esfèrica s'anomena fus esfèric. La intersecció amb l'esfera s'anomena tascó esfèric, falca esfèrica o cuny esfèric (figura 86).

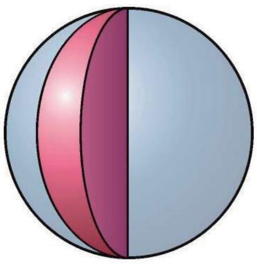


Figura 86. Representació d'un tascó esfèric

3.4. Transformacions geomètriques en el pla

Com ja s'ha explicat en el punt 2.2, una transformació geomètrica és una aplicació bijectiva de l'espai en si mateix que pren una figura geomètrica i la transforma en una altra. En aquest apartat treballarem algunes de les transformacions geomètriques planes que es poden definir. Concretament veurem les isometries i les transformacions equiformes en el pla.

3.4.1. Moviments rígids o isometries

Un moviment rígid o isometria és una transformació geomètrica que conserva les dimensions de les figures. Dit d'un altra manera, és una transformació que compleix la següent condició: la distància entre els punts de la figura original és la mateixa que la que hi ha entre els seus corresponents homòlegs en la figura transformada. Quan dues figures són homòlogues per una isometria es diu que són congruents.

3.4.1.1. Translacions

Una translació de vector $\vec{v}$, $T_{\vec{v}}$ és un moviment rígid en el pla en el qual tots els seus punts es desplacen seguint aquest vector, que s'anomena vector de translació. Per a veure el comportament d'aquestes transformacions, treballem amb l'exemple de la figura 87, on la translació està determinada pel vector lliure $\vec{v} = \overline{AA'}$.

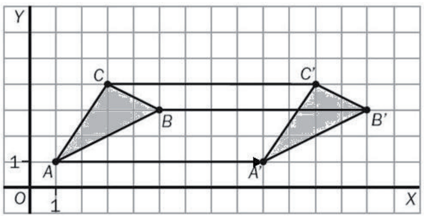


Figura 87. Representació de dos triangles homòlegs per una translació

En aquest cas $T_{\vec{v}}(A) = A'$ i la figura homòloga del triangle ***ABC*** és el triangle ***A'B'C'***, és a dir, $T_{\vec{v}}(\Delta ABC) = \Delta A'B'$. Es pot comprovar també que ***d(A,C) = d(A',C'), d(A,B) = d(A',B')*** i ***d(B,C) = d(B',C')***, o el que és el mateix, es conserven les distàncies; per tant, és una isometria.

Com es veu en la figura 87, el sentit d'orientació del pla que determinen el punts ***A***, ***B*** i ***C*** és el mateix que el determinat pels respectius homòlegs d'aquests ***A'***, ***B'*** i ***C'***, és a dir, la translació és una isometria que conserva el sentit d'orientació del pla. Per aquesta raó les translacions s'anomenen moviments directes.

Quan el vector $\vec{v} = \mathbf{0}$ la translació és la transformació identitat, i aleshores per qualsevol punt ***P*** del pla: $T_o(P) = P$.

3.4.1.2. Girs o rotacions

Un gir o rotació de centre ***O*** i angle α, $G_{O,\alpha}$, és un moviment rígid en el pla segons el qual un punt qualsevol d'aquest ***P*** distint de ***O***, es transforma en un altre punt ***P'*** de manera que $P\hat{O}P' = \alpha$, ***d(O,P)=d(O,P')*** i el centre de gir ***O*** és un punt fix que es transforma en ell mateix: $G_{O,\alpha}(O) = O$.

L'angle de gir ve determinat per la seua amplitud i un sentit de gir. Aquest sentit serà negatiu quan coincidisca amb el moviment de les busques del rellotge i positiu en cas contrari.

Per a veure un exemple de gir, treballem amb la figura 88, on el centre de gir és l'origen de coordenades i l'angle de gir és α = **+90º**.

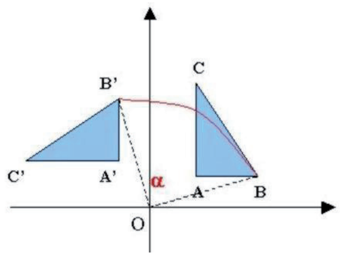


Figura 88. Representació de dos triangles homòlegs per un gir

En aquest cas $G_{O,+90^\circ}(B) = B'$ i la figura homòloga del triangle ***ABC*** és el triangle ***A'B'C'***, és a dir, $G_{O,+90^\circ}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$. Es pot comprovar també que ***d(A,C) = d(A',C'), d(A,B) = d(A',B')*** i ***d(B,C) = d(B',C')***, el que vol dir que es conserven les distàncies; per tant, és una isometria.

Com es veu en la figura 88, el sentit d'orientació del pla que determinen el punts ***A***, ***B*** i ***C*** és el mateix que el determinat pels respectius homòlegs d'aquests ***A'***, ***B'*** i ***C'***, és a dir, el gir és una isometria que conserva el sentit d'orientació del pla. Per aquesta raó els girs s'anomenen també moviments directes.

Quan l'angle és **0º** el gir és la transformació identitat, i per a qualsevol punt ***P*** del pla: $G_{O,0^\circ}(P) = P$.

I quan l'angle és **180º**, el gir s'anomena simetria central: $G_{O,180^\circ} = S_O$. Un exemple d'aquestes transformacions es veu en la figura 89, on **O** és el punt (0,+1).

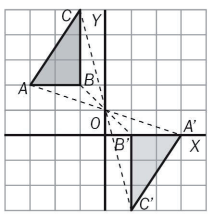


Figura 89. Representació de dos triangles homòlegs per una simetria central (gir de 180º)

3.4.1.3. Simetries axials

Una simetria axial d'eix ***e***, S_e és un moviment rígid en el pla en el qual un punt d'aquest ***P***, exterior a la recta ***e***, es transforma en un altre punt ***P'*** de manera que la recta ***e*** és la mediatriu del segment $\overline{PP'}$ i qualsevol punt ***Q*** de l'eix de simetria es transforma en aquest mateix, $S_e(Q) = Q$, és a dir, l'eix de simetria és homòleg d'ell mateix, $S_e(e) = e$.

Per a veure un exemple de simetria axial, treballem amb la figura 90, on l'eix de simetria és la recta vertical ***e***.

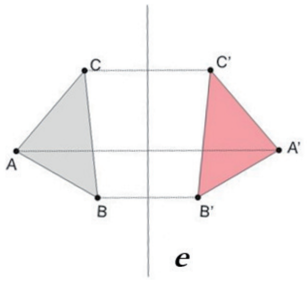


Figura 90. Representació de dos triangles homòlegs per una simetria axial

En aquest cas $S_e(A) = A'$ i la figura homòloga del triangle ***ABC*** és el triangle ***A'B'C'***, és a dir $S_e(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$. Es pot comprovar que ***d(A,C) = d(A',C'), d(A,B) = d(A',B')*** i ***d(B,C) = d(B',C')***, o el que és el mateix es conserven les distàncies, per tant és una isometria.

Com es veu en la figura 90, el sentit d'orientació del pla que determinen el punts ***A***, ***B*** i ***C***, és el contrari del determinat pels respectius homòlegs d'aquests ***A'***, ***B'*** i ***C'***. La simetria axial és, per tant, un moviment que canvia el sentit d'orientació del pla. Per aquesta raó les simetries axials s'anomenen moviments inversos.

3.4.1.4. Composició de moviments en el pla

Si apliquem successivament dos moviments a una figura geomètrica plana obtenim com a resultat una figura congruent amb la primera. Direm que aquestes dues figures són homòlogues mitjançant una composició de moviments. Intuïtivament el que s'hi fa és desplaçar i girar la figura original, o desplaçar-la dues vegades, o girar-la i després desplaçar-la...

Quan componem dues simetries axials obtenim com a resultat translacions o girs segons els eixos de les simetries siguen, respectivament, paral·lels o secants. Podem observar aquestes composicions en la figura 91.

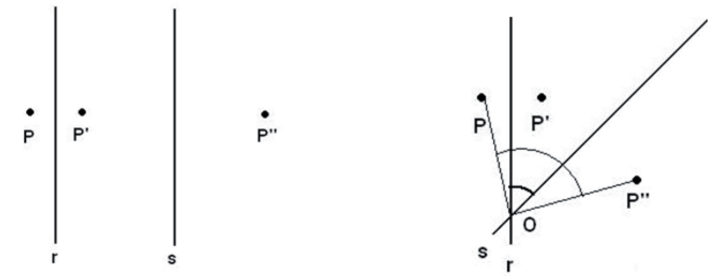


Figura 91. Representació de dos composicions de simetries axials:
eixos paral·lels (esquerra) i eixos secants (dreta)

En el cas dels eixos paral·lels, el punt ***P*** s'ha traslladat a ***P''***, d'acord amb el vector de translació $\overrightarrow{PP''}$, que ve determinat per la seua direcció, perpendicular als eixos de les simetries, pel sentit, origen ***P*** i extrem ***P''*** que té, i pel seu mòdul $\left|\overrightarrow{PP''}\right| = 2 \cdot d(r,s)$.

Si els eixos es tallen en el punt **O** i formen un angle agutb α, el punt ***P*** s'ha transformat en ***P''***, segons un gir de centre **O** i d'angle $P\hat{O}P'' = 2 \cdot \alpha$.

3.4.2. Transformacions equiformes

Una transformació geomètrica equiforme és la que transforma una figura en una altra de la mateixa forma i dimensions proporcionals a les de l'original. Quan dues figures són homòlogues per una transformació equiforme es diu que són semblants.

3.4.2.1. Proporcionalitat de segments

Donats dos segments $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, definim raó entre aquests com la raó numèrica entre les respectives longituds, calculades respecte d'una unitat de mesura comú. És a dir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{d(A,B)}{d(C,D)}$.

Si tenim dos parells de segments $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$, direm que són proporcionals si les raons entre els segments de cada parell són iguals, és a dir: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$. A aquest valor se l'anomena raó de proporcionalitat entre els parells de segments.

3.4.2.2. Teorema de Tales

Una aplicació directa de la definició de proporcionalitat entre segments que acabem de veure és el conegut teorema de Tales: «Si tres rectes paral·leles **a**, **b** i **c** tallen dues rectes secants **r** i **r'**, els segments que es determinen en elles són proporcionals». Una representació geomètrica d'aquest teorema s'ofereix en la figura 92.

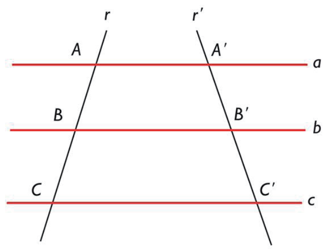


Figura 92. Representació geomètrica del teorema de Tales

De la representació anterior, es desprèn la següent relació entre les mesures dels segments:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Aquest teorema és molt important per a treballar la semblança de figures en general i en particular la de triangles.

3.4.2.3. Homotècies

Una homotècia de centre ***O*** i raó $k \in R$, $\boldsymbol{H_{O,k}}$ és una transformació geomètrica en el pla en la qual un punt qualsevol d'aquest ***P*** distint d'***O***, es transforma en un altre punt ***P'***, situat sobre la recta ***OP*** tal que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ i el punt ***O*** roman fix.

Com s'observa en la figura 93, $\boldsymbol{H_{O,k}(A) = A'}$ i com ***k > 0*** el punt ***A'*** pertany a la semirecta ***OA***. La figura homòloga del pentàgon **ABCDE** és el pentàgon **A'B'C'D'E'**.

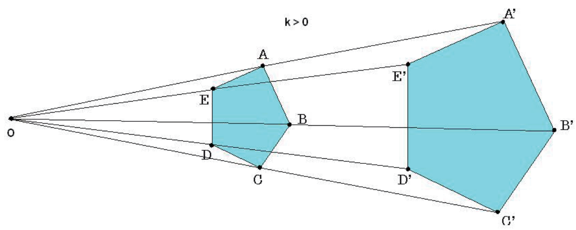


Figura 93. Representació de dos pentàgons homòlegs per una homotècia de raó positiva

Anàlogament, si $k < 0$ el punt ***A'*** pertany a la semirecta oposada a ***OA***, com s'observa en la figura 94.

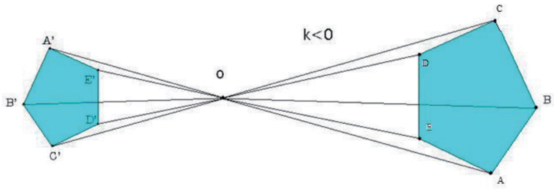


Figura 94. Representació de dos pentàgons homòlegs per una homotècia de raó negativa

Cal notar que si $|k| > 1$ les longituds que es puguen mesurar en la figura homòloga són proporcionalment majors que les corresponents de la figura original, és a dir, la figura homòloga és una ampliació de l'original.

Si $0 < |k| < 1$ les longituds de la figura homòloga són proporcionalment menors que les corresponents de la figura original, és a dir, la figura homòloga és una reducció de l'original.

En les figures anteriors es pot veure una ampliació en el primer cas i una reducció en el segon.

3.4.2.4. Semblances

Una semblança és una transformació geomètrica en el pla que resulta de la composició d'una homotècia i un moviment rígid o a l'inrevés.

Com ja s'ha esmentat, dues figures són semblants quan tenen la mateixa forma i les dimensions dels segments homòlegs són proporcionals (figura 95).

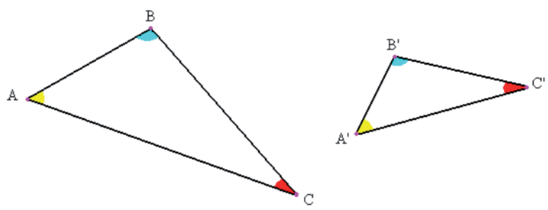


Figura 95. Representació de dos triangles semblants

D'aquesta definició es dedueix que qualsevol homotècia és una semblança on el moviment rígid utilitzat en la composició de transformacions és la identitat.

De la mateixa manera es pot deduir també que un moviment és una semblança l'homotècia de la qual és de raó +1.

3.5. Transformacions geomètriques en l'espai

Totes les transformacions vistes en el pla tenen les seues corresponents en l'espai.

La definició de translació espacial és idèntica a la que s'ha donat per al cas del pla, tenint en compte que les figures i els vectors són tridimensionals.

La definició de gir en l'espai es anàloga a la de gir en el pla, amb la diferència que, en l'espai, es gira al voltant d'un eix que es manté fix, en lloc de girar al voltant d'un punt.

Una simetria axial en l'espai és un gir espacial l'eix del qual és el de la simetria i l'amplitud de l'angle de gir és de 180º.

La definició d'homotècia espacial és anàloga a la que s'ha donat en el cas del pla, tenint en compte que les figures són tridimensionals.

La definició de semblança espacial és idèntica a la que s'ha donat per al cas del pla, tenint en compte que les figures són tridimensionals.

Com que la simetria especular en l'espai és una transformació que no procedeix de la generalització a l'espai de cap transformació plana, és la que es va a tractar de manera més detallada.

3.5.1. Simetria especular

Una simetria especular respecte del pla π, S_π és una transformació geomètrica en l'espai segons la qual un punt d'aquest, ***A***, exterior al pla π, es transforma en un altre punt ***A'*** de manera que π és el pla «mediatriu» del segment $\overline{AA'}$ i qualsevol punt ***Q*** del pla de simetria es transforma en aquest mateix, $S_\pi(Q)=Q$, és a dir, el pla de simetria és homòleg d'ell mateix, $S_\pi(\pi)=\pi$. Un exemple de simetria especular el trobem en la figura 96.

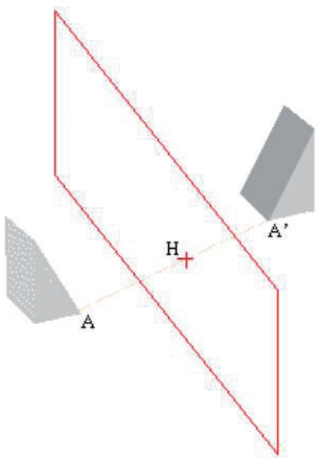


Figura 96. Representació de dos prismes triangulars homòlegs per una simetria especular

4. Capacitats per desenvolupar en l'aula de primària

4.1. Llistat de capacitats

El treball en educació primària referent al bloc de geometria té com a objectiu contribuir a desenvolupar en l'alumnat les capacitats que s'expressen en el següent llistat, que tenen com a finalitat afavorir l'adquisició de la competència matemàtica dels xiquets i les xiquetes i representar una ajuda per a la resta de competències d'aquesta etapa eductiva.

1. Aplicar les nocions d'orientació espacial en la situació del propi cos i dels objectes.
2. Recórrer, organitzar i dibuixar trajectes i laberints. Interpretar i representar croquis i plànols senzills. Escales.
3. Reconèixer i reproduir l'ordre espacial: lineal i cíclic.
4. Adquirir intuïtivament les nocions de punt, línia, superfície i espai i reconèixer-les en el seu entorn.
5. Línies i superfícies obertes i tancades. Aprofundir en les nocions «dins» i «fora» relacionant-les amb els conceptes de frontera i regió.
6. Línies rectes i corbes. Posicions de la línia recta. Paral·lelisme i perpendicularitat de rectes.
7. Distingir i construir superfícies planes i corbes.
8. Identificar, construir i dibuixar angles en el pla. Classificació i posicions dels angles.
9. Localització de punts en el pla utilitzant coordenades cartesianes. Punts cardinals i referències en mapes.
10. Distingir, construir i representar línies poligonals obertes i tancades.
11. Identificar, descriure, construir i dibuixar polígons. Reconèixer els seus elements bàsics: costats, vèrtexs, bases, diagonals, angles. Classificar polígons.
12. Classificacions de triangles i quadrilàters.
13. Relacions entre els costats i entre els angles d'un triangle.
14. Identificar, descriure, construir i dibuixar circumferències i cercles. Reconèixer els seus elements bàsics: centre, radi, diàmetre.
15. Posicions relatives de circumferències i cercles amb rectes: tangent, secant, corda, arc i sector circular.
16. Mesura del contorn i de la superfície de figures geomètriques planes: perímetre i àrea.
17. Identificar, descriure i construir políedres i cossos redons. Reconèixer els seus elements bàsics: arestes, vèrtexs, bases, cares laterals. Classificar cossos geomètrics.
18. Compondre i descompondre figures planes i cossos geomètrics. Completar trencaclosques, puzles, mosaics, maquetes, etc.
19. Adquirir nocions de transformacions geomètriques: simetries, girs, translacions, semblances. Identificar-les en l'entorn familiar i en la natura. Compondre i dibuixar figures simètriques.

4.2. Desenvolupament de les capacitats

L'objectiu d'aquest apartat és treballar alguns dels continguts geomètrics presentats en la part teòrica, de manera que els xiquets i les xiquetes puguen assimilar-los naturalment, identificar-los i reconèixer-los a partir de l'observació en la realitat i la seua manipulació, construcció i representació.

Com a criteri general, amb el treball es persegueix que l'alumnat puga verbalitzar i intercanviar informació sobre tots aquests conceptes, així com utilitzar un vocabulari clar i precís que determine inequívocament cadascun dels objectes matemàtics estudiats. Es considera també com a referent els nivells i les fases d'aprenentatge del model de Van Hiele (1957, 1986).

1. *Aplicar les nocions d'orientació espacial a la situació del propi cos i dels objectes*

Aquesta capacitat es considera el primer pas per a conèixer l'espai i relacionar-se amb ell. Es pretén trobar respostes a les següents preguntes que la realitat ens planteja: On ens trobem? On es troben els altres elements en l'espai?

Es fa necessari, per tant, conèixer les diferents posicions espacials que pot ocupar qualsevol persona o objecte en un context determinat. Cal insistir en els tres nivells de dificultat treballats en educació infantil:

1. El punt de referència és el propi cos del xiquet i s'observen posicions espacials d'altres xiquets o d'objectes respecte d'ell: «La joguina està lluny de tu».
2. El punt de referència és un element aliè al xiquet i s'observen posicions espacials del nen respecte d'alguns objectes: «Posa't al costat de la porta».
3. El punt de referència és novament un element aliè al xiquet, i ara s'observen posicions espacials d'uns altres elements també aliens al xiquet: «Deixa la motxilla sobre la taula».

En 1r de primària, s'han de revisar els dos primers nivells de dificultat i s'ha de prestar més atenció al tercer, així com fer referència a les següents nocions d'orientació espacial:

- Davant/darrere
- Dalt/baix
- Esquerra/dreta
- Prop/lluny
- Junt/separat
- Estar entre
- Estar al voltant de
- Estar enfront de o davant de

El treball s'ha de fer amb moviments i escenificacions, verbalment i amb representacions gràfiques.

Insistirem especialment en les nocions de lateralitat (esquerra i dreta) amb la finalitat d'aconseguir un domini d'aquesta al llarg del dos primers cursos. S'ha de tenir molt present la gran dificultat que per al xiquet o xiqueta representa la identificació de la lateralitat d'unes altres persones, quan aquestes no tenen la mateixa orientació en l'espai que ell o ella.

La dificultat augmenta quan es tracta de reconèixer la lateralitat d'alguns objectes inanimats, sobre tot d'aquells la lateralitat dels quals no ve donada clarament per la forma, per exemple: «Posa't a la dreta de la pilota». En general, la lateralitat de l'objecte es construeix a partir de la lateralitat del xiquet/a, per la qual cosa és imprescindible que aquesta estiga ben construïda (perquè el xiquet o la xiqueta estiga a la dreta de la pilota, aquesta ha d'estar situada a l'esquerra de l'infant).

En 3r curs de primària l'alumnat ha de dominar les esmentades nocions d'orientació espacial i les seues combinacions amb seguretat, per a ser capaços de localitzar de manera precisa tots els elements de l'espai.

2. Recórrer, organitzar i dibuixar trajectes i laberints. Interpretar i representar croquis i plànols senzills. Escales

En aquesta capacitat s'amplia el coneixement de l'orientació espacial, treballada en l'anterior, amb el de l'orientació espacial dinàmica que considera les diferents possibilitats de moviment dins de l'espai.

Començarem amb la revisió dels continguts d'educació infantil relatius als conceptes de trajectes i laberints d'acord amb les següents aproximacions intuïtives: entendrem com a trajecte, recorregut o itinerari un camí que es pot recórrer des d'un punt inicial a un final sense necessitat de retrocedir en cap moment, i com a laberint el recorregut en el qual s'hi poden trobar obstacles que obliguen a retrocedir i buscar un tram del camí alternatiu. Es podria considerar el treball amb laberints com una manera d'aplicar les possibilitats de moviment per l'espai que s'aprenen amb el treball de trajectes o recorreguts.

Es continua l'ampliació del coneixement dels xiquets i xiquetes amb els continguts específics d'educació primària: croquis, plànols, mapes i el concepte d'escala. Entendrem com a croquis un disseny fet sense precisió ni detall que l'individu ha de realitzar per a oferir una informació aproximada referent a un trajecte, paisatge, terreny o objecte.

Quan es vol precisar la informació apareix el concepte d'escala. És l'expressió numèrica d'una proporció que ens permet representar en un mapa, plànol o maqueta, les distancies i dimensions dels trajectes, terrenys, edificis, màquines o objectes originals amb total precisió.

Per mapa s'entén la representació geogràfica de la Terra o part d'aquesta en una superfície plana, i com a plànol es considera la representació esquemàtica, també en una superfície plana, d'un terreny, població, màquina, construcció, etc.

En 1r i 2n curs de primària es reprèn el que s'ha vist en infantil. És important no tant sols que hagen de recórrer camins i laberints, sinó també que els hagen de construir. Cal que siguen capaços d'interpretar itineraris i d'utilitzar vocabulari geomètric per a descriure'ls. A més, també és important que interpreten, descriguen i elaboren croquis. Hi ha moltes activitats a fer, cal intentar que combinen l'aspecte lúdic del treball amb l'objectiu que es vol aconseguir.

Es poden organitzar recorreguts i laberints a dintre de l'aula, en l'edifici del collegi o en el pati, en el barri o en el poble, integrats en algun projecte globalitzat o en alguna eixida relacionada amb el treball de l'aula. En el cas dels recorreguts, hi ha diferents maneres de treballar:

1. Recórrer un camí real sense prendre nota del que s'ha recorregut, simplement senyalitzant amb cordes o línies el trajecte per on es passa i verbalitzant els diferents moviments i canvis de direcció.
2. Completar l'activitat anterior amb la representació gràfica del recorregut en el plànol de manera simultània al desplaçament.
3. Recórrer un camí a partir de les indicacions verbals o escrites (plànol) que han estat proporcionades pel mestre o un altre grup de companys.
4. Recórrer un camí en la realitat i, després de realitzar l'activitat, assenyalar el trajecte sobre el plànol corresponent verbalitzant els diferents moviments realitzats.
5. Recórrer un camí en la realitat i, després de realitzar l'activitat, representar el trajecte o recorregut sobre paper en blanc, elaborar-ne el croquis corresponent i verbalitzar els diferents moviments realitzats.

En el cas dels laberints, hi trobem:

1. Recórrer un laberint real, fet a classe per la mestra o el mestre, amb taules i cadires, amb caixes buides (per exemple d'electrodomèstics), etc.
2. Completar l'activitat anterior amb la representació gràfica del laberint en el plànol de manera simultània al desplaçament.
3. Recórrer un laberint en la realitat i, després de realitzar l'activitat, senyalar el recorregut seguit sobre l'esquema del laberint i verbalitzar els diferents moviments realitzats.
4. A partir d'un laberint representat gràficament, marcar en aquest el camí adequat per a arribar del punt d'eixida al punt d'arribada, i verbalitzar els diferents moviments realitzats.

També cal que ells i elles puguen arribar a construir els seus propis laberints (tant en la realitat com gràficament); per exemple, en grups, per a resoldre'ls individualment o per part d'un altre grup. Això els motivarà a fer-los complicats, si més no que costen de recórrer i aconseguirem que s'involucren més en les activitats.

Un material didàctic que ens pot ajudar a desenvolupar aquest treball és el geoplà. Consisteix en una superfície plana quadrada i rígida en la qual hi ha una xarxa de pivots als quals es poden enganxar gomes elàstiques per a representar-hi diferents figures geomètriques planes. Segons les disposicions dels pivots, els geoplans poden ser de xarxa quadrada (els pivots hi ocupen vèrtexs de quadrats iguals), de xarxa triangular (els pivots hi ocupen vèrtexs de triangles equilàters iguals) i de xarxa circular (els pivots hi ocupen punts d'una o de vàries circumferències concèntriques) (figura 97).

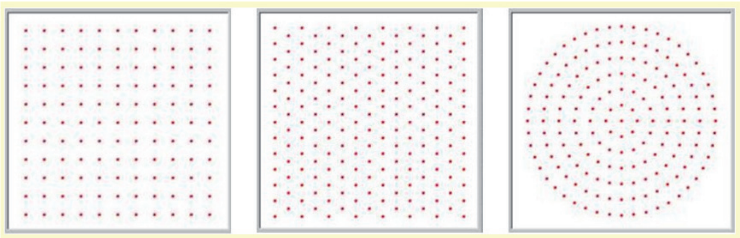


Figura 97. Representació de tres geoplans: xarxa quadrada (esquerra), xarxa triangular (centre) i xarxa circular (dreta)

Amb la utilització d'aquest material, els i les alumnes poden construir diferents trajectes i laberints amb els elàstics i, posteriorment, recórrer-los amb el dit.

Durant els cursos següents es reprodueixen activitats semblants a les anteriors, amb un major grau de dificultat en la interpretació i elaboració de mapes, plànols i croquis.

En 6é curs de primària, i una vegada treballades la proporcionalitat directa i la regla de tres en el bloc de nombres i operacions, es pot fer ús d'aquests conceptes per a construir el d'escala i utilitzar-lo per a millorar el treball amb croquis, plànols i mapes amb més precisió que en els cursos anteriors.

Per a transformar una figura de dues dimensions en una altra també de dues, iniciarem el treball amb escales d'una manera molt senzilla; per exemple, a partir d'algunes situacions de transformar determinades representacions gràfiques en el seu doble, meitat, triple, terç, etc., d'aquestes (ampliar un dibuix d'una revista per a fer un mural, reduir un dibuix d'un cartell per a posar-lo al quadern, etc.).

Continuarem aquest treball i els plantejarem unes altres situacions problemàtiques reals amb escales de major dificultat, per exemple la distribució d'un mobiliari en un plànol d'un habitatge (escala 1:100 o 1:50); el càlcul de la longitud d'un recorregut a partir d'un plànol de la ciutat o d'un mapa de carreteres.

En últim cas i per a relacionar els objectes de tres dimensions amb la representació plana d'aquests, podem desenvolupar activitats en les quals els xiquets i les xiquetes intenten dibuixar a escala alguns objectes reals senzills: la taula d'estudi, la paperera, un armari de classe, etc.

3. Reconèixer i reproduir l'ordre espacial: lineal i cíclic

Aquests conceptes s'han iniciat en educació infantil i es refereixen al reconeixement i reproducció de l'ordre espacial de punts, que complementen, en 1r curs de primària, la idea de localització en l'espai, que es treballa en unes altres capacitats. En aquest sentit, cal recordar que l'ordre lineal es refereix a punts situats sobre una línia oberta, i l'ordre cíclic, sobre una tancada.

