www.sapientia.uji.es | 104

UNIVERSITAT JAUME•I

Introducción a la matemática de las operaciones financieras

J. David Cabedo Semper

Introducción a la matemática de las operaciones financieras

J. David Cabedo Semper

UNIVERSITAT JAUME • I

Departament de Finances i Comptabilitat

■ Codis d'assignatura FC1003
EC1003
AE1003

J. David Cabedo Semper - ISBN: 978-84-16356-18-8 Introducción a la matemática de las operaciones financieras - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia104

A Aurora, David y Lledó

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 104
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2015

ISBN versió impresa: 978-84-16356-18-8

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDICE

Prólogo

El presente libro debe ser entendido como un primer manual de matemática de las operaciones financieras. Se ha concebido para ser utilizado en el primero de los módulos de finanzas a impartir en los grados universitarios de los campos de la economía, la administración de empresas y las finanzas. Se trata de un manual de libre acceso dirigido fundamentalmente a los estudiantes de la Universitat Jaume I, aunque abierto a estudiantes, profesores y profesionales externos a la Universitat, como lo están todos los materiales de la colección Sapientia.

El libro se centra en lo que podría denominarse «enfoque clásico» de la matemática de las operaciones financieras. Esto es, se abordan los temas relacionados con la problemática del valor temporal del dinero dentro de las operaciones financieras más habituales en el ámbito corporativo. El texto se ha dividido en un total de siete capítulos. En el primero se definen las magnitudes necesarias para entender el funcionamiento de las operaciones financieras y saber valorarlas: las leyes financieras y las magnitudes derivadas. El capítulo segundo introduce el concepto de operación financiera y define el saldo financiero o reserva matemática, elemento fundamental en la valoración financiera. En el capítulo 3 se analiza el funcionamiento de dos operaciones financieras a corto plazo, básicas en la financiación empresarial: el descuento de efectos y la operatoria con Letras del Tesoro. El capítulo cuarto se ha dedicado a las rentas financieras, necesarias para entender el funcionamiento de las operaciones a largo plazo. En el capítulo 5 se estudian las operaciones de constitución, esto es, aquellas en las que se van realizando inversiones de forma regular a lo largo de un período con la finalidad de obtener un capital al final del mismo. El capítulo 6 se dedica a las operaciones de amortización: los préstamos. Y en el último de los capítulos se estudia el funcionamiento de las cuentas corrientes, instrumentos fundamentales en la operatoria empresarial.

El libro, en su conjunto, recoge los contenidos mínimos de matemáticas financieras que todo estudiante de grado debería dominar. No obstante, en determinados capítulos se han incluido anexos. En ellos se han recogido aquellos aspectos que pueden ser omitidos, sin que por ello quede menoscabada una comprensión general del tema tratado en el correspondiente capítulo. No debe olvidarse que el manual se ha preparado para una asignatura instrumental: una asignatura en la que se estudia la metodología de valoración que será utilizada en cursos avanzados de finanzas en los que se introducen y estudian en profundidad temas complejos como son la valoración de proyectos de inversión, las operaciones de empréstito o los derivados.

En la exposición de los temas se ha utilizado un enfoque eminentemente práctico. Sin eludir las necesarias explicaciones teóricas y demostraciones matemáticas, la introducción de un nuevo concepto o planteamiento se ha acompañado de ejemplos numéricos que, se ha entendido, refuerzan la comprensión y asimilación del tema. Con un fin única y exclusivamente pedagógico, en la práctica totalidad de ejemplos planteados se utilizan operaciones en las que el número de períodos es reducido. La simplicidad ayuda a la comprensión y la generalización a un mayor número de períodos es inmediata. Los ejemplos incluidos en los diferentes capítulos son, en su mayoría, de carácter genérico: ni los plazos (de los que se acaba de hablar) ni los tipos de interés utilizados se corresponden con los vigentes en la actualidad para operaciones financieras. Esto se ha hecho así de forma intencionada ya que el libro nace con una vocación de continuidad, con vocación de no quedar obsoleto al poco tiempo de ser publicado. Asimismo, y con una finalidad didáctica, se ha procurado que, en la medida de lo posible, los ejemplos planteados dentro de cada uno de los temas utilicen siempre los mismos datos.

Para poder sacar provecho al estudio y lectura del presente libro, es necesario tener unos conocimientos básicos de matemáticas. Sería aconsejable que el lector refrescase sus conocimientos sobre la operatoria con polinomios y ecuaciones polinómicas. Asimismo, en algunos temas concretos, resultan necesarios conocimientos básicos del funcionamiento de las sucesiones y del cálculo de límites.

Para finalizar, cabe señalar que el dominio de los temas tratados en el presente manual es fundamental. Los temas de valoración del campo de las finanzas (valoración de empresas, valoración de acciones, valoración de bonos...) utilizan los conceptos y procedimientos recogidos en este libro. Asimismo, en el campo de la contabilidad, no solo en el registro contable de las operaciones financieras, sino en operaciones tan habituales como la determinación del valor razonable, se utilizan las técnicas que se exponen en el presente manual.

El autor
Castellón, junio de 2015

Capítulo 1
Magnitudes financieras

Este es el primero de los dos capítulos que se dedican en el presente manual a tratar los conceptos y aspectos teóricos básicos que es necesario conocer para entender el funcionamiento de las operaciones financieras que como se verá, realizan tanto empresas como particulares.

En el presente capítulo se introduce el concepto de capital financiero y se estudian las expresiones matemáticas que se utilizan en su valoración: las leyes financieras. Asimismo se definen toda una serie de magnitudes (rédito, factor, tanto...) relacionadas con estas leyes financieras y se muestra la relación que existe entre ellas. Se estudian en profundidad las leyes financieras que se utilizan habitualmente (descuento simple comercial, capitalización simple y capitalización compuesta) y se deducen las expresiones matemáticas concretas para las magnitudes financieras ligadas a las mismas.

1.1. Capital financiero

Un capital financiero se define a través de un par de valores:

- El primer valor se refiere a la cuantía monetaria del capital.
- El segundo valor fija el momento en el que dicha cuantía monetaria está disponible.

Los dos valores que conforman el capital financiero se suelen representar entre paréntesis separados por una coma, tal y como se muestra a continuación:

$$(C, t)$$

donde C representa la cuantía en unidades monetarias (u.m.): C u.m.

y t representa el momento en que dichas u.m. están disponibles. A este momento se le denomina vencimiento del capital.

Por ejemplo, el par de valores (500, 27/4/2018) representa un capital financiero cuya cuantía es de 500 u.m. que estarán disponibles el 27 de abril de 2018 (el vencimiento del capital es el 27/4/2018).

En el anterior ejemplo, el vencimiento del capital se ha representado mediante una fecha concreta. No obstante, lo más habitual es que dicho vencimiento se represente a través del número de períodos que restan, desde el momento actual, hasta el día en que venza el capital. Por ejemplo, si el vencimiento de un capital de cuantía 200 u.m. se producirá dentro de 1 año, contado desde el momento actual, el capital financiero se representará a través del siguiente par de valores:

(200, 1 año)

O si restan 47 días para que venza un capital de cuantía 350 u.m., el capital financiero se representará del siguiente modo:

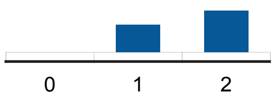
(350, 47 días)

Conviene decir que, en la mayoría de los casos, la representación del capital financiero se realiza solo en términos numéricos: cuantía monetaria y número de períodos temporales que restan hasta el vencimiento, sin explicitar si dichos períodos se refieren a años, meses, días, etc. Cuando se procede de dicho modo es porque se sobrentiende el tipo de período temporal con el que se está trabajando. De este modo, tomando los anteriores ejemplos, cuando se habla del capital financiero (200, 1), sin explicitar que «1» hace referencia a años, es porque, por otra información con la que se está trabajando, se entiende que los períodos son anuales.

O bien, si se habla de un capital financiero (350, 47), sin explicitar que «47» se refiere a días, es porque este hecho ha quedado claro en el resto de información con la que se está trabajando.

Otro modo habitual de representar capitales financieros es utilizando un eje temporal. Aquí se pueden usar dos alternativas:

Bien se pueden representar, sobre dicho eje temporal, barras que representen la cuantía del capital. Por ejemplo, para representar dos capitales financieros, (100, 1 año) y (150, 2 años), se utilizaría el siguiente esquema temporal:



O bien se pueden representar sobre el eje temporal directamente las cuantías de los capitales financieros, sin recurrir a barras. El ejemplo que se acaba de plantear se representará del siguiente modo:

	100	150
0	1	2

Esta última es la representación que, en general, se utilizará en el presente texto.

Definido el concepto de capital financiero, la siguiente cuestión relevante es fijar algún criterio para poder ordenar los capitales financieros, de forma que dicho criterio pueda utilizarse en el proceso de toma de decisiones. Este criterio es la preferencia. De este modo, un decisor elegirá un capital financiero (C_1, t_1) frente a otro (C_2, t_2) cuando el primero sea preferible al segundo. Esto es, si se le da la alternativa de elegir entre dos capitales, nunca elegirá el segundo (1.1):

$$(C_1, t_1) \succ (C_2, t_2) \tag{1.1}$$

De un modo similar, cuando a un decisor se le de la alternativa de elegir entre dos capitales (C_1, t_1) y (C_3, t_3), no se decantará por ninguno de ellos en concreto si no es capaz de establecer un orden de preferencia. Esto es, no se decantará por ninguno de los dos en concreto, si, para el decisor, ambos capitales son indiferentes (1.2):

$$(C_1, t_1) \equiv (C_3, t_3) \tag{1.2}$$

El orden de preferencia en la elección de capitales financieros está guiado por dos principios básicos:

- El de la preferencia por la liquidez: un decisor racional, ante dos capitales de idéntica cuantía, preferirá aquel que venza antes.
- El de subestimación de las necesidades futuras: un decisor racional prioriza el consumo más inmediato, para satisfacer las necesidades actuales o más próximas, frente al consumo futuro; esto es, el consumo que iría destinado a satisfacer las necesidades que surjan en el futuro.

Atendiendo a estos dos principios, ante un conjunto de capitales como el que se muestra a continuación (en el que el tiempo se ha expresado en años):

$$(100, 0);\ (100, 1) \text{ y } (100, 2)$$

El establecimiento de un orden de preferencia es inmediato:

$$(100, 0) \succ (100, 1) \succ (100, 2)$$

Simplemente aplicando el sentido común se puede llegar al mismo orden de preferencia. A cualquier persona a la que se le preguntara: ¿Vd. qué prefiere? ¿100 u.m. hoy o 100 u.m. dentro de un año? Daría una respuesta inequívoca: 100 u.m. hoy.

O ante la pregunta ¿Vd. qué preferiría? ¿100 u.m. dentro de un año o 100 u.m. dentro de dos años? La respuesta también sería única: 100 u.m. dentro de un año. Probablemente añadiera: cuanto antes mejor.

En definitiva, el establecer un orden de preferencia en un conjunto de capitales de idéntica cuantía es inmediato: se preferirán aquellos que tengan un vencimiento más cercano al momento actual.

También resulta obvia la elección entre los siguientes capitales financieros (en los que el tiempo se ha expresado en años):

$$(100, 0);\ (90, 1)$$

El orden de preferencia será:

$$(100, 0) \succ (90, 1)$$

Cualquier decisor racional preferirá disponer de 100 u.m. en el momento actual frente a la alternativa de tener 90 u.m. dentro de un año.

Esto es, cuando la decisión se plantea entre dos capitales, uno de los cuales tiene una cuantía superior y un vencimiento anterior a los del otro, el orden de preferencia resulta también obvio: se preferirá el primero, el que tiene cuantía superior y vencimiento más cercano.

Sin embargo, cuando la decisión se plantea entre dos capitales, uno de cuantía inferior y vencimiento más cercano, y otro de cuantía mayor y vencimiento más lejano, el orden de preferencia no puede establecerse de un modo directo.

Por ejemplo, frente a la pregunta ¿Vd. qué capital prefiere? ¿un capital de cuantía 100 u.m. y vencimiento en el momento actual o uno de cuantía 105 u.m. y vencimiento dentro de un año? En este caso la respuesta no es unívoca. De hecho, si hiciéramos esta pregunta a diferentes personas, unas responderían que preferirían 100 u.m. hoy frente a 105 dentro de un año. Otras responderían que 105 dentro de un año. Y un tercer grupo respondería que ambos capitales les son indiferentes.

En la actividad económica cotidiana se dan muchas situaciones en las que resulta necesario establecer relaciones de preferencia/indiferencia entre capitales financieros. Por ello, resulta clave disponer de algún mecanismo, sistema o procedimiento que permita determinar si dos capitales son indiferentes o, si por el contrario, en términos racionales uno es preferible sobre el otro.

Cuando se quiere establecer el orden de preferencia entre dos capitales (C_i, t_i) y (C_j, t_j) en los que:

$$C_i < C_j \text{ y } t_i < t_j$$

se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Se calcula la cuantía de un capital con vencimiento en un momento p, que sea equivalente al capital (C_i, t_i) (esto es, que en términos de preferencia resulte indiferente): C_i^p.
2. Se calcula la cuantía de un capital con vencimiento en ese momento p, que sea equivalente al capital (C_j, t_j) (esto es, que en términos de preferencia resulte indiferente): C_j^p.
3. Con lo anterior se han obtenido dos capitales financieros (C_i^p, p) y (C_j^p, p) que tienen el mismo vencimiento y que, por lo tanto, se pueden comparar directamente. De hecho:

$$\text{Si } C_i^p > C_j^p \rightarrow (C_i^p, p) \succ (C_j^p, p) \rightarrow (C_i, i) \succ (C_j, j)$$

Por el contrario:

$$\text{Si } C_i^p < C_j^p \rightarrow (C_i^p, p) \prec (C_j^p, p) \rightarrow (C_i, i) \prec (C_j, j)$$

Téngase en cuenta que:

$$(C_i^p, p) \equiv (C_i, i) \text{ y } (C_j^p, p) \equiv (C_j, j)$$

El procedimiento descrito pone de manifiesto la necesidad de disponer de algún sistema que permita calcular, para un capital dado, la cuantía de otro capital equivalente con vencimiento en otro instante temporal.

1.2. Leyes financieras

Las leyes financieras son funciones matemáticas que, aplicadas sobre la cuantía de un capital financiero con vencimiento en t (C_t), permiten calcular la cuantía de otro capital financiero indiferente/equivalente (en adelante financieramente equivalente) con vencimiento en un momento del tiempo distinto, denominado p (punto de aplicación). Concretamente la cuantía de este último capital se obtendrá multiplicando la cuantía del primero por la ley financiera. Si, por ejemplo, el punto p está a la derecha del vencimiento del capital (t), esto es, p es posterior a t, el esquema de cálculo puede representarse a través de la figura 1.1:

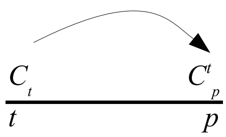


Figura 1.1. Aplicación de una ley financiera sobre (C_t, t). $p > t$

De este modo, si la ley financiera se representa por $F(r, t, p)$, la cuantía C^t_p se calculará del siguiente modo (1.3):

$$C^t_p = C_t \cdot F(r, t, p) \qquad (1.3)$$

donde $F(r, t, p)$ es la ley financiera, t el vencimiento del capital, p el punto de aplicación y r un tercer parámetro de la ley financiera cuyo significado se verá más adelante.

Para que una función matemática sea ley financiera debe cumplir toda una serie de condiciones, que se detallan a continuación:

1. Debe ser homogénea de grado 1 con respecto a la cuantía. Esto significa que, calculado en el punto p un capital financieramente equivalente a (1, t), el cálculo en dicho punto p de un capital financieramente equivalente a (C_t, t) se realizará multiplicando aquel por C_t:

$$C^1_p = 1 \cdot F(r, t, p) \rightarrow C^t_p = C_t \cdot C^1_p$$

2. Debe ser reflexiva: dos capitales con el mismo vencimiento (en el punto p) serán financieramente equivalentes si las cuantías de ambos son idénticas. Por este motivo, la ley financiera aplicada sobre este punto de aplicación debe tener una cuantía igual a la unidad:

$$F\,(r,\, p,\, p) = 1$$

3. Debe ser creciente con respecto al punto de aplicación y decreciente con respecto al tiempo:

$$\frac{\delta F\left(r,t,p\right)}{\delta p} > 0 \;\; \text{y} \;\; \frac{\delta F\left(r,t,p\right)}{\delta t} < 0$$

4. Debe ser continua con respecto a p y con respecto a t.

5. Debe ser siempre positiva:

$$F\,(r,\, t,\, p) > 0$$

Potencialmente existen muchas funciones matemáticas que cumplen las condiciones para ser consideradas leyes financieras. No obstante, en la práctica solo se utiliza un reducido número de ellas. En el presente texto se trabajará con la tres leyes más utilizadas en la práctica.

La ley financiera, por tanto, permitirá comparar capitales con vencimiento en distintos momentos del tiempo, con independencia de cuál sea su cuantía. De este modo:

- Si se tienen dos capitales:

$$(C_i,\, i) \text{ y } (C_j,\, j)$$

- Tal que:

$$C_i < C_j \;\; i < j$$

- Y además se tiene una ley financiera para valorarlos, $F(r,\, t,\, p)$

- Ambos capitales se podrán comparar calculando la cuantía de los respectivos capitales financieramente equivalentes con vencimiento en p. Esto es, se podrá establecer un orden de preferencia o indiferencia entre ambos capitales calculando las cuantías de los capitales financieramente equivalentes con vencimiento en p:

$$C_p^i = C_i \cdot F\left(r, i, p\right);\;\; C_p^j = C_j \cdot F\left(r, j, p\right)$$

- El orden de preferencia podrá establecerse en base a lo siguiente:

$$\text{Si} \quad C_p^j > C_p^i \rightarrow (C_j, j) \succ (C_i, i)$$
$$\text{Si} \quad C_p^j < C_p^i \rightarrow (C_j, j) \prec (C_i, i)$$
$$\text{Si} \quad C_p^j = C_p^i \rightarrow (C_j, j) \equiv (C_i, i)$$

Ejemplo 1.1

Sean dos capitales financieros:

(100, 1) y (105, 2)

Y sea una ley financiera para valorarlos que tiene la siguiente expresión:

$$F(0{,}05, t, 3) = 1 + 0'05^2 \cdot (3 - t)$$

Con los datos anteriores, establecer un orden de preferencia entre ambos capitales

Representados en un eje temporal los capitales son los siguientes:

100	105	
1	2	p=3

Los equivalentes en el momento p (3) se calcularán del siguiente modo:

$$C_3^1 = 100 \cdot (1 + 0'05^2 \cdot (3 - 1)) = 100{,}5 \text{ u.m.}$$

$$C_3^2 = 105 \cdot (1 + 0'05^2 \cdot (3 - 2)) = 105{,}26 \text{ u.m.}$$

Por lo tanto, como 105,26 es mayor que 100,5, el orden de preferencia de los capitales será el siguiente:

$$(100, 1) \prec (105, 2)$$

1.3. Magnitudes financieras derivadas

Junto a las leyes financieras, dentro de la matemática financiera resulta necesario conocer otras funciones matemáticas que las complementan. Son las denominadas magnitudes financieras derivadas que se estudian dentro de este apartado, en el que se van a ver los conceptos teóricos. En apartados posteriores, cuando se introduzcan leyes financieras concretas, se podrá apreciar el sentido económico de estas magnitudes.

1.3.1. Factor financiero

Con la ley financiera, partiendo de un capital financiero con vencimiento en un momento del tiempo *t*, se puede calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente con vencimiento en un instante concreto del tiempo denominado punto de aplicación (*p*). Ahora bien, en ocasiones resulta de interés calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente al primero, pero con vencimiento en un instante del tiempo distinto al punto de aplicación. El problema se puede plantear en los siguientes términos:

- Sea un capital financiero (C, t).
- Y sea una ley financiera utilizada para valorarlo con la siguiente expresión: $F(r; t, p)$.
- Interesa calcular un capital financieramente equivalente a (C, t) con vencimiento en un momento del tiempo, distinto del punto de aplicación *p*.

Pues bien, la función matemática que permitirá calcular la cuantía de este último capital se denomina factor. En este punto se pueden dar dos situaciones:

- Primera: que el momento en el que se desea calcular el capital financieramente equivalente sea posterior al vencimiento del primer capital. Por ejemplo, interesa calcular un capital (C_y, y) financieramente equivalente a (C_x, x) de modo que el vencimiento del primero, *y*, sea distinto del punto de aplicación *p*, y además $y > x$. En este caso se habla de factor de desplazamiento a la derecha (figura 1.2).

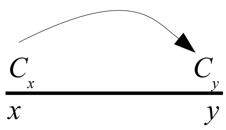


Figura 1.2. Factor de desplazamiento a la derecha $(C_x, x) \equiv (C_y, y)$

La expresión para este factor se deduce directamente de la ley. Si ambos capitales son financieramente equivalentes, las cuantías financieramente equivalentes de dichos capitales con vencimiento en el punto de aplicación *p* deben ser idénticas:

$$C_p^x = C_x \cdot F(r,x,p)\ ;\ C_p^y = C_y \cdot F(r,y,p);\ C_p^x = C_p^y$$

Luego la cuantía C_y se puede obtener igualando las anteriores expresiones y despejando:

$$C_x \cdot F(r,x,p) = C_y \cdot F(r,y,p) \to C_y = C_x \cdot \frac{F(r,x,p)}{F(r,y,p)}$$

El factor de desplazamiento a la derecha tendrá por tanto la siguiente expresión (1.4):

$$f\left(r,x,y,p\right)=\frac{F\left(r,x,p\right)}{F\left(r,y,p\right)} \tag{1.4}$$

Este factor de desplazamiento a la derecha será mayor que la unidad. Esto es, el capital con vencimiento en un momento posterior, tendrá una cuantía superior, lo cual es coherente con los principios vistos de preferencia por la liquidez y subestimación de las necesidades futuras.

Ejemplo 1.2

Sea un capital financiero: (100, 1)

Y sea una ley financiera para valorarlo que tiene la siguiente expresión:

$$F\,(0{,}05,\,t,\,3) = 1 + 0'05^2 \cdot (3 - t)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de desplazamiento a la derecha entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 2.

El factor de desplazamiento a la derecha tendrá la siguiente expresión:

$$f\left(0{,}05,1,2,3\right)=\frac{1+0{,}05^2\cdot\left(3-1\right)}{1+0{,}05^2\cdot\left(3-2\right)}=1{,}0024938$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 2 será:

$$100 \cdot 1{,}0024938 = 100{,}25 \text{ u.m.}$$

Como se puede comprobar, la cuantía del capital, con vencimiento en 2, financieramente equivalente a un capital de cuantía 100, pero con vencimiento en 1, es superior a 100.

- Segunda: que el momento en el que se desea calcular el capital financieramente equivalente sea anterior al vencimiento del primer capital. Por ejemplo, interesa calcular un capital (C_x, x) financieramente equivalente a (C_y, y) de modo que el vencimiento del primero, x, sea distinto del punto de aplicación p, y además $x < y$. En este caso se habla de factor de desplazamiento a la izquierda (figura 1.3).

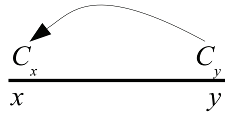


Figura 1.3 Factor de desplazamiento a la izquierda (C_x, x)≡(C_y, y)

La expresión para este factor se deduce directamente de la ley. Si ambos capitales son financieramente equivalentes, la cuantía, financieramente equivalente, de dichos capitales con vencimiento en el punto de aplicación p debe ser la misma:

$$C_p^x = C_x \cdot F\left(r,x,p\right);\; C_p^y = C_y \cdot F\left(r,y,p\right);\; C_p^x = C_p^y$$

Luego la cuantía C_x se puede obtener igualando las anteriores expresiones y despejando:

$$C_x \cdot F\left(r,x,p\right) = C_y \cdot F\left(r,y,p\right) \rightarrow C_x = C_y \cdot \frac{F\left(r,y,p\right)}{F\left(r,x,p\right)}$$

El factor de desplazamiento a la izquierda tendrá por tanto la siguiente expresión (1.5):

$$f^*\left(r,x,y,p\right) = \frac{F\left(r,y,p\right)}{F\left(r,x,p\right)} \qquad (1.5)$$

El factor de desplazamiento a la izquierda estará comprendido entre 0 y 1.

$$0 < f^*\left(r,x,y,p\right) < 1$$

Con ello, el capital con vencimiento en un momento anterior, tendrá una cuantía inferior, lo cual es coherente con los principios vistos de preferencia por la liquidez y subestimación de las necesidades futuras.

También se puede ver fácilmente que el factor de desplazamiento a la izquierda es la inversa del factor de desplazamiento a la derecha (1.6):

$$f^*\left(r,x,y,p\right) = \frac{1}{f\left(r,x,y,p\right)} \qquad (1.6)$$

Ejemplo 1.3

Sea un capital financiero: (100,25, 2)

Y sea una ley financiera para valorarlo que tiene la siguiente expresión:

$$F\,(0{,}05,\, t,\, 3) = 1 + 0{,}052^2 \cdot (3 - t)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de desplazamiento a la izquierda entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 1.

El factor de desplazamiento a la izquierda tendrá la siguiente expresión:

$$f^*\left(0,05,\ 1,\ 2,\ 3\right)=\frac{1+0{,}05^2\cdot\left(3-2\right)}{1+0{,}05^2\cdot\left(3-1\right)}=0{,}9975124$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 1 será:

$$100{,}25\cdot 0{,}9975124=100{,}00 \text{ u.m.}$$

Como se puede comprobar, la cuantía del capital, con vencimiento en 1, financieramente equivalente a un capital de cuantía 100,25, pero con vencimiento en 2, es inferior a 100,25.

1.3.2. Rédito

El rédito se puede definir como la diferencia, en valor absoluto, entre el factor y la unidad.

De este modo, para el factor de desplazamiento a la derecha el rédito será:

$$r\,(r\,,\,x\,,\,y\,,\,p)=f\,(r\,,\,x\,,\,y\,,\,p)-1$$

Recuérdese que el factor de desplazamiento a la derecha es mayor que 1.

Mientras que para el factor de desplazamiento a la izquierda el rédito será:

$$r^*(r\,,\,x\,,\,y\,,\,p)=1-f^*(r\,,\,x\,,\,y\,,\,p)$$

Recuérdese que el valor del factor de desplazamiento a la izquierda está comprendido entre 0 y 1.

1.3.3. Tanto

La última de las magnitudes que se definen dentro del presente apartado es el tanto. El tanto se define como el rédito por unidad de tiempo. De este modo, en el caso del rédito asociado al factor de desplazamiento a la derecha, el tanto se calculará del siguiente modo:

$$\rho\left(r,x,y,p\right)=\frac{r\left(r,x,y,p\right)}{y-x}$$

Y en el caso del rédito asociado al factor de desplazamiento a la izquierda, el tanto se calculará del siguiente modo:

$$\rho^*\left(r,x,y,p\right)=\frac{r^*\left(r,x,y,p\right)}{y-x}$$

1.4. Leyes de capitalización

Las leyes financieras que se utilizan habitualmente se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Leyes de capitalización.
- Leyes de descuento.

Como se ha visto, las leyes financieras se utilizan para, a partir de un capital financiero con un vencimiento concreto (primer capital), calcular la cuantía de otro, con vencimiento en el punto de aplicación *p*, financieramente equivalente al primero. Pues bien, en las leyes financieras de capitalización, el punto de aplicación se sitúa a la derecha del (es posterior al) vencimiento del que hemos denominado primer capital. Mientras que en las leyes financieras de descuento, dicho punto de aplicación se sitúa a la izquierda del (es anterior al) vencimiento de ese primer capital.

Dentro de las leyes de capitalización, en este epígrafe se estudian dos: la ley financiera de capitalización simple y la ley financiera de capitalización compuesta.

En el apartado siguiente se estudia una de las leyes de descuento: el descuento simple comercial

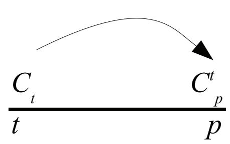
1.4.1. Capitalización simple

La ley financiera de capitalización simple tiene la siguiente expresión (1.7):

$$L(i, t, p) = 1 + i\,(p - t) \qquad (1.7)$$

Para representar las leyes de capitalización se suele utilizar la letra *L* en lugar de la *F*, genérica para las leyes financieras. Por otro lado, en estas leyes de capitalización, el equivalente al parámetro *r* de estas leyes financieras genéricas es el parámetro *i*.