El treball consistirà a reproduir aquest ordre, però en situacions diferents, per a ferlos conscients d'allò que representa ordenar en l'espai. Podem relacionar aquestes activitats amb les transformacions topològiques que, malgrat les deformacions produïdes, mantenen l'ordre dels punts.

Es repassa el treball realitzat en educació infantil amb les situacions més senzilles d'ordre lineal i cíclic, i es completen aquests conceptes amb qüestions més específiques d'educació primària.

Així, s'ha de prestar una especial atenció a l'ordre lineal en direccions perpendiculars, a les transformacions d'ordre lineal en cíclic i a l'inrevés i a l'ordre invers tant lineal com cíclic.

Treballarem activitats en les quals l'alumnat haja de reproduir l'ordre d'una línia horitzontal sobre una línia vertical, i a l'inrevés. En qualssevol dels casos és important que els xiquets i les xiquetes decidisquen el primer i darrer element per a reproduir l'ordenació adequadament. Per exemple, a l'aula han arribat paquets de cartolines de colors. Volem endreçar-los en una prestatgeria vertical seguint el mateix ordre de colors de les pastilles de plastilina que hi ha en un altra prestatgeria horitzontal.

Quan es tracta de transformar els tipus d'ordre, cal reproduir l'ordre d'una línia tancada en una altra oberta i a l'inrevés. Cal decidir-hi el primer element i el sentit de l'ordre pels punts que se situen sobre la línia tancada. Un exemple de transformar l'ordre cíclic en lineal serà l'elaboració d'un collar amb boles de colors que s'han d'enfilar en un cordó seguint el model tancat proposat. Per a transformar un ordre lineal en un altre cíclic podem demanar a un xiquet que pose al voltant d'una taula els noms ordenats dels seus companys i companyes que es troben en una filera.

Igualment, es pot treballar la inversió de l'ordre tant en el cas lineal com en el cíclic. Han de reproduir l'ordre dels punts, però en sentit invers, la qual cosa els obliga a modificar les posicions de primer i darrer i les relacions espacials que s'estableixen entre els punts.

Es considera finalitzat el treball d'aquesta capacitat en el 1r curs de primària. Només si es detecta que és necessari s'ha de treballar en el començament del curs següent.

4. *Adquirir intuïtivament les nocions de punt, línia, superfície i espai i reconèixer-les en el seu entorn*

En educació infantil es va iniciar la diferenciació entre els elements geomètrics punt, línia, superfície i espai, a partir del contacte directe dels xiquets i xiquetes amb les seues aproximacions reals i de la reflexió sobre les possibilitats d'aquestes experiències.

En educació primària, i donada la importància que tenen les esmentades nocions per a la construcció de tots els altres conceptes geomètrics, es reprèn el contacte amb elles per a adquirir-les més matemàticament.

En aquest sentit, és important que els i les docents tinguen clara la diferència entre les dimensions dels elements geomètrics que estem estudiant. L'abstracció que exigeix entendre aquestes qüestions no és adequada per l'alumnat de primària, però conèixer-les ajudarà els mestres a mesurar la dificultat que presenten. Matemàticament un punt té dimensió 0, una línia té dimensió 1, una superfície plana 2 i l'espai, dimensió 3.

La percepció dels xiquets i les xiquetes d'educació infantil i primària és global, per tant hem de començar amb una aproximació a l'espai i als cossos o sòlids que ocupen parts d'aquest, posteriorment a les superfícies i, per últim, a les línies i els punts. Cal orientar l'alumnat cap a la intuïció d'aquestes abstraccions a través d'objectes de la realitat, per a saber distingir un cos d'una superfície o d'una línia.

S'inicia aquesta capacitat en el 1r curs de primària, però no es desenvolupa puntualment en ell. Es reprèn mitjançant el treball geomètric desenvolupat en la resta de capacitats que es fa durant tota l'etapa, gràcies al qual es reforça la conceptualització matemàtica de les nocions que ens ocupen. Així es podrà parlar de parts d'espai ocupat, superfícies, línies i punts al treballar diferents cossos geomètrics i figures planes (cares, arestes, costats, vèrtexs, etc.).

Per a interioritzar aquestes nocions geomètriques es fa necessari representar-les, tenint en compte les restriccions esmentades en el punt 2.1, respecte a les figures d'1 i 2 dimensions.

5. *Línies i superfícies obertes i tancades. Aprofundir en les nocions «dins» i «fora» relacionant-les amb els conceptes de frontera i regió*

Intuïtivament, en educació infantil, s'han treballat els conceptes d'obert i tancat aplicats a línies i superfícies, i s'han relacionat amb l'existència o no d'extrems perfectament determinats en les figures (obertes, corda i cara d'un full; tancades, vora d'un cèrcol, superfície exterior d'una pilota, per exemple).

Al voltant d'aquests conceptes s'han d'experimentar els de dins i fora en situacions que ho permeten: línia tancada d'un dibuix, caixa oberta, habitació tancada, etc.; pintar dins de la línia del dibuix, trobar-se dins o fora d'una caixa, de l'aula, de l'edifici del col·legi...

Tots aquests conceptes estan relacionats amb les transformacions topològiques que deformen els objectes sense trencar-los, i es conserven, per tant, les nocions d'obert i tancat i les de regió interior i regió exterior. Es fa necessari parlar del concepte de frontera com un conjunt de punts que separa en dues regions clarament diferenciades una línia, una superfície o l'espai i que és necessari travessar per a anar d'una regió a l'altra.

Però, és clar, la definició anterior va irremeiablement unida a l'element geomètric del qual siga frontera, per això, si parlem de l'espai, la frontera serà una superfície tancada (una caixa tapada, un armari tancat, etc.). En el cas de les superfícies, la frontera la determina una línia tancada (la circumferència del cercle central d'un camp de futbol, un diagrama de Venn, etc.). Podem trobar superfícies sobre les quals algunes línies tancades no siguen frontera. Per exemple, en la superfície d'un flotador o de la càmera d'un pneumàtic, que matemàticament s'anomenen superfícies toroïdals i no són objecte d'estudi en aquesta etapa, cadascuna de les línies tancades representades en la figura 98 no forma frontera per si mateixa.

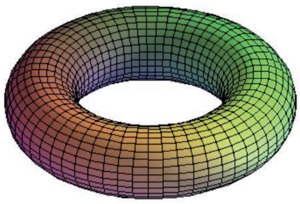


Figura 98. Representació d'una superfície toroïdal

Per últim, quan es tracte de línies (figura 99), la frontera la determina un punt, en el cas de les obertes i dos punts no consecutius, en el de les tancades (establir dos trams en les boles d'un collar obert o tancat, etc.).

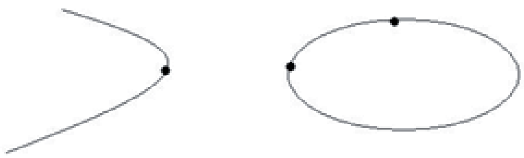


Figura 99. Representació de fronteres en dues línies: oberta (esquerra) i tancada (dreta)

En 1r curs de primària es reprenen les activitats realitzades en educació infantil, relacionades amb aquests conceptes. Així, els xiquets i les xiquetes continuaran amb el reconeixement de diferents superfícies obertes i tancades i se situaran dins o fora d'aquestes, i perfeccionaran el vocabulari referent a aquestes posicions espacials. A més, s'ha d'insistir en situacions en les quals existeix més d'una frontera amb la intenció que puguen reconèixer relacions espacials amb més d'un referent (fora de la caixa però a dintre de l'aula, dins del col·legi però fora del menjador, etc.).

El treball es continua amb fronteres en superfícies, que treballarem directament amb activitats sobre aquestes (acolorir un dibuix fet sense eixir-se'n de la vora, dibuixar elements dins del diagrama d'un conjunt...) o realitzant representacions sobre de paper de posicions reals de diferents elements en l'espai (per exemple, dibuixar les seues posicions o les de determinats objectes respecte d'algunes fronteres en un plànol del col·legi...).

Amb exemples anàlegs al de l'establiment de trams en un collar, es pot treballar el concepte de frontera bé en línies obertes, bé en tancades (determinar dos trams en una filera o en un rogle de persones...).

Amb el treball desenvolupat en aquest curs, l'alumnat ha de dominar els conceptes d'interior i exterior, dins i fora, frontera i regió que s'utilitzaran en la resta de cursos sense necessitat de tornar a treballar-los de manera específica.

6. *Línies rectes i corbes. Posicions de la línia recta. Paral·lelisme i perpendicularitat de rectes*

En educació infantil els xiquets i les xiquetes ja distingeixen entre una línia recta i una corba a partir del seu propi moviment i també per la vista i el tacte. Aquesta distinció és intuïtiva i no hi ha molts problemes per a arribar a reconèixer què és recte i què no ho és.

En 1r curs de primària cal aprofundir un poc més en tot açò i reflexionar al voltant del fet que un seguit de passos sobre una línia recta o un grapat de reglets col·locats en filera indiquen alineació en una única direcció. Quan les activitats es relacionen amb línies corbes les reflexions ens condueixen a concloure que la direcció no es manté constant al llarg de tota la línia.

De manera simultània al treball amb activitats en la realitat, cal representar amb llapis i paper aquestes línies. Així, han de descobrir que per a dibuixar les rectes cal ajudar-se d'algun instrument (per exemple, un regle) que els permeta construir la línia correctament. Si el que volen és representar-la en un lloc concret del full, prèviament caldrà indicar per on ha de passar la línia recta marcant dos punts en el paper, sobre els quals podrem col·locar un regle i dibuixar-la. Evidentment, mai no podrem representar la infinitud d'una recta, per tant seran segments el que realment plasmem en els dibuixos.

Si volem representar línies corbes, les possibilitats es multipliquen, atesa la gran quantitat de tipus diferents de línies corbes que hi ha.

En educació infantil s'han treballat les posicions de la línia recta: vertical, horitzontal i obliqua (inclinada) a partir de les posicions del cos de l'alumnat i d'alguns altres referents (per exemple, persona dreta, arbre, persona gitada, horitzó, perfil d'una escala o tobogan, respectivament). En 1r de primària cal revisar aquests conceptes i relacionar-los amb les direccions espacials determinades per *de dalt a* *baix* per la vertical, *d'esquerra a dreta* per l'horitzontal i marcar la diferència en qualsevol altra direcció que genèricament es denominarà obliqua.

S'ha de completar el treball amb el seu reconeixement en objectes reals i la representació d'algunes línies especials, així com el domini del seu vocabulari associat. Així treballarem:

- Línia trencada: formada per segments de recta concatenats no consecutius. Poden ser obertes o tancades com es pot veure en la figura 100.

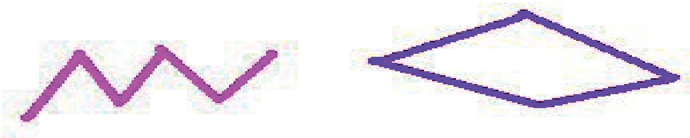


Figura 100. Representació de dues línies trencades: oberta (esquerra) i tancada (dreta)

- Línia mixta: formada per segments de recta i de corba que s'uneixen per un dels extrems d'aquests. Poden ser obertes o tancades, com es pot veure en la figura 101.

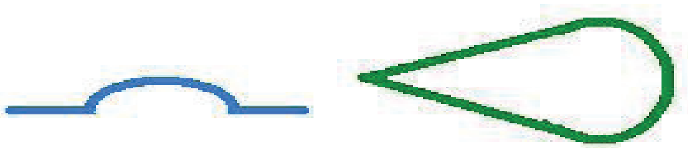


Figura 101. Representació de dues línies mixtes: oberta (esquerra) i tancada (dreta)

- Línia espiral: línia corba descrita per un punt que gira al voltant d'un altre punt o d'un eix del qual s'allunya contínuament i uniformement, com es mostra en la figura 102.

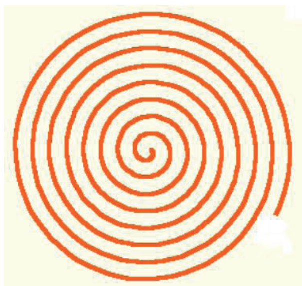


Figura 102. Representació d'una línia espiral

Per a completar el coneixement de la línia recta i les posicions individuals d'aquesta, en 3r i 4t curs de primària, hem de treballar també les posicions relatives de més d'una recta situades en el mateix pla (coplanàries), a partir de l'observació de referents reals i/o gràfics i la reflexió sobre ells (costats paral·lels o no d'una taula o d'un full, voreres d'una carretera, rails del ferrocarril, encreuaments de carrers...).

Així, direm que dues rectes són paral·leles, quan no tenen cap punt en comú i que són secants quan es tallen en un punt.

Una vegada treballats els angles i diferenciats els rectes dels que no ho són, introduirem el concepte de rectes perpendiculars, com les que es tallen formant angles rectes i obliqües com les que es tallen formant angles que no són rectes.

El concepte de paral·lelisme resulta complicat pels xiquets i xiquetes, ja que està associat al concepte d'infinit i exigeix sempre que pensen en la prolongació de les línies que estan observant i aventuren si es tallaran o no més enllà del que es veu, per no poder-se representar mai la línia completament.

Les activitats específiques per treballar tots aquests conceptes (reproduir i classificar figures planes, dibuixar i construir maquetes, reproduir plànols, recórrer diferents itineraris, representar trajectes...) poden trobar-se immerses en altres ja descrites o què es descriuran posteriorment. En elles s'ha d'insistir en la verbalització correcta dels esmentats termes i en el treball amb llapis i paper, així com amb programes informàtics de geometria dinàmica, que ajudaran a fixar-los.

En 5é i 6é curs de primària es completa el coneixement de les línies rectes paral·leles i perpendiculars amb la utilització d'instruments de dibuix per a construir-les correctament. En la figura 103 es veuen exemples de processos respectius de construcció d'aquestes rectes amb l'ajut de l'escaire i el cartabó.

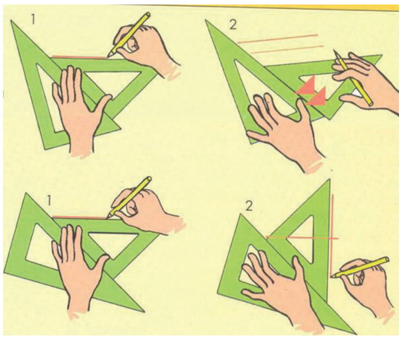


Figura 103. Representació d'un procés per dibuixar paral·leles i d'un altre per a perpendiculars

Un cas particular del traçat de línies rectes perpendiculars és la construcció de la mediatriu d'un segment (vegeu 3.1.1), trobant el punt mig d'aquest amb un regle i traçant la perpendicular amb l'escaire i el cartabó.

Amb compàs i regle també podrem construir la mediatriu, fent centre en els extrems del segment i dibuixant dos arcs de circumferència amb el mateix radi (major que la meitat del segment), que es tallen en dos punts. La recta que uneix aquests dos punts és la mediatriu del segment, com s'observa en la figura 104.

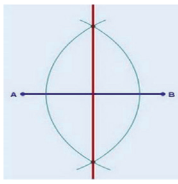


Figura 104. Representació d'un procés per dibuixar perpendiculars

7. Distingir i construir superfícies planes i corbes

Aquesta capacitat s'ha treballat en educació infantil de manera molt intuïtiva, passant la mà per sobre dels dos tipus de superfícies i observant les diferències de contacte amb elles.

En 1r i 2n curs de primària s'ha de continuar el reforç d'aquestes idees i s'ha d'arribar a l'abstracció matemàtica de les diferències anteriors a partir de la possibilitat o impossibilitat de dibuixar línies rectes en qualsevol direcció damunt de les superfícies planes o corbes, respectivament.

Tot això s'ha de realitzar de manera manipulativa, les han de reconèixer al seu voltant a partir de l'observació d'objectes reals (superfícies d'una pissarra, d'un pot de refresc, de la part superior d'una taula, d'un got o ampolla, de caixes, d'un baló...) i construir-les amb diferents materials (paper, cartró, cartolina, tela, argila, plastilina, etc.) han d'associar aquesta tasca a la confecció d'objectes, maquetes i construccions. També se representaran gràficament quan siga necessari, dins de les possibilitats dels xiquets i xiquetes d'aquests cursos.

8. Identificar, construir i dibuixar angles en el pla. Classificació i posicions dels angles

En educació infantil i en 1r i 2n curs de primària, quan es treballen experiències d'exploració de l'espai i de coneixement de figures planes, els xiquets i les xiquetes han pres contacte amb els angles i han utilitzat aquest concepte per a referir-se a cantons o puntes (vèrtexs) dels cossos i de les figures planes.

A partir de 3r de primària podem partir d'alguns treballs amb rectes secants per a fixar l'atenció de l'alumnat en les quatre regions que es determinen en el pla sempre que s'hi tallen dues rectes. Algunes situacions d'aquest tipus poden estar relacionades, per exemple, amb la representació esquemàtica de dos camins que creuen un parc i que es tallen en el seu punt central, amb la representació gràfica d'itineraris coincidents en algun punt o de les línies divisòries d'un camp d'esports, o del plànol d'un edifici...

En el procés d'identificar i diferenciar aquestes regions apareix un nou concepte anomenat angle que, com es definia en el punt 3.2.1 d'aquest tema, coincidirà amb cadascuna de les regions incloent-hi les semirectes que la determinen.

Anàlogament amb el que passa amb les rectes i les semirectes, el concepte d'angle també porta implícit el d'infinit. Això produeix que siga impossible representar un angle realment i que calga treballar amb la superfície limitada del paper, la pissarra o les pantalles dels dispositius electrònics.

Com que les regions seran diferents en cadascuna de les situacions, apareixeran distints tipus d'angles i, per tant, cal definir-los i classificar-los com a rectes, aguts, obtusos, plans, còncaus i complets, com s'ha fet en l'esmentat punt 3.2.1.

Per a treballar amb l'alumnat aquestes definicions i les seues diferències cal observar els distints angles que poden formar els braços amb el tronc del cos, les cames, les busques d'un rellotge, una tisora oberta, les varetes d'un ventall... Podem ajudar els xiquets i les xiquetes a estudiar els tipus d'angles amb la utilització d'activitats de construcció (amb cordes, amb plegat de paper...) i de la seua representació en un geoplà o mitjançant programes informàtics de geometria, que possibiliten visualitzar diferents conceptes (angles, paral·lelisme, etc.), sense la necessitat de dibuixar, que a aquestes edats, és una dificultat afegida. En totes aquestes activitats cal insistir-hi que l'angle és la porció de la superfície limitada pels costats, i no només aquestes dues semirectes.

Alguns dels exemples esmentats es poden veure en la figura 105.

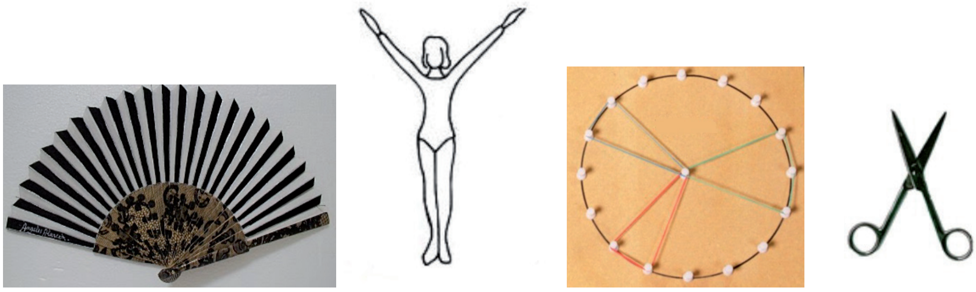


Figura 105. Representació de visualitzacions d'angles en objectes reals

A més, hem de treballar els angles en les activitats de disseny i construcció de maquetes i figures planes que s'han de desenvolupar també en la capacitat 18. Totes aquestes activitats cal completar-les amb la utilització correcta del vocabulari associat per part dels infants.

De la mateixa manera que s'estudien les posicions de dues rectes, a partir de 5é cal també parar atenció a les posicions de dos angles i trobar angles consecutius, adjacents o oposats pel vèrtex. Així, direm que dos angles són consecutius quan tenen el vèrtex i un costat comú i els altres dos costats estan en distinta regió del pla respecte a la recta de l'esmentat costat comú; direm que són adjacents quan són consecutius i els costats no comuns pertanyen a la mateixa recta, i que són oposats pel vèrtex quan tenen en comú aquest punt i els costats d'un angle són semirectes oposades als costats de l'altre (figura 106).

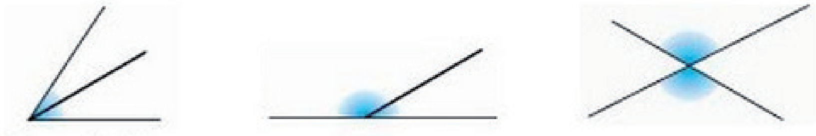


Figura 106. Representació dels costats de dos angles consecutius (esquerra), adjacents (centre) i oposats pel vèrtex (dreta)

Podem trobar contextos concrets on l'alumnat de primària visualitze aquests tipus d'angles en el treball de construcció de sanefes i mosaics, i en l'observació dels plànols d'algunes vivendes. En la figura 107 es mostren alguns exemples.

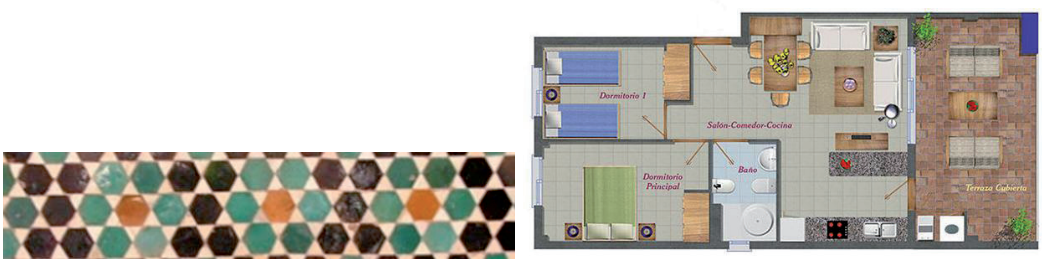


Figura 107. Representació d'exemples reals d'angles consecutius, adjacents i oposats pel vèrtex

A partir de 5é de primària es completen tots aquests conceptes i s'associen els diferents tipus d'angles amb la seua amplitud angular, els mesuraments i les unitats de la qual s'hauran estudiat en el bloc de continguts de mesura.

Novament, cal tornar a reflexionar al voltant de la idea d'angle com una superfície i no com les dues semirectes que el limiten.

Cap al final de l'etapa, també es pot introduir el concepte de bisectriu d'un angle (vegeu 3.2.1) i construir-la mitjançant diferents procediments.

Un molt elemental consisteix en plegar un paper en el què hi ha dibuixat un angle, fent coincidir els seus costats i obtenint així un eix de simetria plana (vegeu 3.4.1.3) de la figura, que és la bisectriu de l'angle.

Un altre utilitza un semicercle graduat. Amb aquest instrument es mesura l'amplitud angular, es divideix per la meitat i es marca a l'interior de l'angle un punt que correspon a aquesta quantitat de graus. La recta que uneix aquest punt amb el vèrtex de l'angle és la bisectriu que es buscava.

Amb compàs i regle també podrem construir la bisectriu, fent centre en el vèrtex de l'angle i trobant dos punts, un en cada costat, equidistants del vèrtex. Fent centre en aquests dos punts es dibuixen dos arcs de circumferència amb el mateix radi, que es tallen en un punt. La recta que uneix aquest punt amb el vèrtex de l'angle és la seua bisectriu, com s'observa en la figura 108.

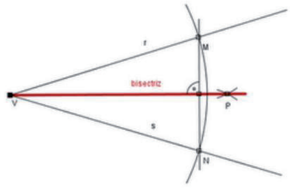


Figura 108. Representació de la construcció de la bisectriu d'un angle amb regle i compàs

9. Localització de punts en el pla utilitzant coordenades cartesianes. Punts cardinals i referències en mapes

Perquè l'alumnat aprenga com localitzar la situació d'un punt determinat (el col-legi, sa casa, el parc, una muntanya, un llac, el naixement d'un riu...) en un plànol d'una ciutat o poble, o en un mapa d'una zona geogràfica, cal introduir els xiquets i xiquetes en la utilització de les coordenades cartesianes.

A partir de 3r curs de primària podem aprofitar el joc «d'enfonsar la flota» o una activitat d'orientació amb plànol quadriculat per a fer-los veure que necessitem dues informacions, una referent a la direcció horitzontal i una altra a la vertical, per a trobar un punt concret en el pla. Habitualment, en els dos casos presentats, les dades vénen donades en forma de lletres majúscules i nombres, com es mostra en la figura 109.

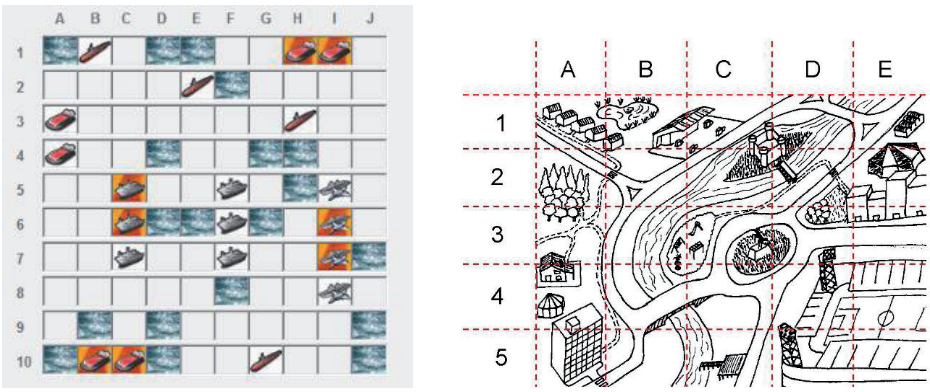


Figura 109. Representació d'un joc i d'un plànol en els què s'usen coordenades en el pla

Com que el coneixement de les coordenades és intuïtiu a partir del joc o del plànol, cal aproximar-los, en 5é de primària, a la seua matematització, amb la introducció de les coordenades cartesianes (René Descartes, 1596-1650).

El sistema de referència es construeix a partir de dues rectes perpendiculars, anomenades eixos, com es va especificar en el punt 3.1.1 del tema.

Com els xiquets i les xiquetes no coneixen els nombres enters fins al darrer curs de l'etapa, treballarem fins eixe moment sols amb la part positiva dels eixos, és a dir, considerarem únicament el primer quadrant del pla cartesià, com es mostra en la figura 110.

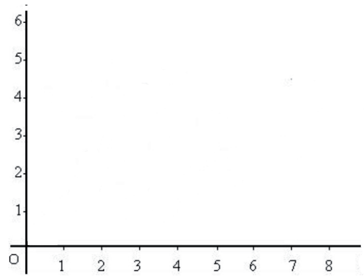


Figura 110. Representació del 1r quadrant del pla cartesià

A partir d'activitats variades en les quals calga trobar indrets o objectes en alguns plànols o bé representar en el pla diferents llocs trobats a la realitat, treballarem aquest contingut, sabent que en el primer cas els xiquets i les xiquetes utilitzaran un sistema de coordenades ja creat, mentre que en el segon, en el moment de representar la realitat, cal que establisquen un sistema de coordenades que els permeta situar-hi els punts considerats.

En 6é curs es pot completar el treball amb plànols i mapes introduint els punts cardinals i l'aplicació d'aquests per a localitzar diferents punts o llocs en les representacions de la realitat que s'estiguen utilitzant. Així, l'alumnat podrà desplaçar-se per un plànol o mapa tot seguint indicacions que es puguen referir a moviments en direcció horitzontal o vertical, matisats pel punt cardinal cap al qual es dirigeixen. Un exemple de mapa amb els punts cardinals assenyalats el podem trobar en la figura 111.

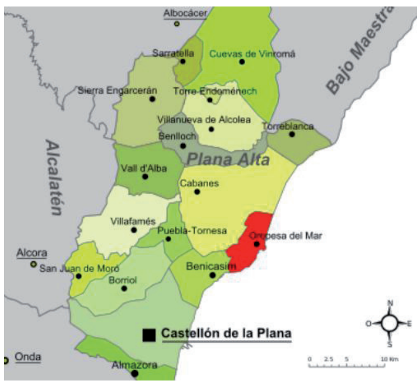


Figura 111. Representació d'un mapa de la província de Castelló amb indicació dels punts cardinals

De manera interdisciplinària i en activitats que puguen requerir orientació a camp obert, es pot completar la construcció d'aquest coneixement amb la utilització i maneig de la brúixola.

En aquest curs i aprofitant el coneixement dels nombres enters, es pot ampliar la representació dels eixos cartesians amb la incorporació de les semirectes corresponents als nombres negatius, completant així els quatre quadrants que representen el pla, com es mostra en la figura 112. D'aquesta manera, els xiquets i les xiquetes disposaran d'una ajuda que els permetrà representar qualsevol punt del pla les coordenades del qual siguen nombres enters i preparar, així, les representacions posteriors en educació secundària, que puguen integrar coordenades racionals i reals.