Si se tiene un capital financiero (C_t, *t*), que se valora con la ley financiera de capitalización simple, y se quiere calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente en el momento *p*, posterior a *t* (recuérdese que en las leyes de de capitalización el punto de aplicación está a la derecha del vencimiento del capital), se procederá del siguiente modo:



$$C_p^t = C_t \cdot \left(1 + i\left(p - t\right)\right)$$

Ejemplo 1.4

Sea un capital financiero: (100, 1)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización simple:

$$L(0{,}06,\ t,\ 3) = 1 + 0{,}06 \cdot (3 - t)$$

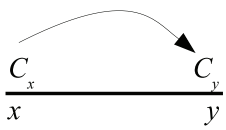
Con estos datos, calcúlese la cuantía de un capital financieramente equivalente al señalado, pero que vence en el momento 3.

Como el capital cuya cuantía se quiere calcular vence en el punto de aplicación, se utilizará directamente la ley:

$$C_3^1 = 100 \cdot \left(1 + 0{,}06\left(3 - 1\right)\right) = 112{,}00 \text{ u.m.}$$

El factor de desplazamiento a la derecha, en las leyes de capitalización, se denomina factor de capitalización. Mientras que el factor de desplazamiento a la izquierda se denomina factor de contracapitalización.

El factor de capitalización para la ley financiera de capitalización simple se deriva directamente de la expresión (1.4):



$$u\left(i, x, y, p\right) = \frac{L\left(i, x, p\right)}{L\left(i, y, p\right)}$$

Sustituyendo (1.8):

$$u\left(i, x, y, p\right) = \frac{1 + i \cdot \left(p - x\right)}{1 + i \cdot \left(p - y\right)} \qquad (1.8)$$

Ejemplo 1.5

Sea un capital financiero: (100, 1)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización simple:

$$L(0{,}06,\ t,\ 3) = 1 + 0{,}06 \cdot (3 - t)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de capitalización entre los momentos 1 y 2 y calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 2.

El factor de capitalización tendrá la siguiente expresión:

$$u(0,06,\ 1,\ 2,\ 3)=\frac{1+0{,}06\cdot(3-1)}{1+0{,}06\cdot(3-2)}=1{,}0566038$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 2 será:

$$100\cdot 1{,}0566038 = 105{,}66 \text{ u.m.}$$

Como se ha visto, el factor de desplazamiento a la izquierda se obtiene como la inversa del factor de desplazamiento a la derecha. Este factor de desplazamiento a la izquierda, factor de contracapitalización, tendrá por tanto la siguiente expresión (1.9):

$$u^*(i,x,y,p)=\frac{1+i\cdot(p-y)}{1+i\cdot(p-x)} \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.6

Sea un capital financiero: (105,66, 2)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización simple:

$$L(0{,}06,\ t,\ 3) = 1 + 0{,}06\cdot(3-t)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de contracapitalización entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 1.

El factor de contracapitalización tendrá la siguiente expresión:

$$u^*(0,06,\ 1,\ 2,\ 3)=\frac{1+0{,}06\cdot(3-2)}{1+0{,}06\cdot(3-1)}=0{,}9464286$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 1 será:

$$105{,}66\cdot 0{,}9464286 = 100{,}00 \text{ u.m.}$$

En la ley de capitalización simple, el rédito de capitalización se calculará como la diferencia entre el factor de capitalización y la unidad (1.10):

$$i(i,x,y,p)=\frac{1+i\cdot(p-x)}{1+i\cdot(p-y)}-1=\frac{1+i\cdot(p-x)-(1+i\cdot(p-y))}{1+i\cdot(p-y)}=\frac{i\cdot(y-x)}{1+i\cdot(p-y)}$$

$$i\left(i,x,y,p\right)=\frac{i\cdot\left(y-x\right)}{1+i\cdot\left(p-y\right)} \tag{1.10}$$

En la ley financiera de capitalización simple es habitual considerar únicamente un capital financiero, y calcular su equivalente en el punto de aplicación. En estas condiciones, el rédito de capitalización tiene la siguiente expresión (1.11):

$$i\ (i,\ x,\ p,\ p) = i\cdot(p-x) \tag{1.11}$$

Es decir, el rédito de capitalización proporciona una medida de la diferencia entre un capital unitario (1 u.m.) con vencimiento en el momento x y la cuantía del capital financieramente equivalente a dicho capital unitario, pero con vencimiento en el momento p. Esto es, el rédito de capitalización proporciona una medida del rendimiento que genera un capital de 1 u.m. entre dos momentos del tiempo.

Ejemplo 1.7

Sea un capital financiero: (1, 1)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización simple:

$$L(0{,}06,\ t,\ 3) = 1 + 0{,}06\cdot(3-t)$$

Con los datos anteriores, calcúlese el rédito de capitalización del momento 1 al 3.

Como se ha visto, este rédito se calcula del siguiente modo:

$$i\ (0{,}06,\ 1,\ 3,\ 3) = 0{,}06\cdot(3\cdot 1) = 0{,}12 \text{ u.m.}$$

Estas 0,12 u.m. constituyen el rendimiento, el beneficio, si se quiere, que se obtendría por dejar de disponer de 1 u.m. hoy a cambio de disponer del capital que resulte financieramente equivalente dentro de 2 períodos.

En efecto, la cuantía del capital financieramente equivalente a (1, 1), pero con vencimiento en el momento 3 (p) es (aplicando la ley):

$$C_3^1=1\cdot\left(1+0{,}06\cdot\left(3-1\right)\right)=1{,}12 \text{ u.m.}$$

Esto es, con la ley financiera reseñada, un decisor racional sería indiferente entre los siguientes capitales: (1, 1) y (1,12, 3). O lo que es lo mismo, estaría dispuesto a renunciar a 1 u.m. en el momento 1 a cambio de poder disponer de 1,12 u.m. dentro de 2 períodos (momento 3). Es decir, el rendimiento que se obtendría por esta decisión es de 0,12 u.m. (1,12 – 1), que es precisamente el rédito de capitalización.

Por otra parte, el rédito de contracapitalización se calculará restando a la unidad el factor de contracapitalización:

$$i^*(i,x,y,p) = 1 - \frac{1+i\cdot(p-y)}{1+i\cdot(p-x)} = \frac{1+i\cdot(p-x)-(1+i\cdot(p-y))}{1+i\cdot(p-x)} = \frac{i\cdot(y-x)}{1+i\cdot(p-x)}$$

Finalmente, el tanto de capitalización se obtendrá dividiendo el rédito entre el intervalo de tiempo:

$$\rho(i,x,y,p) = \frac{i(i,x,y,p)}{(y-x)} = \frac{i}{1+i\cdot(p-y)}$$

En el caso en que el vencimiento del segundo de los capitales coincida con el punto de aplicación, el tanto de capitalización tendrá la siguiente expresión:

$$\rho(i, x, p, p) = i$$

Esto es, el parámetro i de la ley de capitalización simple (del que hasta ahora no se había analizado su significado), es el tanto periodal de capitalización correspondiente al intervalo que media entre el punto de aplicación y cualquier momento anterior al mismo. Este tanto de capitalización nos proporciona una medida del rendimiento periodal: el rendimiento correspondiente a un período. El rédito proporciona una medida del rendimiento total, el correspondiente a todos los períodos que se toman en consideración. Mientras que el tanto proporciona una medida relativa de dicho rendimiento: el correspondiente a un período. Adicionalmente, al referirse al rendimiento que proporciona 1 u.m., el tanto viene expresado en tanto por uno. A este tanto de capitalización se le denomina también tipo de interés (esta es la denominación que se usará a partir de este punto).

Retomando la expresión (1.11)

$$i\ (i, x, p, p) = i \cdot (p - x)$$

se puede comprobar que el rendimiento total de un capital de cuantía 1 u.m. (rédito) se obtiene multiplicando el tipo de interés (rendimiento periodal) por el número de períodos (los que median entre x y p). Por ello, dentro de la expresión de la ley financiera, tipo de interés y número de períodos deben estar referidos a las mismas unidades de medida.

Es decir, si los períodos con los que se está trabajando al aplicar la ley financiera son meses, el tipo de interés debe ser el mensual. De este modo el producto entre el tipo de interés mensual y el número de meses ofrecerá un resultado coherente. O si los períodos con los que se trabaja son trimestres, el tipo de interés a utilizar debe ser trimestral. En definitiva, debe haber concordancia, en cuanto a unidades, entre tipo de interés y períodos.

En la ley de capitalización simple es habitual utilizar el tipo de interés (tanto) anual. Por este motivo, el número de períodos también debería venir expresado en años. Si el número de períodos viene expresado en otras unidades, deberá transformase en años. Por ejemplo, si el número de períodos está expresado en meses, se dividirá entre 12. Si está expresado en trimestres, entre 4, etc. En general, se dividirá entre el número de períodos que contiene un año.

Ejemplo 1.8

Sea un capital financiero definido por: (110, 1)

en el que el número de períodos viene expresado en meses.

Este capital financiero se valora utilizando la siguiente ley financiera:

$$L(0{,}06, t, p) = 1 + 0{,}06 \cdot (p - t)$$

donde $i = 0{,}06$ es el tipo de interés anual. Y p está situado en el mes 7 ($p = 7$ meses).

Con los anteriores datos se desea calcular la cuantía de un capital con vencimiento en p que sea financieramente equivalente al capital reseñado.

El capital que se nos pide será el siguiente: (C_7, 7 meses) que, al vencer en el punto de aplicación, se puede calcular aplicando directamente le ley.

El número de períodos que median entre p y t son 6 meses. No obstante, el aplicar la ley del siguiente modo no sería correcto:

$$C_7 \neq 110 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot (7 - 1))$$

porque el tipo de interés es anual, mientras que el número de períodos tomado viene expresado en meses. Es necesario, por tanto, realizar un cambio de unidades: expresar ese número de períodos en años:

$$\frac{6\,\text{meses}}{12\,\text{meses}/\text{año}} = 0{,}5\,\text{años}$$

La cuantía del capital se calculará del siguiente modo:

$$C_7 = 110 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 0{,}5) = 113{,}30 \text{ u.m.}$$

En ocasiones, el número de períodos viene expresado en días. En estos casos, a la hora de transformar los días en años surgen varias dudas. En primer lugar, si se trabaja con fechas, ¿cuál es el número de días a considerar entre dos fechas? Por ejemplo, ¿cuántos días median entre el 28 de febrero y el 28 de marzo? Si el año es bisiesto son 29 días; si no lo es, 28. Ahora bien, para muchos cálculos se toman los meses de forma homogénea; como si todos ellos tuvieran 30 días. Si esta es la situación, se considerará que entre el 28 de febrero y el 28 de marzo median 30 días.

Otra duda surge en torno al número de días que tiene el año. Un año no bisiesto 365. Uno bisiesto 366. Pero si se considera que todos los meses tienen el mismo número de días (30), el año tiene 360 días (es el denominado año comercial).

Por lo tanto, cuando se trabaja con días, resulta necesario conocer el criterio que debe utilizarse para transformar los días en años. A dicho criterio se le denomina base de cálculo (o simplemente base) y es un dato adicional que se requerirá cuando se realicen cálculos financieros en los que se computen días. En la tabla 1.1 se detallan las bases utilizadas en los cálculos financieros.

Base de cálculo	Significado
ACT/ACT	Numerador: Días reales entre dos fechas. Denominador: Días reales del año (365 en general o 366 cuando el año sea bisiesto)
ACT/365	Numerador: Días reales entre dos fechas. Denominador: 365
ACT/360	Numerador: Días reales entre dos fechas. Denominador: 360
30/360	Numerador: Se supone que todos los meses tienen 30 días y la diferencia entre fechas se computa de acuerdo con esa hipótesis. Denominador: 360

Tabla 1.1. Base de cálculo a utilizar cuando se trabaja con días.

Ejemplo 1.9

Sea un capital financiero de cuantía 110 u.m. y vencimiento el día 7 de julio.

Este capital financiero se valora utilizando la siguiente ley financiera:

$$L(0{,}06, t, p) = 1 + 0{,}06 \cdot (p - t)$$

donde $i = 0{,}06$ es el tipo de interés anual. Y p está situado el 7 de septiembre.

Con los anteriores datos se desea calcular la cuantía de un capital con vencimiento en p que sea financieramente equivalente al capital reseñado. Información adicional: base ACT/360.

Teniendo en cuenta que, en la base a utilizar, el numerador contempla el número real de días, deben contarse los días que median entre el 7 de julio y el 7 de septiembre. Entre ambas fechas median 62 días. Para pasar estos días a años deberá dividirse entre 360 (véase el denominador de la base). Luego el número de años será:

$$\frac{62}{360} = 0{,}17222 \text{ años}$$

La cuantía del capital buscado será:

$$C_{7/sep} = 110 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 0{,}17222) = 111{,}14 \text{ u.m.}$$

En capitalización simple es muy habitual trabajar con días. Por ello, en muchas ocasiones, la expresión de la ley financiera suele ser, en lugar de la expresión (1.7), una de las siguientes (dependiendo de la base):

$$L(i,t,p) = 1 + i \cdot \frac{n}{360}$$

$$L(i,t,p) = 1 + i \cdot \frac{n}{365}$$

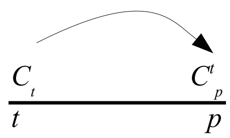
Expresiones en las que n representa el número de días.

1.4.2. Capitalización compuesta

La ley financiera de capitalización compuesta tiene la siguiente expresión (1.12):

$$L(i,t,p) = (1+i)^{(p-t)} \tag{1.12}$$

De este modo, si se tiene un capital financiero (C_t, t), que se valora con la ley financiera de capitalización compuesta, y se quiere calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente en el momento p, posterior a t (recuérdese que en las leyes de capitalización el punto de aplicación está a la derecha del vencimiento del capital), se procederá del siguiente modo:



$$C_p^t = C_t \cdot (1+i)^{(p-t)}$$

Ejemplo 1.10

Sea un capital financiero de cuantía 100 u.m. con vencimiento en el momento 1. Para valorar este capital se utiliza la siguiente ley de capitalización compuesta:

$$L(0{,}06,\ t{,}3) = (1 + 0{,}06)^{(3-t)}$$

Con estos datos, calcúlese la cuantía de un capital financieramente equivalente al señalado, pero que vence en el momento 3.

Como el capital cuya cuantía queremos calcular vence en el punto de aplicación, se utiliza directamente la ley:

$$C_3^1 = 100 \cdot (1 + 0{,}06)^{(3-1)} = 112{,}36 \text{ u.m.}$$

El factor de capitalización para la ley financiera de capitalización compuesta se deriva directamente de la expresión (1.4):

$$\begin{tikzcd} C_x \arrow[r, bend left] & C_y \\ x & y \end{tikzcd}$$

$$u(i, x, y, p) = \frac{L(i, x, p)}{L(i, y, p)}$$

Sustituyendo (1.13):

$$u(i, x, y, p) = \frac{(1+i)^{(p-x)}}{(1+i)^{(p-y)}} = (1+i)^{(y-x)}$$

$$u(i, x, y, p) = (1+i)^{(y-x)} \qquad (1.13)$$

Nótese que, al contrario de lo que ocurría con la ley de capitalización simple, el factor no depende del punto de aplicación. Y nótese también que el factor tiene una expresión idéntica a la de la ley.

Ejemplo 1.11

Sea un capital financiero: (100, 1)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización compuesta:

$$L\left(0{,}06,\ t, 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{(3-t)}$$

Con los datos anteriores, calcúlese el factor de capitalización entre los momentos 1 y 2, cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 2.

El factor de capitalización tendrá la siguiente expresión:

$$u\left(0{,}06,\ 1,\ 2,\ 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{(2-1)} = 1{,}06$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 2 será:

$$100 \cdot 1{,}06 = 106{,}00 \text{ u.m.}$$

El factor de contracapitalización se obtiene como la inversa del factor de capitalización. Este factor de contracapitalización, tendrá por tanto la siguiente expresión (1.14):

$$u^*\left(i, x, y, p\right) = \left(1+i\right)^{-(y-x)} = \frac{1}{\left(1+i\right)^{(y-x)}} \tag{1.14}$$

Ejemplo 1.12

Sea un capital financiero: (106, 2)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización compuesta:

$$L\left(0{,}06,\ t, 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{(3-t)}$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de contracapitalización entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 1.

El factor de contracapitalización tendrá la siguiente expresión:

$$u^*\left(0{,}06,\ 1,\ 2,\ 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{-(2-1)} = 1{,}06^{-1} = 0{,}94339326$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 1 será:

$$106 \cdot 1{,}06^{-1} = 100{,}00 \text{ u.m.}$$

El rédito de capitalización, en la ley financiera de capitalización compuesta, se calculará como la diferencia entre el factor de capitalización y la unidad (1.15):

$$i\left(i, x, y, p\right) = \left(1+i\right)^{\left(y-x\right)} - 1 \tag{1.15}$$

Este rédito de capitalización proporciona una medida del rendimiento que genera un capital de 1 u.m. entre dos momentos del tiempo.

Ejemplo 1.13

Sea un capital financiero: (1, 1)

Que se valora con la siguiente ley de capitalización compuesta:

$$L\left(0{,}06,\ t, 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{\left(3-t\right)}$$

Con los datos anteriores, calcúlese el rédito de capitalización del momento 1 al 3.

Como se ha visto, este rédito se calcula del siguiente modo:

$$i\left(0{,}06,\ 1,\ 3,\ 3\right) = \left(1+0{,}06\right)^{\left(3-1\right)} - 1 = 0{,}1236 \text{ u.m.}$$

Estas 0,1236 u.m. constituyen el rendimiento, el beneficio, si se quiere, que se obtendría por dejar de disponer de 1 u.m. hoy a cambio de disponer del capital que resulte financieramente equivalente dentro de 2 períodos. En efecto, la cuantía del capital financieramente equivalente a (1, 1), pero con vencimiento en el momento 3 es (aplicando la ley o el factor; en capitalización compuesta tienen una expresión idéntica):

$$C_3^1 = 1 \cdot \left(1+0{,}06\right)^{\left(3-1\right)} = 1{,}1236 \text{ u.m.}$$

Esto es, con la ley financiera reseñada, un decisor racional sería indiferente entre los siguientes capitales: (1, 1) y (1,1236, 3). O lo que es lo mismo, estaría dispuesto a renunciar a 1 u.m. en el momento 1 a cambio de poder disponer de 1,1236 u.m. dentro de 2 períodos (momento 3). El rendimiento que se obtendría por esta decisión es de 0,1236 u.m. (1,1236 – 1). Esto es precisamente el rédito de capitalización.

Por su parte, el rédito de contracapitalización se calculará restando a la unidad el factor de contracapitalización (1.16):

$$i^*\left(i,x,y,p\right)=1-\left(1+i\right)^{-\left(y-x\right)} \tag{1.16}$$

Finalmente, el tanto de capitalización se calculará dividiendo el rédito de capitalización entre el número de períodos:

$$\rho\left(i,x,y,p\right)=\frac{\left(1+i\right)^{\left(y-x\right)}-1}{y-x}$$

Cuando el tanto se calcula para un período, esto es, cuando $y-x=1$, la expresión anterior queda del siguiente modo:

$$\rho\left(i,x,y,p\right)=\frac{\left(1+i\right)^{\left(1\right)}-1}{1}=i$$

Es decir, el tanto para un período es el parámetro i de la ley de capitalización compuesta, del que no se había analizado su significado todavía. A este tanto para un período se le denomina también tipo de interés efectivo y se puede interpretar siguiendo un razonamiento paralelo al indicado para la capitalización simple: se trata del rendimiento generado en un período por 1 u.m.

En capitalización compuesta, al igual que en capitalización simple, debe existir una concordancia en unidades entre el tipo de interés efectivo y los períodos. De modo que si se utilizan trimestres para contar el número de períodos, el tipo de interés debe ser trimestral. Si se utilizan semestres, el tipo de interés debe ser semestral. Y así sucesivamente.

Se ha visto que, en capitalización simple, el tipo de interés que habitualmente se usa es el anual. Y por ello lo que se suele hacer es ajustar el número de períodos. En capitalización compuesta no siempre es así. En ocasiones se utilizan tipos de interés efectivos trimestrales, semestrales..., por lo que resulta necesario conocer la equivalencia entre ellos. En el epígrafe siguiente se aborda esta cuestión. En todo caso, antes de entrar en este tema, se muestra la expresión del tanto de contracapitalización:

$$\rho^*\left(i,x,y,p\right)=\frac{1-\left(1+i\right)^{-\left(y-x\right)}}{y-x}$$

1.4.3. Capitalización simple vs. capitalización compuesta. Equivalencia de tantos

Se ha visto que, tanto la ley de capitalización simple como la de capitalización compuesta están inicialmente pensadas para, a partir de un capital financiero con un vencimiento en un momento concreto del tiempo, calcular la cuantía de otro con vencimiento en *p*, que sea financieramente equivalente al primero.

No obstante, en general, la aplicación de ambas leyes no lleva al mismo resultado. Si se parte de un capital (C_t, t), y se fija para ambas leyes el mismo punto de aplicación *p*, y el mismo tipo de interés *i*, la cuantía del capital financieramente equivalente en *p* será distinta (salvo casos concretos), según se use la ley financiera de capitalización simple o la ley financiera de capitalización compuesta:

$$C_t \cdot \left(1 + i \cdot \left(p - t\right)\right) \neq C_t \cdot \left(1 + i\right)^{(p-t)}$$

Ejemplo 1.14

Sea un capital de 100 u.m. disponible en el momento actual (momento 0). Calcúlese la cuantía del capital financieramente equivalente, con vencimiento dentro de 2 años, utilizando dos leyes de capitalización: una simple y otra compuesta. Las expresiones de ambas leyes se muestran a continuación (en ambos casos, el período viene expresado en años, y el tipo de interés en términos anuales):

$$L\left(0{,}06,\ t,\ 2\right) = 1 + 0{,}06 \cdot \left(2 - t\right)$$

$$L\left(0{,}06,\ t,\ 2\right) = \left(1 + 0{,}06\right)^{(2-t)}$$

Para la primera de las leyes:

$$C_2^{\text{sim}} = 100 \cdot \left(1 + 0{,}06 \cdot \left(2 - 0\right)\right) = 112 \text{ u.m.}$$

Para la segunda de las leyes:

$$C_2^{\text{com}} = 100 \cdot \left(1 + 0{,}06\right)^{(2-0)} = 112{,}36 \text{ u.m.}$$

Obviamente no se llega al mismo resultado. Y el motivo radica en el propio funcionamiento de la ley. En el caso de la ley de capitalización simple, el tipo de interés anual es de 0,06 (o del 6 % si se prefiere). Esto significa que en cada período, por cada unidad monetaria, se generan 0,06 u.m. de rendimiento. Como el capital inicial es de 100 u.m., en el primer período se generarán:

$$0{,}06 \cdot 100 = 6 \text{ u.m.}$$

Y en el segundo período:

$$0,06 \cdot 100 = 6 \text{ u.m.}$$

Luego el rendimiento será de 12 u.m. (6 + 6).

En el caso de la ley de capitalización compuesta, el tipo de interés efectivo anual es de 0,06 (6 %). Esto significa que, en cada período, por cada unidad monetaria, se generan 0,06 u.m. de rendimiento. Como el capital inicial es de 100 u.m., en el primer período se generarán:

$$0,06 \cdot 100 = 6 \text{ u.m.}$$

Ahora bien, al inicio del segundo período ya no se dispone de 100 u.m., sino que se dispone de 106 u.m. (100 + 6). Si por cada u.m. se generan 0,06 de rendimiento, en el segundo período se generarán:

$$0,06 \cdot 106 = 6,36 \text{ u.m.}$$

Luego el rendimiento será 12,36 u.m. (6 + 6,36).

Es decir, en la ley de capitalización simple el rendimiento no genera a su vez rendimiento. En la ley de capitalización compuesta, sí: el rendimiento genera rendimiento.

El hecho de que, con la ley de capitalización compuesta, el rendimiento genere a su vez rendimiento, plantea la necesidad de establecer una equivalencia entre los tantos (tipos de interés) efectivos cuando se trabaja con períodos inferiores al año. Por ejemplo, no será lo mismo calcular el interés cada mes que hacerlo cada 6 meses.

En capitalización simple no hay diferencia: el rendimiento no genera rendimiento. Intuitivamente podemos ver, con esta ley, que un tipo de interés mensual del 1 % (0,01) sería equivalente a un tipo de interés semestral del 6 % (0,06): para un capital de 100 u.m., el rendimiento generado en un mes será de 1 u.m. y el generado en 6 meses de 6 u.m.

Sin embargo, en capitalización compuesta no se puede decir lo mismo: si se calcula el rendimiento cada mes, al final del primer mes, el rendimiento generado comenzará a su vez a generar rendimiento. Y lo mismo ocurrirá con el rendimiento del segundo mes, del tercero, etc. Sin embargo, si calculamos el rendimiento cada 6 meses, hasta que no trascurra ese período el rendimiento no generará a su vez rendimiento. Intuitivamente ya se puede ver que, con capitalización compuesta, un tipo de interés mensual del 1 % (0,01) no será equivalente a un tipo de interés semestral del 6 % (0,06). Para un capital de 100 u.m., este último tipo de interés, transcurridos 6 meses (1 semestre), habrá generado un rendimiento de 6 u.m.:

$$C_{1\ semestre} = 100 \cdot (1 + 0{,}06) = 106{,}00 \text{ u.m. rendimiento} = 106 - 100 = 6 \text{ u.m.}$$

Téngase en cuenta que al trabajar con un tipo de interés semestral los períodos a considerar también son semestres.

Sin embargo, el rendimiento generado por un tipo de interés mensual del 1 % para ese mismo período será distinto:

$$C_{6\ meses} = 100 \cdot (1 + 0{,}01)^6 = 106{,}15 \text{ u.m. rendimiento} = 106{,}15 - 100 = 6{,}15 \text{ u.m.}$$

Al trabajar con un tipo de interés mensual deben considerarse 6 períodos para un semestre.

En resumen, en capitalización simple la equivalencia entre los tantos (tipos de interés) periodales y anuales puede realizarse en base a relaciones de proporcionalidad. Sin embargo, esto no puede hacerse en capitalización compuesta. Se necesita, por ello, algún otro tipo de regla para establecer dicha equivalencia. Esta regla se deriva a continuación utilizando un ejemplo.

Piénsese que, en el momento actual (0), se posee un capital de cuantía C_0 u.m. y que se quiere calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente pero con vencimiento dentro de 12 meses. Para ello se utilizará la ley de capitalización compuesta sabiendo que el tipo de interés efectivo mensual es $i_{(12)}$. Nótese que en este caso no se nos facilita un tipo de interés efectivo anual, sino mensual. Por tanto, la expresión de la ley debe adaptarse a esta circunstancia. Concretamente, la ley financiera a utilizar será la siguiente:

$$L = \left(1 + i_{(12)}\right)^{p-t}$$

donde *p–t* vendrá expresado en meses, ya que el tipo de interés efectivo que se utiliza es el mensual.

Al final del primer mes, el rendimiento generado será:

$$C_0 \cdot i_{(12)}$$

esto es, el capital inicial multiplicado por el tipo de interés efectivo mensual.

El capital acumulado al final del primer mes será el inicial más el rendimiento generado en dicho mes:

$$C_0 + C_0 \cdot i_{(12)} = C_0 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)$$

Este será el capital que se tomará como base para calcular el rendimiento del segundo de los períodos (recuérdese que el rendimiento genera a su vez rendimiento). El rendimiento será:

$$C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right) \cdot i_{(12)}$$

Por lo tanto, el capital acumulado al final del segundo de los meses será el acumulado al inicio del segundo mes, más el rendimiento de dicho mes:

$$C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right) + C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right) \cdot i_{(12)} = C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right) \cdot \left(1+i_{(12)}\right) = C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^2$$

Y así sucesivamente, de modo que, al final del año, cuando transcurran 12 meses, el capital acumulado será:

$$C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^{12}$$

Esta será la cuantía del capital, con vencimiento dentro de 12 meses, financieramente equivalente al capital de cuantía C_0 u.m. del que se disponía en el momento inicial, calculado según una ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo mensual igual a $i_{(12)}$.

También podría plantearse el problema de calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente a $(C_0, 0)$ con vencimiento dentro de 12 meses, aplicando la ley de capitalización compuesta, pero en este caso con un tipo de interés efectivo anual i. En este caso la ley financiera a aplicar sería:

$$L = \left(1+i\right)^{p-t}$$

donde $p–t$ vendrá expresado en años, ya que el tipo de interés efectivo que se utiliza es el anual.

Concretamente, como se trata de un año, $p–t$ será igual a 1.

La cuantía del capital financieramente equivalente será:

$$C_0 \cdot \left(1+i\right)$$

Si ambos tipos de interés (el efectivo anual y el efectivo mensual) son equivalentes, la cuantía del capital financieramente equivalente, con vencimiento transcurrido un año debe ser la misma, en ambos casos:

$$C_0 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^{12} = C_0 \cdot \left(1+i\right)$$

De esta expresión fácilmente se puede derivar la relación que existe entre el tipo de interés efectivo mensual y el tipo de interés efectivo anual:

$$\left(1+i_{(12)}\right)^{12}=\left(1+i\right)$$

El razonamiento que se ha seguido hasta este punto con respecto al tipo de interés efectivo mensual, puede extenderse a otros tipos de interés efectivos periodales: al trimestral, al semestral, etc. En general, este razonamiento puede hacerse extensivo a cualquier tipo de interés efectivo periodal de cualquier fraccionamiento del año. La relación entre ese tipo de interés efectivo periodal (en adelante solo tipo de interés periodal) y el tipo de interés efectivo anual será la siguiente (1.17):

$$\left(1+i_{(m)}\right)^{m}=\left(1+i\right) \tag{1.17}$$

donde $i_{(m)}$ representa el tipo de interés periodal; m representa el fraccionamiento (número de períodos que contiene el año); e i, como ya es sabido, representa el tipo de interés efectivo anual.

Por tanto, en capitalización compuesta, conocido el tipo de interés efectivo anual podrá calcularse cualquier periodal equivalente. Simplemente despejando de la anterior ecuación:

$$i_{(m)}=\left(1+i\right)^{1/m}-1$$

De un modo similar, conocido el tipo de interés periodal, podrá calcularse el tipo de interés efectivo anual equivalente:

$$i=\left(1+i_{(m)}\right)^{m}-1$$

Ejemplo 1.15

El tipo de interés efectivo anual al que se valora un capital es del 6 % (0,06). Calcular el tipo de interés trimestral equivalente a dicho tipo anual.

En primer lugar, debe determinarse el fraccionamiento: m. En este caso m = 4, ya que 4 son los trimestres que tiene un año. A partir de ahí, el tipo de interés trimestral se obtendrá usando las expresiones vistas anteriormente:

$$i_{(4)}=\left(1+0{,}06\right)^{1/4}-1=0{,}01467685$$

Como se ha visto, para la ley de capitalización compuesta, los tipos de interés relevantes son el tipo de interés efectivo anual y los tipos de interés (efectivos) periodales. Ahora bien, muchas veces se calcula un tercer tipo de interés, el denominado tipo de interés nominal anual cuya relación con el periodal es la siguiente (1.18):

$$j(m) = i_{(m)} \cdot m \tag{1.18}$$

donde $j(m)$ es el tipo de interés nominal anual equivalente al periodal $i_{(m)}$. Y m es el fraccionamiento.

Este tipo de interés nominal anual (que sería similar a un tipo de interés de capitalización simple) no tiene un uso directo a efectos de cálculo, pero, en la práctica, muchas veces se utiliza, como una forma indirecta de indicar cuál es el tipo de interés periodal.

Ejemplo 1.16

Para un tipo de interés trimestral de 0,01467685, calcular el tipo interés nominal anual equivalente.

Como se tiene un tipo de interés trimestral, el fraccionamiento es 4: $m = 4$. El tipo de interés nominal anual será:

$$j\,(4) = 0{,}01467685 \cdot 4 = 0{,}0586954$$

1.5. Descuento simple comercial

La última de las leyes financieras que se estudia dentro del presente capítulo es la de descuento simple comercial. Como se vio, las leyes financieras se clasificaban en dos grandes grupos:

- Leyes de capitalización.
- Leyes de descuento.

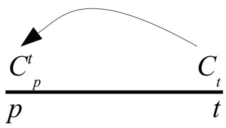
Las leyes financieras, recuérdese, se utilizan para, a partir de un capital financiero con un vencimiento concreto (primer capital), calcular la cuantía de otro, con vencimiento en el punto de aplicación p, financieramente equivalente al primero. En las leyes financieras de descuento, el punto de aplicación se sitúa a la izquierda del (es anterior al) vencimiento del que hemos denominado primer capital.

La ley financiera de descuento simple comercial tiene la siguiente expresión (1.19):

$$A\,(d, t, p) = 1 - d\,(t - p) \tag{1.19}$$

Para representar las leyes de descuento se suele utilizar la letra *A* en lugar de la *F*, genérica para las leyes financieras. Por otro lado, en estas leyes de descuento, el equivalente al parámetro *r* de estas leyes financieras genéricas es el parámetro *d*.

De este modo, si se tiene un capital financiero (C_t, t), que se valora con la ley financiera de descuento simple comercial, y se quiere calcular la cuantía de un capital financieramente equivalente en el momento *p*, anterior a *t* (recuérdese que en las leyes de descuento el punto de aplicación está a la izquierda del vencimiento del capital), se procederá del siguiente modo:



$$C_p^t = C_t \cdot \left(1 - d\left(t - p\right)\right)$$

Ejemplo 1.17

Sean un capital financiero: (100, 2)

Que se valora con la siguiente ley de descuento simple comercial:

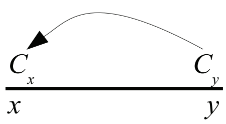
$$A(0{,}05,\, t\,,\, 0) = 1 - 0{,}05 \cdot (t - 0)$$

Con estos datos, calcúlese la cuantía de un capital financieramente equivalente al señalado, pero que vence en el momento 0.

Como el capital cuya cuantía se quiere calcular vence en el punto de aplicación, se utiliza directamente la ley:

$$C_0^2 = 100 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \left(2 - 0\right)\right) = 90{,}00 \text{ u.m.}$$

En las leyes de descuento, el factor de desplazamiento a la izquierda se denomina factor de descuento. Mientras que el factor de desplazamiento a la derecha se denomina factor de contradescuento. El factor de descuento para la ley financiera de descuento simple comercial se deriva directamente de la expresión (1.5):



$$v\left(d, x, y, p\right) = \frac{A\left(i, y, p\right)}{A\left(i, x, p\right)}$$

Sustituyendo (1.20):

$$v\left(d,x,y,p\right)=\frac{1-d\cdot\left(y-p\right)}{1-d\cdot\left(x-p\right)} \tag{1.20}$$

Ejemplo 1.18

Sea un capital financiero: (100, 2)

Que se valora con la siguiente ley de descuento simple comercial:

$$A(0{,}05,\ t,\ 0) = 1 - 0{,}05 \cdot (t - 0)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de descuento entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 1.

El factor de descuento tendrá la siguiente expresión:

$$v\left(0{,}05,\ 1,\ 2,\ 0\right)=\frac{1-0{,}05\cdot\left(2-0\right)}{1-0{,}05\cdot\left(1-0\right)}=0{,}94736842$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 1 será:

$$100 \cdot 0{,}94736842 = 94{,}74 \text{ u.m.}$$

El factor de contradescuento se obtendrá como la inversa del factor de descuento. Tendrá por tanto la siguiente expresión (1.21):

$$v^*\left(d,x,y,p\right)=\frac{1-d\cdot\left(x-p\right)}{1-d\cdot\left(y-p\right)} \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.19

Sea un capital financiero: (94,74, 1)

Que se valora con la siguiente ley de descuento simple comercial:

$$A(0{,}05,\ t,\ 0) = 1 - 0{,}05 \cdot (t - 0)$$

Con los datos anteriores, hay que calcular el factor de contradescuento entre los momentos 1 y 2 y la cuantía de un capital financieramente equivalente al reseñado con vencimiento en el momento 2.

El factor de contradescuento tendrá la siguiente expresión:

$$v^*(0{,}05,\ 1,\ 2,\ 0)=\frac{1-0{,}05\cdot(1-0)}{1-0{,}05\cdot(2-0)}=1{,}05555556$$

Y el capital financieramente equivalente con vencimiento en 2 será:

$$94{,}74\cdot 1{,}05555556=100{,}00 \text{ u.m.}$$

En la ley de descuento simple comercial, el rédito de descuento se calculará como la diferencia entre la unidad y el factor de descuento (1.22):

$$1-\frac{1-d\cdot(y-p)}{1-d\cdot(x-p)}=\frac{1-d\cdot(x-p)-(1-d\cdot(y-p))}{1-d\cdot(x-p)}=\frac{d\cdot(y-x)}{1-d\cdot(x-p)}$$

$$d(d,x,y,p)=\frac{d\cdot(y-x)}{1-d\cdot(x-p)} \tag{1.22}$$

Al igual que en el caso de la capitalización simple, en la ley financiera de descuento simple comercial, es habitual considerar únicamente un capital financiero, y calcular su equivalente en el punto de aplicación. En estas condiciones, el rédito de descuento tiene la siguiente expresión (1.23):

$$d\,(d,\ p,\ y,\ p)=d\cdot(y-p) \tag{1.23}$$

El rédito de descuento proporciona una medida del rendimiento que genera un capital entre dos momentos del tiempo.

Ejemplo 1.20

Sea un capital financiero: (1, 2)

Que se valora con la siguiente ley de descuento simple comercial:

$$A(0{,}05,\ t,\ 0)=1-0{,}05\cdot(t-0)$$

Con los datos anteriores, calcúlese el rédito de descuento del momento 0 al 2.

Como se ha visto, este rédito se calcula del siguiente modo:

$$d\,(0{,}05,\ 0,\ 2,\ 0)=0{,}05\cdot(2-0)=0{,}1 \text{ u.m.}$$

Estas 0,1 u.m. constituyen el rendimiento (el beneficio, si se quiere) que se obtendría por disponer de un capital de 1 u.m. dentro de 2 períodos en lugar de disponer hoy (momento 0) de un capital financieramente equivalente al señalado.

En efecto, la cuantía del capital financieramente equivalente a (1, 2), pero con vencimiento en el momento 0 (p) es (aplicando la ley):

$$C_0^1 = 1\cdot\left(1-0{,}05\cdot\left(2-0\right)\right) = 0{,}9 \quad \text{u.m.}$$

Esto es, con la ley financiera reseñada, un decisor racional sería indiferente entre los siguientes capitales: (0,9, 0) y (1, 2). O lo que es lo mismo, estaría dispuesto a renunciar a 0,9 u.m. en el momento 0 a cambio de poder disponer de 1 u.m. dentro de 2 períodos (momento 2). Es decir, el rendimiento que se obtendría por esta decisión es de 0,1 u.m. (1 – 0,9). Esto es precisamente el rédito de descuento.

El rédito de contradescuento se calculará restando la unidad al factor de contradescuento:

$$d^*\left(d,x,y,p\right) = \frac{1-d\cdot\left(x-p\right)}{1-d\cdot\left(y-p\right)} - 1 = \frac{1-d\cdot\left(x-p\right)-\left(1-d\cdot\left(y-p\right)\right)}{1-d\cdot\left(y-p\right)} = \frac{d\cdot\left(y-x\right)}{1-d\cdot\left(y-p\right)}$$

Finalmente, el tanto de descuento se obtendrá dividiendo el rédito entre el intervalo de tiempo:

$$\delta\left(d,x,y,p\right) = \frac{\dfrac{d\cdot\left(y-x\right)}{1-d\cdot\left(x-p\right)}}{y-x} = \frac{d}{1-d\cdot\left(x-p\right)}$$

En el caso en que el vencimiento del primero de los capitales coincida con el punto de aplicación ($x = p$), el tanto de descuento tendrá la siguiente expresión:

$$\delta\ (d, p, y, p) = d$$

Esto es, el parámetro d de la ley de descuento simple comercial es el tanto periodal de descuento correspondiente al intervalo que media entre el punto de aplicación y cualquier momento posterior al mismo. Este tanto de descuento proporciona una medida del rendimiento periodal, del rendimiento correspondiente a un período. El rédito proporciona una medida del rendimiento total, el correspondiente a todos los períodos que se toman en consideración. Mientras que el tanto proporciona una medida relativa del correspondiente a un período. Adicionalmente, el tanto de descuento viene expresado en tanto por uno. A este tanto de descuento se le denomina también tipo de descuento (esta es la denominación que se usará a partir de este punto).

Retomando la expresión (1.23),

$$d\,(d, p, y, p) = d \cdot (y - p)$$

se puede comprobar que el rendimiento total de un capital se obtiene multiplicando el tipo de descuento (rendimiento periodal) por el número de períodos (los que median entre p e y). Por ello, dentro de la expresión de la ley financiera, tipo de descuento y número de períodos deben expresarse en las mismas unidades. Es decir, si los períodos con los que se está trabajando al aplicar la ley financiera son meses, el tipo de descuento debe ser el mensual. De este modo el producto entre el tipo de descuento mensual y el número de meses ofrecerá un resultado coherente. O si los períodos con los que se trabaja son trimestres, el tipo de descuento a utilizar debe ser trimestral. En definitiva, debe haber concordancia, en cuanto a unidades, entre tipo de descuento y períodos.

Cuando se trabaja con la ley de descuento simple comercial, es habitual utilizar el tipo de descuento anual. Por este motivo, el número de períodos también debe venir expresado en años. Si el número de períodos viene expresado en otras unidades, deberá transformase en años. Por ejemplo, si el número de períodos está expresado en meses, se dividirá entre 12. Si está expresado en trimestres, se dividirá entre 4, etc. En general, dividendo entre el número de períodos que contiene un año.

Para aquellos casos en los que el número de períodos venga expresado en días (lo que también es habitual para esta ley de descuento), cabe realizar las mismas consideraciones que las hechas en el apartado dedicado a la ley de capitalización simple (véase tabla 1.1). De este modo es normal que, cuando se trabaja con períodos diarios, la ley de descuento simple comercial se exprese, en lugar de con la expresión vista anteriormente (1.19) con una de las siguientes expresiones (dependiendo de la base):

$$A\left(d, t, p\right) = 1 - d \cdot \frac{n}{360}$$

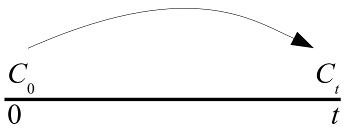
$$A\left(d, t, p\right) = 1 - d \cdot \frac{n}{365}$$

Expresiones en las que n representa el número de días.

Anexo
Capítulo 1. Capitalización continua

En el presente capítulo se ha visto el funcionamiento de la ley financiera de capitalización compuesta cuando se utilizaban distintos fraccionamientos dentro del año a la hora de capitalizar. Con esta ley, cuando se parte de un capital C_0 con vencimiento en 0, y se quiere calcular la cuantía C_t de un capital financieramente equivalente con vencimiento en t (posterior a 0), se procede del siguiente modo:

a. El esquema de cálculo es:



b. Y la ecuación a utilizar es (A1.1):

$$C_t = C_0 \cdot \left(1+i\right)^t \qquad \text{(A1.1)}$$

Donde i representa el tipo de interés efectivo anual de la operación.

Las expresiones (1.17) y (1.18) mostraban la equivalencia entre este tipo de interés efectivo anual y los tipos periodal y nominal anual:

$$\left(1+i_{(m)}\right)^m = \left(1+i\right)$$

$$j\left(m\right) = i_{(m)} \cdot m$$

donde $i_{(m)}$ es el tipo de interés periodal, $j(m)$ el tipo de interés nominal anual y m el fraccionamiento; esto es, representa la frecuencia con la que, dentro del año, se capitaliza (se calculan los intereses). De este modo, si se capitaliza trimestralmente, m es 4; si se capitaliza mensualmente, m es 12; y así para los distintos fraccionamientos del año.

Ahora bien, en todos los casos vistos dentro del capítulo se ha asumido implícitamente que el año se fraccionaba en intervalos finitos, o lo que es lo mismo, que la capitalización se realizaba en términos discretos. Sin embargo, para valorar determinadas operaciones financieras, es necesario realizar un fraccionamiento del año en períodos infinitesimales; es decir, capitalizar de un modo continuo.

Cuando se capitaliza de este modo, una cuestión importante es determinar el tipo de interés nominal anual equivalente al efectivo anual utilizado. Se trata de un tipo de interés nominal anual, $j(m)$, correspondiente a un fraccionamiento infinito:

$$\lim_{m\to\infty} j(m)$$

Sustituyendo en la anterior expresión (ténganse en cuenta las expresiones (1.17) y (1.18) que se acaban de enunciar):

$$\lim_{m\to\infty} j(m) = \lim_{m\to\infty} m \cdot i_{(m)} = \lim_{m\to\infty} m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1 \right] = \lim_{m\to\infty} \frac{\left[(1+i)^{1/m} - 1 \right]}{1/m}$$

La expresión $\lim_{m\to\infty} \frac{\left[(1+i)^{1/m} - 1 \right]}{1/m}$ da como resultado una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Como las funciones de numerador $f(m)$ y denominador $g(m)$ son derivables, se puede aplicar la regla de l'Hôpital que, para el caso que nos ocupa, establece lo siguiente:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{f'(m)}{g'(m)}$$

Las derivadas son:

$$f(m) = (1+i)^{1/m} - 1 \to f'(m) = (1+i)^{1/m} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \ln(1+i)$$

$$g(m) = \frac{1}{m} \to g'(m) = \frac{1}{m^2}$$

Sustituyendo:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left[(1+i)^{1/m} - 1 \right]}{1/m} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \ln(1+i)}{\frac{1}{m^2}} = \lim_{m\to\infty} \left[(1+i)^{1/m} \cdot \ln(1+i) \right] = \ln(1+i)$$

Al logaritmo anterior se le denomina tanto (tipo de interés) instantáneo y se suele representar mediante la letra r (A2.2):

$$r = \ln(1+i) \qquad \text{(A1.2)}$$

Claramente se puede apreciar que:

$$e^{r} = e^{\ln(1+i)} = (1+i)$$

Por lo que, sustituyendo, la ecuación (A1.1) puede plantearse en los siguientes términos (A1.3):

$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t = C_0 \cdot e^{r \cdot t} \qquad \text{(A1.3)}$$

Donde *r* representa el tanto (tipo de interés) instantáneo.

Ejemplo A1.1

Calcúlese el tipo de interés instantáneo correspondiente a un tipo de interés efectivo anual del 5 %:

$$i = 0{,}05 \rightarrow r = \ln(1+0{,}05) = 0{,}048790164$$

Problemas propuestos

Problema 1.1

Con la ley financiera de capitalización simple, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento dentro de 5 meses, que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento en el momento actual (momento 0).

Información adicional:

- Tipo de interés anual: 4 %
- *p*: dentro de 5 meses

Problema 1.2

Con la ley financiera de capitalización simple, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento dentro de 2 meses, que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento en el momento actual (momento 0).

Información adicional:

- Tipo de interés anual: 4 %
- *p*: dentro de 5 meses

Problema 1.3

Con la ley financiera de capitalización simple, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento dentro de 47 días, que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento en el momento actual (momento 0).
Información adicional:

- Tipo de interés anual: 4 %
- *p*: dentro de 150 días
- Base: ACT/365

Problema 1.4

Con la ley financiera de capitalización compuesta, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento dentro de 6 meses, que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento en el momento actual (momento 0).

Información adicional: Tipo de interés mensual: 1 %.

Problema 1.5

Con la ley financiera de capitalización compuesta, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento dentro de 1 trimestre, que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento dentro de un año.

Información adicional: Tipo de interés trimestral: 2,5 %.

Problema 1.6

Calcúlese el tipo de interés efectivo anual equivalente a un tipo de interés semestral del 4 %.

Problema 1.7

Calcúlese el tipo de interés cuatrimestral equivalente a un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Problema 1.8

Calcúlese el tipo de interés nominal anual equivalente a un tipo de interés mensual del 1 %.

Problema 1.9

Con la ley financiera de descuento simple comercial, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento en el momento actual (momento 0), que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento dentro de 5 meses.

Información adicional:

- Tipo de descuento anual: 3 %
- p: momento 0

Problema 1.10

Con la ley financiera de descuento simple comercial, calcular la cuantía de un capital, con vencimiento en el momento actual (15 de julio), que sea financieramente equivalente a uno de cuantía 150 u.m. con vencimiento el 8 de septiembre.

Información adicional:

- Tipo de descuento anual: 6 %
- *p*: momento actual (15 de julio)
- Base: ACT/360

Capítulo 2
Operaciones financieras

Este capítulo segundo se dedica, en su mayor parte, al análisis de las operaciones financieras desde una óptica eminentemente teórica. Se define el concepto de operación financiera y se muestran los diversos criterios que pueden ser utilizados para clasificar estas operaciones. También se introducen los conceptos de suma financiera y reserva matemática, necesarios para valorar operaciones financieras. Se analizan los distintos métodos que pueden utilizarse para calcular la reserva matemática (o saldo financiero) de una operación financiera: el retrospectivo, el prospectivo y el recurrente. El entender el funcionamiento de estos métodos garantiza la comprensión de la «lógica financiera» que soporta la valoración de cualquier operación financiera.

Adicionalmente se aborda el tratamiento de los gastos que llevan aparejados las operaciones financieras (denominados características comerciales) y se estudian los distintos tipos de interés que, en la operativa diaria, se utilizan para las transacciones financieras.

2.1. Definición y clasificación

2.1.1. Definición

En una operación financiera dos partes intercambian dos o más capitales con distintos vencimientos. El capital o el conjunto de capitales entregado por una de la partes (y, por tanto recibido por la otra) debe ser financieramente equivalente al capital o conjunto de capitales entregado por la otra parte (y, por tanto, recibido por la primera), en base a una ley financiera y tipo de interés pactados.

Esto es, en una operación financiera dos partes intercambian sendos conjuntos de capitales financieramente equivalentes en base a una ley financiera y tipo de interés pactados. El conjunto de capitales entregado por una de las partes (y recibido por la otra) se denomina prestación, mientras que el conjunto de capitales entregado por la otra parte (y recibido por la primera) se denomina contraprestación. Prestación y contraprestación deben ser financieramente equivalentes, en base a la ley financiera pactada.

Las operaciones financieras se suelen representar en un eje temporal en el que los capitales de la prestación llevan signo positivo y los de la contraprestación negativo. La única finalidad de estos signos es distinguir prestación y contraprestación.

En ese eje se representan las cuantías de los capitales y sus respectivos vencimientos. La cuantía de los capitales se representa en unidades monetarias, mientas que el vencimiento (como se vio en el capítulo anterior) puede representarse de dos formas alternativas:

- o bien se puede representar la fecha concreta en la que vence el capital correspondiente,
- o, lo que es más habitual, se puede utilizar una sucesión de números naturales en la que el 0 corresponde al inicio de la operación. En ese caso, para una adecuada interpretación del gráfico, resulta conveniente colocar, junto al mismo, la frecuencia de vencimiento de los capitales. De este modo, si los capitales representados vencen mensualmente, su frecuencia será 12; si el vencimiento de los capitales es semestral, su frecuencia será 2. De forma genérica, como se ha visto en el capítulo anterior, esta frecuencia se representa por la letra *m*.

En la figura 2.1 se ha representado el esquema general de una operación financiera, utilizando este último criterio, que es el que, salvo excepciones, se va a utilizar en el resto del libro.

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	….....	b	….....	g	g+1	….....	n	m

Figura 2.1. Esquema general de una operación financiera

Tal y como se puede apreciar en esta figura 2.1, en el momento inicial una de las partes hace entrega del primero de los capitales. A partir de ese momento, el orden en el que las partes intercambian el resto de capitales puede ser cualquiera (es decir, no es necesario que los capitales de la prestación y de la contraprestación vayan alternándose uno a uno). Eso sí, al final el conjunto de capitales entregado por una de las partes debe ser financieramente equivalente al entregado por la otra parte.

Como se ha subrayado, en el esquema temporal de una operación financiera resulta conveniente representar la frecuencia a la que se refieren los números naturales recogidos en el mismo. En la figura 2.1, junto al esquema temporal, se ha representado la frecuencia (*m*).

Ejemplo 2.1

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Represéntese la operación sobre un eje temporal.

La representación de la operación es la siguiente:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Tal y como se puede apreciar la prestación se ha representado con signo positivo, mientras que la contraprestación se ha representado con signo negativo.

Adicionalmente, al lado del eje temporal se ha hecho constar la frecuencia, 12, ya que los pagos se realizan mensualmente.

Los elementos que caracterizan toda operación financiera se detallan a continuación:

- Origen de la operación: se corresponde con el vencimiento del primero de los capitales que se intercambia.
- Final de la operación: coincide con el vencimiento del último de los capitales intercambiados.
- Duración de la operación: intervalo temporal que media entre el origen y el final de la operación.
- Prestación: conjunto de los capitales entregado por una de las partes.
- Contraprestación: conjunto de los capitales entregado por la otra parte.
- Ley (o leyes) financiera(s) pactada(s) para valorar la operación.
- Tipo (o tipos) de interés pactado(s) que, utilizando la ley (o leyes) financiera(s) correspondiente(s), establecen la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación.

2.1.2. Clasificación

Las operaciones financieras pueden clasificarse atendiendo a varios criterios. En primer lugar, atendiendo a la ley financiera que se utiliza para valorar la operación se habla de:

- Operaciones financieras de capitalización, cuando la ley financiera utilizada es una ley de capitalización.
- Operaciones financieras de descuento, cuando son estas leyes las utilizadas en la valoración de la operación.
- Y operaciones financieras mixtas, en las que se emplean tanto leyes de capitalización como leyes de descuento.

En segundo lugar, en función de la duración de la operación se habla de:

- Operaciones financieras a corto plazo. Estrictamente hablando, en estas operaciones la duración no supera el año. Ahora bien, algunas operaciones con

una duración superior (normalmente no más de 18 meses) podemos encontrarlas clasificadas como operaciones a corto plazo. En la valoración de las operaciones a corto plazo se suelen usar leyes simples.
- Operaciones financieras a largo plazo. Aquellas en las que la duración de la operación supera el año. Para valorar este tipo de operaciones es habitual utilizar leyes financieras compuestas.

El tercer criterio que se puede utilizar para clasificar las operaciones financieras es el número de capitales que conforman prestación y contraprestación. En base a este criterio se distingue entre:

- Operaciones financieras simples: son aquellas en que tanto prestación como prestación están formadas, respectivamente, por un único capital.
- Operaciones financieras compuestas: son aquellas en las que prestación y/o contraprestación están formadas por más de un capital.

Otro criterio clasifica las operaciones en función del grado de certeza de sus capitales financieros:

- En las operaciones ciertas, los capitales financieros son conocidos, desde el inicio, con total certidumbre, tanto en lo que se refiere a las cuantías como en los referente a los vencimientos.
- Mientras que en las operaciones aleatorias, alguno o algunos de los capitales financieros son aleatorios. Esto significa que bien su cuantía y/o su vencimiento dependen de la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

Finalmente, el quinto de los criterios de clasificación de las operaciones financieras es el que hace referencia al sentido crediticio de la operación. Esta clasificación se entenderá plenamente cuando, en epígrafes posteriores, se aborde el concepto de reserva matemática. Baste, por tanto, en este punto, una idea intuitiva: al final de una operación financiera, por definición, el conjunto de capitales que ha entregado una de las partes (prestación) es financieramente equivalente al entregado por la otra parte (contraprestación). No obstante, teniendo en cuenta que los vencimientos de los distintos capitales se producen en instantes temporales distintos, a lo largo de la vida de la operación habrá momentos en los que, el valor financiero de los capitales de la prestación, que vencen antes de dicho momento, será superior al valor financiero de los capitales de la contraprestación con vencimiento anterior al mencionado momento. En otros momentos es posible que ocurra (aunque no tiene por qué) la situación contraria: que el valor financiero de los capitales de la prestación, con vencimiento anterior al mencionado momento, sea inferior al valor financiero de los capitales de la contraprestación vencidos antes de ese momento. Atendiendo a esto, cabe diferenciar entre:

- Operaciones financieras de crédito unilateral. En ellas, en cualquier momento, el valor financiero de los capitales de la prestación vencidos con anterioridad a dicho momento es superior al valor financiero de los capitales de la contraprestación con vencimiento anterior al mismo.

- Operaciones financieras de crédito recíproco. En ellas, al menos en un momento, el valor financiero de los capitales de la prestación vencidos con anterioridad a dicho momento es inferior al valor financiero de los capitales de la contraprestación con vencimiento anterior al mismo.

2.2. Suma financiera y saldo financiero

2.2.1. Suma financiera

En el epígrafe anterior se ha hablado del valor financiero de un conjunto de capitales. El concepto, intuitivamente se habrá entendido, aunque desde un punto de vista formal no se haya explicado el procedimiento para calcular el valor financiero de un conjunto de capitales.