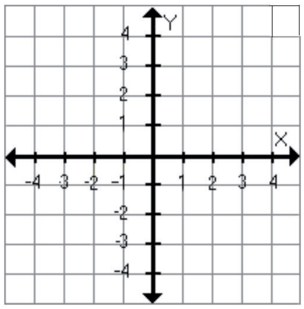
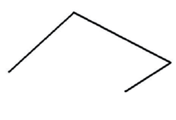
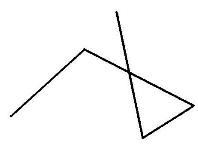
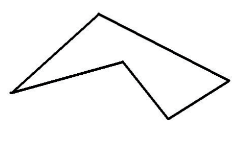
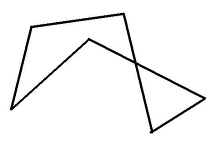


Figura 112. Representació dels eixos cartesians

10. Distingir, construir i representar línies poligonals obertes i tancades

En 1r i 2n curs de primària, i relacionat amb el treball de trajectes i laberints desenvolupat en la capacitat 2, podem demanar que l'alumnat faça recorreguts compostos per trams rectes que van canviant de direcció en diferents moments. Quan ho fan en la realitat han d'assenyalar el camí recorregut amb un fil o corda que indique per on han passat (intentant que el fil es quede fix en els punts en els que canvie la direcció). Si representen un desplaçament determinat en un croquis, plànol o mapa, han de dibuixar correctament els trams rectes que constitueixen el camí o itinerari seguit.

Continuant amb la nomenclatura de la capacitat 6, les línies originades en aquests recorreguts s'anomenen trencades. En aquest moment i com a preparació del concepte de polígon, introduirem una nova denominació per a elles: línies poligonals. D'acord amb el punt 3.2.2, hem de treballar amb els xiquets i les xiquetes, tant en la realitat com en representacions planes, línies poligonals obertes i tancades i línies poligonals simples i no simples, així com el seu vocabulari corresponent.

	Simple	No simple
Oberta		
Tancada		

A més, per a treballar els diferents tipus de línies poligonals, podem ajudar-nos també de la construcció d'aquestes amb geoplans.

Tanmateix podem fer servir un material didàctic manipulatiu anomenat llistons geomètrics (figura 113), compost per llistons de plàstic o fusta de distintes longituds i colors, foradats en diferents punts de la seua llargària, que s'articulen uns amb altres per mitjà d'enquadernadors o de tornavisos i rosques.

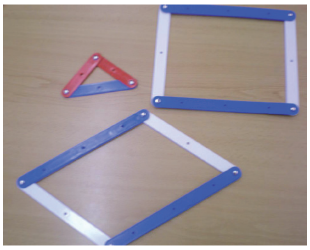


Figura 113. Llistons geomètrics (Geo Strip, fabricat per Invicta Plastics Ltd.)

11. Identificar, descriure, construir i dibuixar polígons. Reconèixer els seus elements bàsics: costats, vèrtexs, bases, diagonals, angles. Classificar polígons

En educació infantil s'ha treballat la identificació, descripció, construcció i representació de triangles, quadrats, rectangles i cercles, dins de les possibilitats de l'alumnat d'aquesta etapa educativa.

Emmarcat en l'estudi de les figures planes, en aquesta capacitat ens centrem en els polígons i en la 14 dediquem atenció a la circumferència i al cercle.

En 1r curs de primària, i continuant amb activitats semblants a les realitzades en infantil, els xiquets i les xiquetes han d'identificar triangles, quadrats i rectangles en objectes reals (caixes de diferents tipus, senyals de tràfec, aliments, etc.). Es repassaran també els noms de les figures, el recompte dels costats i vèrtexs i les diferències essencials entre elles (nombre de costats i la seua longitud).

A partir dels objectes reals en els quals s'haja detectat la presència d'aquestes figures i per a apropar-nos a la bidimensionalitat dels polígons, cal realitzar representacions gràfiques, situant sobre el paper els esmentats objectes i bordejant el seu contorn amb un llapis de manera que aquest quede dibuixat. Per a completar la representació acolorirem l'interior del contorn i reconeixerem la figura representada com la porció pintada del paper.

Després d'aquest treball amb els tres tipus de figures esmentades, reflexionarem amb l'alumnat sobre les línies que les limiten amb la intenció de descobrir que totes són línies poligonals tancades simples. Aquest descobriment ens permet incorporar el nom de polígon per a referir-nos a qualsevol dels tipus de figures anteriors i introduir-hi el concepte de polígon com la porció de pla limitada per una línia poligonal tancada simple, incloent-hi la línia. En aquest moment, cal donar a conèixer els termes costat i vèrtex i relacionar-los amb els segments de la línia poligonal i els extrems d'aquests segments, respectivament.

Dins de l'observació dels objectes reals en 2n curs, caldrà posar-los en contacte amb polígons de quatre costats que no siguen quadrats ni rectangles. S'ha de procedir de manera anàloga que en els casos anteriors, per introduir els rombes, romboides, trapezis i trapezoides i reconèixer-los també dins del concepte general de polígons. Per a presentar aquestes noves figures el mestre o la mestra ha d'elegir una de les dues classificacions presentades en el punt 3.2.2.2 i utilitzar les definicions corresponents. Aquesta elecció s'hauria de prendre en consens amb la resta de docents del centre, perquè afecta a tots els cursos d'educació primària.

Si fixem l'atenció en el nombre de costats d'aquests darrers polígons, ens adonarem que coincideix amb el dels quadrats i rectangles estudiats anteriorment i introduirem el nom de quadrilàters per a referir-nos a tots ells.

Les activitats d'identificació i descripció dels polígons s'han començat a partir d'objectes reals. Hem de continuar amb la manipulació de materials didàctics estructurats que els representen (figura 114) i observar amb ells la superfície, els costats i els vèrtexs que corresponen a cada polígon.

Figura 114. Figures geomètriques planes (Geometric Shapes, fabricat per Ness Arnold Ltd.)

Relacionat amb la confecció de puzles, trencaclosques, mosaics, maquetes... hem de treballar la construcció de polígons. A més, amb diferents materials: fils, cordes, furgadents, llistons geomètrics, geoplans, etc., podem representar el seu contorn i insistirem que quan ens referim als polígons cal considerar sempre la superfície limitada per la línia poligonal, així com observar les condicions que han de complir els «segments» utilitzats per a construir cadascun d'ells.

Cal dedicar atenció també a la representació gràfica d'aquestes figures planes. Es pot utilitzar en un principi un model perquè el puguen copiar i més endavant deixar-los dibuixar les figures lliurement a partir de la imatge mental que se n'hagen format.

En 3r i 4t de primària cal reforçar i completar el coneixement dels quadrilàters i comprovar que els coneixen i diferencien adequadament en funció de la classificació elegida.

Relacionant el concepte de quadrilàter amb el de paral·lelisme de rectes que es treballa en els mateixos cursos, cal reconèixer el paral·lelisme de costats oposats en alguns d'aquests polígons. Així, observarem que els trapezis tenen sols un parell de costats paral·lels mentre que els quadrats, rectangles, rombes i romboides en tenen dos. Per aquest fet agrupem els darrers quatre quadrilàters amb el nom de paral·lelograms (vegeu 3.2.2.2).

Per a ampliar el coneixement a la resta de polígons, seguirem un procediment anàleg a l'utilitzat per a introduir els triangles i els quadrilàters. Així, cercarem objectes reals (caixes, senyals de circulació, aliments, parterres d'alguns parcs, cartells, façanes d'edificis, etc.) que ens apropen als polígons sense delimitar la quantitat de costats i, a partir de la representació en el paper de la vora de la figura, trobarem polígons amb diferent nombre de costats. Per anomenar-los introduirem el vocabulari corresponent, que ve donat etimològicament pel nombre d'angles de la figura (vegeu 3.2.2), encara que usualment es relaciona amb el nombre de costats (la qual cosa no planteja problemes atesa la coincidència d'aquestes dues quantitats). Així, utilitzarem els mots: pentàgon, hexàgon, heptàgon, etc.

Hi ha aproximacions de polígons que són difícils de trobar en la realitat (heptàgon, enneàgon, etc.). Per a aquests casos i per a completar la informació al voltant dels polígons es pot recórrer a material didàctic (figura 114) on es poden trobar aquestes figures.

El treball amb materials didàctics manipulatius i programes informàtics de geometria que utilitzem per representar i construir polígons, s'ha de desenvolupar en aquests cursos amb els mateixos criteris que en els anteriors. A més s'han de treballar els conceptes de diagonal (vegeu 3.2.2) i d'eixos de simetria (vegeu 3.2.3.3) dels polígons (la simetria s'estudiarà en la capacitat 19).

L'alumnat també ha d'identificar com a base d'un polígon el costat que ocupa una posició horitzontal inferior respecte de l'observador. En principi, qualsevol costat pot actuar com a base. Excepcionalment, en el cas del trapezi sols es consideren bases els costats paral·lels.

Tant en les activitats de reconeixement com en les de construcció dels polígons, cal que els xiquets i les xiquetes observen la igualtat o desigualtat de les longituds dels costats o de les amplituds dels seus angles. Així, hi ha alguns que tenen iguals només les longituds dels costats (rombe comú), altres que tenen iguals només les amplituds dels angles (rectangle comú) i altres que acompleixen les dues igualtats (quadrat). Introduirem en 4t de primària el nom de polígons regulars (vegeu 3.2.2) per a referir-nos als darrers i han de reconèixer, construir i dibuixar polígons de diferents nombres de costats, tant regulars com irregulars. Cal tenir en compte les limitacions de l'alumnat d'aquest curs a l'hora de dibuixar manualment els regulars.

Un altre criteri per a classificar els polígons, a partir de 3r de primària, ha de tenir en compte la seua concavitat i convexitat (vegeu 3.2). Una activitat intuïtiva per a iniciar el treball dels esmentats conceptes pot incloure la mobilitat de les xiquetes i els xiquets. En recórrer la línia exterior del camp de futbol o bàsquet del pati del seu col·legi, que és un polígon convex, el sentit de gir en els vèrtexs sempre és el mateix (figura 115).

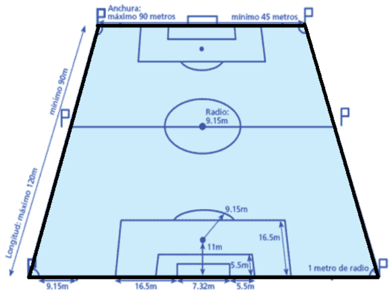


Figura 115. Representació d'un camp de futbol

Quan la línia que es recorre és la del contorn de l'edifici del col·legi o d'un altre proper (caldrà que la planta siga còncava) s'observarà que hi ha alguns vèrtexs en els quals s'ha de canviar el sentit de gir respecte al del vèrtex anterior (figura 116).

Figura 116. Representació del plànol d'un col·legi

Després de descobrir que hi ha dos tipus de polígons, els còncaus i els convexos, caldrà que els construïsquen (amb paper, cartolina, fils, cordes, geoplans...), els dibuixen i els anomenen afegint el cognom còncau o convex a la paraula que els identifica pel seu nombre d'angles o de costats (pentàgon convex, heptàgon còncau...). Observaran també que en els polígons còncaus podem trobar almenys un angle interior major que un angle pla, és a dir, un angle còncau (figura 117).

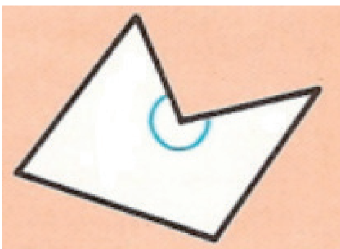


Figura 117. Representació d'un polígon còncau

En 5é i 6é de primària, a partir de l'experimentació, cal prestar una atenció més matemàtica als conceptes sobre polígons treballats en els cursos anteriors, repassar-los i reforçar-ne el coneixement, intentant elaborar expressions dels conceptes que s'aproximen a les definicions, també cal tenir en compte el desenvolupament matemàtic i cognitiu de l'alumnat.

A l'hora de treballar la construcció i la representació gràfica dels polígons hem de considerar que, en aquests cursos, els xiquets i les xiquetes estudien la mesura de l'amplitud angular i que, amb el coneixement de la suma dels angles interiors d'un polígon (es treballa en la capacitat 13) i la utilització del transportador d'angles a més de la del regle i el compàs, poden dibuixar polígons regulars seguint un procediment adient a les seues possibilitats.

Per a complementar tots aquests aspectes (o qüestions) hem d'intentar que l'alumnat arribe a comprovar que en un polígon convex tots els segments que uneixen qualsevol parell de punts de la figura, estan continguts en ella, però en els còncaus existeixen alguns dels esmentats segments que no ho estan (vegeu 3.2).

12. Classificacions de triangles i quadrilàters

En 3r i 4t curs de primària, en les activitats d'identificació, descripció, construcció i dibuix dels triangles (necessàries per a la realització d'algunes activitats de confecció de maquetes, mosaics, murals..., i d'altres treballs en l'aula) els xiquets i les xiquetes trobaran distints tipus d'aquestes figures i observaran les diferències entre elles (vegeu 3.2.2.1).

Així, en referència als costats apareixeran triangles que tenen tres costats iguals, dos costats iguals o cap costat igual. Els anomenarem triangles equilàters, isòsceles i escalens respectivament. L'exigència d'igualtat d'almenys dos costats o de sols dos costats en un triangle isòsceles determina si ens referim a la classificació inclusiva o a l'excloent.

Respecte als angles trobaran triangles que tenen els tres angles aguts, un angle recte o un angle obtús. En aquest cas, els noms corresponents seran triangles acutangles, rectangles i obtusangles, respectivament.

En observar tots aquests tipus de triangles, l'alumnat comprovarà per superposició la igualtat dels angles de qualsevol triangle equilàter, per la qual cosa han de reconèixer aquests triangles també com a equiangles, és a dir, com a polígons regulars.

En el treball corresponent als quadrilàters i de manera anàloga al desenvolupat pels triangles, els xiquets i les xiquetes reflexionaran sobre la igualtat o desigualtat de les longituds dels costats de les diferents figures i de les amplituds dels angles (vegeu 3.2.2.2).

Així, han de reconèixer la igualtat dels quatre costats en els quadrats i els rombes i la de cada parell de costats oposats en els rectangles i romboides. Han de relacionar aquest fet amb el paral·lelisme dels costats oposats i amb el concepte de paral·lelograms esmentat en la capacitat anterior.

Respecte als angles han d'observar que els quadrats i els rectangles tenen els quatre angles rectes i que els rombes i romboides més comuns tenen dos oposats aguts i els altres dos obtusos.

Totes aquestes consideracions ens permetran identificar el quadrat com l'únic quadrilàter regular.

En 5é i 6é curs hem de procedir al reforç de tots els conceptes anteriors amb les classificacions de triangles i quadrilàters inclusives o excloents, segons l'elecció feta pel claustre de mestres del col·legi (vegeu 3.2.2.1 i 3.2.2.2).

En el cas dels triangles hem d'insistir en què la classificació en funció dels angles és excloent. Si ens fixem en els costats hem d'aprofundir en el fet que cada classe de triangles és independent de les altres si treballem amb la classificació excloent, mentre que tots els triangles equilàters són també isòsceles, si ho fem amb la inclusiva.

Per a ajudar els xiquets i les xiquetes a deduir aquest darrer fet podem dur a terme la següent experiència: agafem tres llistons geomètrics de la mateixa longitud i unim cadascun dels dos extrems d'un d'aquests amb un extrem dels altres dos, com es mostra a la part esquerra de la figura 118 (assenyalat amb la lletra **A** l'extrem lliure d'un dels llistons).

Si per a aconseguir el triangle que determinen els tres llistons iguals desplacem el punt A al llarg de l'horitzontal, obtindrem successius triangles isòsceles (imatges centrals de la figura 118) abans d'arribar al triangle equilàter que s'aconseguirà quan el punt A coincidisca amb l'extrem lliure del llistó horitzontal (part dreta de la figura 118). Aleshores, el triangle equilàter és un dels infinits triangles isòsceles que podem trobar.

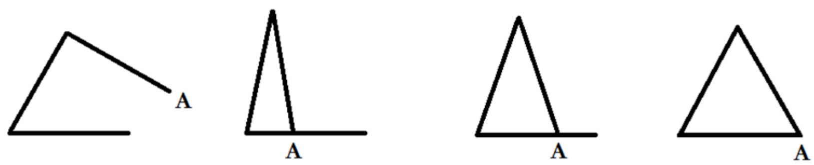


Figura 118. Representació d'un triangle equilàter com element de la classe dels isòsceles

Pel que fa a la classificació dels quadrilàters si atenem el paral·lelisme dels seus costats, reforçarem la idea de l'existència de tres classes independents: parallelograms, trapezis i trapezoides.

En referència als paral·lelograms, hem de treballar l'existència de quatre classes independents, si hem optat per la classificació excloent, i d'una classe general, els romboides, que conté les classes dels rectangles i dels rombes que tenen en comú la família dels quadrats, si hem elegit la classificació inclusiva.

Es poden visualitzar les relacions inclusives anteriors mitjançant activitats de projeccions d'ombres produïdes per diferents figures a l'exposar-les a la llum del sol (vegeu 2.2). Així, si partim d'un romboide comú i modifiquem la seua posició respecte del pla de projecció de l'ombra, obtindrem un rectangle o un rombe, segons el cas. D'altra banda, si partim d'un rectangle o d'un rombe i procedim de manera anàloga, podem obtenir un quadrat en qualssevol dels dos casos.

13. Relacions entre els costats i entre els angles d'un triangle

A partir de 5é de primària i com a complement del coneixement dels triangles treballarem les relacions entre els costats d'aquests. L'alumnat comprovarà que la longitud d'un costat sempre és menor que la suma de les longituds dels altres dos i major que la diferència (desigualtat triangular).

Ho podríem veure experimentalment utilitzant llistons geomètrics o altres materials per a construir els contorns dels triangles (trossos de corda de distintes mides, pals de fusta...) i comprovant que no es pot portar a terme l'activitat si les longituds previstes pels costats no acompleixen les condicions anteriors.

Per exemple, se'ls proporcionarien cordes per a tancar un recinte triangular al pati (disseny d'un jardí triangular, o de l'hort escolar...). Les longituds de les cordes d'uns grups de xiquets podrien ser 3, 4 i 5 m i d'altres de 2, 10 i 7 m. La possibilitat o impossibilitat de construir els contorns dels triangles amb aquestes mesures permet comprovar les relacions inicials. Posteriorment, en classe, s'ha de reforçar aquesta idea i treballar amb ternes de llistons de diferents longituds, unes permetran la construcció de les vores dels triangles i d'altres no.

Un altre exemple podria ser davant d'una situació de càlcul de la longitud d'un recorregut en un mapa de carreteres, l'alumnat pot comprovar que la distància en línia recta entre dues ciutats és sempre menor que la que es recorre si es passa per una altra ciutat no alineada amb elles. Aquest fet ens permet reforçar la primera de les relacions entre els costats d'un triangle que hem enunciat abans.

Com a conseqüència d'aquestes activitats cal aconseguir que només coneixent les longituds dels tres costats siguen capaços d'afirmar raonadament si es pot o no construir el triangle i que basen la seua afirmació en les relacions numèriques entre aquestes longituds.

Relacionada amb les esmentades activitats es pot també comprovar que, a més de les relacions anteriors, perquè el triangle que han de construir siga rectangle s'ha de complir la igualtat anomenada teorema de Pitàgores: la suma dels quadrats de les longituds dels costats que formen l'angle recte, catets, serà igual al quadrat de la longitud de l'altre costat, hipotenusa (vegeu 3.2.2.1).

En els angles interiors d'un triangle, i també en 5é o 6é curs de primària, l'alumnat ha de comprovar manipulativament que la suma de les amplituds dels tres angles és 180º.

Per a realitzar aquesta activitat necessitem paper o cartolina, retoladors i tisores. En un primer moment cada xiquet o xiqueta dibuixa un triangle sense indicacions de com han de ser les longituds dels costats. A continuació marquen els angles interiors i tallen la figura en tres trossos, cadascun dels quals ha de contenir un dels angles del triangle. Per últim, cal que posen com a consecutius els tres angles assenyalats i s'adonen que formen un angle pla, per tant de 180º. En la figura 119 es mostra aquest procés.

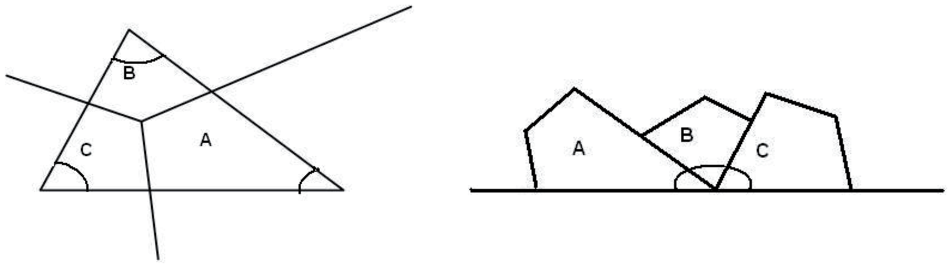


Figura 119. Representació del procés manipulatiu per comprovar que la suma dels angles interiors d'un triangle és 180º

També podrien arribar a descobrir el mateix fet relacionant el bloc de continguts de mesura amb el de geometria, mesurant els angles interiors d'un triangle amb el transportador d'angles o semicercle graduat i sumant-los després.

Nota: Es podria usar aquest resultat per a comprovar la relació entre el nombre de costats d'un polígon convex i la suma dels seus angles interiors. Per recolzar l'explicació usarem la figura 120, que representa el cas particular d'un pentàgon. Cal adonar-se que el polígon es pot descompondre en tants triangles com costats té (elegint un punt del seu interior i unint-lo en tots els vèrtex). Per calcular la suma dels angles interiors del polígon, caldrà multiplicar els 180º de cada triangle pel nombre de triangles que hi ha i restar a aquesta quantitat els 360º (2 × 180º) de l'angle complet format pels angles de tots els triangles que tenen el vèrtex en el punt interior elegit anteriorment. Així comproven la relació coneguda com «la suma dels angles interiors d'un polígon convex de *n* costats és (n-2)·180º».

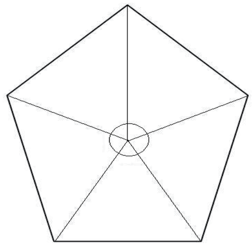


Figura 120. Representació d'un pentàgon descompost en triangles

14. Identificar, descriure, construir i dibuixar circumferències i cercles. Reconèixer els seus elements bàsics: centre, radi, diàmetre

En 1r curs de primària i com a continuació del treball fet a educació infantil, s'ha de treballar el cercle, a partir de la identificació d'aquest en objectes reals que roden (galetes redones, monedes, ampolles o pots...). De manera anàloga al procés que es va fer amb els polígons i per a apropar-nos a la bidimensionalitat del cercle, cal fer un treball de representació gràfica traslladant sobre el paper els esmentats objectes i recorrent el seu contorn amb un llapis de manera que quede dibuixat. Per a completar la representació acolorirem l'interior del contorn i reconeixerem el cercle com la porció pintada del paper.

El coneixement d'aquesta figura es treballarà també utilitzant materials didàctics estructurats (blocs lògics, figures geomètriques planes, etc.), perquè s'adonen que no ni ha vèrtexs ni costats rectes, sinó que tot el contorn és corbat i, per tant, el permet rodar. Cal verbalitzar totes aquestes descobertes, perquè siguen capaços de descriure les característiques del cercle i expressar les seues diferències amb els polígons.

També cal treballar la construcció (amb cordes, geoplans de xarxa circular, etc.) i la representació gràfica (amb dibuixos a mà alçada) del cercle, reconeixent les limitacions de l'alumnat a l'hora de fer-ho.

A partir de 2n curs, quan repassem el concepte de cercle, hem de fixar l'atenció en el seu contorn. Introduirem el nom d'aquesta figura, circumferència, i la reconeixerem com una línia tancada corba plana i simple. Per a treballar la representació de la circumferència, sense utilitzar encara el compàs, podem ajudar-nos de la següent activitat: es lliga un llapis a cada extrem d'un cordell no elàstic, es fixa un d'aquests en un punt del paper i es fa rodar l'altre al voltant del primer mantenint tens el cordell i representant algunes de les posicions que ocupa aquest. En finalitzar l'acció obtindrem el punt que ha marcat el llapis fix, anomenat centre de la circumferència, la línia marcada per l'altre llapis, que és la circumferència i alguns segments que uneixen el centre amb punts de la circumferència i que s'anomenen radis (figura 121). Cal notar que el radi i el centre d'una circumferència també són el radi i el centre del cercle que aquesta determina.

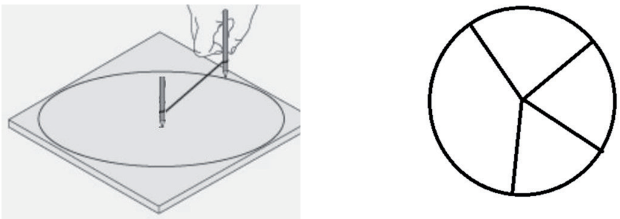


Figura 121. Representació del procés per construir una circumferència
i els seus elements amb llapis i cordell

La reflexió amb l'alumnat sobre aquesta activitat ens permetrà obtenir, com a conseqüència, que la distancia dels punts de la circumferència al seu centre es manté constant i reconèixer aquesta corba com la determinada per tots els punts del pla que equidisten del centre. Qualsevol segment que uneix dos d'aquests punts i que passa pel centre de la circumferència, s'anomena diàmetre.

En els següents cursos es repassen els conceptes estudiats i a més, a 4t de primària s'hi introdueix l'ús del compàs i el regle per a construir i dibuixar circumferències, cercles i els seus elements bàsics.

15. *Posicions relatives de circumferències i cercles amb rectes: tangent, secant, corda, arc i sector circular*

Una vegada treballades la línia recta, la circumferència i el cercle de manera individual, hem d'estudiar les posicions relatives que poden ocupar en el pla les línies rectes en relació a les circumferències i cercles, i els elements geomètrics que determinen.

A partir de 3r curs de primària i per a completar el treball realitzat en la capacitat anterior, s'ha d'ampliar-hi el coneixement de la circumferència amb els conceptes de recta secant, corda i arc, que es generen quan una recta talla una circumferència en dos dels seus punts (vegeu 3.1.3).

Un exemple per a visualitzar en la realitat aquests conceptes el podem trobar en les línies que delimiten les diferents zones d'un camp de futbol, en col·laboració interdisciplinària amb l'assignatura d'Educació Física. L'activitat consistiria en observar les línies al camp del pati del col·legi i adonar-nos que podem dibuixar-hi una circumferència si fem centre en el punt de penal que, en intersecar-se amb la línia de l'àrea de penal, determina un arc i una corda (figura 122). De la mateixa manera, en la circumferència central del camp s'observa l'existència d'una corda que passa pel centre i, per tant, és un diàmetre, i conseqüentment de dos arcs que són dues semicircumferències.

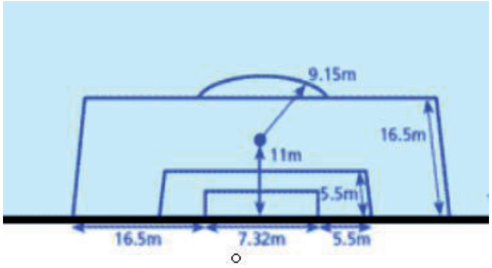


Figura 122. Representació dels elements geomètrics presents en l'*àrea* d'un camp de futbol

Una vegada observats i treballats aquests conceptes, els poden usar en el moment de fer construccions o representacions gràfiques en les quals intervinguen (dissenyar un jardí, un parc, reproduir el croquis d'un objecte o d'un lloc, els xamfrans dels carrers que conflueixen en una rotonda, etc.).

També a partir de 3r curs el treball s'ha d'ampliar amb els conceptes de recta tangent i sector circular (vegeu 3.1.3 i 3.2.4). Els animarem a cercar aquestes figures en la realitat.

Per a apropar-nos a la idea de recta tangent a una circumferència, es pot observar la línia recta que descriuria un ciclista en la calçada i el punt de contacte amb la circumferència de cada roda (com es veu en la figura 123). En el moment que vulguen representar una situació semblant amb l'ajut d'un compàs i un regle, cal que s'adonen que la circumferència i la recta sols han de tenir en comú un punt, anomenat punt de tangència.

Figura 123. Representació de la tangència de dues rodes d'una bicicleta amb la línia que descriu el seu recorregut

Per a trobar sectors circulars han d'observar figures que els continguen, com per exemple una porció de pizza, de formatge, de pastís... Per apropar-nos a la seua bidimensionalitat, cal traslladar els esmentats objectes sobre el paper i dibuixar-ne el seu contorn, acolorint el seu interior. Convé recordar que el sector circular és tota la figura dibuixada i acolorida, no només el contorn.

Seguidament, cal trobar aquests sectors en representacions de dues dimensions, com per exemple el recorregut d'una porta en un plànol d'una casa, un diagrama de sectors (estadística descriptiva), la zona de posicionament del baló en el llançament de córner del futbol, etc., i hem d'insistir que el sector circular el determinen, en un cercle, dos dels seus radis i l'arc de la circumferència del contorn que uneix els extrems no comuns dels radis. En alguns d'aquests exemples trobaran sectors circulars convexos i altres que són còncaus (vegeu 3.2.4).

A partir d'exemples que poden aparèixer en l'aula (diagrames de sectors on un d'ells representa una freqüència del 50 % (figura 124), mitja pizza, mig formatge...) es pot introduir el concepte de semicercle com el sector circular que es determina quan els dos radis es troben alineats formant un diàmetre.

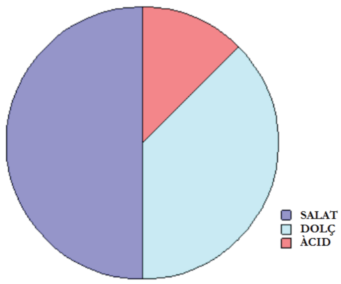


Figura 124. Representació d'un semicercle a partir d'un diagrama de sectors

16. *Mesura del contorn i de la superfície de figures geomètriques planes: perímetre i àrea*

A partir de 2n curs de primària cal fer un treball relacionat amb la magnitud longitud que conduesca l'alumnat cap a la noció de perímetre i, a partir de 3r, l'equivalent amb la superfície i l'àrea.

Hi ha una part de manipulació d'aquests conceptes que l'han poguda experimentar en el treball indicat dins del tema de «Magnituds i mesura» (Pérez, Alcalde i Lorenzo, 2014). Exemples de tot açò poden ser: trobar la quantitat de corda suficient per a tancar un recinte, saber la longitud d'un cable que ha de recórrer les parets d'una habitació..., calcular la superfície de paper continu necessari per a cobrir el terra en una activitat concreta, etc.

Per construir el concepte de perímetre, en un primer moment hem de treballar la mesura de la longitud del contorn en polígons i recordar totes aquestes activitats prèvies. Com que saben utilitzar el regle, els podem plantejar una activitat en la qual es necessite saber la mesura de la longitud dels costats d'una figura poligonal; per exemple, les parets d'una casa en un plànol. Cal que prenguen nota de cadascuna de les mesures dels costats i, per a saber la quantitat final, han de sumar-les. La conclusió d'aquesta i altres activitats semblants ha de ser que el perímetre d'un polígon és la suma de les mesures de les longituds dels seus costats.

En els darrers cursos de primària, ens plantegem mesurar la longitud del contorn d'una figura circular, per exemple, d'un bidó cilíndric que es troba al pati. Usarem una corda o una cinta mètrica flexible per a trobar-la i el resultat l'obtindran de manera relativament senzilla. Però, quan l'activitat és amb llapis i paper hi ha una dificultat afegida: és molt complicat envoltar una circumferència representada en un paper amb un instrument de mesura de longitud, quan aquesta té, per exemple, 3 cm de radi. Després de deixar-los que intenten resoldre el dubte de manera autònoma i, evidentment, no trobar una manera fiable de fer-ho, els hem d'indicar que deu d'haver-hi una drecera en les matemàtiques que ens ajude a trobar aquesta mesura. Hem de realitzar una recerca en diferents fonts d'informació (llibres de text, Internet...) i hi trobarem una expressió un poc innovadora per a calcular aquesta longitud: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r}$, on r és el radi de la circumferència, i $\pi = 3{,}141592...$ Sembla que π és un valor constant, que no és fruit de l'observació o de la mesura d'una circumferència concreta. Per a comprovar-ho hem de resoldre dos dubtes. El primer és veure si funciona, recalculant amb aquesta expressió les mesures que sí que havíem pogut obtenir, com el de l'exemple del bidó cilíndric. El segon és saber si π val sempre igual, independentment de la circumferència.

Per a contestar a la primera de les preguntes, s'hi ha de trobar el radi del bidó. Cal que experimenten i arriben a la conclusió que trobar el diàmetre és una tasca molt més senzilla que no pas la de trobar el radi quan es desconeix el centre (sols és necessari trobar la distància més llarga entre dos punts de la circumferència amb una corda o cinta mètrica). Una vegada trobat el valor del diàmetre, només cal dividir per dos aquesta mesura per a saber-ne el radi. En el moment que usen l'expressió de la longitud de la circumferència, s'adonaran que cal multiplicar per dos el producte del radi i de π, així que ràpidament veuran que cal multiplicar el diàmetre per π. En fer el càlcul i comprovar que els resulta, aproximadament, el mateix que havien mesurat amb la cinta flexible, obtindran la resposta a la primera pregunta.

Per a contestar a la segona, la del valor fix de π, els podem proposar l'activitat següent: cal que porten a classe objectes, la base d'algun dels quals siga un cercle. També han de portar fil, regle i calculadora. Han d'ajustar-hi el fil al contorn del cercle i l'han d'estirar i mesurar-ne la longitud amb el regle, n'obtindran, així, la longitud de la circumferència contorn del cercle. Com que poden calcular amb el regle el diàmetre de les circumferències manipulades, han de dividir la longitud estimada anterior pel valor del diàmetre calculat.

Cada alumne ha fet els càlculs amb circumferències diferents i, aproximadament, tots obtindran el mateix valor de π. Així hauran comprovat (dins de les seues possibilitats) que aquest valor és sempre constant i la relació numèrica de proporcionalitat entre la longitud de la circumferència i la longitud del diàmetre és precisament el valor trobat, π.

Com a comentari final, els hem de fer relacionar aquest contingut amb el de nombres racionals i cal que s'adonen que aquest nombre té infinites xifres decimals no periòdiques. Si tenen curiositat poden consultar en Internet per a trobar-hi expressions de π amb la quantitat de decimals que vulguen.

Per a aproximar-nos al càlcul de l'àrea de figures planes, el treball ha de partir, novament, del que s'ha fet per a la mesura de superfícies (Pérez, Alcalde i Lorenzo, 2014). Es pot recordar, per exemple, com es mesurava la superfície d'una habitació rectangular, és a dir, que si tenim un rectangle, l'àrea d'aquest s'obtindrà amb el producte de les mesures de les longituds dels costats. Cal fer la reflexió que en el cas del quadrat, la manera de calcular la seua àrea és semblant. També s'hi havia introduït l'àrea d'un triangle, com el producte de les longituds de la base per la de l'altura dividit entre dos.

Una vegada recordats aquests coneixements previs respecte de l'àrea, els podem proposar l'activitat d'haver de mesurar la superfície d'una figura poligonal irregular (inicialment, però, que es puga descompondre en triangles rectangles, quadrats i/o rectangles). Aquesta activitat pot estar emmarcada en saber la superfície d'un pis en un plànol, d'un parc on aniran d'excursió, etc. Per grups i de manera autònoma, cal que troben les seus descomposicions en figures d'àrees conegudes. Com que cada grup pot fer-ne unes de diferents, serà interessant la tasca posterior de debat i fer una crítica constructiva dels resultats de cada grup, per a adonar-nos que la mesura de la superfície final és la mateixa. En activitats successives cal que, en les descomposicions de les figures, hi apareguen triangles que no siguen directament rectangles i que hagen de resoldre el dilema de trobar l'altura amb perpendiculars (vegeu 3.2.2.1).

Només ens queda fer alguna reflexió respecte dels polígons regulars de més de quatre costats. És evident que poden dividir-los en figures conegudes de moltes maneres, però s'ha d'encaminar el diàleg cap a l'obtenció d'una forma de dividir els polígons que simplifica enormement la tasca. Es tracta de dividir-los en triangles iguals i que tots tinguen un vèrtex en el centre del polígon regular. Se'ns plantegen dos casos en el moment de trobar aquest centre:

a) Quan el polígon regular té un nombre parell de costats, per exemple, l'hexàgon, han de trobar-hi dues diagonals que siguen alhora eixos de simetria de la figura. El punt en comú d'aquestes dues diagonals és el centre. Una vegada trobat el centre, cal unir aquest punt amb els vèrtexs del polígon. Ja el tenen dividit en triangles isòsceles, cadascun dels quals està format per dos triangles rectangles. Treballant diferents exemples els farem arribar a la conclusió que només en el cas de l'hexàgon aquests triangles són també equilàters.

b) Quan el polígon regular té un nombre imparell de costats, el fet de trobar el centre implica intersecar dos eixos de simetria del polígon. Han d'investigar-hi diferents possibilitats i arribaran a trobar-lo de manera pràctica, utilitzant qualsevol dels següents mètodes (encara que desconeguen formalment els conceptes geomètrics que estan usant): (b.1) coneixen el concepte d'eix de simetria (recta que uneix un vèrtex amb el punt mitjà del seu costat oposat) i l'apliquen, (b.2) troben el centre com a punt d'intersecció de les bisectrius de qualssevol dos angles interiors del polígon, o (b.3) el troben com a punt d'intersecció de les mediatrius de qualsevol parell de costats del polígon.

Quan el que es vol és mesurar la superfície d'un cercle, el problema de no poder trobar una descomposició en figures la superfície de les quals siga fàcil de calcular ens porta, necessàriament, a introduir l'expressió $\pi \cdot \mathbf{r^2}$ per a utilitzar-la en el càlcul de l'àrea d'aquesta figura (probablement els xiquets i les xiquetes l'han trobat ja en el treball previ de descoberta de l'expressió de la longitud de la circumferència). La comprovació experimental d'aquesta fórmula implica l'aproximació a l'àrea del cercle per successions d'àrees de polígons inscrits i circumscrits a la circumferència contorn del cercle, la qual cosa queda fora de les possibilitats de l'alumnat de primària.

17. Identificar, descriure i construir políedres i cossos redons. Reconèixer els seus elements bàsics: arestes, vèrtexs, bases, cares laterals. Classificar cossos geomètrics

En educació infantil, s'ha treballat la identificació i descripció de cubs i esferes a partir d'objectes reals i d'alguns materials didàctics, dins de les possibilitats dels xiquets i les xiquetes d'aquesta etapa educativa.

En 1r i 2n curs de primària i mitjançant un treball semblant al realitzat en l'etapa anterior, l'alumnat ha d'observar i manipular objectes reals presents en l'aula o que puguen dur de sa casa. Trobaran objectes on totes les cares siguen polígons (caixes de medecines, de sabates, de llet o suc, de joguines, de galetes, de xocolata, objectes de decoració...) i d'altres on totes les cares siguen superfícies corbes i/o planes no poligonals (pot de tomata, de refrescs, ampolles de diferents líquids, gots, carmanyoles...). Els xiquets i les xiquetes verbalitzaran les característiques que diferencien un tipus d'objectes de l'altre, i arribaran al descobriment de dos grans grups de sòlids geomètrics: els políedres i els cossos redons, que poden diferenciar més clarament observant-los amb materials didàctics específics que els reprodueixen amb exactitud (figura 125).

Figura 125. Figures geomètriques en l'entorn (fabricat per Akros)

Cap a 2n curs respecte dels políedres es revisarà el coneixement d'aquests cossos i s'ha de fixar l'atenció en dos grans grups: els prismes i les piràmides. Han d'observar i manipular novament diversos objectes reals per trobar i verbalitzar les seues diferències pel que fa al nombre de bases i al tipus de cares laterals que presenten, i distingir-ne clarament les cares que són bàsiques de les que no ho són. Completarem aquest treball amb la construcció dels esmentats cossos utilitzant argila, plastilina…, dins de les possibilitats dels xiquets i les xiquetes d'aquesta edat i amb la manipulació i estudi dels materials didàctics estructurats corresponents.

Per a realitzar aquesta feina amb l'alumnat és imprescindible introduir el vocabulari associat als políedres i començar a utilitzar les paraules: cara, base, aresta, vèrtex, sense que siga necessari que els alumnes el dominen. Els ensenyarem la manera d'anomenar els prismes i les piràmides en funció de les seues bases i segons els polígons coneguts, com un primer pas cap a l'ampliació d'aquests coneixements en cursos posteriors.

En l'estudi dels prismes i en referència a un dels objectes que s'ha manipulat molt freqüentment en la realitat (caixa de sabates, medecines...), introduirem el nom d'ortòedres per a referir-nos als prismes que tenen totes les cares rectangulars.

També en 2n de primària i com a continuació del treball realitzat en els cursos anteriors, han de trobar-ne, a més de les esferes, dos grans grups de cossos redons: els cilindres i els cons. Han d'observar i manipular novament diversos objectes reals per a trobar i verbalitzar les seues diferències respecte al nombre de bases i al tipus de cares laterals que presenten i han de reforçar també aquest treball amb la manipulació i estudi dels materials didàctics corresponents.

A partir dels objectes reals i dels materials didàctics en els quals s'han visualitzat aquestes figures i per a apropar-nos a la seua tridimensionalitat, cal fer-hi un treball aproximat de construcció. Podem usar com a ajuda materials que existeixen en el mercat, com els que es mostren en les figures 126 y 127, que els permeten visualitzar alhora el cos compacte i el seu desenvolupament pla.

Figura 126. Cossos geomètrics compactes
(Set of 10 Geometric Shapes, fabricat per Learnings Resources Ltd)

Figura 127. Cossos geomètrics desplegables
(Folding Geometric Shapes, fabricat per Learnings Resources Ltd)

També es poden utilitzar uns altres materials didàctics que proporcionen els elements per a poder-se enganxar, necessaris per a muntar els cossos a partir de les seues cares (per exemple, els polígons trepats, que ens permeten construir políedres, però no cossos redons), com es pot apreciar en la figura 128. Una vegada finalitzat el muntatge s'ha de tornar a reflexionar al voltant de l'activitat realitzada i d'allò que els ha semblat interessant: arestes, vèrtexs, cares..., i recordar que el cos és tot l'espai que envolten les cares que hem ajustat.

Figura 128. Polígons Trepats

En 3r i 4t de primària, i de manera anàloga al treball realitzat en els dos cursos anteriors, s'ha de revisar el coneixement dels cossos ja treballats i ampliar l'estudi als prismes i piràmides les bases dels quals són polígons que s'estudiaran en aquests cursos (pentàgon, hexàgon...). S'ha d'insistir en les diferències entre els políedres i els cossos redons i dins de cadascun d'aquests dos grups en les dels distints cossos que contenen: prismes i piràmides, cons i cilindres, respectivament, a més, és clar, del cub i l'esfera.

Cal reforçar totes aquestes qüestions amb materials didàctics específics (manipulatius i informàtics) i la utilització correcta, per part dels xiquets i les xiquetes, del vocabulari associat a aquests cossos: bases, cares, vèrtexs, arestes, per a aconseguir la identificació i la descripció correcta dels mateixos.

Una vegada coneguts els conceptes de radi i diàmetre d'un cercle, s'han d'introduir aquests elements en referència als cossos redons. Així, parlarem de radi d'un cilindre i d'un con, com el de les seues bases. Els conceptes de diàmetre i radi d'una esfera s'han de construir generalitzant els corresponents conceptes referits al cercle.

Completarem el treball amb la construcció d'alguns dels cossos estudiats i usarem els mateixos materials descrits en els cursos anteriors, ampliant-los amb la utilització d'altres on la dificultat per a enganxar-hi les peces és major, però els sòlids que en resulten s'assemblen més al cossos teòrics i fins i tot permeten la construcció de cossos redons. En el cas dels poliedres es pretén que preparen els desenvolupaments plans dels cossos i a partir d'aquests que els construïsquen. En el dels cossos redons no es podrà fer d'aquesta manera, ja que hi ha peces que no són planes (figura 129).

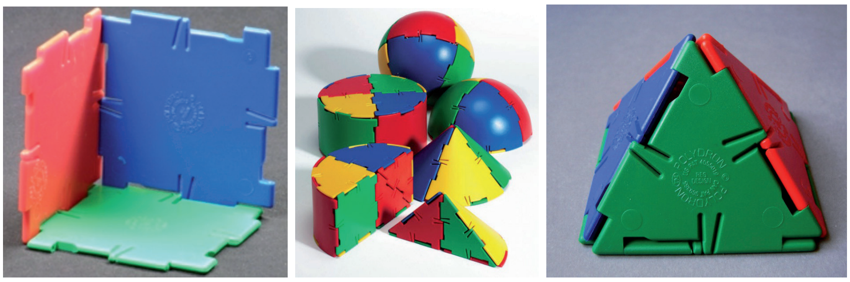


Figura 129. Polydron (fabricat per Polydron International Ltd.)

Cal tornar a fer la reflexió sobre el fet que el cos geomètric no és buit, sinó massís, és a dir, que no és sols la superfície que el delimita, és la porció de l'espai envoltada per l'esmentada superfície.

Per a reforçar aquesta qüestió intentarem realitzar construccions d'aquests cossos amb materials que completen la idea de sòlid que volem transmetre (plastilina, argila...). Per a distingir què seria la frontera del cos, es podria pintar la figura amb un color diferent al de la plastilina, i una vegada pintada tota la superfície exterior del cos, tallar-lo i comprovar que només hi ha una finíssima capa pintada i per dins del cos el color és l'inicial de la plastilina.

En 5é i 6é de primària, s'hi ha d'aprofundir en el treball realitzat en els cursos anteriors i des de la manipulació de materials didàctics específics introduir l'alumnat en reflexions un poc més profundes al voltant dels elements bàsics del cossos geomètrics que treballem.

Així, respecte dels vèrtexs cal que observen que hi ha cossos geomètrics on tots ells són igual d'importants, però hi ha d'altres on hi ha un vèrtex que és més significatiu (piràmides) i altres cossos que en tenen sols un (cons). En els dos darrers casos, aquest punt s'anomena *vèrtex* de la figura corresponent.

Anàlogament, trobaran que hi ha figures on totes les arestes són de la mateixa longitud (cas de tots els políedres regulars) i unes altres en les quals no ocorre això.

En aquest darrer cas, de vegades existeixen arestes d'igual longitud que delimiten cares característiques (cas de polígons regulars en les cares bàsiques de prismes i piràmides).

Han d'observar també que en els prismes sempre trobem parells de cares enfrontades que són paral·leles, mentre que en les piràmides mai no podem trobar-hi cares que ho siguen. A més, en els cossos redons, es pot diferenciar entre les cares planes que segueixen sent-ho quan es treballa el desenvolupament pla del cos que delimiten i les cares corbes que es converteixen en planes en el mateix cas (cilindres i cons) o les que no poden fer-ho (la superfície esfèrica no es pot desenvolupar en dues dimensions).

Totes aquestes reflexions completen la idea que l'alumnat construeix de les figures estudiades i ens permeten reforçar el seu coneixement, així com tenir cada vegada més clara la classificació de les figures en políedres i cossos redons i en les diferents classes que trobem dins de cadascun d'aquests grups: prismes i piràmides per al primer cas i cilindres, cons i esferes per al segon.

Podem completar aquesta classificació estudiant amb els xiquets i les xiquetes el grup particular de prismes que reben el nom de paral·lelepípedes (vegeu 3.3.2.1) i classificar-ne els diferents tipus que existeixen, seguint patrons semblants als que vam utilitzar per a classificar els paral·lelograms.

Així, trobarem els paral·lelepípedes generals (les seues cares són paral·lelograms), els cubs (totes les cares quadrades), els ortòedres (totes les cares rectangulars) i els rombòedres (totes les cares ròmbiques). Aquesta classificació ha de ser inclusiva o excloent en funció de l'elegida per als paral·lelograms. En el cas de l'excloent cada classe serà disjunta amb les altres. En el de la inclusiva els cubs estan en la intersecció de la classe dels ortòedres amb la dels rombòedres.

Per a complementar tot aquest treball, hauríem d'intentar que l'alumnat arribe a comprovar que un políedre també pot ser convex o còncau, amb un treball semblant al fet en els polígons.

Aprofitant les observacions dels xiquets i les xiquetes sobre cares i arestes i basant-nos en la regularitat del cub, podem introduir els altres quatre políedres regulars existents: tetràedre, octàedre, dodecàedre i icosàedre, i utilitzar les seues representacions amb materials didàctics adequats.

En aquests cursos hem d'aconseguir que utilitzen el vocabulari corresponent als cossos geomètrics amb precisió i seguretat, i que siguen capaços d'aproximar-se de manera clara a les definicions acadèmiques dels conceptes estudiats.

El treball d'aquesta capacitat hauria de ampliar-se amb el càlcul de les àrees lateral i total dels cossos geomètrics estudiats, partint del coneixement previ del càlcul d'àrees de figures planes estudiades anteriorment (triangle, paral·lelograms i cercle).

A partir de l'estudi de les unitats de volum tractades en el bloc de mesura de magnituds i relacionant la magnitud volum amb les tres dimensions que la defineixen podem treballar amb l'alumnat, al final de l'etapa, el càlcul dels volums d'alguns dels cossos esmentats en el paràgraf anterior. Cal insistir en les idees de construcció de l'expressió del volum tant en prismes i cilindres, com en piràmides i cons. Pel que fa als primers, s'ha de fixar la mirada en la construcció de la idea de volum a partir de la multiplicació de l'àrea de la base per la seua altura. Pel que fa als segons, es pot observar experimentalment la relació d'1/3 que hi ha entre el volum d'una piràmide respecte d'un prisma i d'un con respecte d'un cilindre, quan tinguen les mateixes base i altura, respectivament.

18. *Compondre i descompondre figures planes i cossos geomètrics. Completar trencaclosques, puzles, mosaics, maquetes, etc.*

En educació infantil s'ha iniciat la composició i descomposició de figures planes, dins de les possibilitats dels xiquets i les xiquetes d'aquesta etapa educativa. Aquestes activitats les podem emmarcar dins del treball relacionat amb mosaics i trencaclosques, que desenvolupen la visió espacial i el reconeixement d'una imatge a partir de fragments.

En l'etapa de primària es continua amb aquest treball i s'aprofundeix en la línia de compondre i descompondre figures planes.

Pel que fa a la descoberta en la realitat dels continguts que volem treballar, els farem observar el seu voltant per a descobrir-hi situacions on la superfície haja estat recoberta per figures planes (taulells del terra, dibuixos en catifes, cortines, paper pintat...).

Per manipular i crear diferents composicions amb figures geomètriques planes, usarem materials didàctics que ens proporcionen peces de diferents mesures i colors com, per exemple, el que apareix en la figura 130.

Figura 130. Mosaic múltiple (Playshapes, fabricat per Invicta Plastics Ltd.)

Del treball lliure que puga realitzar l'alumnat, hauran de treure conclusions:

1. Quan componem dos quadrats de la mateixa mida per qualsevol dels costats (col·locar-los l'un al costat de l'altre), obtenim un rectangle. Si els fem coincidir per dos vèrtexs qualssevol, obtenim una figura plana, que no en té nom conegut, però que es còncava.

2. Quan componem un quadrat amb un rectangle, hi ha diverses possibilitats:
   a) Si hi ha dos costats d'igual mesura i els fem coincidir, s'obté un nou rectangle.
   b) Si no hi ha dos costats d'igual mesura, es compon una figura còncava, que no en té de nom.
   c) Si els fem coincidir per dos vèrtexs, novament la figura composta és còncava.

3. Si són dos rectangles:
   a) Si no tenen costats d'igual mesura: la figura resultant és una figura plana còncava sense nom.
   b) Si tenen dos costats d'igual mesura: la figura resultant és un altre rectangle.
   c) Si són dos rectangles iguals:
      i. Si els componem per costats de la mateixa mida, obtenim rectangles novament.
      ii. En el cas que el costat curt del rectangle siga, exactament, la meitat de longitud del costat llarg, al composar pels dos costats llargs, obtindrem un quadrat.

4. Amb dos triangles el treball és semblant.
   a) Si tenen costats de la mateixa mida i els fem coincidir per aquests costats, la figura composta és un quadrilàter convex.
   b) Si no en tenen de la mateixa mida, o els fem coincidir pel vèrtex, la figura resultant és còncava.

Hi ha més combinacions, però la idea és reflexionar amb ells i elles al voltant de les figures que componen i incidir en les condicions que han de donar-se per a formar una nova figura geomètrica coneguda per ells. A partir de 3r curs de primària aprofitarem algunes d'aquestes activitats per a treballar els conceptes de concavitat i convexitat per a figures planes.

El següent pas és traslladar al paper les activitats d'observació i manipulació fetes. En un primer moment els proposarem compondre figures lliurement, fent referència a l'aspecte artístic del treball (tria de colors, sanefes, mosaics...) i amb la condició que la composició forme una figura continua (sense forats) que, en el cas de les sanefes, es puga repetir indefinidament. És important el treball de verbalització que facen, per a saber en què estan posant la mirada: si és en una composició artística on la motivació és l'aspecte final de l'obra, si han buscat regularitats en la seua expressió *geometricoartística,* o si pel contrari han realitzat una composició irregular i perquè expliquen als seus companys i companyes totes les seues motivacions, que a ben segur seran interessants. Més endavant, realitzaran activitats semblants incloent-hi l'exigència que les seues composicions siguen regulars, és a dir, que es repetisca un patró.

L'anterior treball ens serveix també per a educar la mirada del nostre alumnat cap a la descomposició de figures planes. En aquest tipus d'activitats els proporcionarem imatges la forma de les quals siga una composició de figures geomètriques conegudes però que no es distingeixen directament i tractaran de trobar-les dins de la proporcionada. En aquesta línia d'acció, hi ha un material molt conegut, el Tangram, compost per les peces que es poden apreciar en la part esquerra de la figura 131, amb el qual podem potenciar l'habilitat d'imaginar composicions i descomposicions de figures, sempre al nivell corresponent a cada curs de primària, i que es pot començar a utilitzar indicant als xiquets i les xiquetes els contorns de les figures que componen la imatge (com es pot veure en la part dreta de la figura 131).

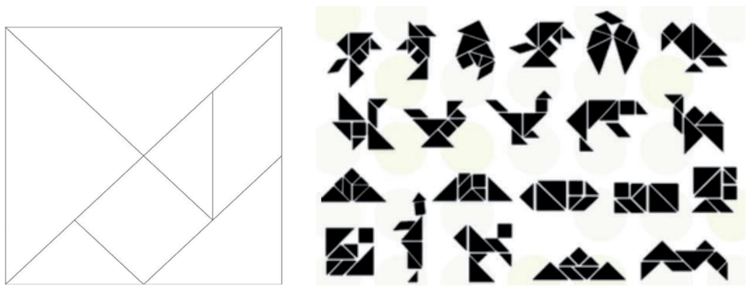


Figura 131. Representació de peces d'un Tangram (esquerra) i de les descomposicions d'algunes figures (dreta)

A mesura que es va avançant en l'etapa, es poden realitzar activitats semblants a les anteriors, amb un major grau de dificultat, ells mateixos poden estudiar noves possibilitats i confeccionar les peces utilitzant diferents materials, com per exemple paper, cartró, cartolina, goma EVA... Amb elles es reforça el coneixement de les nocions d'orientació espacial i s'incideix en un resultat geomètric important: qualsevol polígon es pot descompondre en triangles. En el cas dels polígons regulars, aquests triangles són isòsceles i només en el cas de l'hexàgon regular, a més d'isòsceles són equilàters (vegeu la capacitat 16).

En el desenvolupament de tot aquest treball podran trobar situacions on les figures que utilitzen recobrisquen tot el pla i d'altres en les que no. L'interès se centrarà en les primeres, amb la intenció de concloure que les úniques figures planes que recobreixen el pla repetint-les indefinidament són alguns triangles, alguns quadrilàters i els hexàgons regulars.

En alguns casos, la composició de figures planes, pot constituir el desenvolupament pla d'un cos geomètric. Per tant, a partir de la composició de figures de dues dimensions podem arribar també a la construcció d'altres tridimensionals (vegeu la capacitat 17).

D'una manera semblant al que hem realitzat per a les figures planes i al llarg de tota l'etapa d'educació primària, es presta també atenció a la composició i descomposició de figures tridimensionals. Caldrà trobar en la realitat cubs, prismes, piràmides, esferes, cilindres i cons. Per exemple, caixes de diferents tipus, pilotes, pots, barrets de mag... Ens fixarem en les composicions que poden haver-hi d'aquestes figures en qualsevol conjunt arquitectònic, de decoració, de mobles... En aquest moment, el treball pot reforçar-se amb la construcció de maquetes que puguen reproduir situacions espacials senzilles del seu entorn.

Amb l'ajuda de material didàctic continuarem el treball de descoberta d'aquestes composicions observades en la realitat. Amb un ventall de material suficientment extens trobarem relacions de composició de figures tridimensionals:

1. Amb dos cubs:
   a) Si són d'igual aresta, n'obtindran un prisma.
   b) Si són de diferent aresta, un cos tridimensional còncau.

2. Amb un cub i un prisma (de qualsevol base), cal distingir:
   a) Si qualsevol cara del cub és igual a la base del prisma quadrangular i els componem per aquestes, obtenim un prisma més alt.
   b) Amb qualsevol altra combinació, s'obté un cos tridimensional còncau.

3. Amb un cub o prisma i una piràmide (de qualsevol base), cal distingir:
   a) Si qualsevol cara del cub o la base del prisma quadrangular és igual a la base de la piràmide quadrangular i els composem per aquestes, obtenim un cos convex.
   b) Amb qualsevol altra combinació, s'obté un cos tridimensional còncau.

4. Amb dues piràmides (de qualsevol base), cal distingir:
   a) Si les bases són polígons iguals, i les fem coincidir per aquestes, obtenim un cos convex.
   b) Si les piràmides són triangulars i iguals i les componem per les seues cares laterals, podem trobar casos de cossos còncaus i convexos.
   c) Amb qualsevol altra combinació, s'obté un cos tridimensional còncau.

5. Amb un cilindre i un con (amb base de qualsevol radi), cal distingir:
   a) Si el radi de la base del cilindre és igual al radi de la base del con i els componem per aquestes, obtenim un cos convex.
   b) Amb qualsevol altra combinació, s'obté un cos tridimensional còncau.

6. Amb dos cons (de base de qualsevol radi), cal distingir:
   a) Si el radi de les bases dels cons són iguals i els composem per aquestes, obtenim un cos convex.
   b) Amb qualsevol altra combinació, s'obté un cos tridimensional còncau.

Cal observar la dificultat de compondre l'esfera amb qualsevol altre cos, per la seua forma geomètrica, i sempre es trobarà un cos còncau en qualsevol combinació amb els cossos estudiats en primària.