En el capítulo anterior solo se ha visto el procedimiento que es necesario utilizar para calcular equivalentes financieros de un capital financiero concreto: debe multiplicarse la cuantía del capital por el factor adecuado de la ley financiera correspondiente. Pues bien, cuando se tiene un conjunto de capitales y lo que se quiere es calcular el valor financiero de todos ellos en un instante concreto del tiempo, lo que se debe hacer es calcular el equivalente financiero de cada uno de ellos en dicho instante y efectuar la suma aritmética de las cuantías calculadas. Esa suma aritmética proporcionará la cuantía de un capital, con vencimiento en el instante temporal mencionado, que será financieramente equivalente al conjunto de capitales cuyos equivalentes financieros se han calculado individualmente. Ese capital equivalente será la suma financiera del mencionado conjunto de capitales.

De un modo formal, el cálculo de la suma financiera se realiza según el siguiente procedimiento: se tiene un conjunto de capitales, tal y como el que se muestra en la figura 2.2:

C_0	C_1	……..	C_g	C_{g+1}	……..	C_n	Frec
0	1	……..	g	$g+1$	……..	n	m

Figura 2.2. Esquema temporal para un conjunto de capitales

La suma financiera de estos capitales en el momento g, si se utiliza la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés periodal igual a $i_{(m)}$ vendrá dada por la siguiente expresión (2.1):

$$S_g = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-j} \tag{2.1}$$

Esto es, se calculan los equivalentes financieros en g de todos los capitales de la serie y se realiza la suma aritmética de todos ellos.

Ejemplo 2.2

Sean los siguientes capitales financieros con vencimiento semestral:

(200, 0) (250, 1) (300, 2) (500, 4)

Si se utiliza para su valoración la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés semestral ($i_{(2)}$) del 2 %, calcular su suma financiera en el momento 1.

La representación gráfica de este conjunto de capitales es la siguiente:

200	250	300	0	500	Frec
0	1	2	3	4	2

Como se ha visto, para calcular la suma financiera que se solicita hay que calcular los equivalentes financieros en 1 de todos los capitales y sumarlos. Del primer capital, el equivalente financiero en 1 será:

$$C_1^0 = 200 \cdot (1 + 0{,}02)^{1-0} = 204{,}00 \text{ u.m.}$$

Del segundo capital la cuantía del equivalente en 1 será la que aparece en el esquema temporal anterior, ya que el capital vence en ese momento y no necesitamos hacer cálculo alguno. En todo caso, si lo hiciésemos obtendríamos el siguiente resultado:

$$C_1^1 = 250 \cdot (1 + 0{,}02)^{1-1} = 250{,}00 \text{ u.m.}$$

Y así sucesivamente.

$$C_1^2 = 300 \cdot (1 + 0{,}02)^{1-2} = 294{,}12 \text{ u.m.}$$

$$C_1^4 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^{1-4} = 471{,}16 \text{ u.m.}$$

La suma aritmética de estos equivalentes es la suma financiera:

$$S_1 = 204 + 250 + 294{,}12 + 471{,}16 = 1.219{,}28 \text{ u.m.}$$

El capital (1.219,28, 1) será financieramente equivalente (de acuerdo con la ley de capitalización compuesta, con un tipo de interés semestral del 2 %) al conjunto de los capitales que se han representado en el esquema del presente ejemplo.

2.2.2. Saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera. El método retrospectivo

Como se ha repetido, en toda operación financiera, el valor financiero, en cualquier instante, de los capitales de la prestación, debe ser igual al valor financiero de los capitales de la contraprestación. Ahora que se ha visto qué es la suma financiera, el anterior enunciado podría formularse del siguiente modo:

En una operación financiera, en todo momento, la suma financiera de los capitales de la prestación debe ser igual a la suma financiera de los capitales de la contraprestación.

Ejemplo 2.3

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, calcular la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación en los momentos 0 y 4.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación :

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

En el momento 0, la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación será la siguiente:

$$S_0^P = 200 + 250 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{-3} = 440{,}51 \text{ u.m.}$$

$$S_0^{CP} = 300 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{-1} + 152 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{-4} = 440{,}51 \text{ u.m.}$$

En el momento 4 dicha suma financiera será:

$$S_4^P = 200 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{4} + 250 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right) = 463{,}85 \text{ u.m.}$$

$$S_0^{CP} = 300 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{3} + 152 = 463{,}85 \text{ u.m.}$$

Como se acaba de ver en el ejemplo, la suma financiera de los capitales de la prestación coincide con la de los de la contraprestación. En una operación financiera esto se cumple en todo momento: ambos conjuntos de capitales (prestación y contraprestación) son financieramente equivalentes.

No obstante, si bien en el global de la operación prestación y contraprestación son equivalentes, a lo largo de la vida de la operación el equivalente financiero de lo entregado por cada una de las partes, en general no tiene por qué ser el mismo.

Tómese el caso de la operación representada en la figura 2.1. El primero de los capitales se entrega por la prestación, en el momento 0. Si se calcula la suma financiera en 0 de los capitales de la prestación hasta el momento 0 y se compara con la suma financiera de los capitales de la contraprestación entregados hasta el momento 0, el primero de los importes será mayor. Resulta evidente, ya que el segundo (el equivalente financiero de los capitales de la contraprestación hasta el momento 0) es 0: hasta ese momento 0 no vence ningún capital de la contraprestación.

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	….....	b	….....	g	$g+1$	….....	n	m

Por lo tanto, a lo largo de la vida de una operación financiera habrá instantes en los que la suma financiera de los capitales de la prestación, con vencimiento anterior a dicho instante, será mayor que la de los capitales de la contraprestación, con vencimiento anterior al mencionado instante. Y podrá haber otros instantes en la que la situación sea la inversa.

- En el primer caso se dice que, en el instante en cuestión, la operación presenta un saldo a favor de la prestación (hasta ese momento, los capitales que han vencido de la prestación tienen un valor financiero superior a los capitales que han vencido de la contraprestación).
- En el segundo caso se dice que, en el instante en cuestión, la operación presenta un saldo a favor de la contraprestación (hasta ese momento, los capitales que han vencido de la prestación tienen un valor financiero inferior a los capitales que han vencido de la contraprestación).

La diferencia entre la suma financiera de los capitales de la prestación que han vencido hasta un determinado momento y la de los de la contraprestación que lo han hecho hasta dicho momento se denomina saldo financiero o reserva matemática de la operación. Esta reserva matemática se calculará del siguiente modo (método retrospectivo):

Para una operación financiera como la representada en la figura 2.1:

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	….....	b	….....	g	$g+1$	….....	n	m

La reserva matemática en g por la derecha (por la derecha significa en el instante inmediatamente posterior al vencimiento del capital C_g) se calculará según la siguiente expresión (2.2):

$$R_g^+ = S_g^{P+} - S_g^{CP+} \qquad (2.2)$$

donde S^{P+}_g y S^{CP+}_g representan, respectivamente, la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación que vencen en g o en cualquier instante anterior:

$$S_g^{P+} = \sum_{j=0}^{g} C_j^P \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{CP+} = \sum_{j=0}^{g} C_j^{CP} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-j}$$

donde C^P_j y C^{CP}_j representan, respectivamente, los capitales de prestación y contraprestación que vencen en el instante j.

Ejemplo 2.4

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, calcular la reserva matemática, por la derecha, en el momento 3. Utilícese el método retrospectivo.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación :

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Para calcular la reserva matemática por la derecha en el momento 3, nos situaremos justo en el instante posterior a dicho momento:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Y como el método de cálculo de la reserva es el retrospectivo, desde este instante en que nos hemos situado tenemos que «mirar hacia atrás»; esto es, tenemos que considerar todos los capitales que vencen con anterioridad a dicho instante:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Esto es, los capitales que deben tomarse en consideración para el cálculo de dicha reserva serán:

- Prestación: (200;0) y (250; 3)
- Contraprestación: (300; 1)

Deberá calcularse la suma financiera en 3 de los mencionados capitales de la prestación y la suma financiera en 3 del capital de la contraprestación señalado (como se trata de un único capital, esta última suma financiera no será sino el equivalente financiero en el momento del capital en cuestión). La diferencia entre ambas sumas financieras será la reserva:

$$S_3^{P+} = 200 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^3 + 250 = 457{,}89 \text{ u.m.}$$

$$S_3^{CP+} = 300 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^2 = 307{,}84 \text{ u.m.}$$

$$R_3^{+} = 457{,}89 - 307{,}84 = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

Esto es, el saldo financiero de la operación en el momento 3, por la derecha (esto es, en el instante posterior al vencimiento del capital) es de 150,05 u.m. Se trata de un saldo a favor de la prestación, ya que, hasta dicho instante, las aportaciones de la prestación son, en términos financieros, superiores a las de la contraprestación en dicha cuantía.

Al igual que se ha calculado la reserva matemática en g por la derecha, se puede plantear el cálculo de la reserva matemática en g por la izquierda (por la izquierda significa en el instante inmediatamente anterior al vencimiento del capital C_g), que se calculará según la siguiente expresión (2.3):

$$R_g^{-} = S_g^{P-} - S_g^{CP-} \tag{2.3}$$

donde S^{P-}_g y S^{CP-}_g representan, respectivamente, la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación que vencen en cualquier instante anterior a g:

$$S_g^{P-} = \sum_{j=0}^{g-1} C_j^{P} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{CP-} = \sum_{j=0}^{g-1} C_j^{CP} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-j}$$

donde C^{P}_{j} y C^{CP}_{j} representan, respectivamente, los capitales de prestación y contraprestación que vencen en el instante j.

Ejemplo 2.5

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, calcular la reserva matemática, por la izquierda, en el momento 3. Utilícese el método retrospectivo.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación :

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Para calcular la reserva matemática por la izquierda en el momento 3, nos situaremos justo en el instante anterior al dicho momento:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Y como el método de cálculo de la reserva es el retrospectivo, desde este instante en que nos hemos situado tenemos que «mirar hacia atrás»; esto es, tenemos que considerar todos los capitales que vencen con anterioridad a dicho instante:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Esto es, los capitales que deben tomarse en consideración para el cálculo de dicha reserva serán:

- Prestación: (200, 0)
- Contraprestación: (300, 1)

Deberá calcularse la suma financiera en 3 del mencionado capital de la prestación y la suma financiera en 3 del capital de la contraprestación señalado. La diferencia entre ambas sumas financieras será la reserva:

$$S_3^{P-} = 200 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^3 = 207{,}89 \text{ u.m.}$$

$$S_3^{CP-} = 300 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^2 = 307{,}84 \text{ u.m.}$$

$$R_3^- = 207{,}89 - 307{,}84 = -99{,}95 \text{ u.m.}$$

Esto es, el saldo financiero de la operación en el momento 3 (por la izquierda, en el instante anterior al vencimiento del capital) es de –99,95 u.m. Se trata de un saldo a favor de la contraprestación, ya que, hasta dicho instante, las aportaciones de la prestación han sido, en términos financieros, inferiores a las de la contraprestación en dicha cuantía.

2.2.3. El saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera. El método prospectivo

En el epígrafe anterior se ha calculado la reserva matemática en un momento determinado a partir de los capitales que han vencido hasta (reserva por la derecha) o antes de dicho momento (reserva por la izquierda). En la medida en que toda operación financiera podría calificarse como un juego de suma 0, la reserva matemática puede también calcularse a partir de los capitales que quedan pendientes de vencimiento, a partir de un momento determinado. Esta otra forma de calcular la reserva matemática es el denominado método prospectivo.

En efecto, como se ha repetido varias veces, la suma financiera de todos los capitales de la prestación debe ser igual a la de todos los capitales de la contraprestación. Sin embargo, como se ha visto en el epígrafe anterior, cuando se toman sendos subconjuntos de capitales de prestación y contraprestación (los que vencen hasta un determinado momento), la suma financiera de ambos subconjuntos no es, en general, idéntica:

- Supóngase, en primer lugar, que la suma financiera de los capitales de la prestación que vencen hasta un determinado momento g es superior a la de los de la contraprestación, y que la diferencia entre ambas sumas financieras es igual a una cantidad igual a R_g u.m. La suma financiera de los capitales de la prestación, con vencimiento posterior a dicho momento g, debe ser menor que la de los capitales de la contraprestación con vencimiento posterior a ese momento. Es más, la diferencia entre ambas sumas financieras debe ser igual a $-R_g$ u.m., para que se cumpla la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación.

- En segundo lugar, para el caso en que la suma financiera de los capitales de la prestación que vencen hasta un determinado momento *g* sea inferior a la de los de la contraprestación, puede realizarse un razonamiento similar: la suma financiera de los capitales de la prestación, con vencimiento posterior a dicho momento *g*, debe ser mayor que la de los capitales de la contraprestación con vencimiento posterior a ese momento. Es más, en ambos casos, las diferencias entre prestación y contraprestación deben tener idéntica cuantía aunque distinto signo.

De un modo ya formal, el cálculo de la reserva por el método prospectivo se puede plantear en los siguientes términos: sea una operación financiera como la representada en la figura 2.1:

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	....	b	....	g	$g+1$	....	n	m

La reserva matemática en *g* por la derecha (por la derecha significa en el instante inmediatamente posterior al vencimiento del capital C_g) se calculará según la siguiente expresión (2.4):

$$R_g^{+} = S_g^{\prime CP+} - S_g^{\prime P+} \qquad (2.4)$$

donde $S_g^{\prime P+}$ y $S_g^{\prime CP+}$ representan, respectivamente, la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación que vencen en cualquier instante posterior a *g*:

$$S_g^{\prime P+} = \sum_{j=g+1}^{n} C_j^{P} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{\prime CP+} = \sum_{j=g+1}^{n} C_j^{CP} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

donde C^P_j y C^{CP}_j representan, respectivamente, los capitales de prestación y contraprestación que vencen en el instante *j*.

Nótese que a la hora de restar sumas financieras, en el método retrospectivo se usaba como minuendo la prestación, y como sustraendo la contraprestación. En el método prospectivo se opera al revés: como minuendo se utiliza la contraprestación y como sustraendo la prestación. De este modo, el signo obtenido para la reserva calculado por ambos métodos es el mismo.

Ejemplo 2.6

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, calcular la reserva matemática, por la derecha, en el momento 3. Utilícese el método prospectivo.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Para calcular la reserva matemática por la derecha en el momento 3, nos situaremos justo en el instante posterior a dicho momento:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Y como el método de cálculo de la reserva es el prospectivo, desde este instante en que nos hemos situado tenemos que «mirar hacia adelante»; tenemos que considerar todos los capitales que vencen con posterioridad a dicho instante:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Esto es, los capitales que deben tomarse en consideración para el cálculo de dicha reserva serán:

- Prestación: ningún capital, ya que ninguno de ellos vence con posterioridad al instante tomado como referencia
- Contraprestación: (152, 4)

Deberá calcularse la suma financiera en 3 de los mencionados capitales de la prestación (ningún capital en este ejemplo) y de la contraprestación señalados. La diferencia entre ambas sumas financieras será la reserva:

$$S_3^{\prime P+} = 0 \text{ u.m.}$$

$$S_3^{\prime CP+} = 152 \cdot \left(1+0{,}0129886\right)^{-1} = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

$$R_3^{+} = 150{,}05 - 0 = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

Tal y como se puede apreciar, el resultado obtenido tiene una cuantía idéntica a la calculada con el método retrospectivo. De un modo intuitivo podríamos decir que el método retrospectivo nos informa de lo que ha pagado de más la prestación sobre la contraprestación hasta el momento 3 ($P - CP$). Mientras que el prospectivo nos informa de lo que le queda por pagar de más a la contraprestación sobre la prestación a partir del momento 3 ($CP - P$). Si hasta el momento 3, la prestación ha pagado 150,05 u.m. más que la contraprestación (método retrospectivo), a partir de dicho momento lo que le quedará por pagar a la contraprestación debe ser 150,05 u.m. superior a lo que le queda por pagar a la prestación (método prospectivo).

El cálculo de la reserva por la izquierda usando el método prospectivo, se puede plantear en términos similares a los vistos anteriormente. La reserva matemática en g por la izquierda (por la izquierda significa en el instante inmediatamente anterior al vencimiento del capital C_g) se calculará según la siguiente expresión (2.4):

$$R_g^{-} = S_g^{\prime CP-} - S_g^{\prime P-} \tag{2.4}$$

donde $S_g^{\prime P-}$ y $S_g^{\prime CP-}$ representan, respectivamente, la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación que vencen en g o en cualquier instante posterior a g :

$$S_g^{\prime P-} = \sum_{j=g}^{n} C_j^{P} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{\prime CP-} = \sum_{j=g}^{n} C_j^{CP} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

donde C^{P}_{j} y C^{CP}_{j} representan, respectivamente, los capitales de prestación y contraprestación que vencen en el instante j.

Ejemplo 2.7

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, calcular la reserva matemática, por la izquierda, en el momento 3. Utilizar el método prospectivo.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Para calcular la reserva matemática por la izquierda en el momento 3, nos situaremos en el instante justamente anterior a dicho momento:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Y como el método de cálculo de la reserva es el prospectivo, desde este instante en que nos hemos situado tenemos que «mirar hacia adelante»; tenemos que considerar todos los capitales que vencen con posterioridad a dicho instante:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Esto es, los capitales que deben tomarse en consideración para el cálculo de dicha reserva serán:

- Prestación: (250, 3)
- Contraprestación: (152, 4)

Deberá calcularse la suma financiera en 3 de los mencionados capitales de la prestación y de la contraprestación señalados. La diferencia entre ambas sumas financieras será la reserva:

$$S_3^{'P-} = 250 \text{ u.m.}$$

$$S_3^{'CP-} = 152 \cdot \left(1 + 0{,}0129886\right)^{-1} = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

$$R_3^{-} = 150{,}05 - 250 = -99{,}95 \text{ u.m.}$$

Esto es, de un modo informal se puede decir que, a partir de este momento, a la prestación le quedan obligaciones de pago por un valor financiero 99,95 u.m. superior al valor financiero de las obligaciones de pago de la contraprestación.

2.2.4. El saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera. El método recurrente

El tercero y último de los métodos que se puede utilizar para calcular la reserva matemática es el recurrente. En este método se parte de la reserva ya calculada en un determinado momento del tiempo, que vamos a denominar momento de referencia. A partir de dicha reserva, se calcula la reserva en otro momento del tiempo, que denominaremos momento objetivo, teniendo en cuenta los capitales de prestación y contraprestación que vencen entre el momento de referencia y el momento objetivo.

De un modo formal, para una operación financiera como la representada en la figura 2.1:

C_0	……..	$-C_b$	……..	C_g	C_{g+1}	……..	$-C_n$	Frec
0	……..	b	……..	g	g+1	……..	n	m

Asumiendo que se conoce el valor de la reserva por la derecha en un momento de referencia α (R^+_α), la reserva por la derecha en el momento objetivo g se calculará usando las siguientes expresiones (2.5) y (2.6), dependiendo de donde estén situados el momento de referencia y el momento objetivo:

$$R_g^+ = R_\alpha^+ \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-\alpha} + S_g^{''P+} - S_g^{''CP+} \quad sii \quad \alpha < g \tag{2.5}$$

donde:

$$S_g^{''P+} = \sum_{j=\alpha+1}^{g} C_j^P \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{''CP+} = \sum_{j=\alpha+1}^{g} C_j^{CP} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

O bien:

$$R_g^+ = R_\alpha^+ \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-\alpha} + S_g^{*CP+} - S_g^{*P+} \quad sii \quad \alpha > g \tag{2.6}$$

donde:

$$S_g^{*P+} = \sum_{j=g+1}^{\alpha} C_j^P \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

$$S_g^{*CP+} = \sum_{j=g+1}^{\alpha} C_j^{CP} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j}$$

Nótese que para calcular la reserva en un momento posterior al de referencia se usa un procedimiento similar al del método retrospectivo. Mientras que para calcular la reserva en un momento anterior al de referencia, el procedimiento es similar al método prospectivo.

Con un ejemplo se ve fácilmente como funciona este método recurrente.

Ejemplo 2.8

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, y se sabe que la reserva matemática por la derecha en el momento 3 asciende a 150,05 u.m., calcular la reserva matemática por la derecha en el momento 4 utilizando el método recurrente.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

El momento de referencia es 3 por la derecha; lo señalamos en el eje temporal:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$$R_3^+ = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

El momento objetivo es 4 por la derecha; también lo señalamos en el eje temporal:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$$R_3^+ = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

Los capitales a considerar son, por tanto, los que aparecen entre ambos momentos (el de referencia y el objetivo).

- Prestación: ningún capital: 0.
- Contraprestación: (152, 4)

Como el momento de referencia es anterior al objetivo, se usará un método similar al retrospectivo (expresión 2.5):

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$$R^{+}_{3} = 150{,}05 \text{ u.m.}$$

$$R^{+}_{4} = 150{,}05 \cdot (1 + 0{,}0129886) + [0] - [152] = 0 \text{ u.m.}$$

En la anterior expresión, entre corchetes, se han detallado las sumas financieras relevantes para prestación y contraprestación.

La reserva en el momento 4, como cabía esperar es de 0 u.m.: al final de la operación el valor financiero de todo lo entregado por la prestación es igual al valor financiero de todo lo entregado por la contraprestación.

Ejemplo 2.9

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, y se sabe que la reserva matemática por la derecha en el momento 3 asciende a 150,05 u.m., calcular la reserva matemática por la derecha en el momento 1 utilizando el método recurrente.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Señalamos en el eje temporal los momentos de referencia (3 por la derecha) y objetivo (1 por la derecha):

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$R^{+}_{3} = 150{,}05$ u.m.

Los capitales a considerar son, por tanto, los que aparecen entre ambos momentos (el de referencia y el objetivo).

- Prestación: (250, 3).
- Contraprestación: ningún capital: 0

Como el momento de referencia es posterior al objetivo, se usará un método similar al prospectivo (expresión 2.6):

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$R^{+}_{3} = 150{,}05$ u.m.

$$R^{+}_{1} = 150{,}05 \cdot (1 + 0{,}0129886)^{-2} + [0] - [250 \cdot (1 + 0{,}0129886)^{-2}] = -97{,}40 \text{ u.m.}$$

En la anterior expresión, entre corchetes, se han detallado las sumas financieras relevantes para prestación y contraprestación.

El resultado debe interpretarse en el siguiente sentido: en el momento 1, por la derecha, el saldo financiero de la operación es a favor de la contraprestación: el valor financiero de los capitales de la contraprestaciòn con vencimiento hasta el momento 1 es superior al de los de la prestación (con vencimiento hasta dicho momento) en un importe igual a 97,40 u.m. O, lo que es lo mismo, el equivalente financiero de los capitales pendientes de vencimiento de la prestación es superior al de los de la contraprestación en 97,40 u.m.

El planteamiento general del cálculo de la reserva matemática usando el método recurrente se ha realizado utilizando reservas por la derecha (véanse las expresiones 2.5 y 2.6). Obviamente, el procedimiento será el mismo cuando se utilicen reservas por la izquierda o una combinación de reservas por la derecha y por la izquierda.

Ejemplo 2.10

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, el tipo de interés mensual pactado ha sido del 0,0129886, y se sabe que la reserva matemática por la derecha en el momento 3 asciende a 150,05 u.m., calcúlese la reserva matemática por la izquierda en el momento 1 utilizando el método recurrente.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Señalamos en el eje temporal los momentos de referencia (3 por la derecha) y objetivo (1 por la izquierda):

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$R^+_3 = 150{,}05$ u.m.

Los capitales a considerar son, por tanto, los que aparecen entre ambos momentos (el de referencia y el objetivo).

- Prestación: (250, 3).
- Contraprestación: (300, 1)

Como el momento de referencia es posterior al objetivo, se usará un método similar al prospectivo:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$R^+_3 = 150{,}05$ u.m.

$R^-_1 = 150{,}05 \cdot (1 + 0{,}0129886)^{-2} + [300] - [250 \cdot (1 + 0{,}0129886)^{-2}] = 202{,}60$ u.m.

En la anterior expresión, entre corchetes, se han detallado las sumas financieras relevantes para prestación y contraprestación. El resultado al que se ha llegado indica que el valor financiero de los capitales de la prestación aportados antes del momento 1, supera al de los de la contraprestación en 202,60 u.m.

2.3. Características comerciales: unilaterales y bilaterales

Las operaciones financieras, en muchas ocasiones, tienen gastos. Alguna o las dos partes, deben afrontar desembolsos distintos al intercambio de las corrientes de capitales que conforman prestación y contraprestación. A estos gastos se les denomina características comerciales, y pueden ser unilaterales o bilaterales.

- Se denominan características comerciales bilaterales a aquellos gastos asociados a una operación financiera que desembolsa una de la partes y recibe la otra parte. Piénsese, por ejemplo, en una operación de préstamo. Como ya se habrá intuido (y se verá en capítulos posteriores) un préstamo es una operación financiera. De todos es sabido que para acceder a un préstamo es bastante habitual que quien lo solicita deba satisfacer al banco algún tipo de gasto, como son las comisiones de apertura o estudio. Se trata de gastos que paga una de las partes (quien solicita el préstamo) y percibe la otra parte (el banco, quien concede el préstamo).
- Por otra parte, son características comerciales unilaterales aquellos gastos asociados a una operación financiera que desembolsa una de las partes pero que percibe un tercero. Siguiendo con el ejemplo del préstamo, en ocasiones la firma del contrato requiere la presencia de un notario. Los honorarios del notario son gastos necesarios para que se lleve a cabo la operación (son, por tanto, gastos asociados a la operación financiera); y estos gastos los paga una de las partes: quien solicita el préstamo. Pero el cobro no lo percibe la otra parte, sino un tercero, el notario. Este es el motivo por el que los gastos de notaría constituyen un ejemplo de lo que son características comerciales unilaterales.

Como se verá en el epígrafe siguiente de este capítulo, el hecho de que existan características comerciales motiva que, el tipo de interés efectivo de las operaciones financieras no coincida con el tipo de interés que hace financieramente equivalentes prestación y contraprestación. Prestación y contraprestación son las corrientes de capitales que se acuerda intercambiar en la operación financiera. Ahora bien, cuando existen características comerciales la corriente de capitales entregada y/o recibida las partes queda alterada por dichos gastos. Y, por lo tanto, el tipo de interés efectivo que iguala la corriente realmente entregada con la realmente recibida por cada una de las partes no coincidirá con el tipo de interés que iguala prestación y contraprestación.

Cuando una operación financiera no tiene gastos, no tiene características comerciales, se dice que es una operación pura. Cuando tiene gastos, la operación financiera se dice que tiene características comerciales.

Los gastos asociados a una operación financiera pueden hacerse efectivos en distintos momentos del tiempo:

- Al inicio de la operación. En este grupo habría que incluir los anteriormente citados a título de ejemplo: comisiones de apertura o estudio de una operación de préstamo y gastos notariales asociados a la formalización de dicha operación.
- Durante la operación: son quizá los menos habituales. Se trata de gastos que se satisfacen de una forma periódica a lo largo de la operación.
- Al final de la operación. Se satisfacen cuando se cancela la operación. Un ejemplo de este tipo de gastos son las comisiones que se cobran en las operaciones de préstamo por cancelación de las mismas bajo determinadas condiciones.

2.4. Tantos

Tal y como se ha visto en el capítulo anterior el tanto (tipo de interés) es una de las magnitudes financieras derivadas y se define como la variación experimentada por una unidad monetaria por unidad de tiempo. Cuando la ley financiera que se utiliza es la capitalización compuesta, el tanto es la magnitud que nos define el parámetro i incluido en la expresión matemática de la ley.

En el presente epígrafe se estudian los diferentes tipos de interés (o tantos) que se pueden plantear en una operación financiera, las equivalencias entre ellos (cuando las hubiere) y el procedimiento a utilizar para su cálculo. El contenido de este epígrafe va referido, exclusivamente, a operaciones financieras valoradas con la ley de capitalización compuesta.

2.4.1. Tanto nominal y tanto efectivo

En una operación financiera pura (aquella que no tiene características comerciales) pueden calcularse tres tipos de interés:

- El tipo de interés periodal: $i_{(m)}$
- El tipo de interés nominal anual: $j(m)$
- Y el tipo de interés efectivo anual: i.

El tipo de interés periodal es el que establece la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación. Se calcula igualando la suma financiera de la prestación con la suma financiera de la contraprestación en un momento determinado. Por ejemplo, para la operación financiera representada en la figura 2.1:

C_0	……..	$-C_b$	……..	C_g	C_{g+1}	……..	$-C_n$	Frec
0	……..	b	……..	g	$g+1$	……..	n	m

Se puede plantear la suma financiera de los capitales de la prestación y la de los de la contraprestación en un momento cualquiera: por ejemplo, el momento g. Igualando ambas sumas financieras se podrá calcular el tipo de interés periodal (2.7).