Novament, hi ha més combinacions, però la idea és reflexionar amb ells i elles al voltant dels cossos que es componen i incidir en les condicions que han de donar-se per a formar un nou cos conegut. Si no ocorre així, a partir de 5é curs de primària hem d'aprofitar aquestes activitats per a treballar els conceptes de concavitat i convexitat per a figures tridimensionals.

Una vegada treballades la proporcionalitat directa i la regla de tres en el bloc de nombres i operacions, es pot fer ús d'aquests conceptes per a construir el d'escala i utilitzar-lo per a millorar el treball amb mosaics i maquetes amb més precisió que als cursos anteriors. D'aquesta manera, s'ha de treballar la transformació de figures de dues o tres dimensions en unes altres de dues o tres, respectivament, a més d'intentar dibuixar figures de tres dimensions sobre del paper.

Si el que es vol és treballar tres dimensions, es pot fer una maqueta a escala d'objectes del seu voltant: la taula d'estudi, la paperera, un armari de classe... per a acabar podent fer la maqueta d'un conjunt arquitectònic concret del seu barri o poble, on prèviament s'hagen assabentat de les dimensions reals. Caldrà relacionar aquesta tasca amb el concepte de semblança (vegeu 3.4.2.3 i 3.4.2.4), on les longituds dels segments homòlegs són proporcionals i l'amplitud dels angles homòlegs es conserva.

En últim cas, i per a relacionar els objectes de tres dimensions amb la seua representació plana, podem desenvolupar activitats en les quals els xiquets i les xiquetes intenten dibuixar a escala alguns objectes reals senzills: una bicicleta, una televisió...

19. *Adquirir nocions de transformacions geomètriques: simetries, girs, translacions, semblances. Identificar-les en l'entorn familiar i en la natura. Compondre i dibuixar figures simètriques*

En educació infantil s'ha treballat la lateralitat i les direccions vertical, horitzontal o obliqua, d'una manera molt intuïtiva, amb un component gran de joc, i s'ha incidit en la simetria del nostre cos, a partir d'un eix vertical.

A partir de 1r curs de primària, cal continuar amb l'estudi de la simetria plana. I per això es reprenen les activitats amb el propi cos, ja que podem considerar que la seua imatge és simètrica. Ells i elles han d'arribar a descobrir l'eix de simetria a través de la seua imatge en un espill o qualsevol altre tipus de representació, ajudant-se de la seua pròpia lateralitat.

També es treballa el descobriment de la simetria plana en l'entorn, buscant-la en diferents objectes i imatges; caldrà reconèixer la seua presència i trobar a partir de quin eix es desenvolupa la simetria en cada cas (figura 132).

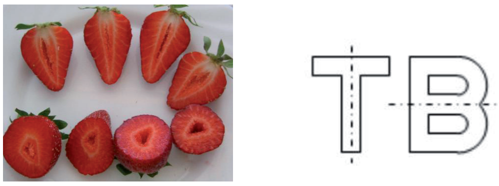


Figura 132. Representació d'imatges simètriques en objectes i figures

Es pot treballar la construcció de figures simètriques utilitzant alguns materials didàctics que permeten disposicions simètriques de peces o fitxes per a formar-les (figura 133).

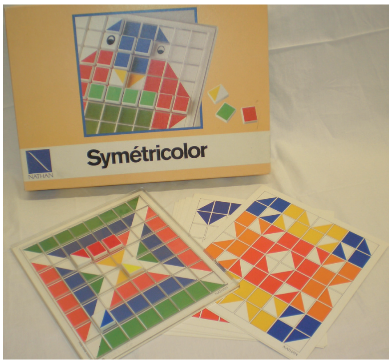


Figura 133. Symétricolor (fabricat per Nathan)

Posteriorment, cal dibuixar figures simètriques, dins de les seues possibilitats. S'ha de treballar amb figures planes senzilles i s'ha d'utilitzar com a ajuda una quadrícula que els puga permetre trobar fàcilment els punts homòlegs respecte de l'eix de simetria, que coincideix amb una de les direccions de les rectes de la quadrícula (figura 134).

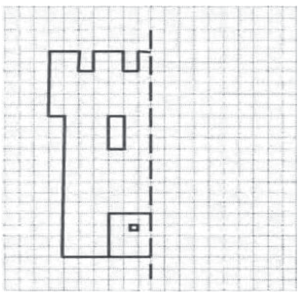


Figura 134. Representació de la meitat d'una imatge simètrica

A partir de 3r curs ens ocuparem de les translacions, els girs i les simetries. En un primer moment caldrà trobar aquests moviments (vegeu 3.4.1) en la realitat.

Quan es produeix un desplaçament en línia recta i es conserven les formes i mesures dels objectes, s'ha realitzat una translació.

Buscarem girs en la realitat, tot sabent que es pot girar l'objecte sobre si mateix o al voltant d'un eix extern (imaginari o no), que s'anomena eix de gir. Els exemples són abundants i molts els poden trobar en les atraccions de la fira, en el tambor d'una rentadora, el volant d'un vehicle...

Continuarem el treball de la simetria dels cursos anteriors al voltant del seu reconeixement en la realitat i utilitzarem material didàctic per a la descoberta de regularitats. Han de poder identificar si un objecte, figura, o dibuix és simètric o no. Poden utilitzar espills per tal d'esbrinar ràpidament si ho és o observar com seria la simetria d'un objecte donat. A més, es continua amb la representació de figures planes simètriques amb ajuda de la quadrícula mentre siga necessària.

La aplicació de determinats girs a algunes figures planes simètriques els ha de portar a relacionar aquests dos tipus de moviments. Així, per exemple, per a rotar objectes plans es fixaran pel seu centre a una superfície, en la qual haurem marcat el seu contorn. Cal observar quan la figura torna a coincidir amb la silueta dibuixada en la superfície. Les simètriques, en donar una volta completa coincidiran amb el contorn dibuixat tantes vegades com eixos de simetria tenen (per exemple, el rectangle dues vegades, com es pot comprovar fent girar la tapa d'una caixa de sabates) i, més concretament, els polígons regulars (quadrats, triangles equilàters …, com es pot comprovar amb una tapa quadrada d'una caixa o un trèvol) tantes vegades com costats tenen (figura 135).

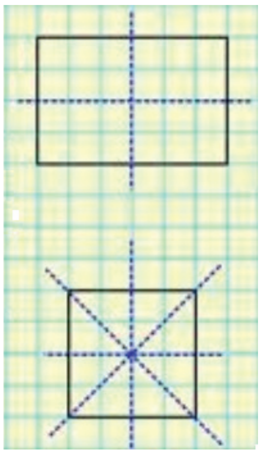


Figura 135. Representació dels eixos de simetria d'un rectangle (superior)
i un quadrat (inferior)

En la resta de polígons, en completar la volta, la figura sols coincideix una vegada amb el seu contorn; per exemple, el trapezi de la imatge 136.

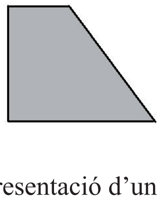


Figura 136. Representació d'un trapezi rectangle

Menció especial en aquest estudi ha de tenir el cercle, on l'experimentació (amb la tapa d'una cassola, per exemple) permet comprovar que per molts girs diferents que li apliquem sempre coincideix amb el contorn dibuixat inicialment (figura 137). La conclusió que l'alumnat hauria de traure és que el cercle té infinits eixos de simetria.

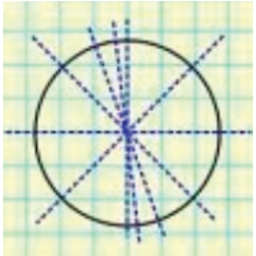


Figura 137. Representació d'alguns eixos de simetria d'un cercle

A partir de 4t de primària continuarem el treball iniciat en els cursos anteriors i serà el moment de quantificar el desplaçament mesurant en el cas de les translacions la longitud del vector de translació (vegeu 3.4.1.1 i 3.5) i, en el cas dels girs, l'amplitud de l'angle de gir (vegeu 3.4.1.2 i 3.5), que són continguts corresponents al bloc de mesura.

També cal seguir representant amb llapis i paper figures planes que siguen simètriques respecte d'un eix. Es poden repassar activitats amb l'ajuda de paper quadriculat, tenint en compte la dificultat que representa per als xiquets i les xiquetes la utilització d'eixos de simetria que no coincidisquen amb cap de les direccions de les línies de la quadrícula. Posteriorment, cal utilitzar paper sense quadricular, aleshores l'alumnat haurà de servir-se dels instruments de dibuix (regle, compàs i transportador d'angles) per a mesurar distàncies i angles en la figura original i reproduir-les a l'altre costat de l'eix.

En 6é curs s'han de treballar les reduccions i ampliacions proporcionals de figures. És un treball ja introduït amb les escales aplicades a croquis, mapes i plànols en la capacitat 2 i amb els mosaics i maquetes en la capacitat anterior. Cal relacionar la semblança amb el concepte de proporcionalitat (vegeu 3.4.2.3 i 3.4.2.4), i observar que hi ha un valor en aquestes transformacions que sempre es manté, la constant de proporcionalitat, i que serveix per a trobar les mesures lineals que caldrà augmentar o reduir. Un exemple amb heptàgons còncaus es pot trobar en la figura 138.

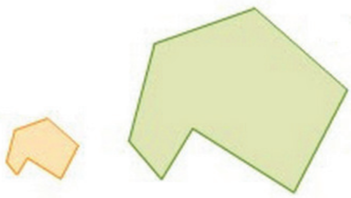


Figura 138. Representació d'heptàgons còncaus semblants

TEMA 2

Estadística, atzar i probabilitat

1. Introducció

1.1. Històrica

La paraula *estadística* té el mateix origen que la paraula *estat*. Els estats tenen la necessitat de formular programes per a resoldre, de manera intel·ligent, els problemes que plantegen les administracions dels seus països. Caldrà confeccionar taules numèriques que recullen les dades d'interès i, a partir del seu estudi i anàlisi acceptar o rebutjar els programes a plantejar i aquestes són les anomenades estadístiques. No només els estats, diferents empreses i organismes tenen també necessitats semblants.

L'estadística, com totes les ciències, no va sorgir d'improvís, sinó mitjançant un procés llarg de desenvolupament i evolució, des de fets de simple recol·lecció de dades, fins la diversitat i rigorosa interpretació d'aquests que se'n fa avui en dia. Així, l'origen de l'estadística el podem trobar al començament de la història i açò se sap tant a través de cròniques i dades escrites, com de restes arqueològiques, i és explicable per la inherent necessitat de la societat de conèixer aspectes elementals de la seua vida quotidiana. Aquests aspectes podien ser quants habitants té una tribu o poble, de quants béns en disposa, etc.

L'origen de l'estadística comença possiblement a l'illa de Sardenya, on hi ha monuments prehistòrics que consten de blocs de basalt superposats sense morter. A les parets d'aquests blocs es troben gravats toscos signes que han estat interpretats amb molt d'encert com a mosses que servien per a portar el compte del ramat i la caça. A poc a poc, a mesura que va evolucionar la societat, aquests registres van ser més freqüents i ajustats a la realitat.

La civilització egípcia portava el compte dels moviments poblacionals i contínuament feien censos. Fins i tot tenien Safnkit com a deessa dels llibres i els comptes.

A la Bíblia observem, en un dels llibres del Pentateuc sota el nom de Números, el cens que va realitzar Moisès després de l'eixida d'Egipte.

A la Xina, Confuci, en un dels seus textos clàssics, *Shu-King*, escrit cap a l'any 550 aC, ens narra com el rei Yao, l'any 2238 aC, va manar fer una estadística agrícola, industrial i comercial.

En la Grècia clàssica també es van realitzar importants estudis estadístics pel que fa a distribució de terrenys, servei militar, etc. Així mateix, cal citar entre els grecs principalment a Sòcrates, Heròdot i Aristòtil, els quals a través dels seus escrits van estimular l'estadística per la seua importància per a l'estat.

A Roma, la seua perfecta organització política, jurídica i administrativa va afavorir el desenvolupament d'una manera de fer, que es podria dir ara que era estadística. Amb Carlemany, a França, van tornar les estadístiques a Europa, amb un caràcter netament financer i administratiu. A Anglaterra, Guillem el Conqueridor, va encomanar la realització d'una espècie de cadastre, que constitueix un document estadisticoadministratiu.

Cap a la meitat del segle XVII, gràcies a Vito Seckendorff i sobretot a German Conring, a qui se'l coneix com el fundador de l'estadística, es defineix aquesta com la descripció de fets notables d'un estat. El millor dels seus seguidors va ser Gottfried Achenwall, qui va consolidar definitivament els postulats de la nova ciència i li va donar el nom d'estadística. Von Scholer va separar la teoria de l'estadística de la seua aplicació pràctica. Tots aquests estudiosos van formar part de la tendència de l'estadística universitària alemanya, coneguda com estadística descriptiva i que es correspon amb la manera actual de treballar-la (Muñoz, 2004).

Els conceptes d'atzar i incertesa són tan antics com la pròpia civilització. La humanitat sempre ha hagut de suportar la incertesa envers el clima, la provisió d'aliments i d'altres aspectes del medi ambient i ha hagut d'esforçar-se per a reduir aquesta incertesa i els seus efectes. Aproximadament, cap a l'any 3500 aC, els jocs d'atzar es practicaven a Egipte amb objectes d'os, considerats com els precursors dels daus. Sabem que el joc amb daus ha estat molt popular des d'aleshores i que fou part important en el primer desenvolupament de la teoria de la probabilitat. Tot i que no va ser fins a finals del segle XVI, el XVII i principis del XVIII, quan es va desenvolupar aquesta teoria. Girolano Cardano i Galileu Galilei van introduir els conceptes relacionats amb la probabilitat numèrica. A meitat del segle XVII, matemàtics com ara Blaise Pascal i Pierre Fermat iniciaren la teoria matemàtica de la probabilitat i van aconseguir obtenir probabilitats exactes per a certs problemes relacionats amb els jocs de daus. Un poc més tard, Christiaan Huygens va publicar el primer text sobre les probabilitats.

Ja més avançat el segle XVIII, Jakob Bernouilli i Joseph-Louis Lagrange fan evident la relació entre els jocs d'atzar i els fenòmens aleatoris en ciències com física, medicina, biologia i ciències socials i introdueixen, també, un bon nombre de nocions bàsiques de combinatòria que es van utilitzar com a aplicacions en el càlcul de probabilitats. Abraham de Moivre descobreix i desenvolupa el concepte de distribució normal que, posteriorment, reprèn Pierre-Simon Laplace publicant en 1812 la *Théorie analytique des probabilités*.

Aquesta branca de les matemàtiques pren la forma actual a partir de 1930, quan Andrey Kolmogorov estableix, amb els seus axiomes per al càlcul de probabilitats, les bases matemàtiques per a establir-ne la teoria. Émile Borel proporciona una demostració de la llei dels grans nombres on ja maneja la noció de probabilitat amb les propietats additives (Arribas *et al.*, 2012).

1.2. Model estadístic

Amb el nom de model estadístic es fa referència al seguit de grans passos que constitueixen un procediment. En primer lloc, ha d'haver-hi un problema susceptible de ser resolt amb tècniques estadístiques. Una vegada delimitat aquest problema es pot treballar de diferents maneres. Els passos següents no pretenen indicar que sempre s'haja de passar per cadascun d'ells; un estudi estadístic podria ser d'un, dos o tres passos.

1r pas: Trobar tota la informació possible sobre el problema (recollida de dades). Dins d'aquest pas, que es desenvoluparà en el següent capítol del tema, es trobaria la confecció de l'enquesta i la posada en pràctica.

2n pas: Organitzar les dades. Es tracta de fer aquesta organització de manera que aporte la major quantitat d'informació possible i que descriga clarament el problema. També entraria dins d'aquest pas calcular mesures o índexs d'aquestes dades amb la mateixa intenció, aportar informació directa de la recollida (estadística descriptiva).

3r pas: Generalitzar. Quan es fan molts experiments o estudis estadístics i s'aconsegueix obtenir regularitats i generalitzar els problemes, s'arriba al concepte de probabilitat. Si es continua amb aquest procés es poden obtenir models que recullen les característiques comunes a conjunts de problemes semblants (models de probabilitat).

4t pas: Extraure informació del conjunt sobre el qual s'havia fet un estudi, però sense que aquesta informació estiga de manera expressa en les dades recollides. Si és sobre la mostra utilitzada (subconjunt de la població), s'anomena regressió i només s'hi usen tècniques descriptives. Però podem voler obtenir informació de la població de la qual s'havia tret una mostra i aleshores ens caldrà la probabilitat i els models de probabilitat (inferència estadística).

1.3. Al tema

L'objectiu del tema és fer una primera aproximació als conceptes bàsics de l'estadística descriptiva i la probabilitat, així com el seu tractament en una aula de primària. Del model estadístic anterior, ens interessen els passos 1r i 2n i, a banda, part del 3r.

2. Fonamentació teòrica

2.1. Recollida de dades

S'entén per recollida de dades el procés segons el qual s'obté la informació necessària per a fer un estudi descriptiu o qualsevol altre tipus d'estudi estadístic (Nortes, 1987).

2.1.1. Aspectes generals

2.1.1.1. Què és una enquesta?

Abans de començar la recollida de dades cal tenir perfectament definits quins han de ser els elements que integren la població objecte d'estudi. A més, és important escollir la manera de procedir. Deu ser ordenada, sobretot si el nombre de dades és elevat i cal tenir prèviament preparat el material necessari, com ara qüestionaris, impresos, persones encarregades, etc. Malgrat tot, s'ha de tenir en compte que sempre es poden produir errades humanes, fallades en la transcripció de dades, dades inexactes, etc. Es denomina treball de camp el conjunt de tot allò relacionat amb la recollida de les dades: dates, preparació del material, selecció de personal (si escau), etc.

La tècnica d'obtenció de dades més utilitzada és l'enquesta, estudi d'investigació que permet obtenir informació de la població a partir d'uns mètodes estandarditzats. En l'estudi estadístic es poden recollir dades de tota la població o fer-ne una mostra (que pot ser o no representativa). Un exemple d'enquesta a tots els individus afectats per una variable d'estudi és el cens poblacional, altre el cens electoral...

Dues qüestions a tenir en compte a l'hora de realitzar aquests tipus d'estudis són les següents:

1. L'objectiu:
   a) Descriure i comparar. Tant si és de tota la població (cens), com si n'és d'una mostra, es pot tenir només l'objectiu de presentar uns resultats que descriguen el problema que es vol estudiar dels individus i comparar aquest estudi amb uns altres que s'hagen pogut fer en un altre moment (passos 1r i 2n del model estadístic).
   b) Obtenir conclusions d'un col·lectiu major. En aquest cas, cal triar una mostra i estudiar les característiques de les seues dades. A partir d'elles s'inferirà informació del col·lectiu major (pas 4t del model estadístic, aquest punt no s'estudia en el tema).

2. La definició dels caràcters dels individus de la població. Els individus han de presentar una característica que es vulga estudiar, anomenada variable i

les preguntes sobre aquesta sempre deuen tenir una possible resposta. També cal preveure-hi de quin tipus són aquestes variables: qualitatives (no es pot precisar numèricament, per exemple, el color del cabell) o quantitatives (determinades per una quantitat numèrica) i, en aquest cas, poden ser contínues (la variable pot prendre molts valors diferents i, per tant, és recomanable agrupar-los, com el pes de les persones, per exemple) o discretes (pot prendre pocs valors i no cal l'agrupament, com és el cas del nombre de fills i filles d'una família).

2.1.1.2. Població i mostra

Qualsevol investigació estadística ha d'estar referida a un conjunt de persones o coses que presenten una propietat determinada. Aquests col·lectius reben el nom de població. Cadascun dels elements que la formen s'anomenen individus. La dimensió de la població es defineix com el nombre d'elements que la componen (finit o infinit) i normalment es representa amb la lletra «N». Les propietats o qualitats que presenten tots els elements de la població són les variables definides en el punt anterior.

Una subpoblació és un subconjunt de la població on tots els individus reuneixen certes característiques que no tenen la resta dels elements de la població.

Es defineix una mostra com un subconjunt de la població. La dimensió de la mostra es defineix com el nombre d'elements que la componen i normalment es representa amb la lletra «n». Hi ha diferents mètodes per a seleccionar una mostra, els quals es coneixen com tipus de mostratge.

A. Representativitat d'una mostra

Perquè una mostra represente la població deu garantir una sèrie de condicions, tant pel que fa al moment del mostratge, com a la selecció adequada dels individus de la mostra.

En el mostratge es poden cometre dos tipus d'errades: mostrals (pel fet de no comptar amb tots els elements de la població i és clar que sempre es produirà aquest tipus d'errada, si utilitzem mostres) i de biaix (per no haver agafat els elements de manera aleatòria).

B. Tipus de mostratge

- Opinàtic. Els elements de la mostra es trien a criteri de l'investigador. No és representatiu perquè no es pot mesurar la diferència que existeix entre el valor observat en la mostra i el vertader valor en la població.

- Aleatori o probabilístic. Qualsevol element de la població té la mateixa probabilitat de ser escollit, és a dir, els individus es trien a l'atzar. Per tant, la representativitat de la mostra es garanteix totalment. Pot ser:
  - Simple: qualsevol element té la mateixa probabilitat de ser triat durant tot el procés.
  - Irrestricte: a l'inici del procés, qualsevol element té la mateixa probabilitat de ser triat, però una vegada escollit no es pot tornar a triar.

- Estratificat. Els elements de la població es divideixen per estrats (aquets poden estar determinats per edats, nivell econòmic, professions, per exemple). La mostra s'agafa amb la tria d'un nombre d'elements de cadascun dels estrats. Així, s'aconsegueix utilitzar mostres de menor dimensió i, per tant, més fiables. La dimensió de cadascun dels estrats de la mostra és proporcional a la dels estrats corresponents de la població. La representativitat de la mostra es garanteix atès que a cadascun dels estrats se li aplica un mostratge aleatori.

- Per àrees o conglomerats. Els elements de la mostra s'agrupen per conglomerats (habitualment relacionats amb la distribució territorial de la població), dins de cadascun s'aplica mostratge aleatori. Un conglomerat pot ser, per exemple, el conjunt de números d'un carrer d'una determinada ciutat o diferents pobles d'una comarca. La representativitat de la mostra ve garantida pel fet d'haver triat els conglomerats per un mètode aleatori.

- Sistemàtic. El primer element de la mostra es tria a l'atzar, la resta se selecciona d'acord amb una regla predeterminada. També rep el nom de mostratge amb començament aleatori. En aquest procediment es té la mateixa representativitat que en el mostratge simple si la llista utilitzada és aleatòria respecte de la variable objecte d'estudi.

- Seqüencial. Es pren una decisió per cada unitat (o grup d'unitats) d'un lot d'elements. Aquesta decisió és d'acceptació, rebuig o continuació de la inspecció i es fa d'acord amb unes especificacions prèviament establertes. Fonamentalment, proporciona una gran disminució en el volum de la mostra, tot i que pot provocar una lleugera pèrdua de representativitat.

2.1.1.3. Passos en la realització d'una enquesta

1. A partir de la detecció d'un problema susceptible de ser estudiat estadísticament, cal formular-lo clarament, indicar els objectius de l'enquesta i expressar-los amb la major precisió possible.
2. Definició de la població a la qual s'aplicarà l'enquesta. En triar una mostra, aquesta ho serà de la població sobre la qual desitgem obtenir informació.
3. Determinació de les preguntes per efectuar. La quantitat deu ser la menor possible i en consonància amb l'interès de les dades que es desitja obtenir.

Les preguntes han de ser de fàcil comprensió i, a més, les més decisives cal situar-les al principi o al final del qüestionari.
4. Mètodes d'enregistrament. Les maneres de registrar les preguntes i les seues respostes poden permetre codificar les dades, la qual cosa simplifica el posterior tractament dels resultats.
5. Elecció d'unitats de mostratge, és a dir, organitzar els elements de la població en classes disjuntes. El conjunt de les unitats i les informacions de les quals es disposa per a realitzar l'enquesta s'anomena marc de l'enquesta.
6. Elecció d'un tipus de mostratge.
7. Selecció de la mostra.
8. Enquesta pilot, és a dir, provar-la a un grup reduït abans de passar-la a tota la mostra.
9. Organització del treball de camp.
10. Tabulació i depuració de dades. Cal fer una revisió dels qüestionaris obtinguts i una valoració de les respostes desestimades pels enquestats.

2.1.1.4. Tipus d'enquestes

Les enquestes poden classificar-se de diverses maneres:

a) Segons l'àmbit que abasteixen:
- Exhaustives: es disposa de tot el col·lectiu per a fer-les, és a dir, de la població.
- Parcials: s'utilitza una mostra que hauria de representar tot el col·lectiu.

b) Per la manera d'obtenir les dades:
- Directes: les dades s'obtenen de manera específica i directament dels individus del problema concret que es vol tractar.
- Indirectes: les dades es poden obtenir a partir de bancs de dades corresponents a uns altres estudis.

c) Segons l'interès de l'estudi:
- D'opinió: les preguntes pretenen conèixer l'opinió d'una població respecte d'un tema.
- De fets: les preguntes pretenen recollir dades d'un esdeveniment.
- Mixta: inclou preguntes que abasten opinions i fets.

2.1.2. Elaboració de la recollida i planificació de les accions a realitzar

2.1.2.1. El qüestionari

Es podria definir com un conjunt de preguntes al voltant dels fets o aspectes interessants per a la investigació i que responen els enquestats. Aquestes preguntes poden presentar-se en diversos formats (paper, digital, etc.). Podem classificar els qüestionaris en:

- Qüestionari individual. En aquesta modalitat la tasca d'enregistrament de les respostes la realitza l'enquestat.
- Qüestionari llista. Hi ha una persona, l'enquestador, que recull les respostes.

Els tipus de preguntes que poden aparèixer en el qüestionari, segons la resposta, són:

- Obertes. No està especificada la resposta en opcions.
- Tancades. S'ofereixen les possibles respostes, dicotòmiques o de múltiples opcions. Aquestes han de ser excloents i exhaustives.

Les recomanacions a l'hora de redactar les preguntes del qüestionari són:

1. Han de ser còmodes per als enquestats: poques, curtes, que no impliquen esforços de memòria, consultes documentals, ni càlculs numèrics complicats, etc.
2. Deuen ser precises per evitar confusions: que proporcionen informació de només una idea, preferiblement tancades, amb llenguatge senzill i sense paraules ambigües, plantejades de manera concreta, que provoquen respostes directes i inequívoques, etc.
3. Cal que eviten la diversificació excessiva de les respostes i si són obertes no donar opció alternativa.
4. Han de formular-se de manera neutral, evitant preguntes indiscretes, amb càrrega emocional o que provoquen prejudicis en els enquestats.

Quan es prepara el qüestionari, es deurien de respectar les següents etapes:

1. Formular hipòtesis generals i específiques per a determinar allò que es pretén mesurar i, amb les preguntes que s'hi facen, intentar contestar a aquestes hipòtesis. Tot el qüestionari ha de tendir a validar-les.
2. Determinar les variables o característiques a mesurar.
3. Planificar el contingut del qüestionari.
4. Redactar les preguntes.
5. Presentar el qüestionari, amb dues consideracions:
   a) tècnica, ha de poder tabular-se després.
   b) material, si és qüestionari individual o qüestionari llista, si ha d'haver-hi notes aclaridores o no...

En la distribució del qüestionari, cal tenir en compte:

1. La data. Si, per exemple, es fa per correu, cal evitar els moments de vacances.
2. Les formes de fer-la:
   a) correu postal
   b) repartidor
   c) enquestador

Finalment, la recollida s'ha de fer per les mateixes vies utilitzades en la distribució.

2.1.2.2. L'entrevista

L'entrevista és l'acte que reuneix dues o més persones, una de les quals és la que pregunta i anota les respostes.

La importància de l'entrevista rau en que és concreta (en eixe moment, el centre d'atenció és l'enquesta mateixa), personal, directa i de respostes immediates.

L'entrevista amb qüestionari és més dirigida, les preguntes estan ja disposades i teòricament, no se'n poden fer altres. En canvi, sense qüestionari, no està tan dirigida, però és més espontània.

Podem considerar que hi ha avantatges en utilitzar qüestionari amb enquestador, per exemple, que és més compromès el fet de respondre, perquè mentre que una enquesta rebuda per correu pot ser oblidada o trencada en l'acte, aquesta modalitat, no. Permet obtenir més respostes i, com que hi ha una persona que llegeix les preguntes i anota les respostes, pot ser dirigida a persones analfabetes o no. Com a desavantatge, la presència o influència de l'enquestador pot condicionar les respostes de l'individu.

Quan es vol executar l'entrevista, és bo avisar, propiciar un clima agradable i no involucrar l'opinió del propi enquestador en la que puga tenir l'enquestat. I això s'hauria d'acompanyar amb altres característiques que deu tenir aquesta persona, com ara qualitats ètiques (per a realitzar-la correctament, sense manipular les dades), qualitats socials (que no indiquen sentiments que perjudiquen les respostes) i qualitats tècniques (saber un poc del treball que desenvolupa).

L'últim pas és el buidatge de les dades de les entrevistes. S'han de comptabilitzar les respostes quantitatives. Si són qualitatives, cal codificar-les i, per últim, detectar les errades que s'hagen pogut produir, la qual cosa és important amb vistes a les properes realitzacions.

En aquest moment, el terreny està preparat perquè siga l'estadística descriptiva la que s'encarregue de descriure i organitzar les dades.

2.2. Estadística descriptiva

2.2.1. Organització de dades

L'estadística descriptiva s'encarrega de la recollida i posterior representació, ordenació i tabulació de les dades obtingudes en les diferents observacions, és a dir, és la part de l'estadística que s'ocupa d'una primera fase, en la qual s'ha de sintetitzar la informació i descriure-la. Com que les dades poden estar agrupades o no i correspondre a una variable o a més d'una, la presentació haurà de ser de manera diferent segons siguen aquestes. Per descriure-les podem disposar de dues vies: la numèrica (taules de freqüències i mesures estadístiques) i la gràfica (diagrames de barres, histogrames, diagrama de sectors, etc.).

2.2.1.1. Taules de freqüències

L'objectiu de les taules de freqüències és facilitar la lectura de les dades recollides. És una manera ordenada de presentar-les i poder recomptar-les sense gaire dificultat.

A. Taula de freqüències per dades no agrupades

Si es volen presentar les dades d'una variable de manera individualitzada, cal optar per un tipus de taula com la que es mostra a continuació, on ***k*** és el nombre de valors o modalitats diferents de la variable i, per tant, $i \in \{1,..., k\}$:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_i x_2 ⋮	n_i n_2 ⋮	f_i f_2 ⋮	N_i N_2 ⋮	F_i F_2 ⋮
-	n	*1*	-	-

On els elements que hi intervenen són:

x_i: Valors o modalitats diferents de la variable. Els valors han d'estar ordenats de menor a major.

n_i: Freqüència absoluta de x_i. És el nombre d'elements amb valor o modalitat x_i. Aleshores $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$f_i = \frac{n_i}{n}$: Freqüència relativa de x_i. Expressa la freqüència absoluta d'eixe valor o modalitat en la seua relació amb ***n***, per tant, la relativa està referida a la unitat. Si es multiplica per 100, s'obté el percentatge d'elements de la mostra amb valor o modalitat x_i.

$N_i = n_1 + ... + n_i$: Freqüència absoluta acumulada de x_i. És la suma de les freqüències absolutes dels valors $\leq x_i$ o de les modalitats anteriors o coincidents amb x_i.

$F_i = f_1 + ... + f_i$: Freqüència relativa acumulada de x_i. És la suma de les freqüències relatives dels valors $\leq x_i$ o de les modalitats anteriors o coincidents amb x_i. Si es multiplica per 100 s'obté el percentatge d'elements de la mostra amb valor $\leq x_i$ o de modalitats anteriors o coincidents amb x_i.

La taula, amb aquestes columnes, es considera una taula de freqüències completa per dades sense agrupar.

B. Taula de freqüències per dades agrupades

Si volem presentar les dades d'una variable de manera agrupada, classificarem els seus valors en intervals que anomenarem *classes*. Cal dir que els criteris i les decisions d'agrupació són de la persona que estiga confeccionant la taula, encara que poden haver-hi algunes indicacions objectives:

- Les classes deuen estar acotades.
- Han de ser disjuntes i exhaustives. Per tant, els intervals hauran de ser tancats per l'esquerra i oberts per la dreta, per exemple. En el cas que el darrer valor de la variable coincidisca amb l'extrem superior del darrer interval, s'ha de tancar aquest per la dreta.
- S'hi ha d'establir un nombre adient d'intervals. Una manera d'aproximar aquest nombre és la fórmula de Nordiffe, $\sqrt{n}$, on n és el nombre de dades.
- Anomenem a_i a l'amplitud dels intervals. Quan es decideix que tots els intervals siguen de la mateixa amplitud, aquesta serà: $a_i = \frac{\text{Re}}{I}$, on $\mathbf{Re} = x_{\max} - x_{\min}$ és el recorregut de la variable i I és el nombre d'intervals elegit.
- Si L_{i-1} és l'extrem inferior de l'interval i L_i el superior, s'anomena marca de classe al seu punt mitjà, $c_i = \frac{L_{i-1} + L_i}{2}$, que serà el representant de l'interval.

La taula de freqüències completa per una variable agrupada és:

$[L_{i-1}, L_i)$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[L_0, L_1)$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[L_1, L_2)$	c_2	n_2	f_2	N_2	F_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	-	**n**	*1*	-	-

On les columnes de freqüències tenen el mateix significat que a la taula de l'apartat anterior.

C. Taula de freqüències per dades bidimensionals

Si tenim dues variables per cada individu, les dades es recullen en una taula de doble entrada que s'anomena taula de correlació (variables quantitatives) o de contingència (variables qualitatives). La taula següent mostra el cas de dues variables no agrupades. Encara que no s'hi veurà, en el cas de ser-ne una o les dues agrupades, el tractament seria per intervals de la mateixa manera que en el cas anterior.

$X \backslash Y$	y_j	$n_{i\bullet}$	$f_{i\bullet}$	$N_{i\bullet}$	$F_{i\bullet}$
x_i	n_{ij} / f_{ij}				
$n_{\bullet j}$		n			
$f_{\bullet j}$			1	-	-
$N_{\bullet j}$			-		
$F_{\bullet j}$			-		

On els elements que hi intervenen són:

(x_i, y_j): Valors de les variables quantitatives o modalitats dels atributs en les variables qualitatives. Els valors de cada variable han d'estar ordenats de menor a major o agrupats en intervals, si escau.

n_{ij}: Freqüència absoluta conjunta. És el nombre de vegades que es presenta en la mostra la parella (x_i, y_j). Separada per una diagonal representarem també la freqüència relativa conjunta f_{ij}.

$n_{i\bullet}$: Freqüència absoluta marginal del valor o modalitat x_i. És el nombre de vegades que es repeteix el valor x_i sense tenir en compte els valors de Y.

$n_{\bullet j}$: Freqüència absoluta marginal del valor o modalitat y_j. És el nombre de vegades que es repeteix el valor y_j sense tenir en compte els valors de X.

$f_{i\bullet}$, $f_{\bullet j}$: Freqüències relatives marginals dels valors o modalitats d'una de les variables, sense tenir en compte els valors o modalitats de l'altra.

De la mateixa manera que en les taules d'una variable finalitzem amb les freqüències acumulades, en aquest cas marginals: $N_{i\bullet}$ i $F_{i\bullet}$ i les corresponents $N_{\bullet j}$ i $F_{\bullet j}$.

2.2.1.2. Representacions gràfiques

- *Diagrama de barres*: És la representació gràfica més usual per a variables quantitatives amb dades sense agrupar o per a variables qualitatives. En l'eix d'abscisses representem els diferents valors o modalitats de la variable. Sobre cada valor o modalitat alcem una barra d'altura igual a la seua freqüència (figura 139).

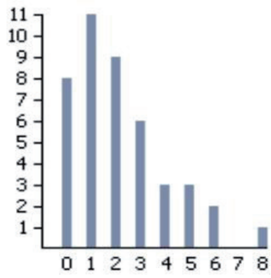


Figura 139. Representació d'un diagrama de barres

- *Histograma*: És la representació gràfica equivalent al diagrama de barres per a dades agrupades de la variable. En l'eix d'abscisses representem les classes i, sobre cada classe, alcem rectangles units entre si, d'àrea equivalent a la freqüència de la classe (figura 140).

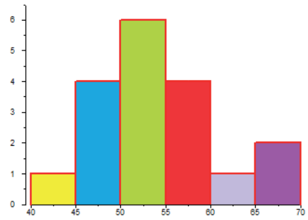


Figura 140. Representació d'un histograma

- *Polígon de freqüències*: És una de les representacions habituals de les freqüències per a variables quantitatives amb dades agrupades. En el cas de freqüències no acumulades es construeix unint amb segments els punts mitjans dels costats superiors dels rectangles de l'histograma, obtenint així la línia poligonal corresponent (figura 141).

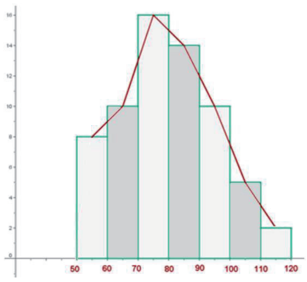


Figura 141. Representació d'un polígon de freqüències no acumulades

El de freqüències acumulades es construeix unint els vèrtexs superiors drets dels rectangles. En el primer rectangle, cal unir l'extrem esquerre inferior amb l'extrem superior dret (figura 142).

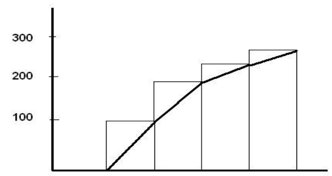


Figura 142. Representació d'un polígon de freqüències acumulades

També es pot utilitzar per a dades sense agrupar. Les representacions seran anàlogues, amb la diferència que les barres estan separades.

- *Diagrama de sectors*: És el més usual per a variables qualitatives. Es representa mitjançant un cercle. A cada modalitat o valor de la variable se li associa el sector circular, l'angle del qual és proporcional a la seua freqüència o percentatge (figura 143).

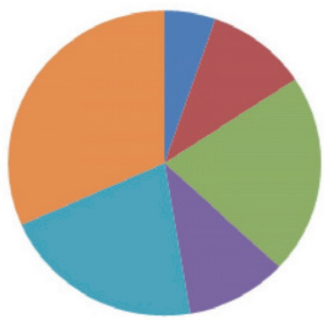


Figura 143. Representació d'un diagrama de sectors

- *Pictograma*: Expressa, amb dibuixos al·lusius al tema d'estudi, les freqüències de les modalitats o valors de la variable. Generalment, l'alçada de les figures representades coincideix amb les freqüències corresponents. També es pot utilitzar la superfície dels dibuixos com representació de les esmentades freqüències (figura 144).

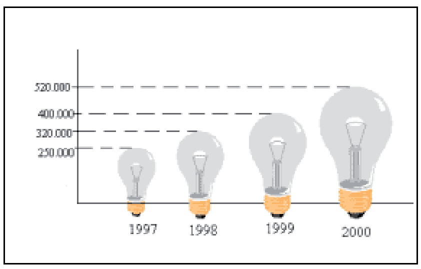


Figura 144. Representació d'un pictograma relatiu a la venda de bombetes

- *Piràmides de població*: Són un cas molt concret de gràfic estadístic. S'utilitzen per a estudiar conjuntament la variable edat i l'atribut sexe, i així es pot analitzar la distribució de la població d'acord amb aquestes característiques i les conseqüències d'una guerra o conèixer el control demogràfic, entre d'altres (figura 145).

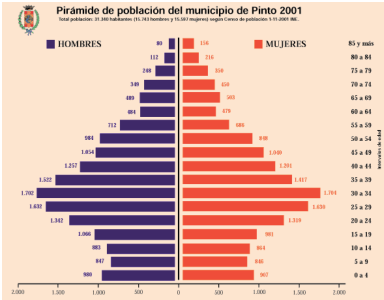


Figura 145. Representació d'una piràmide de població

- *Núvol de punts o diagrama de dispersió*: És el gràfic més utilitzat per a variables bidimensionals. Consisteix a representar cada parella de valors per un punt del pla. Quan una parella està repetida, s'indica, junt a la representació corresponent, el valor de la freqüència (figura 146).

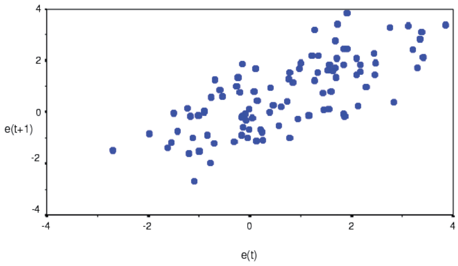


Figura 146. Representació d'un núvol de punts

Altres representacions gràfiques que es poden trobar, però que són molt menys freqüents serien: gràfics amb columnes dividides, amb columnes dobles, de sèries cronològiques, gràfics en espiral, estereogrames, etc.

2.2.1.3. Tendenciositat i errades més comunes

En un estudi estadístic és important que l'informe que d'aquest es faça siga suficientment clar i expresse amb precisió i exactitud els resultats obtinguts, de manera que no puguen ser mal interpretats.

Les causes que provoquen la inutilitat d'un informe estadístic poden ser molt diverses i en ocasions són degudes a errades durant la presa de dades o en la seua expressió.

Essencialment, se'n poden descriure de tres tipus:

- Errades en la presa de dades. Solen ser degudes a que la mostra triada no és representativa de la població, a que la tècnica d'obtenció de les dades d'alguns elements de la mostra no és l'adequada o a no haver-los depurat adientment.

- Errades en l'expressió de les dades. Per exemple, quan l'informe es fa de manera gràfica, que aquest no siga interpretable, o que no apareguen les unitats de mesura en cadascuna de les representacions... En el cas de valors agrupats de la variable, l'error més comú és la tria incorrecta dels intervals d'agrupació, és a dir, que aquests no constitueixen una partició del recorregut de la variable a estudiar.
- Tendenciositat de l'expressió de les dades. És un dels principals problemes que es pot presentar en un informe estadístic, ja siga de manera intencionada o no. Consisteix en que la informació, tot i ser vertadera, es presenta de manera que pot induir a error. Un clar exemple pot ser retallar un gràfic, o a l'hora de representar-ho gràficament, prendre una escala inadequada.

2.2.2. Càlcul de mesures de les dades de la variable

Generalment, en un estudi estadístic no interessa la informació de tots els elements de la població, sinó que l'interès rau sobre un element típic d'aquesta que es caracteritzarà per una sèrie de nombres, que anomenem mesures o paràmetres estadístics, i que s'extrauen de la massa de les dades. Aquestes mesures permeten resumir-ne un gran nombre en uns pocs valors que proporcionen una idea aproximada de la població. Evidentment, com passa en qualsevol procés de síntesi, es produeix una pèrdua en la quantitat d'informació, però aquesta es compensa amb la facilitat de maneig d'aquests nombres. Els esmentats paràmetres, a més, serveixen per a comparar dues distribucions de freqüències. N'hi ha de tres tipus, de centralització, de posició i de dispersió.

2.2.2.1. Mesures de centralització

Les mesures de centralització, posició central o localització central s'expressen amb les mateixes unitats que les observacions i determinen una quantitat central en la distribució al voltant de la qual es troben repartits els valors de la variable. Les més importants són les següents:

A. Mitjana aritmètica

És una mesura que pretén representar tots els valors de la distribució. És un nombre calculat i, per tant, pot no coincidir amb cap valor de la distribució. Es defineix com el resultat de dividir la suma de totes les dades pel nombre d'aquestes i es representa per $\bar{x}$. En el moment de calcular-la distingirem dos casos:

- Dades no agrupades de la variable. La mitjana aritmètica d'una sèrie de valors $x_1, x_2, \cdots, x_k$ que pren una variable estadística ***X***, quan les dades no es troben agrupades es calcula de la manera anteriorment esmentada:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$$

- Dades agrupades de la variable. Es pren com a valors de la variables les marques de classe de cadascun dels intervals (**c_i**) i es procedeix com si les dades no estigueren agrupades, per tant l'expressió quedarà:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot n_i}{n}.$$

Avantatges de la utilització de la mitjana aritmètica:
- Es determina de manera objectiva i és única.
- Té un significat interpretatiu molt clar.
- És senzilla de calcular.
- Al cas de dades no agrupades de la variable, s'utilitzen tots els valors de la distribució per a calcular-la.

Inconvenients:
- Els valors extrems de la distribució, molt dispars, influeixen de manera notable en el valor de la mitjana aritmètica, la qual cosa pot fer-li perdre representativitat.
- Al cas de dades agrupades de la variable, no s'utilitzen tots els valors de la distribució, sinó els representants dels intervals, **c_i** i, per tant, es perd part d'informació.

B. Moda

Es representa per ***Mo*** i es defineix com el valor o valors de la variable amb la major freqüència absoluta (anàlogament modalitats de la variable si és qualitativa). De la mateixa manera que en el cas anterior, per a calcular-la distingirem:

- Dades no agrupades de la variable. El seu càlcul és molt senzill en aquest cas, només cal mirar la columna **n_i** i la **x_i** associada al major d'aquests valors, serà la moda (pot haver més d'una).

- Dades agrupades de la variable. Seguirem dos passos:
  1. Trobar l'interval modal (pot haver més d'un): serà aquell al qual li correspon la major freqüència absoluta. A aquest interval l'anomenarem $\left[L_{i-1}, L_i\right)$.
  2. Fer un càlcul per a obtenir, no el valor exacte de la moda, sinó una aproximació que vindrà determinada per les següents hipòtesis:
     – Hi ha una moda en cada interval modal.
     – En l'interior de l'esmentat interval, la moda és el punt que equilibra les freqüències absolutes dels intervals adjacents, suposant que els valors es reparteixen en l'interior dels intervals de manera uniforme. Per tant, si els intervals tenen la mateixa amplitud, la moda es calcula com:

$$Mo = L_{i-1} + b \rightarrow n_{i-1} \cdot b = \left(a_i - b\right) \cdot n_{i+1} \rightarrow b = \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot a_i$$

i, per tant,

$$Mo = L_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot a_i$$

Una representació geomètrica de la moda per dades agrupades la podem trobar en la figura 147.

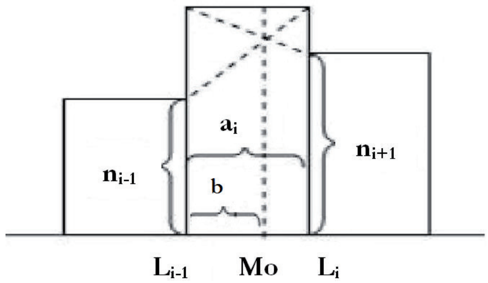


Figura 147. Representació geomètrica de la moda

Si els intervals tenen distinta amplitud, hem de trobar, en primer lloc, la densitat de freqüència de cada interval, d_i, que es defineix com el quocient entre la freqüència absoluta i l'amplitud de l'interval, $d_i = \frac{n_i}{a_i}$. L'interval modal $[\mathbf{L_{i-1}}, \mathbf{L_i})$ serà ara el de major densitat de freqüència i per a trobar la moda apliquem de nou la fórmula anterior, però substituint les freqüències per les densitats de freqüència, és a dir:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1} + d_{i+1}} \cdot a_i$$

Avantatges de la utilització de la moda:

- És senzilla de calcular.
- Té una interpretació molt fàcil.

Inconvenients:

- És menys representativa que les altres mesures de centralització. És útil, majoritàriament, si es tracta de distribucions amb dades qualitatives, perquè no es pot calcular la mitjana aritmètica, per no prendre valors numèrics la variable.
- En el càlcul de la moda no s'utilitzen tots els valors de la distribució i, per tant, es pot perdre representativitat.
- Es pot trobar propera a valors extrems.
- Podem trobar distribucions anomenades bimodals, trimodals..., segons trobem dues, tres o més modes.

C. Mediana

Representa el valor de la variable que es troba en la posició central de la distribució (si les dades es troben ordenades de menor a major) i podem trobar-la tant en variables qualitatives com quantitatives. Pot ocórrer que en les quantitatives calga fer un càlcul per a obtenir-la i, per tant, que no coincidisca amb cap valor de la distribució. Cal notar que en el cas de les qualitatives aquesta mesura depèn totalment del criteri d'ordenació que es trie.

Es representa per ***Me*** i es defineix com el valor de la variable (real o calculat) que deixa el mateix nombre d'observacions a la seua dreta i a la seua esquerra, quan les observacions estan ordenades de menor a major. El procediment per a obtenir aquest paràmetre és diferent si els valors de la variable es troben agrupats o no:

- Dades no agrupades de la variable. En el cas d'una variable quantitativa, si el nombre de dades és imparell, la mediana serà el valor central. Per tal de trobar-la, s'ha de calcular $\frac{n}{2}$ i es compara aquest valor amb els de la columna N_i de la taula de freqüències. S'ha de triar el primer valor de N_i igual o superior a $\frac{n}{2}$. La mediana és el valor x_i associat a aquesta freqüència absoluta acumulada.

  Si el nombre de dades és parell, hem de prendre com a mediana la mitjana aritmètica dels dos valors centrals. Serà un nombre calculat i, per tant, no coincidirà amb cap valor de la distribució.

  En el cas d'una variable qualitativa amb un nombre imparell de dades, el procediment és anàleg a la mateixa situació per a variable quantitativa. Quan el nombre de dades siga parell i les dues modalitats que ocupen els llocs centrals siguen diferents, no es pot trobar la mediana.

- Dades agrupades de la variable. Per a obtenir la mediana, seguirem dos passos:

  1. Trobar l'interval medià. Per tal de trobar-lo, s'ha de calcular $\frac{n}{2}$ i comparar aquest valor amb els de la columna N_i de la taula de freqüències. S'ha de triar el primer valor de N_i igual o superior a $\frac{n}{2}$. L'interval medià $\left[L_{i-1}, L_i\right)$ és l'associat a aquesta freqüència absoluta acumulada.
  2. Calcular la mediana. En primer lloc, construïm el polígon de freqüències absolutes acumulades i busquem la intersecció amb la recta d'equació $y = \frac{n}{2}$ tal com indica la figura 148. La mediana és l'abscissa del punt d'intersecció del polígon amb la recta i es pot calcular mitjançant la fórmula:

$$Me = L_{i-1} + b \rightarrow \frac{n_i}{\frac{n}{2} - N_{i-1}} = \frac{a_i}{b} \rightarrow b = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

i, per tant,

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

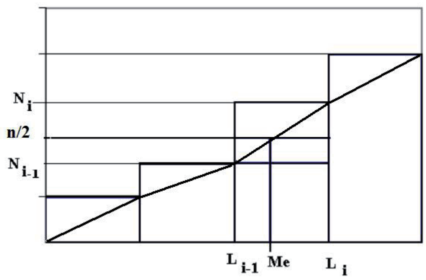


Figura 148. Representació geomètrica de la mediana

Si es vol establir una relació entre la mitjana aritmètica, la moda i la mediana, es pot observar:

- Si la distribució és simètrica (ho és quan en un diagrama de barres o un histograma, a partir de la vertical en la qual se situaria la mitjana aritmètica, el gràfic es desenvolupa igual a dreta i esquerra) i unimodal, els tres paràmetres coincideixen.
- Si la distribució és moderadament asimètrica, s'ha comprovat de manera empírica que $\left|\bar{x} - Mo\right| \leq 3 \cdot \left|\bar{x} - Me\right|$, expressió que es coneix com desigualtat de Pearson.

2.2.2.2. Mesures de posició: quantils

Són paràmetres no centrals que divideixen en parts els valors de la distribució ordenats de menor a major.

Per a obtenir qualsevol quantil, els càlculs necessaris són semblants als que s'han explicat pel cas de la mediana.

Si els valors de la variable no estan agrupats, el càlcul inicial de $\frac{n}{2}$ s'ha de substituir per l'adequat al quantil que es vulga trobar.

Si els valors de la variable estan agrupats, el primer pas ha de ser trobar l'interval on se situarà el quantil. En el segon pas s'ha d'utilitzar una expressió semblant a la de la mediana, en la qual hem de substituir $\frac{n}{2}$ pel càlcul associat a cada quantil.

Els més importants són:

- *Quartils*. Divideixen la distribució de dades en quatre parts iguals, que corresponen cadascuna d'elles a un 25 % de les dades. Normalment es representen per $\boldsymbol{Q_1, Q_2, Q_3}$ i s'anomenen habitualment primer, segon i tercer quartil.
- *Decils*. Valors que divideixen la distribució de dades en deu parts iguals, corresponents ara a un 10 % de les dades. Normalment es representen per $\boldsymbol{D_1, D_2, D_9}$. Generalment s'anomenen decil 1, 2...
- *Percentils*. Valors que divideixen la distribució de dades en cent parts iguals, que en aquest cas contindran un 1 % de les dades. Normalment es representen per $\boldsymbol{P_1, P_2, ..., P_9}$. De manera anàloga al cas anterior s'anomenen percentil 1, 2...

Cal notar que entre els diferents quantils i altres mesures de posició, es donen les següents relacions:

- $Q_1 = P_{25}$
- $Q_2 = D_5 = P_{50} = Me$
- $Q_3 = P_{75}$
- $D_1 = P_{10}, ..., D_9 = P_{90}$

2.2.2.3. Mesures de dispersió

Són els paràmetres estadístics que intenten mesurar la major o menor concentració de les dades al voltant dels valors centrals de la distribució, és a dir, al voltant d'una de les mesures de centralització que en aquest cas serà la mitjana aritmètica. Les principals són:

A. Recorregut

Es defineix com la diferència entre el major i el menor valors de la variable. Es representa per Re i també es coneix com rang mostral. Com menys siga el recorregut, major serà la concentració dels valors de la variable, al voltant d'una mesura central.

B. Variança i desviació típica

La variança, anomenada també variància, és la mesura de dispersió més utilitzada i es defineix com la mitjana aritmètica dels quadrats de les desviacions respecte a la mitjana aritmètica. Es representa per S_x^2 i es calcula de la següent manera:

- Per a dades no agrupades de la variable: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot n_i}{n}$

  Com que aquesta expressió pot ser complicada a l'hora de realitzar els càlculs, normalment s'usa: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \left(\overline{x}\right)^2$, i s'obviarà la seua demostració per no ser objecte d'estudi en aquest apartat.

- Si els valors es troben agrupats utilitzarem qualssevol de les expressions anteriors, substituint $\boldsymbol{x_i}$ por $\boldsymbol{c_i}$.

L'arrel quadrada positiva de la variança, S_x, s'anomena desviació típica.

C. Coeficient de variació de Pearson

Es defineix com el quocient entre la desviació típica i el valor absolut de la mitjana aritmètica, sempre que aquesta siga distinta de zero, $CV = \frac{S_x}{\left|\overline{x}\right|}$. És una quantitat que no té unitats i, per tant, és invariant front als canvis d'unitat de mesura de les dades de la distribució.

Serveix per a comparar la representativitat de $\overline{x}$ en mostres diferents. Si tenim el CV de dues distribucions, la de menor CV té menor dispersió, per la qual cosa la seua mitjana aritmètica representa millor la distribució corresponent.

2.2.2.4. Mesura de simetria

S'utilitza per a estudiar la simetria de la distribució respecte de la mitjana aritmètica.

Definim el coeficient de Fisher com $g_i = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^3 \cdot n_i}{n \cdot S_x^3}$ que mesura aquesta simetria i que permet extreure'n les següents conclusions:

- Si $\boldsymbol{g_i = 0}$, la distribució de freqüències és simètrica.
- Si $\boldsymbol{g_i > 0}$, la distribució de freqüències presenta una asimetria cap a la dreta (figura 149).

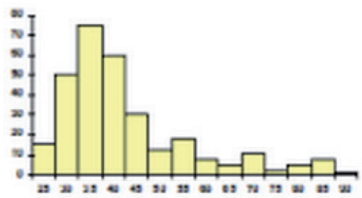


Figura 149. Representació d'un histograma asimètric cap a la dreta

- Si $g_i < \mathbf{0}$, la distribució de freqüències presenta una asimetria cap a l'esquerra (figura 150).

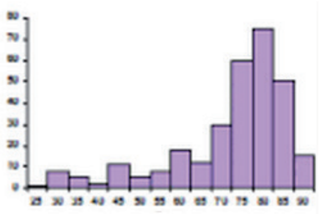


Figura 150. Representació d'un histograma asimètric cap a l'esquerra

2.3. Atzar i probabilitat

2.3.1. Espais mostrals. Successos

Els fenòmens deterministes es caracteritzen perquè sempre que es repeteix un experiment en idèntiques condicions, se n'obtenen els mateixos resultats.

La probabilitat és la ciència encarregada d'estudiar els fenòmens no deterministes, anomenats aleatoris, aquells per als quals no es pot predir el resultat de l'experiment.

Es defineix l'espai mostral d'un experiment aleatori com el conjunt de tots els seus possibles resultats. Aquest conjunt es representa per Ω.

Qualsevol subconjunt de l'espai mostral s'anomena succés.

Donat l'espai mostral d'un experiment aleatori, Ω, aleshores:

- S'anomena succés segur a Ω, és a dir, aquell que es verifica sempre.
- S'anomena succés impossible a φ, és a dir, el que no es verifica mai.
- S'anomena succés elemental a qualsevol constituït per un únic element, és a dir, al succés que no es pot descompondre com a unió d'altres successos.
- S'anomena espai mostral simple aquell que està format únicament per successos elementals.

2.3.2. Definició de probabilitat i propietats

Donat un succés ***A*** de l'espai mostral Ω, es defineix la probabilitat de ***A*** i es representa per $P(A)$ com el nombre real que verifica els següents axiomes:

- Axioma 1: $\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Per a qualsevol successió infinita de successos disjunts, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de Ω, es verifica: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

PROPIETATS:

1. $P(\varphi) = 0$
2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, on tots els A_i són disjunts entre ells
3. $\forall A \subset \Omega,\ P(A^c) = 1 - P(A)$, on A^c és el complementari de A respecte a W
4. $\forall A \subset \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1$
5. $\forall A, B \subset \Omega : A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. $\forall A, B \subset \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.3.3. Espais mostrals finits

Suposem que tenim experiments per als quals l'espai mostral Ω conté només un nombre finit de resultats. Siguen $S_1, S_2, \cdots, S_n$ tots els successos elementals d'aquest espai. Cadascun d'aquests successos S_i té una probabilitat $\boldsymbol{p_i}$, on $p_i = P(S_i)$. D'acord amb la definició de probabilitat, $\boldsymbol{p_i \geq 0}$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Direm que els successos són equiprobables si la probabilitat de cadascun d'ells és la mateixa, és a dir, si $p_i = \frac{1}{n}$. En aquest cas, l'espai mostral direm que és simple i equiprobable.