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^P \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} = \sum_{j=1}^{n} C_j^{CP} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} \qquad (2.7)$$

donde C^P_j y C^{CP}_j representan, respectivamente, los capitales de prestación y contraprestación que vencen en el momento j.

Salvo en contadas excepciones, el tipo de interés periodal no podrá despejarse de la anterior ecuación (2.7), por lo que será necesario aproximar su valor mediante algún algoritmo iterativo. Para este fin resulta bastante común utilizar funciones financieras incluidas en las hojas de cálculo de los paquetes de ofimática. En el presente texto, tal y como se irá reiterando, se ha utilizado la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» incluida en el paquete ofimático de software libre «LibreOffice».

Ejemplo 2.11

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, calcúlese el tipo de interés periodal que hace financieramente equivalentes prestación y contraprestación.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Como la frecuencia de vencimiento de los capitales es mensual, el tipo de interés periodal que se nos pide es el tipo de interés mensual. Para su estimación, las sumas financieras de prestación y contraprestación se pueden calcular en cualquier momento del tiempo. En el presente ejemplo se van a calcular en el momento inicial de la operación.

$$200 + 250 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^{-3} = 300 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^{-1} + 152 \cdot \left(1+i_{(12)}\right)^{-4}$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal no se puede despejar. Por ello, su valor se ha estimado usando la función «TIR» de la hoja «Calc» del paquete ofimático «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i_{(12)} = 0{,}0129886$$

La equivalencia entre los tipos de interés periodal, nominal anual y efectivo anual quedan establecidas por las ecuaciones de equivalencia de tantos vistas en el capítulo anterior:

$$i_{(m)} = \frac{j(m)}{m}$$

$$(1+i) = \left(1+i_{(m)}\right)^{m} \rightarrow i_{(m)} = (1+i)^{1m} - 1$$

Ejemplo 2.12

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

Si la ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta, y el tipo de interés mensual es 0,0129886, calcúlese el tipo de interés nominal anual y el tipo de interés efectivo anual de la operación.

La representación de la operación financiera se muestra a continuación:

200	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

$$j(12) = 0{,}0129886 \cdot 12 = 0{,}1558632$$

$$i = (1+0{,}0129886)^{12} - 1 = 0{,}1674941$$

2.4.2. Coste y rendimiento

Tal y como se ha comentado, la existencia de características comerciales motiva que los tipos de interés que realmente tiene una operación financiera no coincidan con los tipos de interés de la operación pura.

Se ha visto que el tipo de interés periodal (y, por tanto, el nominal anual y el efectivo anual) se calcula exigiendo que los conjuntos de capitales desembolsados por cada una de las dos partes sean financieramente equivalentes. Por lo tanto, si lo que se quiere es calcular el tipo de interés que realmente «se deriva» operación financiera, lo que debe hacerse es exigir que los conjuntos de capitales «realmente» desembolsados por cada una de las dos partes sean financieramente equivalentes.

La operación financiera de la que se parte (operación pura) es la representada en la figura 2.1:

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	....	b	....	g	g+1	....	n	m

Pero se va a asumir que esta operación tiene características comerciales en distintos períodos:

- G^{bP}_j: características comerciales (gastos) bilaterales que en el momento j paga la prestación.
- G^{uP}_j: características comerciales (gastos) unilaterales que en el momento j paga la prestación.
- G^{bCP}_j: características comerciales (gastos) bilaterales que en el momento j paga la contraprestación.
- G^{uCP}_j: características comerciales (gastos) unilaterales que en el momento j paga la contraprestación.

El esquema temporal de los capitales realmente entregados y recibidos por la prestación se detalla en el siguiente esquema temporal (figura 2.3):

C'_0	....	$-C'_b$	....	C'_g	C'_{g+1}	....	$-C'_n$	Frec
0	....	b	....	g	g+1	....	n	m

Figura 2.3. Esquema de una operación financiera: pagos y cobros reales de la prestación

donde:

$$C'_j = \pm C_j + G^{bP}_j + G^{uP}_j - G^{bCP}_j$$

Esto es, el capital realmente entregado (o recibido) por la prestación en el momento j será igual al de la operación pura más los gastos (características) bilaterales y unilaterales pagados por la prestación, menos las características bilaterales pagadas por la contraprestación. Recuérdese que estas últimas las cobra la prestación.

Exigiendo que la corriente de pagos realmente realizados por la prestación sea financieramente equivalente a la corriente de cobros realmente recibidos por la prestación, se obtendrá el tipo de interés periodal. Las correspondientes sumas financieras se pueden plantear en cualquier momento: por ejemplo, el momento *g*. Igualando ambas sumas financieras:

$$\sum_{j=1}^{n} C'^{PE}_{j} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} = \sum_{j=1}^{n} C'^{PR}_{j} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} \tag{2.8}$$

donde C'^{PE}_{j} y C'^{PR}_{j} representan, respectivamente, los capitales realmente entregado y realmente recibido por la prestación en el momento *j*.

De la ecuación (2.8) se obtendrá el tipo de interés periodal y, a partir del mismo, se podrá calcular el tipo de interés nominal anual y el efectivo anual.

Para la contraprestación se puede realizar un razonamiento similar. El esquema temporal de los capitales realmente entregados y recibidos por la contraprestación se detalla en la figura 2.4:

C''_0	……..	$-C''_b$	……..	C''_g	C''_{g+1}	……..	$-C''_n$	Frec
0	……..	*b*	……..	*g*	*g*+1	……..	n	*m*

Figura 2.4. Esquema de una operación financiera:pagos y cobros reales de la contraprestación

donde:

$$C''_{j} = \pm C_{j} - G^{bCP}_{j} - G^{uCP}_{j} + G^{bP}_{j}$$

Esto es, el capital realmente entregado (o recibido) por la contraprestación en el momento *j* será igual al de la operación pura más los gastos (características) bilaterales y unilaterales pagados por la contraprestación, menos las características bilaterales pagadas por la prestación (recuérdese que, por convenio, los capitales entregados por la contraprestación llevan signo negativo en el esquema temporal).

Exigiendo que la corriente de pagos realmente realizados por la contraprestación sea financieramente equivalente a la corriente de cobros realmente recibidos por la contraprestación, se obtendrá el tipo de interés periodal. Las correspondientes sumas financieras se pueden plantear en cualquier momento: por ejemplo, el momento *g*. Igualando las sumas financieras:

$$\sum_{j=1}^{n} C''^{CPE}_{j} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} = \sum_{j=1}^{n} C''^{CPR}_{j} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-j} \tag{2.9}$$

donde C''^{CPE}_{j} y C''^{CPR}_{j} representan, respectivamente, los capitales realmente entregados y realmente recibidos por la contraprestación en el momento *j*.

De la ecuación (2.9) se obtendrá el tipo de interés periodal y, a partir del mismo, se podrá calcular el tipo de interés nominal anual y el efectivo anual.

El tratamiento formal visto hasta este punto puede parecer complicado. Afortunadamente la realidad suele ser más simple: son muy habituales los gastos iniciales; habituales, aunque menos, los finales; y los menos habituales son los periódicos. De este modo, en la mayoría de operaciones financieras se encontrarán únicamente características comerciales que afectan al momento inicial. Con un par de sencillos ejemplos se podrá apreciar que la determinación del tipo de interés no es un tema especialmente difícil.

Ejemplo 2.13

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

La ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta. Adicionalmente, la operación financiera tiene los siguientes gastos iniciales:

- Gastos notariales: 0,5 u.m. Los paga la prestación y los percibe un tercero.
- Comisión de apertura: 0,25 u.m. La paga la prestación y la percibe la contraprestación.

Con los anteriores datos se desea conocer el tipo de interés efectivo anual que realmente tiene la prestación.

Como se ve, se trata de una operación con características comerciales, unilaterales (los gastos de notaría) y bilaterales (la comisión de apertura). Estas características comerciales solo afectan al momento inicial. Por tanto, para el cálculo del tipo de interés que se pide, solo habrá que modificar, en su caso, el primero de los capitales. El resto corresponderá a los capitales de la operación pura.

Concretamente, el esquema de la operación que debe tomarse en consideración será el siguiente:

C'_0	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Tal y como se ha comentado, todos los capitales corresponden a los de la operación pura excepto el inicial, que es el que se ve afectado por las características comerciales. Este capital inicial tendrá la siguiente cuantía:

$$C'_0 = 200 + 0{,}5 + 0{,}25 = 200{,}75 \quad \text{u.m.}$$

Según el enunciado del ejemplo, la prestación está compuesta por la entrega de dos capitales. El primero de ellos, de 200 u.m., se entrega en el momento inicial. Si en dicho momento inicial, la prestación debe hacer frente además al pago, tanto de los gastos notariales como a la comisión de apertura, el capital realmente entregado en dicho momento será igual a la suma del previsto en la operación pura más los gastos iniciales.

Con este dato ya se puede plantear la ecuación para el cálculo del tipo de interés periodal (que en este caso será el mensual):

$$200{,}75 + 250 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-3} = 300 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-1} + 152 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-4}$$

en la anterior ecuación el tipo de interés periodal no se puede despejar. Por ello, su valor se ha estimado usando la función «TIR» de la hoja «Calc» del paquete ofimático «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i_{(12)} = 0{,}0080396$$

A partir de este tipo de interés mensual, el tipo de interés efectivo anual se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia de tantos:

$$i = \left(1 + 0{,}0080396\right)^{12} - 1 = 0{,}1008575$$

Este es tipo de interés efectivo anual que realmente tiene una de las partes: la prestación. En efecto, dicho tipo de interés se ha obtenido comparando (haciendo financieramente equivalentes) las cantidades realmente entregadas con las cantidades realmente recibidas.

Ejemplo 2.14

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

La ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta. Adicionalmente, la operación financiera tiene los siguientes gastos iniciales:

- Gastos notariales: 0,5 u.m. Los paga la prestación y los percibe un tercero.
- Comisión de apertura: 0,25 u.m. La paga la prestación y la percibe la contraprestación.

Con los anteriores datos se desea conocer el tipo de interés efectivo anual que realmente tiene la contraprestación.

Como se ve, se trata de una operación con características comerciales, unilaterales (los gastos de notaría) y bilaterales (la comisión de apertura). Estas características comerciales solo afectan al momento inicial. Por tanto, para el cálculo del tipo de interés que se pide, solo habrá que modificar, en su caso, el primero de los capitales. El resto corresponderá a los capitales de la operación pura.

Concretamente, el esquema de la operación que debe tomarse en consideración será el siguiente:

C''_0	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

Tal y como se ha comentado todos los capitales corresponden a los de la operación pura excepto el inicial, que es el que se ve afectado por las características comerciales. Este capital inicial tendrá la siguiente cuantía:

$$C'_0 = 200 + 0{,}5 + 0{,}25 = 200{,}75 \text{ u.m.}$$

Según el enunciado del ejemplo, la contraprestación está compuesta por la entrega de dos capitales en los momentos 1 y 4, que, por tanto, no se ven afectados por las características comerciales. A cambio se reciben dos capitales, con vencimiento en los momentos 1 y 3. El capital recibido en el momento inicial se ve afectado por las características comerciales. Concretamente, este capital será igual al previsto en la operación pura (200 u.m.) más la comisión de apertura, ya que esta constituye una entrada de fondos para la parte que entrega los capitales de la contraprestación. A esta parte, los gastos de notaría, no le afectan ya que los percibe un tercero.

Conociendo el capital inicial ya se puede plantear la ecuación para el cálculo del tipo de interés periodal (que en este caso será el mensual):

$$200{,}25 + 250 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-3} = 300 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-1} + 152 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-4}$$

en la anterior ecuación el tipo de interés periodal no se puede despejar. Por ello, su valor se ha estimado usando la función «TIR» de la hoja «Calc» del paquete ofimático «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i_{(12)} = 0{,}0113283$$

A partir de este tipo de interés mensual, el tipo de interés efectivo anual se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia de tantos:

$$i = \left(1 + 0{,}0113283\right)^{12} - 1 = 0{,}1447375$$

Este es tipo de interés efectivo anual que realmente tiene una de las partes: la contraprestación. En efecto, dicho tipo de interés se ha obtenido comparando (haciendo financieramente equivalentes) las cantidades realmente entregadas con las cantidades realmente recibidas.

Los tipos de interés que realmente tienen las partes en una operación financiera pueden ser interpretados en términos de coste financiero para una de ellas (la contrapresación) y en términos de rentabilidad financiera o de rendimiento para la otra (la prestación).

Esto se aprecia fácilmente si se observa una operación financiera como si se tratase de un préstamo. En efecto, volvamos a la operación financiera general planteada en la figura 2.1:

C_0	....	$-C_b$	....	C_g	C_{g+1}	....	$-C_n$	Frec
0	....	b	....	g	$g+1$	....	n	m

Ambas partes entregan un conjunto de capitales y reciben a cambio otro conjunto de capitales. Fijémonos en la prestación, a la que le corresponde la entrega del primero de los capitales. En ese momento, cuando hace entrega del primero de los capitales, podemos decir que se está otorgando un préstamo: se entrega un capital a cambio de recibir unos capitales en el futuro, nominalmente mayores; a cambio de obtener unos intereses. En general, no solo se percibirán capitales en el futuro, se percibirán algunos capitales y se entregarán otros; pero en conjunto, lo recibido en el futuro será, en términos monetarios, superior a lo entregado en el momento inicial; se obtendrán unos intereses. Pues bien, los intereses que se percibirán serán un rendimiento o una rentabilidad financiera para la prestación.

Una perspectiva inversa se pude adoptar para la contraprestación. En el momento inicial no vence ningún capital de la contraprestación. Esta parte de la operación financiera hace entrega de los capitales que le corresponde pagar en momentos posteriores. Ahora bien, a cambio de dichas entregas, percibe un conjunto de capitales, entre ellos uno en el momento inicial. En ese momento, cuando recibe el primero de los capitales, podríamos considerar que está recibiendo un préstamo: recibe un capital a cambio de pagar unos capitales en el futuro, nominalmente mayores; esto es, a cambio de pagar unos intereses. En general, no solo se pagarán capitales en el futuro, se entregarán algunos capitales y se recibirán otros; pero en conjunto, lo pagado en el futuro será, en términos nominales, superior a lo recibido en el momento inicial; se pagarán unos intereses. Pues bien, los intereses que pagan serán un coste financiero para la contraprestación.

Ejemplo 2.15

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

La ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta. Adicionalmente, la operación financiera tiene los siguientes gastos iniciales:

- Gastos notariales: 0,5 u.m. Los paga la prestación y los percibe un tercero.
- Comisión de apertura: 0,25 u.m. La paga la prestación y la percibe la contraprestación.

Con los anteriores datos se desea conocer la rentabilidad financiera de la prestación y el coste financiero de la contraprestación en términos de tipo de interés efectivo anual.

La rentabilidad financiera de la prestación será el tipo de interés efectivo anual calculado en el ejemplo 2.13:

$$i = 0{,}1008575$$

Y el coste financiero de la contraprestación será el tipo de interés efectivo anual calculado en el ejemplo 2.14:

$$i = 0{,}1447375$$

2.4.3. TAE

Cuando en una operación financiera interviene una entidad de crédito (un banco), esta está obligada a informar a la otra parte sobre el valor de la Tasa Anual Equivalente. De conformidad con la Circular 5/2012 del Banco de España, la «Tasa anual Equivalente (TAE) es aquella que iguala en cualquier fecha el valor actual de los efectivos entregados y recibidos a lo largo de la operación».

En definitiva, la Tasa Anual Equivalente de una operación financiera es un tipo de interés efectivo anual, de la naturaleza de los que han sido expuestos en el epígrafe precedente dentro del presente capítulo. Se trata de una magnitud que no solo tiene en cuenta los intercambios de capitales previstos en la operación pura, sino que también considera los gastos en los que incurren las partes. La mencionada circular del Banco de España, en su capítulo VI explica de forma detallada para cada una de las operaciones financieras los gastos que deben considerarse a la hora de calcular la TAE.

La filosofía general es que la TAE contenga todos los gastos asociados a la operación (aunque hay matices como son, por ejemplo, los gastos de notaría que no se incluyen). Por lo que la TAE se asemeja bastante a lo que sería el coste financiero de la operación para el prestatario, en términos de tipo de interés efectivo anual. En todo caso, para conocer el detalle de gastos a considerar para una operación particular, se recomienda la lectura del capítulo VI de la mencionada Circular 5/2012 del Banco de España.

Ejemplo 2.16

Sea una operación financiera en la que las partes se intercambian capitales con una frecuencia mensual.

Los capitales entregados por una de las partes (prestación) son los siguientes:

- (200, 0) (250, 3)

Y los capitales entregados por la otra parte (contraprestación) son los siguientes:

- (300, 1) (152, 4)

La ley financiera pactada para valorar la operación es la capitalización compuesta. Adicionalmente, la operación financiera tiene los siguientes gastos iniciales:

- Gastos notariales: 0,5 u.m. Los paga la prestación y los percibe un tercero.
- Comisión de apertura: 0,25 u.m. La paga la prestación y la percibe la contraprestación.

Con los anteriores datos se desea conocer la TAE de la operación.

Como se acaba de ver, para el cálculo de la TAE no se tienen en cuenta los gastos de notario. Por tanto, como primer paso se planteará un esquema temporal en el que se reflejará el impacto de los gastos a considerar. Como estos solo afectan al momento inicial, se verá afectado únicamente el primero de los capitales que se intercambia: el que vence en el momento 0. El esquema temporal se muestra a continuación:

C''_0	-300	0	250	-152	Frec
0	1	2	3	4	12

El capital con vencimiento en el momento inicial se calcula considerando solo la comisión:

$$C''_0 = 200 + 0{,}25 = 200{,}25 \quad \text{u.m.}$$

Conociendo el capital inicial ya se puede plantear la ecuación para el cálculo del tipo de interés periodal (que en este caso será el mensual):

$$200{,}25 + 250 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-3} = 300 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-1} + 152 \cdot \left(1 + i_{(12)}\right)^{-4}$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal no se puede despejar. Por ello, su valor se ha estimado usando la función «TIR» de la hoja «Calc» del paquete ofimático «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i_{(12)} = 0{,}0113283$$

A partir de este tipo de interés mensual, el tipo de interés efectivo anual se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia de tantos. Este tipo de interés efectivo anual será la TAE:

$$i = \left(1 + 0{,}0113283\right)^{12} - 1 = 0{,}1447375$$

Problemas propuestos

Problema 2.1

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(250, 0); (450, 3); (237, 5); (800, 8); (36, 10); (120, 11)

Contraprestación:

(200, 1); (600, 4); (500, 7); (220, 9); (400, 12)

Sabiendo que la frecuencia de pagos es mensual y que el tipo de interés efectivo anual de la operación es 0,189129, calcúlese la reserva por la derecha en el momento 3. Utilícese el método retrospectivo.

Problema 2.2

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(250, 0); (450, 3); (237, 5); (800, 8); (36, 10); (120, 11)

Contraprestación:

(200, 1); (600, 4); (500, 7); (220, 9); (400, 12)

Sabiendo que la frecuencia de pagos es mensual y que el tipo de interés efectivo anual de la operación es 0,189129, calcúlese la reserva por la izquierda en el momento 9. Utilícese el método prospectivo.

Problema 2.3

Utilizando los resultados obtenidos en el problema 2.1, calcúlese la reserva por la derecha en el momento 7. Utilícese el método recurrente.

Problema 2.4

Utilizando los resultados obtenidos en el problema 2.2, calcúlese la reserva por la derecha en el momento 7. Utilícese el método recurrente.

Problema 2.5

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es semestral, calcúlese el tipo de interés efectivo anual de la operación.

Problema 2.6

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

La operación tiene los siguientes gastos en el momento inicial:

- Comisión de apertura que paga la prestación y recibe la contraprestación: 1 u.m.
- Gastos de notaria que paga la prestación y recibe un tercero: 0,5 u.m.

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es semestral, calcúlese la rentabilidad financiera para la prestación, en términos de tipo de interés efectivo anual.

Problema 2.7

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

La operación tiene los siguientes gastos en el momento inicial:

- Comisión de apertura que paga la prestación y recibe la contraprestación: 1 u.m.
- Gastos de notaria que paga la prestación y recibe un tercero: 0,5 u.m.

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es semestral, calcúlese el coste financiero para la contraprestación, en términos de tipo de interés efectivo anual.

Problema 2.8

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

La operación tiene los siguientes gastos en el momento inicial:

- Comisión de apertura que paga la prestación y recibe la contraprestación: 1 u.m.
- Gastos de notaria que paga la prestación y recibe un tercero: 0,5 u.m.

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es semestral, calcúlese la TAE de la operación.

Problema 2.9

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

La operación tiene los siguientes gastos en el momento final: comisión de cancelación que paga la contraprestación y recibe la prestación: 2 u.m.

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es trimestral, calcúlese la rentabilidad financiera para la prestación (en términos de tipo de interés efectivo anual) y el coste financiero para la contraprestación (en términos de tipo de interés efectivo anual).

Problema 2.10

Sea una operación financiera en la que prestación y contraprestación están conformadas por los siguientes capitales:

Prestación:

(200, 0); (40, 2); (400, 4); (200, 8); (47, 10); (90, 11); (80, 13)

Contraprestación:

(300, 1); (27, 3); (200, 7); (200, 9); (350, 12); (5, 14)

La operación tiene los siguientes gastos en el momento final: comisión de cancelación que paga la contraprestación y recibe la prestación: 2 u.m.

Sabiendo que la frecuencia de los pagos es trimestral, calcúlese la TAE de la operación.

Capítulo 3
Operaciones financieras a corto plazo

Dentro de este capítulo se van analizar dos operaciones financieras a corto plazo: el descuento de efectos y la operatoria con Letras del Tesoro. Estas dos operaciones constituyen, junto con la cuenta corriente de crédito, la base de la gestión de liquidez de la mayor parte de empresas no financieras. Las empresas, cuando tienen necesidades transitorias de liquidez disponen de su cuenta de crédito, descuentan papel o, si disponen de valores del Tesoro, llevan a cabo una repo. Adicionalmente, cuando, por el contrario, tienen excedentes temporales de liquidez utilizan la repo para rentabilizar los fondos de los que disponen. En el presente capítulo se muestra el funcionamiento del descuento de efectos y de las repos, referidas estas últimas a uno de los valores del Tesoro: las Letras del Tesoro (para los otros valores del Tesoro con los que se puede realizar repos, el funcionamiento es similar). La operatoria de las cuentas corrientes de crédito se aborda en el último de los capítulos del presente manual.

3.1. El descuento comercial

Lo normal en el tráfico mercantil es que las ventas que una empresa realiza no se cobren al contado. Normalmente, la empresa entrega a su cliente la mercancía que ha producido y/o ha comercializado con la condición de que el pago se efectúe dentro de un número de días pactado. Es habitual que se pacten períodos de cobro de 30, 60 o 90 días.

La operación comercial queda documentada mediante facturas, albaranes, etc. Es normal que, adicionalmente, la empresa vendedora obtenga de su cliente un compromiso formal de pago. Este, hace unos años se solía documentar a través de una letra de cambio aceptada por el cliente, si bien actualmente queda plasmado, habitualmente, en un pagaré. El pagaré lo emite el cliente a favor de la empresa vendedora, y constituye un compromiso en firme por parte del primero de hacer frente, en el vencimiento reflejado en dicho pagaré, al pago de la deuda que se ha generado como consecuencia de la transacción comercial realizada.

La empresa vendedora puede necesitar financiación hasta el momento en que reciba el cobro de su cliente: puede que tenga que hacer frente al pago de nóminas, de acreedores, de proveedores, etc. Y una de las formas de obtener financiación es el descuento comercial.

En una operación de descuento comercial, la empresa vendedora presenta al banco con el que trabaja los documentos que acreditan el compromiso de pago de su cliente en una fecha futura, consecuencia de una transacción comercial. El documento más habitual es el pagaré, si bien, dependiendo del cliente y/o del banco, otros documentos (como, por ejemplo, facturas + albaranes) son admisibles. El banco, a la recepción de esos documentos le anticipa el importe a percibir (en la fecha futura que la empresa ha acordado con el cliente) menos un descuento. En definitiva, el banco otorga a la empresa un préstamo por el nominal a percibir de su cliente menos un descuento.

El descuento se calcula de modo que, al vencimiento de la deuda, con el dinero que percibirá de su cliente (con el nominal), la empresa cancelará la deuda que tiene con el banco. De hecho, es el propio banco el que realiza, habitualmente, la gestión de cobro. Si, por ejemplo, el papel descontado es un pagaré, es el propio banco el que presenta al cobro dicho pagaré. Si este es atendido, el banco realiza la liquidación de la deuda que con él tiene contraída la empresa procediendo a su cancelación: abona en la cuenta de la empresa el efecto cobrado e inmediatamente procede a cargar dicha cuenta para cancelar la deuda contraída. Si, por el contrario, el efecto no es atendido a su vencimiento (resulta impagado), el banco realiza el cargo correspondiente en la cuenta de la empresa, sin que haya mediado ningún abono previo, y adicionalmente le carga una serie de gastos.

Cabe destacar que la empresa no acude espontáneamente a su banco cuando necesita liquidez para descontar papel. Empresa y banco firman cada año un contrato para el descuento de efectos (los documentos que se descuentan se denominan efectos comerciales). En ese contrato se estipulan las condiciones que se aplicarán al descuento de papel o descuento de efectos: tipo de descuento, comisiones, volumen máximo que se puede descontar, tipo de papel (tipos de efectos) que se puede descontar, etc. En virtud de ese contrato la empresa podrá descontar efectos comerciales en su banco. Como veremos en epígrafes posteriores, el descuento de un efecto no se produce de manera aislada: normalmente se descuenta un conjunto de efectos comerciales, lo que se denomina remesa. En las condiciones pactadas el banco siempre se reserva la posibilidad de rechazar el descuento de efectos, por lo que cada remesa será estudiada y aprobada por el banco antes de proceder a su descuento.

3.1.1. Estudio financiero del descuento comercial

Desde el punto de vista financiero, el descuento de un efecto es una operación financiera simple: esto es, se trata de una operación comercial en la que prestación y contraprestación son únicas.

La prestación es el capital entregado por el banco a la empresa en el momento del descuento del papel. La contraprestación es el capital que entrega la empresa al banco al vencimiento de la operación de descuento, al vencimiento del efecto descontado (se ha visto que si el cliente atiende el pago de la deuda contraída con la empresa, esta no realizará trámite alguno ni, para el cobro de la deuda comercial a su favor, ni para el pago de la deuda financiera en su contra que tiene con el banco).

El esquema de la operación del descuento de un efecto será el siguiente (figura 3.1):

C_0	$-N$	Frec
0	n	m

Figura 3.1. Esquema del descuento de un efecto

En la operación pura, el capital que recibe la empresa que descuenta el efecto se calcula aplicando la ley financiera de descuento comercial simple sobre el nominal descontado (3.1):

$$C_0 = N \cdot \left(1 - d \cdot \frac{n}{m}\right) \tag{3.1}$$

Nótese que, al utilizarse el número de días en la expresión de la ley, será necesario conocer la base, tanto para determinar el número de días del numerador como el del denominador (recuérdese lo visto al respecto en el capítulo 1).

Ejemplo 3.1

Una empresa, hoy 3/5, descuenta un efecto comercial en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

- Nominal del efecto: 1.000 u.m.
- Vencimiento: 3/6

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 %, utilizando la base ACT/360.

Con los anteriores datos, y asumiendo que no hay gastos, se desea conocer el importe que recibirá la empresa al descontar el efecto comercial.

Al ser la base ACT/360, en el numerador de la expresión (3.1) deberán utilizarse los días que realmente transcurren desde el 3/5 al 3/6: 31 días. Y en el denominador 360. Con estos datos ya se puede representar la operación en un eje temporal:

C_0	-1000	Frec
0	31	360

Y aplicando la expresión (3.1):

$$C_0 = 1000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) = 995{,}69 \text{ u.m.}$$

En el mundo real, el descuento de efectos lleva aparejado una serie de gastos. Nunca nos encontraremos con una operación pura. Estos gastos son de dos tipos: bilaterales y unilaterales. Ambos tipos de gasto se satisfacen al principio de la operación y son a cargo de la contraprestación:

- Características comerciales bilaterales: G_0^{bCP}. Es habitual que el banco cobre algún tipo de comisión cuando se descuenta el efecto comercial.
- Características comerciales unilaterales: G_0^{uCP}. El descuento de efectos está sujeto a un impuesto, el de Actos Jurídicos Documentados; impuesto que paga la empresa que descuenta el efecto (contraprestación) y que liquida e ingresa en la Hacienda pública el banco que realiza el descuento. Este impuesto se conoce también como «timbre» del efecto comercial.