Si un succés ***A*** d'aquest espai mostral conté exactament ***m*** resultats, aleshores:

$$P(A) = P(S_1) + \cdots + P(S_m) = \sum_{i=1}^{m} P(S_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{m}{n}$$

Aquesta manera de calcular probabilitats es coneix com regla de Laplace i enuncia que la probabilitat d'un succés és el quocient entre el nombre de casos favorables i el de casos possibles.

De vegades aquesta regla s'utilitza com definició de probabilitat.

2.3.4. Lleis de l'atzar

A. Llei dels grans nombres

Si les proves necessàries per a calcular la freqüència relativa d'un succés es realitzen en idèntiques condicions i, a més, en cadascuna d'aquestes proves, el nombre d'experiments és suficientment gran, la freqüència relativa tendeix a l'estabilitat, és a dir, tendeix a aproximar-se a un nombre real fix, que coincideix amb la probabilitat del succés. Aquesta propietat es coneix com llei de l'Atzar o llei dels Grans Nombres. Aquesta llei ens permet definir el concepte de probabilitat en funció de la freqüència relativa.

La probabilitat d'un succés ***A*** és el nombre al voltant del qual s'estabilitza la freqüència relativa d'aquest succés.

La definició clàssica de probabilitat suposa que el nombre de resultats possibles d'un experiment és finit i que, a més, els successos són equiprobables. Quan no es verifica alguna de les dues condicions, utilitzem la llei dels Grans Nombres per al càlcul de probabilitats.

B. Espai probabilístic o espai de probabilitat

Un espai probabilístic serà un espai mostral on tots els successos tenen assignada una probabilitat d'ocórrer.

Dos successos qualssevol de l'espai mostral Ω són mútuament excloents si l'aparició d'un d'ells exclou l'aparició de l'altre en un mateix experiment. En aquest cas $P(A \cap B) = 0$ i, per tant, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dos successos qualssevol de l'espai mostral Ω són independents quan la probabilitat que un d'ells ocorra no està afectada per l'aparició o no de l'altre succés. En aquest cas, es verifica: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En cas contrari, direm que els successos són dependents.

C. Probabilitat condicionada

En un espai probabilístic, tenim un succés ***A*** i un altre ***B*** del qual en sabem el resultat. S'anomena probabilitat de ***A*** condicionada a ***B*** i es representa per $P(A/B)$, al valor: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, és a dir, a la probabilitat que ocórrega el succés ***A*** si sabem que ha ocorregut el succés ***B***.

Nota: Una eina molt útil per al càlcul de probabilitats condicionades és el diagrama d'arbre. El seu esquema és el que es mostra en la figura 151 i en ell també es poden apreciar i calcular fàcilment totes les possibilitats de probabilitat condicionada on intervenen els successos ***A, A^c, B, B^c***.

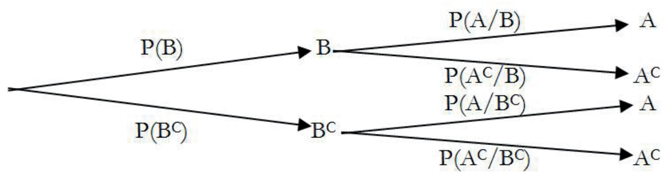


Figura 151. Representació del diagrama d'arbre d'una probabilitat condicionada

3. Capacitats per desenvolupar en l'aula de primària

3.1. Llistat de capacitats

El treball en educació primària referent al tema d'estadística, atzar i probabilitat, té com a objectiu contribuir a desenvolupar en l'alumnat les capacitats que s'expressen en el següent llistat, que tenen com a finalitat afavorir el desenvolupament de la competència matemàtica i representar una ajuda per a la resta de competències d'aquesta etapa educativa. L'ordre és seqüencial, és a dir, progressiu i d'intensitat de dificultat creixent:

1. Descobrir la necessitat de recollir dades sobre un fet objecte d'interès, mitjançant experiències senzilles. Elaborar qüestionaris per a replegar aquestes dades. Reconèixer diferents tipus de variables.
2. Organitzar dades en taules de freqüències absolutes i relatives. Interpretació de taules.
3. Representar dades amb diagrames de barres, pictogrames, polígons de freqüències, histogrames, diagrames de sectors i núvols de punts. Interpretació de gràfics.
4. Necessitat de concentrar la informació amb mesures que la representen: mitjana aritmètica, mediana, moda i rang.
5. Reconèixer l'atzar en la vida diària. Diferenciar successos segons la seua possibilitat d'ocórrer. Successos elementals i compostos. Elaborar arbres de possibilitats.
6. Construir el concepte de probabilitat a partir de la freqüència relativa i de l'arbre de possibilitats.
7. Relacionar els conceptes de probabilitat i percentatge.

3.2. Desenvolupament de les capacitats

L'objectiu d'aquest apartat és treballar alguns dels continguts d'estadística, atzar i probabilitat presentats en la part teòrica, de manera que l'alumnat puga assimilar-los naturalment, identificar-los i reconèixer-los en situacions reals.

Com a criteri general, amb el treball es persegueix que puguen verbalitzar i intercanviar informació sobre tots aquests conceptes, així com utilitzar un vocabulari clar i precís que determine inequívocament cadascun dels objectes matemàtics estudiats.

1. *Descobrir la necessitat de recollir dades sobre un fet objecte d'interès, mitjançant experiències senzilles. Elaborar qüestionaris per a replegar aquestes dades. Reconèixer diferents tipus de variables*

Per a saber més sobre alguns fets interessants del nostre entorn, també per a recordar-los, analitzar-los, comunicar-los, etc., hem de treballar en l'aula la necessitat de recollir dades al seu voltant.

És una tasca que ha iniciat el seu desenvolupament durant l'educació infantil. Per exemple, cada dia es fa el recompte l'alumnat que hi ha a classe i dels que s'han quedat a casa, s'arrepleguen dades respecte del temps meteorològic, dels tipus d'aliments que duen els xiquets i les xiquetes per esmorzar, etc.

En 1r i 2n curs de primària es pot continuar amb aquesta recollida de dades diària i fer també altres tipus d'activitats que necessiten l'elaboració d'un qüestionari molt elemental. Per exemple, es poden recollir dades de la família de cada xiquet o xiqueta per a construir el seu propi arbre genealògic immediat, elaborar unes preguntes bàsiques de nombre de germans, d'avis, d'oncles... Convé que aquestes preguntes es pensen en classe i siga decisió de la majoria fer-les.

En general, es deu d'intentar que els contextos en els quals es treballe siguen propers a l'alumnat i que els nombres que apareguen relacionats amb les dades respecten els coneixements numèrics dels xiquets i les xiquetes.

A mesura que s'avança en aquests primers cursos i milloren la seua comprensió i expressió oral i escrita, es poden plantejar recerques amb qüestionaris més elaborats o amb més preguntes.

En els primers anys de primària es pot treballar amb situacions de variable quantitativa i/o qualitativa. És evident que han pogut aparèixer amb antelació aquests dos tipus de variables, però no s'ha insistit en les diferències entres elles. En aquest moment s'ha d'observar que en les variables quantitatives les dades sempre són numèriques (nombre de germans, edats dels companys de classe, qualificacions, graus de temperatura...), mentre que en les qualitatives no ho són (color preferit, llocs per fer una excursió, pel·lícules per veure, contes favorits...). Cap a 3r o 4t de primària, es poden introduir els noms dels dos tipus de variables sense pretendre que els xiquets i les xiquetes els utilitzen quotidianament.

Si en el desenvolupament d'aquest treball es fa necessari elaborar algun qüestionari, en el cas de les variables qualitatives, es pot donar per a cada pregunta una bateria de possibles respostes, per a evitar la seua dispersió.

Cap al final de primària, el major coneixement numèric de l'alumnat, possibilitarà la introducció d'estudis sobre fets on la variable prenga una gran quantitat de valors, per exemple l'altura o el pes de cada xiquet o xiqueta. L'objectiu és trobar valors candidats a ser agrupats per a fer la distinció amb els no agrupats que són els que es venien usant fins aquest moment.

En un principi tractaríem les dades de manera semblant al treball realitzat en els cursos anteriors. En observar la dificultat que suposa la gran quantitat de valors de la variable, proposarem a l'alumnat una reflexió al voltant d'altres maneres més còmodes, més ràpides d'obtenir la informació que busquem, amb la intenció de concloure que és necessari agrupar els valors en intervals per a poder treballar amb les dades més fàcilment.

Caldrà explicar als xiquets i les xiquetes, d'acord amb el seu nivell evolutiu, la idea matemàtica d'interval. En aquest cas ens interessa aclarir que una dada concreta només pot estar en un únic interval, per tant s'ha de pactar l'extrem de l'interval pel qual es tancarà aquest i aquell pel qual romandrà obert.

Es posa l'atenció en la diferència de tractament entre les dues classes de variables quantitatives i s'incorpora la manera d'anomenar-les com a variables de dades agrupades i no agrupades.

Generalment, els valors de variables de dades no agrupates correspondrien a nombres naturals o enters i els d'agrupats a nombres racionals, encara que pot haver-hi excepcions en ambdós casos.

En tot el treball d'elaboració de qüestionaris realitzat en l'etapa, s'ha d'intentar seguir les normes que s'han indicat en l'apartat 2.1.2.1, però evidentment han d'adaptar-se al desenvolupament cognitiu i matemàtic dels xiquets i les xiquetes.

2. *Organitzar dades en taules de freqüències absolutes i relatives. Interpretació de taules*

L'organització de dades és el pas natural una vegada s'ha fet la recollida d'aquestes. No tindria sentit recollir dades, si després no es fa res amb elles. És a dir, el desenvolupament d'aquesta capacitat està intrínsecament lligat al de l'anterior.

De fet, ja en l'educació infantil, es treballa una organització de dades de manera molt intuïtiva, posant-les en una taula que els alumnes construeixen. En l'exemple de la rutina diària de passar llista, s'obtindria una com la que es veu a continuació:

Dies de la setmana	Recompte	Vénen a classe
Dilluns	xxxxxxxxxxxx	12
Dimarts	xxxxxxxxxxxxxxx	15
Dimecres	xxxxxxxxxx	10
Dijous	xxxxxxxxxxx	11
Divendres	xxxxxxxx	8

Durant tota l'etapa d'educació primària, l'organització de les dades es realitza mitjançant taules de freqüències absolutes. S'ha d'intentar que el nombre de valors de la variable permeta treballar amb les dades sense necessitat d'agrupar-les.

Les columnes de la taula corresponent a aquests casos seran les que apareixen en la taula següent:

x_i	n_i	N_i
	n	-

A partir de 5é de primària cal treballar també les taules de doble entrada. Amb exemples fàcils organitzarem les dades a partir de la col·locació en una fila i una columna dels valors de les dues variables (vegeu 2.2.1.1). Per exemple, un llistat d'alumnes de la classe en la primera columna i els possibles llocs d'una excursió en la primera fila. Els xiquets i les xiquetes han d'emplenar les caselles de la taula en funció de les preferències i de les instruccions acordades en assemblea (triar un sol lloc, triar diversos llocs, triar llocs amb ordenació de preferència...). Una representació semblant podria ser:

X \ Y	y_1 y_2 y_3 ... y_m	$n_{i\bullet}$
x_1	n_{11} n_{12} n_{13} ... n_{1m}	
x_2	n_{21} n_{22} n_{23} ... n_{2m}	
x_3	n_{31} n_{32} n_{33} ... n_{3m}	
...	...	
x_n	n_{n1} n_{n2} n_{n3} ... n_{nm}	
$n_{\bullet j}$		

En 6é curs es pot continuar el treball amb els mateixos tipus de taules dels cursos anteriors, a més d'introduir la utilització de les freqüències relatives. En aquest cas, les taules tindrien l'aspecte següent:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
	n	-	1	

Quan l'alumnat conega el concepte de percentatge, es pot relacionar amb les noves freqüències i estudiar els diferents nivells d'informació que ens ofereixen aquestes quantitats (vegeu 2.2.1.1-A).

En aquests darrers cursos de primària, també es interessant que apareguen exemples on siga convenient agrupar els valors de la variable quantitativa (edats dels membres de les famílies dels xiquets i les xiquetes, altures dels mateixos...).

Quan calga fer càlculs amb aquest tipus de taula, per exemple, per a trobar la mitjana aritmètica, i davant la impossibilitat de poder realitzar-los amb tot l'interval, apareix la necessitat de triar un valor que el represente. En aquest moment s'introdueix la idea de marca de classe (c_i) i la manera de calcular-la (vegeu 2.2.1.1-B) i s'amplia la taula amb una columna, immediatament a la dreta de la dels intervals, que conté aquests nous valors. En aquest cas, l'aspecte de la taula és el següent:

$[L_{i-1},L_i)$	c_i	n_i	N_i	f_i	F_i
		n	-	1	

A mesura que l'alumnat vaja adquirint domini de les TIC aprofitarem aquestes ferramentes per a la realització de taules dels estudis estadístics que es plantegen.

Al llarg de tota l'etapa hem de treballar amb els xiquets i les xiquetes sobre l'obtenció d'informació, l'anàlisi i la interpretació de taules, tant elaborades per ells mateixos com obtingudes de diferents fonts d'informació. L'objectiu d'aquesta tasca és extraure de les taules la major quantitat de conclusions possible referents a l'interès de l'estudi i a les raons per les quals s'ha realitzat.

3. *Representar dades amb diagrames de barres, pictogrames, polígons de freqüències, histogrames, diagrames de sectors i núvols de punts. Interpretació de gràfics*

En educació infantil ja s'ha pogut estudiar una primera representació molt elemental del diagrama de barres a partir de la taula de freqüències absolutes (per exemple, la utilitzada en la capacitat anterior):

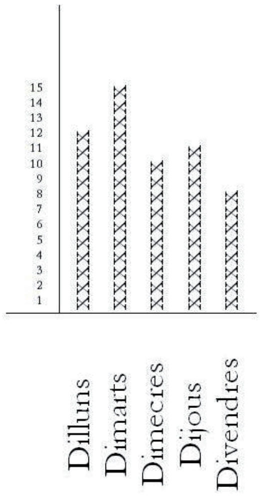
Dies de la setmana	Recompte	Vénen a classe
Dilluns	xxxxxxxxxxxx	12
Dimarts	xxxxxxxxxxxxxxx	15
Dimecres	xxxxxxxxxx	10
Dijous	xxxxxxxxxxx	11
Divendres	xxxxxxxx	8

Fent un gir de 90º, cap a l'esquerra, d'una part de la taula, trobem que sobre cadascun dels dies de la setmana, hi ha una columna d'altura proporcional a la freqüència, el que es podria considerar una aproximació a un diagrama de barres:

xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxx	xxxxxxxx
Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres

En 1r curs d'educació primària es continua amb un treball semblant. Es poden utilitzar representacions en dues i tres dimensions similars a diagrames de barres, i s'hi utilitzen dades properes a l'alumnat (nombre de germans, de cosins, d'amics del carrer...). En dues dimensions es poden construir bé representant i pintant barres que expressen un conjunt de dades, bé amb gomets adhesius que cada alumne col·locarà sobre la seua marca en l'eix horitzontal, de manera que conseguirà una columna. En tres dimensions, les columnes es poden construir amb caixes iguals que cada alumne haurà decorat i que es col·locaran una damunt de l'altra formant una torre que seria la barra del diagrama.

En qualssevol d'aquestes representacions, es pot afegir la numeració que correspon a l'eix vertical (freqüències absolutes) amb l'objectiu d'oferir més informació de la que proporcionen les barres. Amb la incorporació dels nombres, com es mostra en la taula següent, obtenim una gràfica que s'assembla més al que posteriorment es presentarà com a diagrama de barres.



Com a complement dels diagrames de barres podem utilitzar els pictogrames. El seu funcionament és semblant, però cal substituir cada barra per un dibuix al·lusiu a la variable tractada, l'altura del qual ha de ser proporcional a la freqüència (vegeu 2.2.1.2).

A partir de 2n es continua el treball iniciat en els cursos anteriors i s'amplia el coneixement dels diagrames de barres introduint progressivament també el vocabulari associat. L'utilitzarem per dades no agrupades de la variable i sempre amb les barres separades.

S'ha de reflexionar amb els xiquets i les xiquetes sobre el fet diferenciador dels diagrames de barres enfront de les taules de freqüències, arribant a concloure que, al primer cop d'ull, amb aquesta representació gràfica es capta la informació més ràpidament que amb la taula.

En 5é i 6é d'educació primària es continua amb el treball de diagrames de barres realitzat en cursos anteriors i s'amplia el coneixement dels tipus de representacions gràfiques, posant els xiquets i les xiquetes en contacte amb elles a partir de situacions reals i de diferents fonts d'informació (premsa, televisió, Internet, factures de llum, aigua, gas...).

Cal que representen els diagrames de barres de manera adequada, incorporant habitualment les freqüències en l'eix vertical. Per a poder realitzar correctament aquest treball, reflexionarem amb ells i elles sobre la necessitat d'establir una escala ajustada a les quantitats que apareixen en la columna de les freqüències que volem representar i a l'espai que hi ha per a construir el diagrama. Per exemple, com es pot veure en la taula anterior, en l'eix vertical s'han representat tots els nombres des de l'1 fins al 15, però també podríem haver-los indicat sols de cinc en cinc. En un altre exemple, en el qual apareguen quantitats molt elevades, al voltat de 1000, podríem indicar-les de 100 en 100 o de 200 en 200, d'acord amb les condicions particulars amb les quals es vol realitzar el diagrama.

Quan en aquests cursos es treballe amb variables on els valors d'aquestes es troben agrupats, la representació semblant al diagrama de barres s'anomena histograma (vegeu 2.2.1.2). El procediment per aquesta nova gràfica és anàleg al realitzat pels diagrames anteriors, tenint en compte que quan es representen les barres no s'ha de deixar cap separació entre elles. La justificació es troba en la idea de continuïtat que es dedueix de l'agrupació d'aquests valors.

Una altra manera de plasmar la idea de continuïtat es pot aproximar en 6é curs amb els polígons de freqüències, constituïts per segments els extrems dels quals són els punts mitjans dels costats superiors dels rectangles dels histogrames, quan les freqüències no són acumulades. En algunes ocasions, poden no estar representats aquests rectangles, en altres, sí. Habitualment, els polígons de freqüències expliquen molt intuïtivament l'evolució temporal dels fenòmens. Si són de caire econòmic o empresarial s'usen amb les freqüències acumulades i els segments van indicant l'augment de la freqüència en cada interval (vegeu 2.2.1.2).

També pot aparèixer aquest darrer tipus de representacions per a variables on les dades no es troben agrupades, encara que es transmet una idea de continuïtat que pot no existir.

Una altra forma gràfica que podem utilitzar en 6é curs són els diagrames de sectors (vegeu 2.2.1.2) on es poden representar situacions comunes de la classe, per exemple, preferències per realitzar un esport (20 % patinar, 30 % bicicleta i 50 % futbol), en triar un lloc on anar d'excursió, etc. Per construir aquests diagrames és necessari haver treballat prèviament amb els xiquets i les xiquetes els conceptes de proporcionalitat, percentatge, amplitud angular i sector circular, a més a més del maneig del compàs i del transportador d'angles (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014).

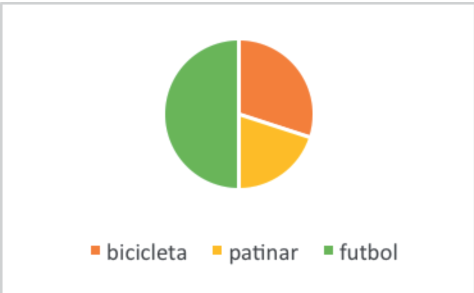


Figura 152. Representació d'un diagrama de sectors per esports

Per ampliar l'oferta de representacions gràfiques presentades fins ara, introduirem també, en 5é de primària, una molt senzilla per a variables bidimensionals, el núvol de punts (vegeu 2.2.1.2), per exemple, en estudiar la relació entre les hores que passa l'alumnat veient la televisió i les qualificacions que obté o les temperatures màxima i mínima d'un poble en diferents dies. Per a construir aquesta representació és necessari haver treballat prèviament amb els xiquets i les xiquetes la localització de punts en el pla utilitzant coordenades cartesianes.

Aprofitarem el domini que l'alumnat vaja adquirint de les TIC per a la realització de diferents diagrames dels estudiats.

Al llarg de tota l'etapa hem de treballar amb els xiquets i les xiquetes sobre l'obtenció d'informació, l'anàlisi i la interpretació de gràfics, tant elaborats per ells mateixos com obtinguts de diferents fonts d'informació. L'objectiu d'aquesta tasca és extraure dels gràfics la major quantitat possible de conclusions referents a l'interès de l'estudi i a les raons per les quals s'ha realitzat.

4. *Necessitat de concentrar la informació amb mesures que la representen: mitjana aritmètica, mediana, moda i rang*

En l'anàlisi de les taules i gràfics comentada en les capacitats anteriors hi ha informacions que no es poden extreure directament. Ens referim a valors que concentren la informació de tota la distribució. Es fa necessari trobar mesures estadístiques que donen resposta a aquestes qüestions.

Des de 1r d'educació primària, s'han realitzat estudis senzills a partir de les taules i/o gràfics, com ja s'ha comentat. Serà en 6é quan s'han d'introduir la mitjana aritmètica, la mediana, la moda i el rang i els càlculs necessaris per a obtenir-les.

Per a treballar aquestes mesures cal tenir en compte la variable sobre la qual es calculen, així serà diferent la tasca a realitzar si parlem d'una variable qualitativa o quantitativa i, en aquest darrer cas, si les dades d'aquesta variable es troben agrupades o no.

A partir d'una situació problemàtica d'una variable quantitativa sense agrupar, per exemple *nombre de germans dels companys de classe*, ens plantegem alguna pregunta que ens encamine cap la mitjana aritmètica: «Davant una acollida de xiquets i xiquetes sahrauís, per algunes famílies d'alumnat del col·legi, volem saber si en general en tenen més germans ells que no nosaltres». Haurien de pensar en contestar la pregunta de manera autònoma i adonar-se'n que no es pot comparar de manera individual, és a dir, el nombre particular de germans de cada alumne o alumna amb els que tenen els de l'intercanvi. Es tracta d'arribar a pensar que necessitem trobar un valor que represente, en cada cas, els del col·lectiu corresponent. S'està gestant la idea de mitjana aritmètica.

Per a trobar aquest valor, particularitzarem en un exemple amb tres xiquets o xiquetes que tinguen 1, 2 i 3 germans. La pregunta que els faríem és: quin nombre de germans representa els tres casos? Intuïtivament arribaran a que aquest valor és el 2 i aprofitarem aquesta situació per a reflexionar quines són les operacions que cal fer per a trobar aquest 2. Si no s'arriba directament a que és la suma dels tres valors dividida entre 3, caldrà agafar un cas en el qual intervinguen més valors, per exemple 0, 4, 3, 1 i 2. Si en l'exemple anterior la compensació era molt evident, en aquest cas no ho és tant. Cal continuar pensant fins arribar a la conclusió definitiva: sumar i dividir $\frac{0+4+3+1+2}{5}=2$.

Una vegada treballat aquest exemple, l'extensió al cas de tot l'alumnat de la classe és evident. S'haurà de sumar ara el nombre de germans de tots els xiquets i xiquetes de la classe i dividir el resultat per la quantitat de companys de l'aula. De la mateixa manera, caldrà trobar la mitjana aritmètica del nombre de germans dels visitants sahrauís. En aquest moment introduirem el nom de la mesura calculada, mitjana aritmètica, i el seu símbol, $\bar{x}$.

Quan l'alumnat haja adquirit aquest coneixements pot ser el moment de reflexionar sobre el significat de la mitjana aritmètica i la seua posició en una línia imaginària on el primer valor de la variable se situaria a l'esquerra i el darrer a la dreta. Habitualment la mitjana ocuparia una posició cap al centre d'aquesta línia (no necessàriament en el centre), és per això que s'anomena mesura de centralització.

Per a introduir la moda, els podem formular la següent pregunta: «La quantitat habitual de germans dels sahrauís coincideix amb la que tenim ací?». Aquesta pregunta es contesta ràpidament si tenen la taula de freqüències de la variable. Només cal mirar la columna de les freqüències absolutes i trobar la major. El valor de la variable associat a aquest nombre és la resposta a la pregunta en qualssevol dels dos casos. Novament, s'ha d'introduir el nom de la mesura obtinguda, moda, i el seu símbol, **Mo**.

Si observem les taules següents, ens adonem que els nombres de germans en un cas van de 4 a 8 i en l'altre de 0 a 4. Els resulta curiós aquest fet perquè les columnes de freqüències en les taules tenen la mateixa quantitat de files amb nombres distints de 0. *Com és possible que arribant en un cas a 8 germans tinguem només 5 files amb nombres diferents de 0, igual que en l'altre cas on sols arribem a 4 germans?* Seria una de les possibles preguntes que es podrien fer.

Sahrauís: nombre de germans	Nombre de famílies
0	0
1	0
2	0
3	0
4	7
5	5
6	2
7	2
8	1

Espanyols: nombre de germans	Nombre de famílies
0	2
1	5
2	6
3	3
4	1
5	0
6	0
7	0
8	0

És la diferència entre els nombres de germans, major i menor, en ambdós casos, la que ens permet donar la resposta. Com que el valor que resulta és el mateix, es justifica que les taules tinguen la mateixa quantitat de files amb nombres distints de 0. A aquest valor l'anomenem recorregut o rang dels valors de la variable, i el seu símbol és **Re**. Es pot reflexionar amb ells i elles que aquesta mesura quantifica la variabilitat dels valors de la variable, és a dir, ens aporta informació sobre la dispersió de la variable.

A partir d'una situació problemàtica d'una variable quantitativa amb dades agrupades, s'ha de procedir de manera anàloga al cas anterior per a la mitjana aritmètica.

Per al cas de la moda, hem de tenir en compte que el seu càlcul formal es deuria realitzar amb l'expressió que figura en el punt 2.2.2.1-B. Però com aquesta resulta inassequible per l'alumnat, usarem les marques de classe com si foren els valors de la variable sense agrupar i es procedirà com en aquests casos. L'aproximació de la moda que obtenim treballant amb les marques de classe és un resultat acceptable pels nivells educatius en els quals estem treballant.

Per a obtenir el rang s'ha de calcular la diferència entre l'extrem superior del darrer interval i l'extrem inferior del primer.

En una situació problemàtica amb variable qualitativa, per exemple *colors preferits pels xiquets i les xiquetes* i a partir de la seua taula de freqüències, ens plantegem un estil de pregunta semblant a la que ens conduïa abans a la moda. Descobrim que per a trobar-la hem de seguir el mateix procediment que s'ha descrit per a les variables quantitatives.

Si plantegem una pregunta referent a la mitjana aritmètica, han d'arribar a la conclusió que és impossible el càlcul de l'esmentada mesura a partir de les modalitats de la variable.

En el cas de variable qualitativa, cal trobar una mesura que puga substituir l'anterior. Necessàriament s'ha de recórrer a l'ordre de posició establert per a les modalitats, perquè és el criteri que les diferencia, havent decidit prèviament quin serà el criteri d'ordenació. Per a trobar la mesura de posició central buscada, cal triar aquella que deixe la mateixa quantitat de modalitats a la seua esquerra que a la seua dreta. Com en els casos anteriors, s'ha d'introduir el nom de la mesura obtinguda, mediana, i el seu símbol, **Me**.

En el cas excepcional de tenir una quantitat parella de dades no hi ha posició central. Trobarem aleshores dues modalitats susceptibles d'ocupar aquesta posició. Si les dues coincideixen, aquesta modalitat és la mediana. Si són diferents, no existeix aquest paràmetre.

Es pot fer extensiu el concepte de mediana per a variables quantitatives, tant amb valors agrupats com no agrupats. El procediment per a obtenir-la és semblant al descrit per a variables qualitatives (quan les dades de la variable estiguen agrupades es treballarà amb les marques de classe). Només canvia quan el nombre total de dades siga parell i que en la posició central hi haja dos valors diferents de la variable. En aquest cas, cal fer la semisuma d'aquests i el nombre que s'obtinga com a resultat serà la mediana.

5. *Reconèixer l'atzar en la vida diària. Diferenciar successos segons la seua possibilitat d'ocórrer. Successos elementals i compostos. Elaborar arbres de possibilitats*

Des de 1r d'educació primària cal treballar amb l'alumnat el descobriment de situacions senzilles d'atzar al seu voltant. Aquestes poden fer referència al temps atmosfèric que farà en els dies següents, a la llista d'assistència de companys de classe en els propers dies... L'objectiu és encaminar-los a que facen la descoberta que les esmentades situacions no es poden predir amb seguretat, per tant, estem creant el concepte de fenomen aleatori.

El següent pas és provocar situacions d'atzar recreades, és a dir, no observables habitualment al seu voltant, com per exemple, els jocs d'atzar. El ventall de possibilitats és molt gran i està relacionat amb daus, cartes, recipients amb boles...

Treballant només amb successos elementals, cal començar a introduir un vocabulari adequat, com succés possible (obtenir un 2 al llançar un dau cúbic usual, en endavant, un dau), impossible (obtenir un 7 al llançar un dau), segur (obtenir un nombre entre l'1 i el 6 al llançar un dau) (vegeu 2.3.1), realitzant posteriorment l'experiència per comprovar-ho. Per a aquests primers cursos, no s'exigirà l'ús normalitzat del vocabulari per part de l'alumnat, encara que el mestre l'usarà de manera habitual.

En 3r i 4t curs cal continuar treballant els continguts relacionats amb l'atzar iniciats en els nivells escolars anteriors i intensificar-ne la dificultat i completar-los amb nous conceptes. Així, introduirem les idees de successos elementals i compostos, per exemple, en llançar un dau obtenir un 2 en el primer cas o un 1, un 3 o un 5 en el segon cas (vegeu 2.3.1).

Realitzarem experiments aleatoris, els resultats dels quals recolliran en taules els xiquets i les xiquetes. El mestre o la mestra ha d'analitzar amb l'alumnat la correcció de les taules, tenint en compte: la presència de tots els resultats possibles, una disposició ordenada dels mateixos, la freqüència de cadascun d'aquests i el nombre total de repeticions de l'experiment. Així, podran traure conclusions al respecte de les prediccions fetes (poc probable, probable, molt probables, possible, impossible…).

En 5é i 6é d'educació primària hem d'ampliar el treball realitzat en els cursos anteriors, podent usar jocs d'atzar amb més dificultat, no en el material, sinó en el que es fa amb aquest, com per exemple «llançar ordenadament dos daus i sumar els resultats». En un primer moment, els xiquets i les xiquetes han de pensar en tots els resultats que es poden obtenir en aquest cas i reflexionar sobre la diferència amb els obtinguts quan es llança un sol dau. Hem d'aprofitar aquest moment per a introduir la idea d'espai mostral i observar que per a un dau, aquest és $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, mentre que en el cas que ens trobem és $\Omega_2 = \{2,3,...,12\}$. Cal fer l'aclariment per al lector que Ω_1 és un espai mostral simple, mentre que Ω_2

no ho és. Si al cas dels dos daus es volgués treballar amb un espai mostral simple hauríem de considerar $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$.

Una vegada determinats tots els valors de l'espai mostral, cal que comencen a llançar els daus i anotar els resultats. Hauria de repetir-se l'experiment un nombre elevat de vegades, almenys 100. S'adonaran que hi ha successos de l'espai mostral que en els 100 llançaments es produeixen més vegades. *Per què?*

En un primer moment, per analogia amb el cas d'un sol dau, els sembla que tots els resultats haurien d'aparèixer un nombre paregut de vegades, però no és així. Cal que observen els sumands que determinen cada succés elemental. Així trobaran que hi ha diverses combinacions que provoquen sumes iguals. Per exemple, per a aconseguir el 6 poden eixir diferents nombres en els daus (1,5), (2,4), (3,3)..., mentre que per a aconseguir el 12, només hi ha una possibilitat (6,6) i això és el que ha condicionat la quantitat de vegades que han obtingut un resultat o altre.

Per a pensar de manera exhaustiva i ordenada en totes les possibles combinacions de sumands, ens podem ajudar dels diagrames d'arbre per a representar-hi el recompte i visualitzar-lo (vegeu nota del 2.3.4-C).

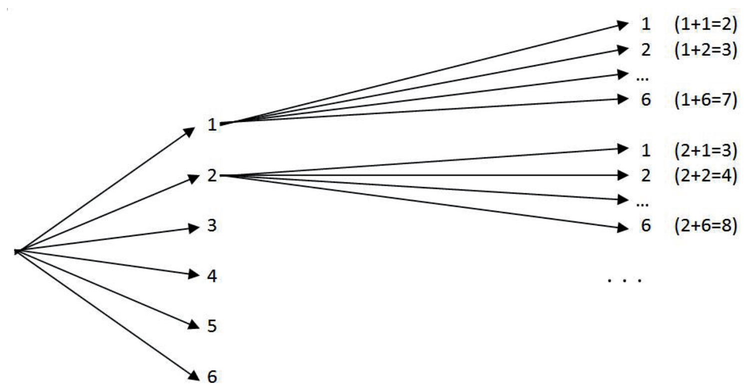


Figura 153. Representació en un diagrama d'arbre del succés de llançar ordenadament dos daus i sumar el resultat

Podem reforçar aquest treball amb situacions reals de recompte, per exemple, maneres de formar grups de cinc companys amb els alumnes de classe, o bé de triar delegat i subdelegat..., i construir l'arbre en tots aquests casos.

En general, cal preguntar-se si totes les branques de cada arbre són iguals de possibles o no. Per exemple, si en el cas de l'elecció del delegat i subdelegat s'exigeix que els dos siguen xics o xiques, o un xic i una xica, l'arbre de possibilitats els ajudarà a detectar que totes les branques no són igual de possibles, a diferència de l'exemple anterior del llançament de dos daus (figura 153) en el qual sí que ho són.

A partir d'aquest punt s'ha creat l'interrogant per a introduir-hi el concepte de probabilitat d'un succés.

6. Construir el concepte de probabilitat a partir de la freqüència relativa i de l'arbre de possibilitats

En els quatre primers cursos d'educació primària i per a aproximar-nos al concepte de probabilitat, cal acompanyar algunes activitats quotidianes en les quals intervé l'atzar amb les expressions «més probable», «menys probable» o «igual de probable (equiprobables)», per a verbalitzar els resultats de les comparacions entre successos amb més, menys o igual possibilitats d'ocórrer, respectivament.

En 4t curs s'ha d'acabar de construir el concepte de probabilitat i arribar a la quantificació numèrica de la possibilitat d'ocórrer d'un succés aleatori.

Per a fer aquest camí connectarem el concepte de freqüència relativa amb el de probabilitat, introduït per la regla de Laplace (vegeu 2.3.3). Continuarem amb el mateix exemple que s'estava utilitzant abans, «llançar ordenadament dos daus i sumar el resultat». Si es tria un altre exemple, cal comprovar que els successos simples siguen equiprobables en l'espai mostral simple, condició necessària per a poder aplicar aquesta regla. Observem que en l'espai mostral simple de l'exemple expressat en la capacitat anterior $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$, tots els successos simples són equiprobables.

Calcularem les freqüències relatives dels diferents valors de la variable en les 100 repeticions i les anotarem en la corresponent columna de la taula de freqüències que s'ha treballat a la capacitat 2. Per exemple, ens fixarem que la freqüència relativa del succés «llançar ordenadament dos daus i sumar els resultats, obtenint el valor 3» és $\frac{5}{100}$.

En analitzar l'arbre de possibilitats (construït en la capacitat anterior) els xiquets i les xiquetes observaran que la relació entre el nombre de camins que ens porten al resultat 3 i el nombre total de camins que apareixen a l'arbre és $\frac{2}{36}$.

Per comparar les dues fraccions podem recórrer als quocients que representen. Si aquests no foren molt aproximats seria convenient augmentar el nombre de llançaments fins que ho siguen.

En aquest cas i en la resta de cassos de l'espai mostral de l'experiment, cal adonar-se'n que la primera fracció pot variar i que, en funció de l'augment del nombre total de llançaments que realitzem, s'aproximarà cada vegada més a la segona fracció, que és constant i independent del nombre de llançaments (conclusió de la «Llei dels Grans Nombres», vegeu 2.3.4-A). Aquesta condició de la segona fracció, la invariabilitat del seu valor, ens permet utilitzar-la per a expressar la quantificació numèrica de la possibilitat d'ocórrer d'un succés aleatori. A aquest valor se l'anomena probabilitat d'un succés segons la regla de Laplace, i s'obté en dividir el nombre de casos favorables de què es produïsca aquest succés pel nombre total de casos possibles de l'experiment.

S'han de treballar més exemples similars per a afermar el concepte de probabilitat i comprovar que tots els valors que obtenim per les diferents probabilitats es troben sempre entre 0 (probabilitat del succés impossible) i 1 (probabilitat del succés segur).

7. *Relacionar els conceptes de probabilitat i percentatge*

A partir de 4t d'educació primària i una vegada estiguen treballats els percentatges en el bloc de nombres i també les freqüències relatives en la part d'estadística, podem relacionar el nou concepte de probabilitat i el ja conegut de percentatge. Aquesta connexió permet una aproximació més intuïtiva a la probabilitat, per expressar-la mitjançant un percentatge en compte d'utilitzar un nombre entre 0 i 1. És important aclarir que no han d'identificar-se ambdues expressions numèriques igualant la probabilitat d'un succés amb el seu percentatge. La probabilitat sempre serà un valor que pertany a l'interval [0,1], mentre que el percentatge serà un valor de l'interval [0,100].

A partir d'exemples semblants als desenvolupats en les capacitats anteriors i de manera similar al treball realitzat per a calcular un percentatge des d'una freqüència relativa, arribem a calcular un percentatge a partir d'una probabilitat multiplicada per 100. Per exemple, en el cas anterior «llançar ordenadament dos daus i sumar els resultats, obtenint el valor 3», la probabilitat és $\frac{2}{36} = 0{,}0\widehat{5}$, mentre que el percentatge que suposa aquest succés respecte de tots els successos de l'espai mostral simple és $\frac{2}{36} \times 100\ \% = 0{,}0\widehat{5} \times 100\ \% = 5{,}\widehat{5}\ \%$.

D'aquesta manera tenim dues quantitats que expressen la mesura d'incertesa d'un succés aleatori.

ANNEX

Presentem a continuació alguns conceptes bàsics de la Teoria de Conjunts, necessaris per fonamentar els continguts referents als Nombres Naturals que es treballen en aquesta publicació. No són objecte d'estudi pels futurs mestres, però tenen la finalitat de facilitar la seua consulta als lectors que ho necessiten.

1. Formalització de conceptes de Teoria de Conjunts

La Teoria de Conjunts és l'encarregada de simbolitzar el llenguatge matemàtic. És per això que formant conjunts expressem alguns conceptes que componen el currículum escolar i afavorim el seu aprenentatge.

Presentem a continuació una breu formalització dels conceptes de Teoria de Conjunts, necessaris per treballar els continguts d'aquesta publicació.

1.1. Introducció

El concepte de *conjunt* és intuïtiu i es podria entendre com «una agrupació d'elements feta amb qualsevol criteri». El criteri pot no ser una propietat característica comuna, sinó simplement el desig o la necessitat d'agrupar certs elements. Així, podem parlar d'un conjunt de persones, de ciutats, de bolígrafs, o del conjunt d'objectes que hi ha en un moment determinat damunt d'una taula.

Un conjunt està ben determinat si se sap si un element donat pertany o no al conjunt; així, el conjunt dels bolígrafs blaus està ben definit, perquè en veure un bolígraf podem saber si és blau o no. El conjunt de les persones altes no està ben definit, perquè en veure una persona, no sempre es podrà dir si és alta o no, o pot haver-hi diferents persones que opinen si aquella persona és alta o no ho és.

Els conjunts es representen, normalment, amb una lletra majúscula: A, B, K...

Anomenarem *element* cadascun dels objectes (físics o abstractes) que formen part d'un conjunt. Aquests elements tenen caràcter individual, qualitats que ens permeten diferenciar-los i cadascun és únic, de manera que no hi ha elements duplicats o repetits. Els representarem generalment amb una lletra minúscula: a, b, k...

Es defineix *cardinal d'un conjunt* com «la quantitat d'elements que hi ha en el conjunt».

S'anomena *conjunt universal* o *referencial*, que habitualment representarem amb la lletra *U*, al conjunt de totes les coses de les quals s'estiga tractant; així, si parlem de Nombres Naturals, *U* és el conjunt dels Nombres Naturals; si parlem de ciutats, *U* és el conjunt de totes les ciutats; aquest conjunt universal pot esmentar-se explícitament o, en la majoria dels casos, es dóna per conegut atès el context que s'estiga treballant.

Sempre ha estat molt utilitzada la idea de conjunt al llarg de la història, en qualsevol representació o explicació matemàtica. Però no serà fins al segle XIX quan se li atorgarà rigor. En aquest segle, Cantor, posa les bases per la construcció de la Teoria de Conjunts: definicions, introducció a cardinals, conjunt ben ordenat...

Apareixen escletxes en aquesta teoria, com ara la paradoxa de Russell, que sorgeix quan se suposa un conjunt $A = \{C \text{ conjunts} / C \notin C\}$, a partir del qual es fa la pregunta de la pertinença de A a si mateix, és a dir, $A \in A \leftrightarrow A \notin A$. La resposta ens du a la conclusió que $¿A \in A \ o\ A \notin A?$, que constitueix la paradoxa esmentada.

Per tal de resoldre aquests problemes de la Teoria de Conjunts es creen els sistemes axiomàtics corresponents (són conjunts d'afirmacions admeses com a vertaderes sense necessitat de demostració) i així tenim els de Zermelo-Frenkel, els de Newman...

1.2. Conjunts

En aquest apartat es fa un recorregut per alguns conceptes (operacions, relacions...) que es poden definir en relació als conjunts.

1.2.1. Definicions i conceptes bàsics

Com s'ha esmentat al punt anterior, s'admet la idea de conjunt com l'agrupació en un tot de determinats objectes ben caracteritzats i diferenciats els uns dels altres.

- Conjunts iguals: aquells que, element a element, són iguals.

- Determinacions d'un conjunt:
  - Per comprensió: explicitant la propietat característica dels seus elements.
  - Per extensió: enumerant, un per un, tots els elements que el componen.

- Representacions d'un conjunt:
  - Representació gràfica: diagrama lineal, diagrama de Venn (línia corba tancada que delimita els elements del conjunt) o qualsevol altra línea tancada.
  - Representació simbòlica: com s'ha esmentat abans, s'utilitzaran lletres en minúscula per tal de representar els elements d'un conjunt i en majúscula per representar els conjunts.

- Subconjunts: $A \subset C \leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in C$.

- Conjunt universal o referencial: es representa amb la lletra *U*.

- Conjunt complementari d'un subconjunt:

  $A \subset U : A_U^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$

- Conjunt buit: Φ, aquell que no té cap element.

- Conjunt de parts d'un conjunt: és un conjunt que està format per tots els subconjunts d'un conjunt donat, és a dir: $P(A) = \{B \,/\, B \subset A\}$. És important notar que d'aquesta definició es dedueix que $A \in P(A)$ i $\Phi \in P(A)$.

Utilitzant nombres combinatoris es pot demostrar que el conjunt *P(A)* té com a cardinal $2^{card\,(A)}$: $card\left[P(A)\right] = 2^{card(A)}$.

1.2.2. Operacions entre conjunts

- Unió: $A \bigcup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

- Intersecció: $A \bigcap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$. Si la intersecció de dos conjunts és el conjunt buit, aquests s'anomenen *conjunts disjunts*.

> *Propietats de la unió i de la intersecció:*
>
> 1. *Commutativa*: $A \bigcup B = B \bigcup A \; i \; A \bigcap B = B \bigcap A$
> 2. *Associativa*: $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C \; i \; A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$
> 3. *Idempotència*: $A \bigcup A = A \; i \; A \bigcap A = A$
> 4. *Absorció*: $A \bigcup \left(A \bigcap B\right) = A \; i \; A \bigcap \left(A \bigcup B\right) = A$
> 5. *Distributiva:*
> $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \; i \; A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$
> 6. $A \bigcup A^c = U$ i $A \bigcup \Phi = A$
> 7. $A \bigcap A^c = \Phi$ i $A \bigcap \Phi = \Phi$
>
>   *Nota: Lleis de De Morgan:*
>
>   - $\left(A \bigcup B\right)^C = A^C \bigcap B^C$
>   - $\left(A \bigcap B\right)^C = A^C \bigcup B^C$

- Partició d'un conjunt: $\{N_1, N_2, ..., Nn\}$ és una partició d'un conjunt *A*, si i només si (en endavant sii):

1. $N_i \subset A \wedge N_i \neq \Phi, \forall i = 1,\dots, n$

2. $\bigcup_{i=1}^{n} N_i = A$

3. $N_i \cap N_j = \Phi, \forall i \neq j$

- Diferència de conjunts: $A - B = \{x \in A \,/\, x \notin B\}$
- Producte cartesià: $A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Propietats:

$card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$

$A \times B \neq B \times A$

$A' \subset A, B' \subset B \leftrightarrow A' \times B' \subset A \times B$

$A \times B = \Phi \leftrightarrow A = \Phi \vee B = \Phi$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

1.3. Correspondències

Una correspondència **f** és una terna **(A, B, G)**, on:

- **A**, **B** són conjunts i $f : A \to B$ associa elements de **A** amb elements de **B**, anomenant-se **A** conjunt inicial i **B** conjunt final.
- $D(f) = \{x \in A / \exists y \in B : f(x) = y\}$, és el conjunt domini de la correspondència i està format pels elements (anomenats *origen* o *antiimatge*) del conjunt inicial que tenen algun element corresponent en el conjunt final.
- $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \,/\, \exists x \in A : f(x) = y\}$ és el conjunt imatge de la correspondència i està format pels elements (anomenats imatge) del conjunt final que es corresponen amb algun element del domini de la correspondència.
- $G \subset A \times B$, s'anomena *Graf de la correspondència* i està format pels parells **(x,y)** on $x \in D(f)$ i $y \in \mathrm{Im}(f)$:

  $G(f) = \{(x, y) \in A \times B \,/\, x \in D(f) \wedge y \in \mathrm{Im}(f) \wedge f(x) = y\}$

- Qualsevol correspondència **f** ens permet definir la seua correspondència recíproca o inversa, de la manera següent:

  $f^{-1}: B \to A \ / \ D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \ i \ \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$.

  Algunes correspondències poden ser:

  - *Unívoca: a cada element de A li correspon un element o cap de B.*
  - *Biunívoca: tant f, com* f^{-1}, *són unívoques.*
  - *Aplicació: tot element de A* té imatge en *B i aquesta és única. És a dir,* $\forall a \in A, \exists! b \in B \ / \ f(a) = b$.

    Algunes aplicacions poden ser:

    – *Suprajectiva*: tot element de B és imatge d'algun element de A:
    $\forall b \in B, \exists a \in A \ / \ f(a) = b$

    – *Injectiva*: elements distints de A tenen imatges distintes en B:
    $\forall a, b \in A : a \neq b \to f(a) \neq f(b)$

    – *Bijectiva*: suprajectiva i injectiva al mateix temps.

  - *Composició d'aplicacions: donada una aplicació* $f: A \to B$, *i una altra* $g: B \to C$ *de forma que* $\forall a \in A \ \ f(a) = b \ \wedge \ \forall b \in B \ \ g(b) = c$, *es defineix la composició d'aplicacions com una altra aplicació* $g \circ f: A \to C$, *i es compleix que* $\forall a \in A \quad g \circ f(a) = g\big(f(a)\big) = g(b) = c$. Si les aplicacions *f* i *g* són bijectives, la seua composició *f* o *g* també ho és.

1.4. Relacions binàries

Una relació binària és una associació o connexió que s'estableix entre parelles d'elements d'un conjunt. Pot haver-hi moltes definides en un mateix conjunt. Analíticament, podem dir que una relació **R** és una terna **(A, A, G)**, on $G \subset A \times A$, com ocorre al punt anterior, aleshores direm que **xRy** sii **(x,y)** pertany a **G**.

Propietats: $\forall x, y, z \in A$

1. Reflexiva: **xRx**

2. Antirreflexiva: **x** no és relaciona amb si mateix.

3. Simètrica: **xRy** → **yRx**

4. Antisimètrica: **xRy** ∧ **yRx** → **x = y** o bé, **x ≠ y** ∧ **xRy** → **y$\overline{\mathbf{R}}$x**

5. Transitiva: **xRy** ∧ **yRz** → **xRz**

6. Circular: **xRy** ∧ **yRz** → **zRx**

7. Connexa: **xRy** ∨ **yRx**

Nota: Si una relació binària definida en un conjunt compleix algunes de les propietats anteriors, rep el nom de:

- *Relació binària d'equivalència: compleix reflexiva, simètrica i transitiva.*
- *Relació binària de preordre: compleix reflexiva i transitiva.*
- *Relació binària d'ordre (també anomenada d'ordre ampli): compleix reflexiva, antisimètrica i transitiva.*
- *Relació binària d'ordre estricte: compleix antireflexiva, antisimètrica i transitiva.*
- *Qualsevol relació d'ordre definida anteriorment s'anomenen de* ordre parcial*, perquè no se l'hi ha exigit que complisca la propietat connexa. Si aquesta propietat es compleix, les relacions d'ordre s'anomenen de* ordre total.

1.4.1. Classes d'equivalència

Una relació binària d'equivalència definida en un conjunt, organitza els seus elements en subconjunts que constitueixen una partició del conjunt (vegeu annex 1.2.2). Aquesta organització s'anomena *classificació* i cadascun dels subconjunts s'anomena *classe d'equivalència* i està format pels elements del conjunt que es relacionen mitjançant la relació.

1.4.2. Conjunt quocient

Una vegada establerta una classificació, les classes d'equivalència formen un conjunt que s'anomena *conjunt quocient*. Si A és el conjunt on tenim definida la relació d'equivalència R, el conjunt quocient es representa per A/R.

1.5. Estructures algebraiques

Quan s'estudien les propietats de les operacions en els diferents conjunts numèrics, s'observen algunes que es repeteixen de manera regular en tots, i d'altres que es presenten de manera específica. Aquestes contribueixen a determinar l'estructura algebraica dels esmentats conjunts numèrics.

En general, quan parlem d'estructura algebraica ens referim a les propietats que compleixen les operacions definides entre els elements d'un conjunt. D'acord amb aquestes s'estableix una classificació dels conjunts, en la qual cadascuna de les classes d'equivalència correspon a una de les estructures que es recullen a continuació.

Les operacions necessàries per determinar una estructura poden ser internes o externes:

- Es defineix operació interna, com una aplicació **(*) : A × A → A**. És a dir, operant elements d'un conjunt **A**, obtenim elements del mateix conjunt.

- Es defineix operació externa, com una aplicació **(·) : K × A → A**. És a dir, operant elements d'un conjunt **A** amb elements d'un altre conjunt **K**, anomenat *d'escalars*, obtenim elements del conjunt **A**.

Les operacions definides poden complir algunes de les propietats següents:

- Associativa (asso): $\forall a, b, c \in A:$ **(a*b)*c = a*(b*c)**
- Commutativa (com): $\forall a, b \in A:$ **a*b = b*a**
- Element neutre (en): $\exists n \in A / \forall a \in A:$ **a*n = n*a = a**
- Element simètric (es): $\forall a \in A, \exists a' \in A /$ **a*a´= a*a´= n**
- Distributiva de • respecte de *: $\forall$a, b$\in$ A $\wedge$ $\forall$ k$\in$K: k • **(a*b) = (k • a) * (k • b)**

Les principals estructures són:

Per a l'operació interna:

	Associativa	*Commutativa*	*Element neutre*	*Element simètric*
Semigrup	X			
Semigrup commutatiu	X	X		
Monoide	X		X	
Monoide commutatiu	X	X	X	
Grup	X		X	X
Grup commutatiu o abelià	X	X	X	X

Per a dues operacions internes:

	Primera operació				*Segona operació*				*Distributiva de la 2a respecte de la 1a*
	asso	*com*	*en*	*es*	*asso*	*com*	*en*	*es*	
Semianell	X	X	X		X				X
Semianell commutatiu	X	X	X		X	X			X
Semianell commutatiu unitari	X	X	X		X	X	X		X
Anell	X	X	X	X	X				X
Anell commutatiu	X	X	X	X	X	X			X
Anell commutatiu unitari	X	X	X	X	X	X	X		X
Cos	X	X	X	X	X		X	X (*)	X
Cos commutatiu	X	X	X	X	X	X	X	X (*)	X

(*): Exceptuant l'element neutre de la primera, tots els elements del conjunt tenen simètric per a la segona operació.

Caldria afegir, finalment, les definicions de *semimòdul* i *espai vectorial*:

Un conjunt (M, *, ·), amb una operació interna (*) i una altra externa (·), definida amb l'ajuda d'un semianell (A, +, ×) , és un *semimòdul* si:

- $(M, *)$ és un semigrup commutatiu.
- $\forall \alpha, \beta \in A \wedge \forall a, b \in M$ es compleixen les propietats següents:
  - $(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) * (\beta \cdot a)$
  - $\alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * (\alpha \cdot b)$
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \times \beta) * a$

Un conjunt **(V, *, ·)**, amb una operació interna (*) i una altra externa (·) definida amb l'ajuda d'un cos (**K**, +, ×) és un espai vectorial si:

- **(V, *)** és un grup abelià.
- $\forall u,\ v \in V,\ \ \forall \lambda,\ \mu,\ 1 \in K$ es compleixen les propietats següents:

  – $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) * (\mu \cdot v)$
  – $\lambda \cdot (u * v) = (\lambda \cdot u) * (\lambda \cdot v)$
  – $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
  – $1 \cdot v = v$

Referències bibliogràfiques

ALCALDE, M.; PÉREZ, I.; LORENZO, G. (2014): *Els nombres naturals a l'aula de Primària.* Col·lecció Sapientia, núm. 89. Publicacions de la Universitat Jaume I. Castelló. http://hdl.handle.net/10234/81388.

ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la Matemática*. Torrejón de Ardoz, Madrid. Akal.

ARRIBAS, J. M. *et al.* (2012): *Historia de la Probabilidad y la Estadística.* Actas del VI Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad. UNED.

DORCE, C. (2013): *Història de la Matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

— (2014): *Història de la Matemàtica. Des del segle XVII fins a l'inici de l'època contemporània*. Barcelona. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

MUÑOZ, D. R. (2004): *Manual de estadística*. Eumed.net. Recuperat de http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/drm-estad.pdf.

NORTES, A. (1987): *Encuestas y precios*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 28. Madrid. Síntesis.

PÉREZ, I.; ALCALDE, M.; LORENZO, G. (2014): *Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 96. Publicacions de la Universitat Jaume I. Castelló. http://hdl.handle.net/10234/108098

STEWART, I. (2008): *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años.* Barcelona. Crítica.

VAN HIELE, P. M. (1986): *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London. Academic Press.

— (1957): *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof* (Dissertation). Groningen (Nederlanden): J. B. Wolters.

Bibliografia recomanada

ALCALDE, M. (2004): *Ensenyament-aprenentatge de continguts d'estadística en Educació Primària. Una perspectiva pràctica*. Castelló de la Plana. Actes del congrés Encuentro de Profesores de Matemáticas. Matemáticas para el siglo XXI.

ALGÁS, P. *et al.* (2010): *Los proyectos de trabajo en el aula.* Barcelona. Graó.

ALSINA, A. (2004): *Desarrollo de las competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños de 6 a 12 años.* Madrid. Narcea.

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J. M. (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje núm. 12. Madrid. Síntesis.

— (1988): *Materiales para construir la Geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 11. Madrid. Síntesis.

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989): *Simetría dinámica*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 13. Madrid. Síntesis.
Amón, J. (1991a): *Estadística para psicólogos. 1. Estadística descriptiva*. Psicología. Madrid. Pirámide S. A.
— (1991b): *Estadística para psicólogos. 2. Probabilidad. Estadística inferencial*. Psicología. Madrid. Pirámide S. A.
Batanero, C.; Godino, J. D. (2003): *Estocástica y su didáctica para maestros.* Granada. Universidad de Granada. (Última visita 1-7-2015 en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf).
Calvo, F. (1989): *Estadística aplicada*. Bilbao. Deusto S. A.
Canals, M. A. (2009a): *Transformacions geomètriques.* Barcelona. Rosa Sensat.
— (2009b): *Superfícies, volums i línies.* Barcelona. Rosa Sensat.
— (2009c): *Estadística, combinatòria i probabilitat.* Barcelona. Rosa Sensat.
Castelnuovo, E. (1981): *La Matemàtica. La Geometria*. Barcelona. Ketres.
Corberán, R. M. *et al.* (1989): *Didáctica de la Geometría: modelo Van Hiele*. València. Universitat de València.
Díaz, J.; Batanero, M. C.; Cañizares, M. J. (1987): *Azar y probabilidad*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 27. Madrid. Síntesis.
Godino, J. D.; Ruiz, F. (2003): *Geometria y su didáctica para maestros.* Granada. Universidad de Granada. (Última visita 1-7-2015 en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf).
Guillén, G. (1991): *Poliedros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 15. Madrid. Síntesis.
Gutiérrez, A.; Fernández, A. (1985): *Actividades con el geoplano para la egb*. València. Escola Universitària de Professorat d'egb de València.
Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986): *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. València. Escola Universitària de Professorat d'egb de València.
Hernán, F.; Carrillo, E. (1988): *Recursos en el aula de matemáticas*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 34. Madrid. Síntesis.
Martínez, A.; Juan, F. (coord.) (1989): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 16. Madrid. Síntesis.
Padilla, F. *et al.* (1991): *Circulando por el círculo*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 18. Madrid. Síntesis.
Saa, M. D. *et al.* (1990): *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Col·lecció Blanca,14. Múrcia. Secretariat de Publicacions Universitat de Múrcia.
Tomeo, V.; Uña, I. (1989): *Diez lecciones de estadística descriptiva*. *(Curso teórico-práctico)*. Madrid. AC.
Welkowitz, J.; Ewen, R. B.; Cohen, J. (1981): *Estadística aplicada a las ciencias de la educación*. Aula XXI. Madrid. Santillana.

Índex de figures