Por lo tanto, ni el capital realmente entregado por el banco ni el capital realmente recibido por la empresa coincidirán con el inicial de la operación pura. Es más, ambos capitales tampoco coincidirán entre sí.

El efectivamente entregado por el banco será igual al de la operación pura menos las características comerciales bilaterales. En efecto, si al principio de la operación de descuento la entidad bancaria cobra a la empresa una comisión, en términos reales, el capital entregado será menor que el de la operación pura (3.2):

$$C'^{P}_0 = N \cdot \left(1 - d \cdot \frac{n}{m}\right) - G_0^{bCP} \tag{3.2}$$

Por su parte, el recibido en términos reales por la empresa todavía será menor. Al anterior capital habrá que restarle el importe de las características comerciales unilaterales (3.3):

$$C''^{CP}_0 = N \cdot \left(1 - d \cdot \frac{n}{m}\right) - G_0^{bCP} - G_0^{uCP} \tag{3.3}$$

Por tanto, los ejes temporales, reales, para prestación y contraprestación no coincidirán con la figura 3.1 (el de la operación pura) sino que serán, respectivamente, los mostrados en las figuras 3.2 y 3.3:

C'^{P}_0	$-N$	Frec
0	n	m

Figura 3.2. Esquema del descuento de un efecto: prestación

C''^{CP}_0	$-N$	Frec
0	n	m

Figura 3.3. Esquema del descuento de un efecto: contraprestación

Ejemplo 3.2

Una empresa, hoy 3/5, descuenta un efecto comercial en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

- Nominal del efecto: 1.000 u.m.
- Vencimiento: 3/6

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 %, utilizando la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 % del nominal. Asimismo, la empresa debe pagar, en ese momento inicial, el impuesto de Actos Jurídicos Documentados, que asciende a 1,5 u.m.

Con los anteriores datos, calcúlese la cantidad que realmente entregará el banco y la cantidad que realmente recibirá la empresa en el momento inicial cuando se descuente el efecto.

El esquema para el banco será el siguiente:

C'_0	-1.000	Frec
0	31	360

Recuérdese que, al ser la base ACT/360, en el numerador de la expresión (3.1) deberán utilizarse los días que realmente transcurren desde el 3/5 al 3/6: 31 días. Y en el denominador 360. En estos términos se ha representado la operación para el banco.

El capital realmente entregado será el siguiente:

$$C'_0 = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 = 994{,}69 \text{ u.m.}$$

Por su parte, el esquema de la operación de descuento desde el punto de vista de la empresa es el siguiente:

C''_0	-1.000	Frec
0	31	360

El capital que realmente recibe será el siguiente:

$$C''_0 = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 - 1{,}5 = 993{,}19 \text{ u.m.}$$

3.1.2. Remesas de efectos

No es habitual que las empresas descuenten los efectos comerciales de forma aislada. Lo común es que, en un determinado día, se descuenten varios efectos, con distintos nominales y vencimientos, provenientes de distintas transacciones comerciales realizadas con diferentes clientes. A este conjunto de efectos se le denomina remesa.

La operación pura de descuento de una remesa de efectos se ha representado en la figura 3.4:

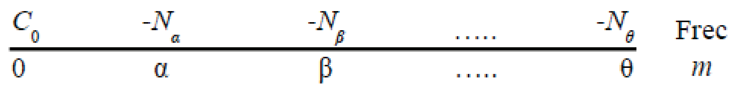


Figura 3.4. Esquema del descuento de una remesa de efectos

donde N_α, N_β,..., N_θ representan los nominales de los efectos que componen la remesa y α, β,..., θ representan sus vencimientos respectivos.

El capital inicial en esta operación pura, se calculará como la suma aritmética de los valores descontados de los distintos efectos (3.4):

$$C_0 = \sum_{j=\alpha}^{\theta} N_j \cdot \left(1 - d_j \cdot \frac{j}{m}\right) \tag{3.4}$$

donde d_j representa el tipo de descuento anual aplicado al efecto de nominal N_j y con vencimiento en el momento j.

Ejemplo 3.3

Una empresa, hoy 3/5, descuenta una remesa de efectos comerciales en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

Efecto	Nominal (u.m.)	Vencimiento
Efecto 1	1.000,00	3/6
Efecto 2	2.000,00	5/7

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 % para aquellos efectos con vencimiento inferior a los 60 días, y un 5,5 % para aquellos efectos con vencimiento igual o superior a los 60 días. En ambos casos se utiliza la base ACT/360.

Con los anteriores datos, y asumiendo que no hay gastos, se desea conocer el importe que recibirá la empresa al descontar el efecto comercial.

Del 3/5 (hoy) al 3/6 median 31 días. Del 3/5 al 5/7, 63. Teniendo en cuenta que se usa el año comercial de 360 días (base: ATC/360), el descuento de la remesa queda representado en el siguiente esquema temporal:

C_0	-1.000	-2.000	Frec
0	31	63	360

Para calcular el importe recibido en el momento inicial se utilizará una tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	
Total				

Téngase en cuenta que el segundo de los efectos tiene un vencimiento residual superior a los 60 días y que, por lo tanto, debe aplicársele un tipo de descuento anual del 5,5 %.

El importe individual del descuento de cada uno de los efectos es el siguiente:

- Para el primero: $C_{01} = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) = 995{,}69$ u.m.
- Para el segundo: $C_{02} = 2.000 \cdot \left(1 - 0{,}055 \cdot \frac{63}{360}\right) = 1.980{,}75$ u.m.

Luego el importe total recibido será:

$$C_0 = 995{,}69 + 1.980{,}75 = 2.976{,}44 \text{ u.m.}$$

Esta información se traslada a la tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	995,69
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	1.980,75
Total				2.976,44

Tal y como se ha comentado en el epígrafe anterior, las operaciones de descuento llevan aparejados gastos. Los gastos son tanto de carácter unilateral como bilateral, y corren a cargo de la empresa (G_0^{uCP} y G_0^{bCP}). Por ello, ni la cantidad realmente entregada por el banco ni la realmente recibida por la empresa coinciden con el capital inicial de la operación pura.

En el caso del banco, la cantidad realmente entregada será (3.5):

$$C'^{P}_{0} = \sum_{j=\alpha}^{\theta} N_j \cdot \left(1 - d_j \cdot \frac{j}{m}\right) - G_0^{bCP} \tag{3.5}$$

Mientras que para la empresa el importe recibido en términos reales vendrá dado por (3.6):

$$C''^{CP}_{0} = \sum_{j=\alpha}^{\theta} N_j \cdot \left(1 - d_j \cdot \frac{j}{m}\right) - G_0^{bCP} - G_0^{uCP} \tag{3.6}$$

Por lo tanto, el esquema de la operación desde el punto de vista del banco será el representado en la figura 3.5.

C'^{P}_{0}	$-N_\alpha$	$-N_\beta$	.....	$-N_\theta$	Frec
0	α	β	.....	θ	m

Figura 3.5. Esquema del descuento de una remesa de efectos. Prestación

Y el esquema temporal desde la perspectiva de la empresa será (figura 3.6):

C''^{CP}_{0}	$-N_\alpha$	$-N_\beta$	.....	$-N_\theta$	Frec
0	α	β	.....	θ	m

Figura 3.6. Esquema del descuento de una remesa de efectos. Contraprestación

---

Ejemplo 3.4

Una empresa, hoy 3/5, descuenta una remesa de efectos comerciales en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

Efecto	**Nominal (u.m.)**	**Vencimiento**
Efecto 1	1.000,00	3/6
Efecto 2	2.000,00	5/7

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 % para aquellos efectos con vencimiento inferior a los 60 días, y un 5,5 % para aquellos efectos con vencimiento igual o superior a los 60 días. En ambos casos se utiliza la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 %. Asimismo, la empresa debe pagar en ese momento inicial el impuesto de Actos Jurídicos Documentados que asciende a 1,5 u.m. para efectos con nominal inferior a 1.900,00 u.m. y a 1,75 u.m. para efectos con nominal igual o superior al mencionado importe.

Con los datos anteriores se desea conocer el importe realmente entregado por el banco y el importe realmente recibido por la empresa al descontar la remesa.

En primer lugar se procede a calcular el importe entregado por el banco. De nuevo se recurre a reflejar los datos en una tabla, a la que se han añadido dos columnas para los gastos:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	NA	
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	NA	
Total						

El impuesto de Actos Jurídicos Documentados no afecta a la cantidad realmente entregada por el banco ya que es un gasto unilateral, que es por cuenta de la contraprestación.

El importe individual de cada uno de los efectos es el siguiente:

- Para el primero: $C'_{01} = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 = 994{,}69$ u.m.
- Para el segundo: $C'_{02} = 2.000 \cdot \left(1 - 0{,}055 \cdot \frac{63}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 2.000 = 1.978{,}75$ u.m.

Luego el importe total entregado será:

$$C_0 = 994{,}69 + 1.978{,}75 = 2.973{,}44 \text{ u.m.}$$

Esta información se traslada a la tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	NA	994,69
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	NA	1.978,75
Total						2.973,44

En el caso de la empresa, en la tabla sí que se incluirán cantidades específicas para el timbre (impuesto de Actos Jurídicos Documentados):

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	**C_0**
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	1,5	
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	1,75	
Total						

Y los importes individuales realmente recibidos al descontar los efectos serán los siguientes:

$$C''_{01} = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 - 1{,}5 = 993{,}19 \text{ u.m.}$$

$$C''_{02} = 2.000 \cdot \left(1 - 0{,}055 \cdot \frac{63}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 2.000 - 1{,}75 = 1.977{,}00 \text{ u.m.}$$

Luego el importe total recibido será:

$$C_0 = 993{,}19 + 1.977{,}00 = 2.970{,}19 \text{ u.m.}$$

Esta información se traslada a la tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	**C_0**
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	1,5	993,19
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	1,75	1.977,00
Total						2.970,19

3.1.3. Tantos efectivos

Los tipos de interés (o tantos) efectivos de una operación de descuento de efectos, serán distintos en función de que se tome la perspectiva de la empresa que lleva al descuento los efectos o que se tome la perspectiva del banco que es quien los descuenta. En ambos casos, el tipo de interés efectivo anual se obtendrá igualando, en términos financieros, lo realmente recibido con lo realmente entregado a cambio.

Por ejemplo, si, para el descuento de un solo efecto, se adopta la perspectiva del banco (prestación) el esquema a considerar para la determinación del tipo de interés efectivo anual sería el representado en la figura 3.7:

C''^{P}_{0}	$-N$	Frec
0	n	365

Figura 3.7. Descuento de un efecto. Cálculo del tipo de interés efectivo anual. Prestación

Nótese que a efectos de cálculo del tipo de interés efectivo anual siempre se tomará el año de 365 días.

El tipo de interés efectivo anual se obtendrá igualando, en términos financieros, lo entregado y lo recibido. Esto es, calculando, para un mismo momento del tiempo, los equivalentes financieros del capital entregado y del capital recibido e igualándolos. Por ejemplo, si ese momento es el inicio de la operación, la ecuación quedaría planteada en los siguientes términos:

$$C'^{P}_{0} = N \cdot (1+i)^{-n/365}$$

operando,

$$C'^{P}_{0} = N \cdot (1+i)^{-n/365} = \frac{N}{(1+i)^{n/365}} \rightarrow (1+i)^{n/365} = \frac{N}{C'^{P}_{0}}$$

Si de la anterior ecuación se despeja el tipo de interés efectivo anual se obtiene (3.7):

$$i = \left(\frac{N}{C'^{P}_{0}}\right)^{365/n} - 1 \qquad (3.7)$$

Ejemplo 3.5

Una empresa, hoy 3/5, descuenta un efecto comercial en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

- Nominal del efecto: 1.000 u.m.
- Vencimiento: 3/6

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 %, utilizando la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 %. Asimismo, la empresa debe pagar en ese momento inicial el impuesto de Actos Jurídicos Documentados que asciende a 1,5 u.m.

Con los anteriores datos, calcular el tipo de interés efectivo anual de la operación para la prestación (para el banco).

El esquema para el banco será el siguiente:

C'_0	-1000	Frec
0	31	360

En el anterior esquema se ha utilizado el año comercial (360 días) ya que este esquema se ha dibujado con la finalidad de calcular el capital realmente entregado por el banco y no con la finalidad de calcular el tipo de interés efectivo anual. Recuérdese que, al ser la base ACT/360, en el numerador de la expresión (3.1) deberán utilizarse los días que realmente transcurren desde el 3/5 al 3/6: 31 días. Y en el denominador 360. En estos términos se ha representado la operación para el banco.

El capital realmente entregado será el siguiente:

$$C'_0 = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 = 994{,}69 \text{ u.m.}$$

Con este dato ya se puede plantear el esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual:

994,69	-1000	Frec
0	31	365

El tipo de interés efectivo anual para el banco será:

$$i = \left(\frac{1000}{994{,}69}\right)^{365/31} - 1 = 0{,}0646941$$

El tipo de interés efectivo anual de la prestación tendrá la naturaleza de rendimiento. En efecto, el capital entregado en el momento inicial es, en términos nominales, inferior al recibido al finalizar la operación. Por lo que la diferencia es un rendimiento.

Sin embargo, para la contraprestación la situación es la inversa: el capital recibido al inicio de la operación es inferior al entregado al finalizar la misma. La diferencia entre ambos importes es, por lo tanto, un coste. Esto es, el tipo de interés efectivo anual para la contraprestación tendrá la naturaleza de coste.

Este tipo de interés efectivo anual se calculará siguiendo un procedimiento similar al mostrado para la prestación. Concretamente, el esquema a considerar para la determinación del tipo de interés efectivo anual de la empresa sería el representado en la figura 3.8:

$C``_0^{CP}$	$-N$	Frec
0	n	365

Figura 3.8. Descuento de un efecto. Cálculo del tipo de interés efectivo anual. Contraprestación

El tipo de interés efectivo anual se obtendrá igualando, en términos financieros, el capital recibido y el capital entregado. Esto es, calculando, para un mismo momento del tiempo, los equivalentes financieros del capital recibido y del capital entregado e igualándolos. Por ejemplo, si ese momento es el inicio de la operación, la ecuación quedaría planteada en los siguientes términos:

$$C''^{CP}_0 = N \cdot (1+i)^{-n/365}$$

Si de la anterior ecuación se despeja el tipo de interés efectivo anual, se obtiene (3.8):

$$i = \left(\frac{N}{C''^{CP}_0}\right)^{365/n} - 1 \qquad (3.8)$$

Ejemplo 3.6

Una empresa, hoy 3/5, descuenta un efecto comercial en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

- Nominal del efecto: 1.000 u.m.
- Vencimiento: 3/6

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 %, utilizando la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 %. Asimismo, la empresa debe pagar en ese momento inicial el impuesto de Actos Jurídicos Documentados que asciende a 1,5 u.m.

Con los anteriores datos, calcúlese el tipo de interés efectivo anual de la operación para la contraprestación (para la empresa).

El esquema para la empresa será el siguiente:

C''_0	-1000	Frec
0	31	360

En el anterior esquema se ha utilizado el año comercial (360 días), ya que este esquema se ha dibujado con la finalidad de calcular el capital realmente entregado por el banco y no con la finalidad de calcular el tipo de interés efectivo anual. Recuérdese que, al ser la base ACT/360, en el numerador de la expresión (3.1) deberán utilizarse los días que realmente transcurren desde el 3/5 al 3/6: 31 días. Y en el denominador 360. En estos términos se ha representado la operación para la empresa.

El capital realmente recibido será el siguiente:

$$C''_0 = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 - 1{,}5 = 993{,}19 \text{ u.m.}$$

Con este dato ya se puede plantear el esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual:

993,19	-1000	Frec
0	31	365

El tipo de interés efectivo anual para la empresa será:

$$i = \left(\frac{1.000}{993{,}19}\right)^{365/31} - 1 = 0{,}0837817$$

Sabiendo cómo se efectúa el cálculo del tipo de interés efectivo anual para el descuento de un efecto, el realizar el planteamiento del cálculo de dicho tipo para una remesa es sencillo.

Por ejemplo, si, para el descuento de una remesa de efectos, se adopta la perspectiva del banco (prestación) el esquema a considerar para la determinación del tipo de interés efectivo anual será el representado en la figura 3.9:

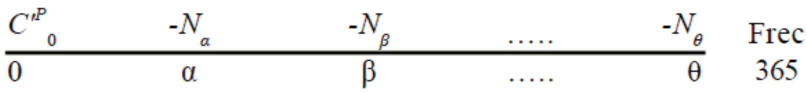


Figura 3.9. Descuento de una remesa. Cálculo del tipo de interés efectivo anual. Prestación

Se subraya de nuevo que a efectos de cálculo del tipo de interés efectivo anual siempre se tomará el año de 365 días. El tipo de interés efectivo anual se obtendrá igualando, en términos financieros, lo entregado y lo recibido. Esto es, calculando, para un mismo momento del tiempo, el equivalente financiero del capital entregado al inicio de la operación e igualándolo a la suma financiera de la corriente de capitales recibidos. Por ejemplo, si ese momento es el inicio de la operación, la ecuación quedaría planteada en los siguientes términos (3.9):

$$C'^{P}_{0} = \sum_{j=\alpha}^{\theta} N_j \cdot (1+i)^{-j/365} \qquad (3.9)$$

De esta ecuación se obtendrá el tipo de interés efectivo anual. No obstante, como se ha visto en capítulos anteriores, este tipo de interés efectivo anual no se puede despejar, sino que debe aproximarse utilizando algún algoritmo de cálculo.

Cabe señalar que este tipo de interés efectivo anual tendrá la naturaleza de rendimiento: el banco, en términos nominales, entrega un capital y, a cambio, recibe, en instantes posteriores, una serie de capitales, cuya suma aritmética es superior al capital entregado.

Ejemplo 3.7

Una empresa, hoy 3/5, descuenta una remesa de efectos comerciales en el banco con el que habitualmente trabaja con las siguientes características:

Efecto	Nominal (u.m.)	Vencimiento
Efecto 1	1.000,00	3/6
Efecto 2	2.000,00	5/7

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 % para aquellos efectos con vencimiento inferior a los 60 días, y un 5,5 % para aquellos efectos con vencimiento igual o superior a los 60 días. En ambos casos se utiliza la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 %. Asimismo, la empresa debe pagar en ese momento inicial el impuesto de Actos Jurídicos Documentados que asciende a 1,5 u.m. para efectos con nominal inferior a 1.900,00 u.m. y a 1,75 u.m. para efectos con nominal igual o superior al mencionado importe.

Con los datos anteriores se desea conocer el tipo de interés efectivo anual del descuento de la remesa desde la perspectiva del banco.

En primer lugar, se procede a calcular el importe entregado por el banco. Se recurre a reflejar los datos en una tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	NA	
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	NA	
Total						

El impuesto de Actos Jurídicos Documentados no afecta a la cantidad realmente entregada por el banco, ya que es un gasto unilateral que corre a cuenta de la contraprestación.

El importe individual entregado por el banco de cada uno de los efectos es el siguiente:

- Para el primero: $C'_{01} = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \dfrac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 = 994{,}69$ u.m.

- Para el segundo: $C'_{02} = 2.000 \cdot \left(1 - 0{,}055 \cdot \dfrac{63}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 2.000 = 1.978{,}75$ u.m.

Luego el importe total entregado será:

$$C_0 = 994{,}69 + 1.978{,}75 = 2.973{,}44 \text{ u.m.}$$

Esta información se traslada a la tabla:

Efecto	**Nominal**	**Días**	**d**	**Com.**	**AJD**	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	NA	994,69
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	NA	1.978,75
Total						2.973,44

La operación para el banco se puede representar según el siguiente esquema temporal:

2973,44	-1000	-2000	Frec
0	31	63	365

El tipo de interés efectivo anual será aquel que iguale la suma financiera (en el momento inicial) de los capitales recibidos por el banco y el capital efectivamente entregado por la entidad

$$2973{,}44 = 1.000 \cdot (1+i)^{-31/365} + 2.000 \cdot (1+i)^{-63/365}$$

De la anterior ecuación no es posible despejar el tipo de interés efectivo anual. Debe utilizarse un procedimiento iterativo para su aproximación. En nuestro caso se ha utilizado la función TIRX (TIR.NO.PER en algunas versiones) de la hoja de cálculo «Calc» de paquete de ofimática de software libre «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i = 0{,}0640109$$

El cálculo del tipo de interés efectivo anual desde la perspectiva de la empresa (contrapestación) se realiza siguiendo un procedimiento similar al utilizado para el banco. El esquema a considerar para la determinación del tipo de interés efectivo anual sería el representado en la figura 3.10:

C''^{CP}_0	$-N_\alpha$	$-N_\beta$	.....	$-N_\theta$	Frec
0	α	β	.....	θ	365

Figura 3.10. Descuento de una remesa. Cálculo del tipo de interés efectivo anual. Contraprestación

El tipo de interés efectivo anual se obtendrá igualando, en términos financieros, lo recibido en el momento inicial y lo entregado en cada uno de los vencimientos de los efectos. Esto es, calculando, para un mismo momento del tiempo, el equivalente financiero del capital recibido al inicio de la operación e igualándolo a la suma financiera de la corriente de capitales entregados. Por ejemplo, si ese momento es el inicio de la operación, la ecuación quedaría planteada en los siguientes términos (ecuación 3.10):

$$C''^{CP}_0 = \sum_{j=\alpha}^{\theta} N_j \cdot (1+i)^{-j/365} \tag{3.10}$$

De esta ecuación se obtendrá el tipo de interés efectivo anual. No obstante, como se ha comentado, este tipo de interés efectivo anual no se puede despejar, sino que debe aproximarse utilizando algún algoritmo de cálculo.

Señalar que este tipo de interés efectivo anual tendrá la naturaleza de coste: la empresa, en términos nominales, recibe un capital y, a cambio, entrega en instantes posteriores, una serie de capitales, cuya suma es superior al capital recibido.

Ejemplo 3.8

Una empresa, hoy 3/5, descuenta una remesa de efectos comerciales, en el banco con el que habitualmente trabaja, con las siguientes características:

Efecto	Nominal (u.m.)	Vencimiento
Efecto 1	1.000,00	3/6
Efecto 2	2.000,00	5/7

Según las condiciones pactadas en la línea de descuento que la empresa tiene abierta en el banco, este le aplica un tipo de descuento anual del 5 % para aquellos efectos con vencimiento inferior a los 60 días, y un 5,5 % para aquellos efectos con vencimiento igual o superior a los 60 días. En ambos casos se utiliza la base ACT/360.

El banco cobra a la empresa, en el momento del descuento, una comisión del 0,1 %. Asimismo, la empresa debe pagar en ese momento inicial el impuesto de Actos Jurídicos Documentados que asciende a 1,5 u.m. para efectos con nominal inferior a 1.900,00 u.m. y a 1,75 u.m. para efectos con nominal igual o superior al mencionado importe.

Con los datos anteriores se desea conocer el tipo de interés efectivo anual del descuento de la remesa desde la perspectiva de la empresa.

En primer lugar, se procede a calcular el importe recibido por la empresa. Se recurre a reflejar los datos en una tabla:

Efecto	Nominal	Días	d	Com.	AJD	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	1,5	
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	1,75	
Total						

El importe individual recibido por la empresa de cada uno de los efectos es el siguiente:

- Para el primero: $C''_{01} = 1.000 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \dfrac{31}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 1.000 - 1{,}5 = 993{,}19$ u.m.

- Para el segundo:

$$C''_{02} = 2.000 \cdot \left(1 - 0{,}055 \cdot \frac{63}{360}\right) - 0{,}001 \cdot 2.000 - 1{,}75 = 1.977{,}00 \text{ u.m.}$$

Luego el importe total recibido será:

$$C_0 = 993{,}19 + 1.977 = 2.970{,}19 \text{ u.m.}$$

Esta información se traslada a la tabla:

Efecto	Nominal	Días	d	Com.	AJD	C_0
Efecto 1	1.000,00	31	5,00 %	0,1 %	NA	993,19
Efecto 2	2.000,00	63	5,50 %	0,1 %	NA	1.977,00
Total						2.970,19

La operación para la empresa se puede representar según el siguiente esquema temporal:

2970,19	-1000	-2000	Frec
0	31	63	365

El tipo de interés efectivo anual será aquel que iguale la suma financiera (en el momento inicial) de los capitales entregados (los nominales de los efectos) y el capital efectivamente recibido por la empresa en el momento inicial:

$$2970{,}19 = 1000 \cdot (1+i)^{-31/365} + 2000 \cdot (1+i)^{-63/365}$$

De la anterior ecuación no es posible despejar el tipo de interés efectivo anual. Debe utilizarse un procedimiento iterativo para su aproximación. En nuestro caso se ha utilizado la función TIRX (TIR.NO.PER en algunas versiones) de la hoja de cálculo «Calc» de paquete de ofimática de software libre «LibreOffice». El resultado es el siguiente:

$$i = 0{,}0721640$$

3.2. Letras del Tesoro

Las Letras del Tesoro son valores de Deuda Pública emitidos al descuento a corto plazo.

Las Letras son valores de Deuda Pública porque el emisor es el Estado. El Estado, para financiar el déficit público (la diferencia entre cobros y pagos de las administraciones públicas) emite deuda. Concretamente, emite valores con vencimiento a largo plazo (los Bonos y las Obligaciones del Estado, que tienen vencimientos entre 3 y 30 años) y valores con vencimiento a corto plazo (las Letras del Tesoro, con vencimientos a 6, 12 y 18 meses, aunque este último vencimiento no se utiliza de un modo continuado). Los compradores de esta deuda son, por tanto, prestamistas: le prestan dinero al Estado, que este se compromete a devolver, junto a un rendimiento, en un plazo y condiciones estipulados.

Las Letras son valores emitidos al descuento, y esto significa que son operaciones financieras simples en las que la contrapestación es el nominal de la operación. Esto es, al vencimiento, el Estado pagará al tenedor de la Letra, el importe nominal (1.000 euros). Lógicamente, para que los suscriptores de Letras del Tesoro obtengan un rendimiento, estos valores se emiten por un importe inferior al nominal. Es decir, un suscriptor que compre una Letra en el momento de su emisión y la mantenga hasta su vencimiento (no la venda con anterioridad a dicho momento) obtendrá un beneficio igual a la diferencia entre el nominal de la Letra (1.000 euros que es lo que le pagará el Estado al vencimiento) y el precio de emisión (el precio al que, en su momento, la compró).

Aparte de lo interesante que, como operación financiera, tiene la emisión de las Letras, Bonos y Obligaciones, estos valores tienen una utilidad añadida: las empresas los usan tanto para colocar sus excedentes de tesorería como para financiar necesidades transitorias de liquidez. En ambos casos se utilizan las operaciones repo u operaciones con pacto de recompra que, para el caso de las Letras del Tesoro, se verán en el presente capítulo.

3.2.1. Valor de mercado

El esquema temporal correspondiente a una Letra del Tesoro que se compra en el momento de su emisión y se mantiene hasta su vencimiento se ha representado en la figura 3.11.

C_0	-1000	Frec
0	n	360

Figura 3.11. Suscripción de una Letra del Tesoro que se mantiene hasta su vencimiento

Tal y como se puede apreciar en esta figura 3.11, se trata de una operación financiera simple, al descuento. En ella, el precio de adquisición (C_0) se calcula utilizando el año comercial (360 días). En caso de que el plazo hasta vencimiento (n) sea igual o inferior a los 365 días, el precio de adquisición se calculará utilizando la ley de capitalización simple. En caso de que el plazo hasta vencimiento sea superior a los 365 días, el precio de adquisición se calculará usando la ley de capitalización compuesta (véanse expresiones 3.11 y 3.12):

$$C_0 = \frac{1000}{\left(1 + i \cdot \frac{n}{360}\right)} \quad sii \quad n \leq 365 \tag{3.11}$$

$$C_0 = 1000 \cdot (1+i)^{-n/360} \quad sii \quad n > 365 \tag{3.12}$$

En ambos, casos i es el tipo de interés al que se emiten las Letras.

Nótese que, en definitiva, lo que se está haciendo en ambos casos es calcular el equivalente financiero en el momento inicial de un capital de 1.000 u.m. con vencimiento una vez hayan transcurrido *n* días. En el primer caso, para calcular el equivalente financiero se usa la ley de capitalización simple y en el segundo caso, la ley de capitalización compuesta.

Ejemplo 3.9

Un inversor ha suscrito (comprado en el momento en el que se emiten) dos Letras del Tesoro con vencimiento a 6 (181 días) y 18 (549 días) meses respectivamente. El tipo de interés de emisión para las Letras a 6 meses ha sido del 2 %, mientras que en el caso de las Letras a 18 meses ha sido del 2,1 %.

Con estos datos se desea conocer el precio que habrá tenido que pagar el inversor por cada una de las Letras.
Información adicional: Nominal de una Letra del Tesoro: 1.000,00 u.m.

En el caso de las Letras a 6 meses el esquema temporal será el siguiente:

C_0	-1000	Frec
0	181	360

Aplicando 3.11, el precio que habrá pagado el inversor se calculará directamente:

$$C_0 = \frac{1.000}{\left(1+0,02\cdot\frac{181}{360}\right)} = 990,04 \text{ u.m.}$$

En el caso de las Letras a 18 meses el esquema temporal será el siguiente:

C_0	-1000	Frec
0	549	360

Aplicando 3.12, el precio que habrá pagado el inversor se calculará directamente:

$$C_0 = 1.000\cdot\left(1+0,021\right)^{-549/360} = 968,80 \text{ u.m.}$$

Las Letras del Tesoro pueden venderse antes de su vencimiento. De hecho, existe un mercado muy líquido, no solo de Letras, sino de todos los valores de deuda pública. El precio de mercado, al cual se pueden comprar y/o vender esos valores de deuda pública antes de su vencimiento depende del tipo de interés de mercado. El tipo de interés no es una magnitud estática. Cambia constantemente en función, en última instancia, de la oferta y de la demanda. De este modo, el precio al que se podrá negociar (comprar o vender) una Letra en un determinado momento (anterior a su vencimiento) dependerá del tipo de interés que esté vigente para las Letras del Tesoro en dicho momento. Las expresiones para calcular el valor al que se podrá comprar o vender la Letra (lo que se denomina valor de mercado de la Letra) serán las mismas que las vistas para el caso de la suscripción:

- La expresión (3.11) en caso de que a la Letra le queden 365 días o menos hasta su vencimiento.
- La expresión (3.12) en caso de que a la Letra le queden más de 365 días hasta su vencimiento.

Ejemplo 3.10

Un inversor desea comprar en el mercado de deuda pública una Letra del Tesoro. Dicha Letra se emitió hace 200 días y tenía un vencimiento de 18 meses (549 días). Si el tipo de interés al que actualmente se negocian las Letras del Tesoro (tipo de interés de mercado) es del 2,2 %, determínese el precio al que un inversor podrá adquirir la Letra.

Información adicional: Nominal de una Letra del Tesoro: 1.000,00 u.m.

Lo relevante para resolver este problema no son los días que faltaban hasta el vencimiento en el momento en que la Letra se emitió. Lo relevante son los días que faltan hasta el vencimiento desde el momento actual, desde el momento en el que se negocia la Letra. Concretamente, si la Letra se emitió hace 200 días con un vencimiento a 549 días, en el momento actual faltarán hasta su vencimiento:

$$549 - 200 = 349 \text{ días}$$

Por lo tanto, el esquema temporal que se tiene que utilizar para valorar la Letra es el siguiente:

C'_0	-1000	Frec
0	349	360

Como quedan 365 días o menos hasta el vencimiento (quedan 349), la ley financiera a usar es la capitalización simple. El valor de mercado (el precio al que se negociará, se comprará) de la Letra será:

$$C'_0 = \frac{1.000}{\left(1+0{,}022\cdot\frac{349}{360}\right)} = 979{,}12 \text{ u.m.}$$

3.2.2. Rendimiento

El comprador de una Letra del Tesoro que la mantenga hasta vencimiento, obtendrá un rendimiento: obtendrá un rendimiento igual al diferencial entre el precio de compra y el nominal de la Letra. En términos de tipo de interés efectivo anual, el rendimiento se calculará a partir del esquema mostrado en la figura 3.12:

C_0	-1000	Frec
0	n	365

Figura 3.12. Esquema para el cálculo del rendimiento de una Letra del Tesoro que se mantiene hasta su vencimiento

Nótese que en el esquema anterior se ha utilizado el año de 365 días, ya que es este número el que debe utilizarse para calcular el tipo de interés efectivo anual.

El rendimiento que obtendrá un inversor que compró la Letra por un importe de C_0 u.m., cuando faltaban n días hasta su vencimiento, y que la ha mantenido hasta dicho momento vendrá dado por las siguientes expresiones:

$$C_0 = 1.000 \cdot (1 + i')^{-n/365}$$

En la anterior expresión se ha igualado la prestación de la operación (el precio de compra de la Letra) al valor en 0 (momento en el que vence la prestación) de la contraprestación (valor en 0 del nominal de la Letra). Se ha usado la ley de capitalización compuesta y, como se ha señalado, el año de 365 días. *i'* es el tipo de interés efectivo anual que hace equivalentes, en términos financieros, prestación y contraprestación; *i'* es, por tanto, el rendimiento que ha obtenido el inversor en términos de tipo de interés efectivo anual. Si se despeja esta magnitud de la anterior expresión se obtiene (3.13):

$$i' = \left(\frac{1.000}{C_0}\right)^{365/n} - 1 \qquad (3.13)$$

Ejemplo 3.11

Un inversor ha comprado en el mercado una Letra del Tesoro por 990,04 u.m. A la Letra le restan 181 días hasta su vencimiento. El inversor desea saber, en términos de tipo de interés efectivo anual, el rendimiento que obtendrá si decide mantener la Letra hasta dicho momento, hasta su vencimiento.

El esquema temporal de la operación se muestra a continuación:

990,04	-1000	Frec
0	181	365

Aplicando (3.13):

$$i' = \left(\frac{1.000}{990,04}\right)^{365/181} - 1 = 0,0203909$$

El comprador de una Letra del Tesoro puede también decidir no mantenerla en su poder hasta el vencimiento, sino venderla antes de dicha fecha. En ese caso, el rendimiento que obtendrá por su inversión vendrá dado por la diferencia entre el precio de adquisición y el precio de venta de la Letra. En términos de tipo de interés efectivo anual, dicho rendimiento se calculará utilizando como base el esquema temporal de la figura 3.13.

C_0	$-C'_0$	Frec
0	n	365

Figura 3.13. Esquema para el cálculo del rendimiento de una Letra del Tesoro que se vende antes de su vencimiento

En esta figura se ha representado el importe pagado por la compra de la Letra (C_0, prestación) y el importe obtenido por la venta del activo (C'_0, contraprestación)

El rendimiento será el tipo de interés efectivo anual que hace equivalentes prestación y contraprestación:

$$C_0 = C'_0 \cdot (1+i')^{-n/365}$$

Si se despeja el tipo de interés efectivo anual de la anterior expresión se obtiene (3.14):

$$i' = \left(\frac{C'_0}{C_0}\right)^{365/n} - 1 \qquad (3.14)$$

Ejemplo 3.12

Un inversor compró hace 200 días una Letra del Tesoro por 968,80 u.m. Esta Letra acaba de venderla en el mercado de deuda pública por 979,12 u.m. Calcular la rentabilidad que ha obtenido el inversor en términos de tipo de interés efectivo anual.

El esquema temporal representativo de la operación llevada a cabo por el inversor se muestra a continuación:

968,8	-979,12	Frec
0	200	365

La rentabilidad del inversor, en términos de tipo de interés efectivo anual será:

$$i' = \left(\frac{979,12}{968,8}\right)^{365/200} - 1 = 0,0195259$$

3.2.3. Operaciones repo

Se conoce como operación repo a aquella operación en la que se compran (o se venden) al contado Letras del Tesoro y, simultáneamente, se pacta la reventa (o recompra) de dichas Letras al finalizar un plazo establecido. Es decir, en una operación repo se realiza una compra (o venta) al contado, esto es, se compran (o se venden) Letras del Tesoro. Y, al mismo tiempo, se pacta realizar la operación de signo contrario cuando finalice el plazo establecido. Esto es, si inicialmente se compraron Letras, se pacta la reventa de dichas Letras cuando transcurra ese plazo. Y si originariamente se vendieron Letras, se pacta su recompra al finalizar el plazo establecido.

En términos financieros se trata, por tanto, de una operación financiera simple en la que la prestación se corresponde con el importe pagado por la compra de la Letra (o el importe cobrado por la venta del activo) y la contraprestación con el importe cobrado en la reventa (o, en su caso, la recompra) de la Letra al final del plazo establecido.

El esquema temporal se puede plantear en los siguientes términos (figura 3.14):

C_0	$-C_{n'}$	Frec
0	n'	360

Figura 3.14. Esquema de una repo

Donde:

- C_0 representa el valor al cual se realiza la primera transacción (la compra o, en su caso, la venta de la Letra).
- $C_{n'}$ representa el importe intercambiado por las partes en la segunda transacción (la operación de signo contrario realizada al final del plazo pactado).
- Y n' representa el plazo (medido en días) al cual se pacta la reventa (o la recompra) de la Letra.

El precio pactado para la primera de las transacciones (C_0) es el valor de mercado de la Letra; esto es, el valor al que se compraría o se vendería una Letra en el mercado. Si a la Letra le quedan n días hasta su vencimiento, dicho precio se calculará utilizando bien la expresión (3.11), si a la Letra le quedan 365 días o menos hasta su vencimiento:

$$C_0 = \frac{1.000}{\left(1 + i \cdot \frac{n}{360}\right)}$$

O bien la expresión (3.12), si a la Letra le quedan más de 365 días hasta su vencimiento:

$$C_0 = 1.000 \cdot (1+i)^{-n/360}$$

Donde i es el tipo de interés de mercado para las Letras del Tesoro en el momento en que estas se negocian.

Por su parte, el importe a intercambiar entre las partes en el momento de la reventa (o recompra) de la Letra será igual a un capital con vencimiento en n', que, en términos financieros, y en base a la ley de capitalización simple, sea financieramente equivalente a C_0. Nótese en este punto que, en el esquema de la figura 3.14, se ha puesto 360 como frecuencia. Este suele ser este el número de días que se toma en consideración para el cálculo del precio de reventa (o recompra). En estas condiciones, este se calculará de acuerdo con la expresión (3.15):

$$C_{n'} = C_0 \cdot \left(1 + i'' \cdot \frac{n'}{360}\right) \tag{3.15}$$

donde i'' es el tipo de interés pactado para la repo.

Ejemplo 3.13

Una empresa posee una Letra del Tesoro a la que le restan 400 días hasta su vencimiento. La empresa decide realizar una operación repo a 56 días con el banco con el que habitualmente trabaja. Se desea conocer el precio al cual la empresa venderá la Letra y el precio al que la recomprará.

Información adicional:

- Tipo de interés de mercado para las Letras del Tesoro en el momento en que se lleva a cabo la primera transacción: 2,1 %
- Tipo de interés pactado para la repo: 5 %.
- Nominal de las Letras del Tesoro: 1.000,00 u.m.
- Base para la repo: ACT/360

En la operación repo, la empresa venderá la Letra al banco por un importe C_0 equivalente al valor de mercado y la recomprará transcurridos 56 días por un importe C_{56} calculado en base al tipo de interés repo pactado. El esquema de la operación se muestra a continuación:

C_0	$-C_{56}$	Frec
0	56	360

Para calcular el precio de venta de la Letra se puede recurrir al esquema usado para el cálculo del precio de mercado, esto es, el esquema que toma en consideración los días que restan a vencimiento:

C_0	-1000	Frec
0	400	360

Como quedan más de 365 días hasta el vencimiento, la Letra se valorará usando la ley de capitalización compuesta:

$$C_0 = 1.000 \cdot (1+0{,}021)^{-400/360} = 977{,}17 \text{ u.m.}$$

A partir del valor de venta, el valor de recompra se obtendrá aplicando la ley de capitalización simple, con la base ACT/360:

$$C_{56} = 977{,}17 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{56}{360}\right) = 984{,}77 \text{ u.m.}$$

En una operación repo, aparte de los importes, se puede calcular el tipo de interés efectivo anual. Este tipo de interés efectivo anual tendrá la consideración de coste financiero para el agente que realiza la venta de la Letra en el momento inicial, y de rendimiento para el agente que realiza la compra de la Letra en dicho momento. En efecto, piénsese en un agente que vende una Letra del Tesoro con pacto de recompra. Dicho agente, en el momento inicial, en el momento en que venda la Letra, recibirá un importe monetario. Por contra, al vencimiento, cuando la recompre, deberá entregar un importe monetario mayor al inicial. La diferencia entre ambos importes será un coste financiero. Dicho coste, en términos financieros, quedará recogido en el tipo de interés efectivo anual de la operación repo.

De modo similar, el agente que compre la Letra en el momento inicial y la revenda posteriormente, obtendrá un rendimiento, una rentabilidad. El importe desembolsado en la compra de la Letra será inferior al importe recibido en la reventa. La diferencia entre ambos importes será el rendimiento obtenido, que, en términos financieros, se podrá expresar mediante el tipo de interés efectivo anual de la operación repo.

El esquema para calcular el tipo de interés efectivo anual de una operación repo se muestra en la figura 3.15.

C_0	$-C_{n'}$	Frec
0	n'	365

Figura 3.15. Esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual de una REPO

Nótese que se toma como frecuencia el año de 365 días porque, como ya se ha reiterado, es el utilizable para la determinación del tipo de interés efectivo anual.

El tipo de interés efectivo anual será aquel que haga equivalentes la prestación y la contraprestación recogidas en el anterior esquema, en cualquier momento del tiempo. Tomando como referencia el momento inicial, el tipo de interés efectivo anual debe ser aquel que satisfaga la siguiente ecuación:

$$C_0 = C_{n'} \cdot (1+i')^{-n'/365}$$

Despejando (3.16):

$$i' = \left(\frac{C_{n'}}{C_0}\right)^{365/n'} - 1 \tag{3.16}$$

Ejemplo 3.14

Una empresa posee una Letra del Tesoro a la que le restan 400 días hasta su vencimiento. La empresa decide realizar una operación repo a 56 días con el banco con el que habitualmente trabaja. Se desea conocer el coste financiero para la empresa de la operación repo en términos de tipo de interés efectivo anual.
Información adicional:

- Precio de venta de la Letra: 977,17 u.m.
- Precio de recompra de la Letra: 984,77 u.m.

El esquema temporal de la operación se muestra a continuación.

977,17	-984,77	Frec
0	56	365

El tipo de interés efectivo anual será:

$$i' = \left(\frac{984,77}{977,17}\right)^{365/56} - 1 = 0,0517936$$

Problemas propuestos

Problema 3.1

Calcúlese el efectivo (u.m.) que recibirá una empresa al descontar un efecto de nominal 2.000,00 u.m., al que le quedan 43 días hasta su vencimiento.

Información adicional:

- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 2 u.m.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal.
- Tipo de descuento anual aplicado por el banco: 5 %.

Problema 3.2

Calcúlese el tipo de interés efectivo anual de la siguiente operación de descuento:

- Nominal del efecto: 2.000,00 u.m.
- Plazo a vencimiento: 43 días.
- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 2 u.m.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal.
- Tipo de descuento anual aplicado por el banco: 5 %.

Calcúlese el tipo de interés efectivo anual desde la óptica de la empresa que descuenta el efecto.

Problema 3.3

Calcúlese el tipo de interés efectivo anual de la siguiente operación de descuento:

- Nominal del efecto: 2.000,00 u.m.
- lazo a vencimiento: 43 días.
- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 2 u.m.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal.
- Tipo de descuento anual aplicado por el banco: 5 %.

Calcúlese el tipo de interés efectivo anual desde la óptica del banco.

Problema 3.4

Una empresa lleva al descuento la siguiente remesa de efectos:

Efecto	Nominal (u.m.)	Días a vto.
1	2.000,00	47
2	5.000,00	63
3	7.000,00	32

Las condiciones que aplica el banco son las siguientes:

- Tipo de descuento anual: 5,5 %.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal, para efectos con vencimiento a menos de 60 días; 0,15 % del nominal para efectos con vencimiento a un mayor número de días.
- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 1,2 u.m. para efectos con un nominal inferior a 6.000,00 u.m.; 2,3 u.m. para efectos con un nominal mayor o igual a las 6.000,00 u.m.

Con los anteriores datos se desea conocer el efectivo (u.m.) que recibirá la empresa al descontar la remesa.

Problema 3.5

Una empresa lleva al descuento la siguiente remesa de efectos:

Efecto	Nominal (u.m.)	Días a vto.
1	2.000,00	47
2	5.000,00	63
3	7.000,00	32

Las condiciones que aplica el banco son las siguientes:

- Tipo de descuento anual: 5,5 %.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal, para efectos con vencimiento a menos de 60 días; 0,15 % del nominal para efectos con vencimiento a un mayor número de días.
- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 1,2 u.m. para efectos con un nominal inferior a 6.000,00 u.m.; 2,3 u.m. para efectos con un nominal mayor o igual a las 6.000,00 u.m.

Con los anteriores datos se desea conocer el tipo de interés efectivo anual del descuento de la remesa. Calcularlo bajo la óptica de la empresa.

Problema 3.6

Una empresa lleva al descuento la siguiente remesa de efectos:

Efecto	Nominal (u.m.)	Días a vto.
1	2.000,00	47
2	5.000,00	63
3	7.000,00	32

Las condiciones que aplica el banco son las siguientes:

- Tipo de descuento anual: 5,5 %.
- Comisión cobrada por el banco al descontar el efecto: 0,1 % sobre el nominal, para efectos con vencimiento a menos de 60 días; 0,15 % del nominal para efectos con vencimiento a un mayor número de días.
- Impuesto de Actos Jurídicos Documentados: 1,2 u.m. para efectos con un nominal inferior a 6.000,00 u.m.; 2,3 u.m. para efectos con un nominal mayor o igual a las 6.000,00 u.m.

Con los anteriores datos se desea conocer el tipo de interés efectivo anual del descuento de la remesa. Calcularlo bajo la óptica del banco. Determínese si se trata de un coste o de un rendimiento para el banco.

Problema 3.7

Un inversor acaba de adquirir una Letra del Tesoro en la última subasta que se ha efectuado. El tipo de interés de la subasta ha sido del 1,5 %, y la Letra adquirida vence dentro de 12 meses (365 días). Calcúlese el precio que debe pagar el inversor por la adquisición de la Letra.

Información adicional: Nominal de las Letras del Tesoro: 1.000,00 u.m.

Problema 3.8

Un inversor desea adquirir una Letra del Tesoro a la que le quedan 200 días hasta su vencimiento. El tipo de interés de mercado vigente es del 1,3 %. Calcúlese el precio que debe pagar el inversor por la adquisición de la Letra.

Información adicional: Nominal de las Letras del Tesoro: 1.000,00 u.m.

Problema 3.9

Un inversor adquirió una Letra del Tesoro hace 165 días en una subasta de deuda pública. La Letra tenía un vencimiento a un año (365 días) y el tipo de interés de la subasta fue del 1,5 %. En el momento actual, el inversor se plantea vender la Letra. Ha acudido al mercado y ha visto que el tipo de interés al que se negocian estos activos (el tipo de interés de mercado) es del 1,3 %. Con estos datos el inversor desea conocer la rentabilidad, en términos de tipo de interés efectivo anual, que obtendría en caso de vender la Letra.

Problema 3.10

Una empresa posee una Letra del Tesoro a la que le quedan 180 días hasta su vencimiento. Con ella la empresa ha decidido realizar una operación repo con el banco con el que habitualmente opera. Las condiciones del repo son las siguientes:

- Plazo: 30 días
- Tipo de interés repo: 6 %
- Base para la repo: ACT/360

El tipo de interés de mercado para las Letras del Tesoro es, en el momento actual, del 1,7 %. Con estos datos se desea conocer el tipo de interés efectivo anual de la operación repo. Interpretar este tipo de interés desde la óptica de la empresa: en términos de coste o rendimiento.

Capítulo 4
Rentas financieras

En el capítulo anterior se han estudiado algunas de las operaciones financieras a corto plazo habitualmente utilizadas por las empresas en su operatoria habitual. En esencia se trata, como se ha visto, de operaciones financieras simples. Esto es, operaciones financieras en las que prestación y contraprestación están conformadas por un único capital (la excepción sería el descuento de una remesa de efectos; ahora bien, esta operación puede descomponerse en una agregación de operaciones simples).

Tras estas operaciones a corto, lo que procede ahora es entrar en el estudio de las operaciones a largo plazo. Estas no son, en general, operaciones simples: bien prestación, bien contraprestación, o ambas, están conformadas por un conjunto de capitales. Muchas veces estos capitales, de la prestación o de la contraprestación, tienen unas características especiales: vencen a intervalos regulares y tienen la misma cuantía, o bien su cuantía varía siguiendo una determinada pauta. En definitiva, estos capitales conforman lo que se denomina renta financiera. El presente capítulo se dedica, precisamente, al estudio de estas rentas. Su conocimiento y manejo ayudará a la comprensión y valoración de las operaciones financieras a largo plazo que se tratan en los capítulos 5 y 6.

4.1. Concepto y clasificación de las rentas financieras

Una renta financiera es un conjunto de capitales financieros que vencen, de modo regular, en distintos momentos del tiempo.

Una renta financiera no es algo extraño, algo teórico que solo aparece en los libros de texto. En nuestro entorno podemos encontrar numerosos ejemplos de rentas financieras. Por ejemplo, el conjunto de las cantidades que, mensualmente, paga el arrendatario al arrendador de una vivienda es una renta financiera. En efecto, cada una de las mensualidades constituye un capital financiero, con un vencimiento distinto (cada uno en un mes); y el vencimiento de estos capitales se produce de forma regular (se paga cada mes).

Otro ejemplo de renta es el conjunto de los salarios que, cada fin de mes, percibe un trabajador de la empresa en la que presta sus servicios. Cada una de las nóminas (habitualmente mensuales) que percibe el trabajador es un capital financiero, con un vencimiento diferente (habitualmente al final de cada uno de los meses); y este vencimiento se produce de forma regular (lo normal es que se perciba el salario cada mes).

En términos generales, una renta financiera puede representarse mediante el esquema temporal recogido en la figura 4.1.

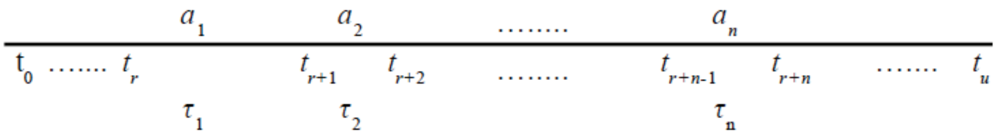


Figura 4.1. Esquema general de una renta financiera

En esta figura 4.1, (a_1, τ_1), (a_2, τ_2),..., (a_n, τ_n) representan los capitales financieros que conforman la renta financiera, siendo, a_1, a_2,..., a_n las cuantías de los capitales y τ_1, τ_2,..., τ_n sus vencimientos.

Los elementos que definen una renta financiera son los siguientes:

- Términos de la renta: cuantía de los capitales financieros que la componen: a_j donde $j = 1,..., n$.
- Período de maduración: duración de los subintervalos temporales en los que se subdivide el período de tiempo dentro del cual vencen los términos de la renta: $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, donde $j = 1,..., u$.
- Origen de la renta: es el extremo inferior del primero de los subintervalos a los que se acaba de aludir: t_0.
- Final de la renta: es el extremo superior del último de estos subintervalos: t_u.
- Duración: tiempo que media entre el origen del primero de los subintervalos en los que vencen capitales y el final del último de los subintervalos dentro de los cuales vencen capitales: $n = t_{n+r} - t_r$.

Las rentas financieras pueden clasificarse atendiendo a varios criterios. A continuación se detallan los más habituales.

En función del momento en el cual vencen los términos dentro de cada subintervalo las rentas financieras pueden clasificarse como:

- Rentas pospagables. Son aquellas en las que los capitales vencen al final de cada uno de los subintervalos. El esquema general de ese tipo de rentas es el que se muestra en la figura 4.2.

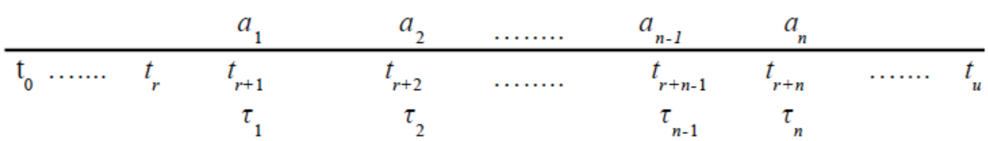


Figura 4.2. Esquema general de una renta pospagable

- Rentas prepagables. Son aquellas en las que los capitales vencen al principio de cada uno de los subintervalos. El esquema general de ese tipo de rentas es el que se muestra en la figura 4.3.

		a_1	a_2		....	a_n			
t_0	......	t_r	t_{r+1}	t_{r+2}	....	t_{r+n-1}	t_{r+n}	....	t_u
		τ_1	τ_2			τ_n			

Figura 4.3. Esquema general de una renta prepagable

Dentro de esta primera clasificación de las rentas financieras en puridad cabría hablar de un tercer tipo de rentas: aquellas cuyos capitales vencen en un momento del subintervalo distinto al inicio o final del mismo. Ahora bien, en los manuales de matemática financiera no se suele hablar de este tercer tipo de rentas ya que, en la realidad, los problemas financieros se resuelven asumiendo que los capitales vencen, o bien al principio o bien al final del correspondiente intervalo temporal. Siguiendo este criterio, en el presente texto se va a distinguir solo entre rentas prepagabes y pospagables, cuando se considere el momento en el cual vencen los capitales dentro de cada subintervalo.

Esto permite también simplificar el esquema temporal de una renta. Al coincidir el vencimiento de los capitales (que hemos representado por τ) con uno de los extremos de los subintervalos (que hemos representado por *t*) podemos representar las rentas utilizando directamente números arábigos y letras, sin necesidad de recurrir a letras con subíndices. De este modo, los respectivos esquemas de una renta pospagable y de una prepagable serían los recogidos en las figuras 4.4 y 4.5.

		a_1	a_2	a_{n-1}	a_n		
0	r	r+1	r+2	r+n-1	r+n	....	u

Figura 4.4. Esquema general de una renta pospagable

	a_1	a_2	a_3	....	a_n		
0	r	r+1	r+2	....	r+n-1	r+n	u

Figura 4.5. Esquema general de una renta prepagable

Un segundo criterio de clasificación de las rentas financieras es aquel que discrimina en función del momento en el que se sitúa el origen o el final de la renta. En este apartado se distinguen tres categorías:

- Rentas inmediatas. Aquellas en las que el origen y el final de la renta coinciden, respectivamente, con el extremo inferior del primero de los subintervalos en los que vencen capitales y con el extremo superior del último de los subintervalos en los que vencen capitales. Observando el esquema temporal (figura 4.6) se ve claramente cómo son este tipo de rentas.

	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
0	1	2	....	n-1	n

Figura 4.6. Esquema general de una renta inmediata pospagable

- Rentas diferidas. Son aquellas en las que el origen es anterior al extremo inferior del primero de los subintervalos en los que vencen capitales. El esquema de una renta diferida y pospagable se muestra en la figura 4.7.

		a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
0	r	r+1	r+2	....	r+n-1	r+n

Figura 4.7. Esquema general de una renta pospagable diferida *r* períodos

- Rentas anticipadas. En estas rentas financieras, el final se sitúa con posterioridad al último de los subintervalos en los que vencen capitales. En la figura 4.8 se ha representado el esquema general de una renta pospagable anticipada *h* períodos.

	a_1	....	a_n			
0	1	....	n	n+1	....	n+h

Figura 4.8. Esquema general de una renta pospagable anticipada *h* períodos

En función del grado de certeza que existe sobre los elementos de la renta se distingue entre:

- Rentas ciertas: cuando todos los elementos se conocen con certeza.
- Rentas aleatorias: cuando alguno de los elementos (al menos un capital o al menos un vencimiento) es aleatorio.

Atendiendo a la cuantía de los términos se distingue entre:

- Rentas constantes. Las cuantía de todos los capitales es idéntica. En la figura 4.9 se ha representado una renta inmediata constante y pospagable.

	a	a	....	a	a
0	1	2	....	n-1	n

Figura 4.9. Esquema general de una renta constante inmediata y pospagable

- Rentas variables. En estas rentas financieras los términos tienen distinta cuantía. Dentro de las rentas variables existen dos casos particulares que merecen una especial atención. Se trata de las rentas variables en progresión aritmética y de las rentas variables en progresión geométrica. Estos dos casos se tratan dentro del anexo al presente capítulo.

Otra clasificación de las rentas es la que toma en consideración la amplitud de los subintervalos. En este punto se distingue entre:

- Rentas discretas. En ellas los subintervalos tienen una amplitud finita.
- Rentas continuas. En estas rentas los subintervalos tienen una amplitud infinitesimal.

Según la duración de la renta se pueden diferenciar:

- Rentas temporales. Son las rentas financieras con una duración limitada. O lo que es lo mismo, rentas que cuentan con un número finito de términos.
- Rentas perpetuas. Son aquellas en las que el número de términos es infinito. No deben confundirse las rentas perpetuas con las rentas vitalicias (rentas, estas ultimas, que finalizan cuando fallece una persona). En las rentas vitalicias el número de términos es finito pero desconocido (aleatorio), mientras que en las rentas perpetuas dicho número es infinito.

Finalmente, considerando la periodicidad con la que vencen los términos de la renta, cabe distinguir entre:

- Rentas anuales. Cuando los términos vencen cada año.
- Rentas fraccionadas. En estas rentas los términos vencen con una periodicidad inferior al año. Se habla en este caso de rentas semestrales (cuando los términos vencen con una periodicidad semestral), rentas mensuales (en las que los términos vencen con una periodicidad mensual), etc.
- Rentas con periodicidad superior al año. En ellas el período que transcurre entre dos vencimientos consecutivos es superior al año.

4.2. Valor inicial y valor final de una renta variable

4.2.1. Rentas inmediatas y pospagables

Cuando se estudian las rentas financieras, aparte de su clasificación, se aborda el tema de su valoración, en dos momentos concretos: en su origen (donde se obtiene el valor inicial del la renta) y en su final (el valor que se obtiene en este punto se denomina valor final de la renta).

Para valorar rentas financieras, conceptualmente, se puede utilizar cualquier ley financiera. Sin embargo, en la práctica se usa la capitalización compuesta, por lo que, dentro de este capítulo, solo se va emplear esta ley financiera.

Vamos a empezar calculando el valor inicial de una renta variable, inmediata y pospagable. Concretamente la recogida en la figura 4.10.

	a_1	a_2	….....	a_{n-1}	a_n	Frec
0	1	2	….....	n-1	n	*m*

Figura 4.10. Renta variable inmediata y pospagable

Nótese que, a la derecha del esquema, se ha añadido una leyenda que denota la periodicidad con la que vencen los términos de la renta (en este caso *m*).

Para calcular el valor inicial de esta renta utilizaremos la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual igual a i.

Lo primero que es necesario para calcular el valor inicial de esta renta es averiguar el tipo de interés periodal a partir del tipo de interés efectivo anual i del que se dispone. Para ello se utiliza la ecuación (4.1) de equivalencia de tipos de interés que se ha visto en capítulos anteriores.

$$\left(1+i_{(m)}\right)^{m}=\left(1+i\right) \tag{4.1}$$

De la anterior ecuación se puede despejar el tipo de interés periodal (4.2).

$$i_{(m)}=\left(1+i\right)^{1/m}-1 \tag{4.2}$$

A partir de este tipo de interés periodal el valor inicial de la renta se calcula sumando las cuantías de los capitales financieros, equivalentes en 0, de todos los términos de la renta (figura 4.11 y ecuación 4.3).

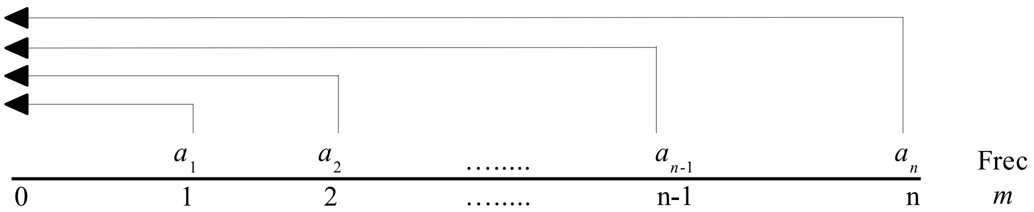


Figura 4.11. Esquema de cálculo de valor inicial de una renta inmediata variable pospagable

$$V_0=\frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)}+\frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^{2}}+.....+\frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^{n}} \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Para realizar el cálculo lo primero que debe hacerse es representar la renta.

	200	300	350	400	Frec
0	1	2	3	4	12

La periodicidad del vencimiento de los términos es mensual. Por eso, junto al esquema de la renta se ha añadido la leyenda Frec = 12 (12 son los meses que tiene un año).

A continuación se calcula el tipo de interés mensual:

$$i_{(12)} = \left(1+0{,}05\right)^{1/12} - 1 = 0{,}004074$$

Y con este tipo de interés ya se puede calcular el valor inicial de la renta:

$$V_0 = \frac{200}{\left(1+0{,}004074\right)} + \frac{300}{\left(1+0{,}004074\right)^2} + \frac{350}{\left(1+0{,}004074\right)^3} + \frac{400}{\left(1+0{,}004074\right)^4} = 1.236{,}06 \text{ u.m.}$$

El valor final de una renta variable se calcula de un modo similar al utilizado para calcular el valor inicial. Si se quiere calcular el valor final de la renta representada en la figura 4.10, utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo e interés efectivo anual *i*, se debe proceder del siguiente modo: primero calcular el tipo de interés periodal. A continuación, averiguar los equivalentes financieros de los distintos términos de la renta en el momento final. Y finalmente, sumar las cuantía de dichos equivalentes (véanse figura 4.12 y ecuaciones 4.2 y 4.4).

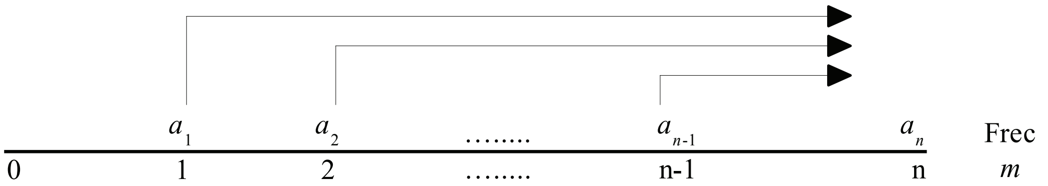


Figura 4.12. Esquema de cálculo de valor final de una renta inmediata variable pospagable

$$V_n = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a_n \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.2

Calcúlese el valor final de una renta inmediata pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Se trata de la misma renta del ejemplo 4.1, por lo que ya se ha representado y ya se ha calculado el tipo de interés periodal. No obstante, a efectos de ilustrar el procedimiento de cálculo, se siguen todas las etapas del proceso.

Para calcular el valor final lo primero que debe hacerse es representar la renta.

	200	300	350	400	Frec
0	1	2	3	4	12

La periodicidad del vencimiento de los términos es mensual. Por eso, junto al esquema de la renta se ha añadido la leyenda Frec = 12 (12 son los meses que tiene un año).

A continuación se calcula el tipo de interés mensual:

$$i_{12} = (1+0{,}05)^{1/12} - 1 = 0{,}004074$$

Y con este tipo de interés ya se puede calcular el valor final de la renta:

$$V_4 = 200 \cdot (1+0{,}004074)^3 + 300 \cdot (1+0{,}004074)^2 + 350 \cdot (1+0{,}004074) + 400 = 1.256{,}33 \text{ u.m.}$$

El valor final de una renta se puede calcular de modo directo a partir de su valor inicial, y viceversa. Vamos a verlo para el caso de la renta inmediata y pospagable representada en la figura 4.10 y que se valora a un tipo de interés efectivo anual de cuantía *i*.

El valor final de esta renta se calcula, como se ha visto, a través de la ecuación (4.4):

$$V_n = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-2} + \ldots.. + a_{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a_n$$

Si en esta ecuación se dividen ambos términos de la igualdad entre $\left(1+i_{(m)}\right)^n$ se obtiene lo siguiente:

$$\frac{V_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} = \frac{a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1}}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} + \frac{a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-2}}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} + \ldots.. + \frac{a_{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

Simplificando en la parte derecha de la igualdad:

$$\frac{V_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} = \frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + \ldots.. + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

Lo que aparece en la parte derecha de la igualdad es el valor inicial de la renta (véase la ecuación 4.3). Por lo que puede establecerse la siguiente relación entre valor inicial y valor final de una renta (ecuaciones 4.5 y 4.6):

$$V_0 = \frac{V_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} \tag{4.5}$$

$$V_n = V_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.3

Calcúlese el valor final de una renta inmediata pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 % y se sabe que su valor inicial asciende a 1.236,06 u.m.

Se trata de la misma renta de los ejemplos 4.1 y 4.2, por lo que ya se ha representado y se ha calculado el tipo de interés periodal. No obstante, a los efectos de ilustrar el procedimiento de cálculo, se siguen todas las etapas del proceso.

Para calcular el valor final lo primero que debe hacerse es representar la renta.

	200	300	350	400	Frec
0	1	2	3	4	12

La periodicidad del vencimiento de los términos es mensual. Por eso, junto al esquema de la renta se ha añadido la leyenda Frec = 12 (12 son los meses que tiene un año).

A continuación se calcula el tipo de interés mensual:

$$i_{12} = \left(1+0,05\right)^{1/12} - 1 = 0,004074$$

Como se conoce el valor inicial, el valor final se puede calcular directamente del siguiente modo:

$$V_4 = 1.236,06 \cdot \left(1+0,004074\right)^{4} = 1.256,33 \text{ u.m.}$$

4.2.2. Valor inicial y valor final: relación entre las rentas pospagables y las rentas prepagables

Una cuestión interesante, que resulta de aplicación a todas las rentas, pero que se va a desarrollar dentro de este apartado dedicado a las rentas variables, es la relación entre los valores iniciales (y también los finales) de las rentas pospagables y los de las rentas prepagables. Vamos a verlo con una renta inmediata.

Sea una renta variable, inmediata y prepagable de las características de la recogida en la figura 4.13.

a_1	a_2	a_3	……..	a_n		Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 4.13. Renta variable inmediata y prepagable

Esta renta, como puede apreciarse, es similar a la representada en la figura 4.10: la duración es la misma, la periodicidad también y la cuantía de los términos también es idéntica. No obstante ambas rentas se diferencian en que la de la figura 4.10 es pospagable y la de la figura 4.13 es prepagable.

La renta de la figura 4.13 se valora utilizando un tipo de interés efectivo anual igual a i. Se trata del mismo tipo de interés efectivo anual que el de la renta de la figura 4.10, por lo que el tipo de interés periodal será también idéntico: $i_{(m)}$.

El valor inicial de la renta es la suma financiera en 0 de los términos de la misma (véanse figura 4.14 y ecuación 4.7).

Figura 4.14. Esquema de cálculo del valor inicial de una renta inmediata, variable y prepagable

$$\ddot{V}_0 = a_1 + \frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)} + ... + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^{n-1}} \tag{4.7}$$

Ejemplo 4.4

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata prepagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Primero que nada se representa la renta:

200	300	350	400		Frec
0	1	2	3	4	12

Nótese que se trata de una renta similar a la utilizada en los ejemplos 4.1 a 4.3. La única diferencia radica en que en estos ejemplos la renta era pospagable, mientras que en el presente ejemplo es prepagable.

De los ejemplos 4.1 a 4.3 se sabe que el tipo de interés mensual es 0,004074, por lo que el valor inicial de la renta será:

$$\ddot{V}_0 = 200 + \frac{300}{\left(1+0{,}004074\right)} + \frac{350}{\left(1+0{,}004074\right)^3} + \frac{400}{\left(1+0{,}004074\right)^3} = 1.241{,}10 \text{ u.m.}$$

Si en la ecuación (4.7) se dividen ambos términos de la igualdad entre $\left(1+i_{(m)}\right)$ se obtiene:

$$\frac{\ddot{V}_0}{\left(1+i_{(m)}\right)}=\frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)}+\frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^2}+.....+\frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

Como puede verse, el lado derecho de la igualdad en la ecuación resultante corresponde al valor inicial de una renta inmediata y pospagable que se ha denominado V_0 (véase ecuación 4.3). Por ello pueden establecerse las siguientes relaciones entre el valor inicial de una renta prepagable y el de su correspondiente pospagable (4.8) y (4.9):

$$\frac{\ddot{V}_0}{\left(1+i_{(m)}\right)}=V_0 \tag{4.8}$$

$$\ddot{V}_0=V_0\cdot\left(1+i_{(m)}\right) \tag{4.9}$$

Ejemplo 4.5

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata prepagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 % y se sabe que el valor inicial de una renta idéntica, pero pospagable asciende a 1.236,06 u.m.

La representación de la renta es:

200	300	350	400		Frec
0	1	2	3	4	12

El tipo de interés periodal (mensual) es el mismo de los ejemplos 4.1 a 4.4: 0,004074. Con estos datos, aplicando directamente (4.9) se obtiene:

$$\ddot{V}_0=1.236{,}06\cdot\left(1+0{,}004074\right)=1.241{,}10 \text{ u.m.}$$

que, lógicamente, es el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo 4.4.

Teniendo en cuenta que el valor final de una renta se puede obtener multiplicando su valor inicial por uno más el tipo de interés periodal elevado al número de períodos (véase ecuación 4.6), las relaciones (4.8) y (4.9) pueden hacerse extensivas a los valores finales:

$$V_n=V_0\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^n;\quad \ddot{V}_n=\ddot{V}_0\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^n;\quad \ddot{V}_0=V_0\cdot\left(1+i_{(m)}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow \ddot{V}_n = V_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = V_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

$$\ddot{V}_n = V_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \qquad (4.10)$$

Ejemplo 4.6

Calcúlese el valor final de una renta inmediata prepagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. La renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 % y se sabe que el valor final de una renta idéntica, pero pospagable asciende a 1.256,33 u.m.

La representación de la renta es:

200	300	350	400		Frec
0	1	2	3	4	12

El tipo de interés periodal (mensual) es el mismo de los ejemplos 4.1 a 4.5: 0,004074. Con estos datos, aplicando directamente (4.10) se obtiene:

$$\ddot{V}_4 = 1.256{,}33\left(1+0{,}004074\right) = 1.261{,}45 \text{ u.m.}$$

4.2.3. Valor inicial de una renta diferida

Una renta pospagable, de n términos, diferida r períodos, se puede representar mediante el esquema recogido en la figura 4.15.

		a_1	a_2	a_{n-1}	a_n	Frec
0	r	r+1	r+2	r+n-1	r+n	m

Figura 4.15. Esquema de general de una renta variable pospagable diferida *r* períodos

El valor inicial de esta renta será igual a la suma financiera en 0 de los términos que componen la renta (véase esquema de la figura 4.16).

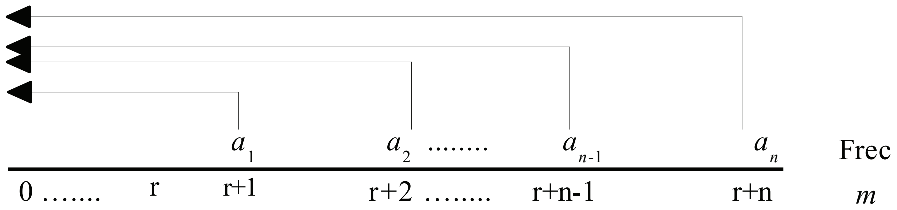


Figura 4.16. Esquema de cálculo del valor inicial de una renta variable pospagable diferida *r* períodos

Si la renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual igual a *i*, su valor inicial se puede calcular directamente a través de la ecuación (4.11).

$$r \diagup V_0 = \frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)^{r+1}} + \frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^{r+2}} + ... + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^{r+n}} \tag{4.11}$$

Ejemplo 4.7

Calcúlese el valor inicial de una renta pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. Se trata de una renta diferida 3 períodos que se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Como se puede apreciar, se trata de la renta del ejemplo 4.1, pero diferida 3 períodos. Su representación gráfica es la siguiente:

		200	300	350	400	Frec
0 …….	3	4	5	6	7	12

El tipo de interés periodal (mensual) es, como se ha visto, 0,004074. Con estos datos el valor inicial de la renta se puede calcular del siguiente modo:

$$3 \diagup V_0 = \frac{200}{\left(1+0{,}004074\right)^4} + \frac{300}{\left(1+0{,}004074\right)^5} + \frac{350}{\left(1+0{,}004074\right)^6} + \frac{400}{\left(1+0{,}004074\right)^7} = 1.221{,}08 \text{ u.m.}$$

En todo caso, lo más habitual en las rentas diferidas es calcular el valor inicial en dos pasos:

- En primer lugar, calcular el valor al inicio del subperíodo en el cual se halla ubicado el primero de los términos de la renta.
- Y en base a ese valor, calcular el valor inicial de la renta.

Este procedimiento de cálculo en dos pasos se puede apreciar fácilmente si, debajo del principal, se traza un eje auxiliar (véase figura 4.17).

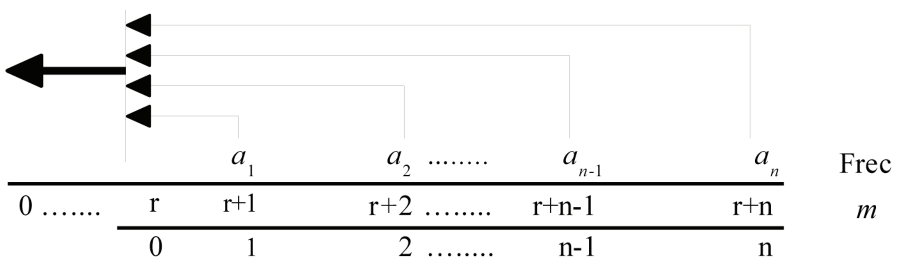


Figura 4.17. Esquema de cálculo en dos etapas del valor inicial de una renta diferida *r* períodos

El valor en el momento r es el valor inicial de una renta inmediata variable y pospagable (véase ecuación 4.3):

$$V_r = \frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + \ldots.. + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

El valor inicial será ese valor en r actualizado al momento 0 (4.12).

$$r \big/ V_0 = \left[\frac{a_1}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{a_2}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + \ldots.. + \frac{a_n}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} \right] \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-r} \qquad (4.12)$$

Nótese que, en la ecuación (4.12), la expresión que aparece entre corchetes es la general de cálculo del valor inicial de una renta pospagable (ecuación 4.3). Por tanto, la ecuación (4.12) se puede reescribir del siguiente modo (4.13):

$$r \big/ V_0 = V_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-r} \qquad (4.13)$$

Ejemplo 4.8

Calcúlese el valor inicial de una renta pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. Se trata de una renta diferida 3 períodos que se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %. Se sabe, además, que el valor inicial de una renta inmediata, pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos son de las cuantías anteriormente mencionadas asciende a 1.236,06 u.m.

La representación de la renta es la siguiente:

		200	300	350	400	Frec
0 …….	3	4	5	6	7	12

La representación de la renta con el eje auxiliar que facilita el cálculo en dos etapas del valor inicial es la siguiente:

		200	300	350	400	Frec
0 …….	3	4	5	6	7	12
	0	1	2	3	4	

El valor de esta renta en el momento 3 (o momento 0 del eje auxiliar) es de 1.236,06 u.m. Descontando este valor al momento inicial se obtiene el valor inicial de la renta:

$$3 \big/ V_0 = 1.236{,}06 \cdot \left(1+0{,}004074\right)^{-3} = 1.221{,}08 \text{ u.m.}$$

resultado que, lógicamente, coincide con el del ejemplo 4.7.

4.2.4. Valor final de una renta anticipada

El procedimiento para calcular el valor final de una renta anticipada es similar al seguido para calcular el valor inicial de una renta diferida: primero se muestra cómo puede calcularse el valor de un modo directo y, a continuación, se detalla el procedimiento para realizar el cálculo en dos etapas.

Una renta pospagable, de *n* términos, anticipada *h* períodos, se puede representar mediante el esquema recogido en la figura 4.18.

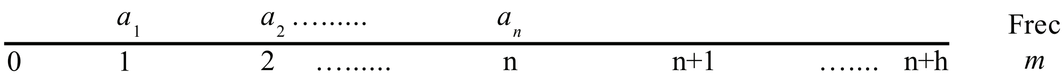


Figura 4.18. Esquema general de una renta anticipada *h* períodos

El valor final de esta renta será igual a la suma financiera en $n + h$ de los términos que componen la renta (véase esquema de la figura 4.19).

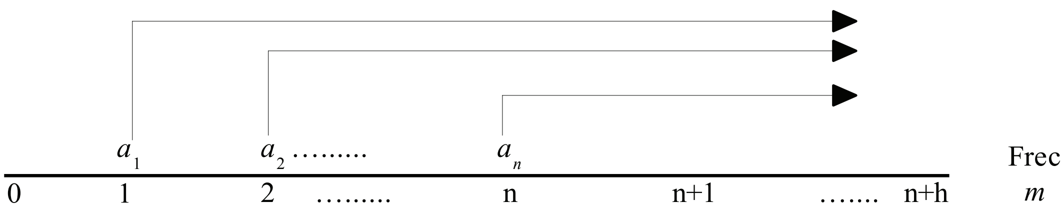


Figura 4.19. Esquema de cálculo del valor final de una renta anticipada *h* períodos

Si la renta se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual igual a *i*, su valor final se puede calcular directamente a través de la ecuación (4.14):

$$V_n \big/ h = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n+h-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n+h-2} + \ldots\ldots + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n+h-n} \qquad (4.14)$$

Recuérdese que para la valoración de la renta debe usarse el tipo de interés periodal $i_{(m)}$.

Ejemplo 4.9

Calcúlese el valor final de una renta pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. Se trata de una renta anticipada 2 períodos que se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Como se puede apreciar, se trata de la renta del ejemplo 4.1, pero anticipada 2 períodos. Su representación gráfica es la siguiente:

	200	300	350	400			*Frec*
0	1	2	3	4	5	6	12

El tipo de interés periodal (mensual) es, como se ha visto, 0,004074. Con estos datos el valor final de la renta se puede calcular del siguiente modo:

$$V_4 \diagup 2 = 200 \cdot (1+0{,}004074)^5 + 300 \cdot (1+0{,}004074)^4 +$$
$$+350 \cdot (1+0{,}004074)^3 + 400 \cdot (1+0{,}004074)^2 = 1.266{,}59 \text{ u.m.}$$

En todo caso, lo más habitual en las rentas anticipadas es calcular el valor final en dos pasos:

- En primer lugar, calcular el valor al final del subperíodo en el cual se halla ubicado el último de los términos de la renta.
- Y en base a ese valor, calcular el valor final de la renta.

Este procedimiento de cálculo en dos pasos se puede apreciar fácilmente en la figura 4.20.

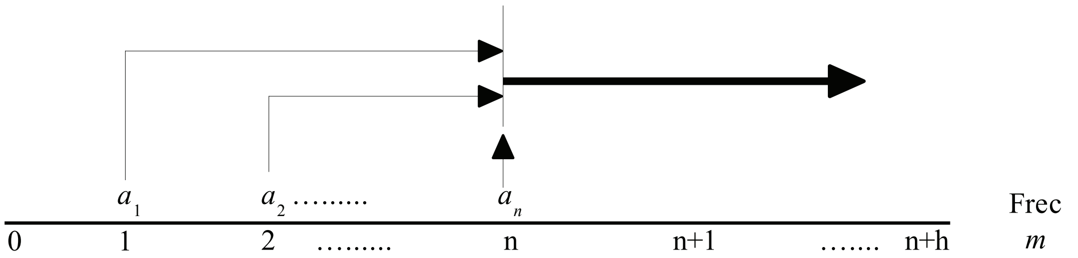


Figura 4.20. Esquema de cálculo en dos etapas del valor final de una renta anticipada *h* períodos

El valor en el momento *n* es el valor final de una renta inmediata variable y pospagable (véanse ecuaciones 4.4 y 4.6):

$$V_n = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-2} + \ldots.. + a_n = V_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n$$

El valor final buscado será ese valor en *n* capitalizado al momento $n + h$ (4.15).

$$V_n \diagup h = \left[a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-2} + \ldots.. + a_n\right] \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^h \qquad (4.15)$$

Nótese que, en la ecuación (4.15), la expresión que aparece entre corchetes es la general de cálculo del valor final de una renta inmediata pospagable (ecuación 4.4). Por tanto, la ecuación (4.15) se puede reescribir del siguiente modo (4.16).

$$V_n \diagup h = V_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^h \qquad (4.16)$$

Ejemplo 4.10

Calcúlese el valor final de una renta pospagable mensual, de 4 períodos en la que los términos tienen las siguientes cuantías (en u.m.): 200, 300, 350, 400. Se trata de una renta anticipada 2 períodos que se valora utilizando la ley financiera de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo anual del 5 %. Se sabe, además, que el valor final de una renta mensual, inmediata, pospagable, con una duración de 4 períodos, cuyos términos tienen las cuantías anteriormente señaladas, asciende a 1.256,33 u.m.

La renta a valorar tiene el siguiente esquema:

	200	300	350	400			Frec
0	1	2	3	4	5	6	12

El tipo de interés periodal usado en la valoración es 0,004074. Como el valor en 4 asciende a 1.256,33 u.m., el valor final de la renta se puede calcular directamente usando (4.16):

$$V_4 \diagup 2 = 1.256,33 \cdot (1 + 0,004074)^2 = 1.266,59 \text{ u.m.}$$

Resultado que, como no podía ser de otro modo, coincide con el del ejemplo 4.9.

4.3. Rentas constantes

Las rentas financieras constantes no son sino un caso particular de las rentas variables. Por tanto, todo lo que se ha visto en el anterior epígrafe sobe rentas variables se puede aplicar a las constantes. No obstante, el hecho de que en estas últimas rentas, los términos sean de idéntica cuantía posibilita que se puedan utilizar expresiones matemáticas más sencillas para su valoración. Al desarrollo y utilización de estas expresiones (que también posibilitarán la valoración de rentas perpetuas) se dedica el presente epígrafe.

4.3.1. Rentas inmediatas

4.3.1.1. Rentas temporales pospagables

La figura 4.21 muestra el esquema general de una renta inmediata, constante y pospagable.

	a	a	….....	a	a	Frec
0	1	2	….....	n-1	n	m

Figura 4.21. Esquema general de una renta constante, inmediata y pospagable

El valor inicial de esta renta se puede calcular utilizando la ecuación (4.3):

$$V_0 = \frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + ... + \frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

Al ser los términos constantes, de la anterior expresión se puede sacar factor común:

$$V_0 = a \cdot \left[\frac{1}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{1}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(1+i_{(m)}\right)^n} \right]$$

O alternativamente:

$$V_0 = a \cdot \left[\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + \left(1+i_{(m)}\right)^{-2} + ... + \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \right]$$

En la anterior expresión, dentro de los corchetes aparece la suma de los *n* términos de una progresión geométrica. Recuérdese que una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, denominada razón.

Puede observarse que los sumandos del interior de los corchetes constituyen una progresión geométrica, ya que cada uno se obtiene multiplicando el anterior por una constante igual a $\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}$.

La suma de los *n* términos de una progresión geométrica se puede calcular a través de la siguiente fracción:

- Numerador: primer término menos último término multiplicado por la razón.
- Denominador: uno menos la razón.

En la suma recogida dentro de los corchetes,

$$\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + \left(1+i_{(m)}\right)^{-2} + ... + \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}$$

- Puede identificarse el primer término de la progresión: $\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}$.
- Puede también identificarse el último término de la progresión: $\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}$.
- Y puede identificase la razón, $\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}$.

En base a ello, la suma anterior se calculará del siguiente modo:

$$\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}+\left(1+i_{(m)}\right)^{-2}+.....+\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}=\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}$$

Partiendo del lado derecho de la anterior igualdad, sacando factor común en numerador y denominador se obtiene:

$$\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}=\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}\cdot\left[1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]}{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}\cdot\left[\left(1+i_{(m)}\right)-1\right]}$$

Simplificando y operando en el denominador:

$$\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}\cdot\left[1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]}{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}\cdot\left[\left(1+i_{(m)}\right)-1\right]}=\frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}}$$

La expresión a la que se ha llegado se suele abreviar utilizando la siguiente nomenclatura (4.17):

$$a_{\overline{n}|i_{(m)}}=\frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \tag{4.17}$$

Por lo tanto, el valor inicial de la renta representada en la figura 4.21 que, con las expresiones generales vistas en el epígrafe anterior, se calculaba con la siguiente ecuación:

$$V_0=\frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)}+\frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)^2}+.....+\frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}=a\cdot\left[\left(1+i_{(m)}\right)^{-1}+\left(1+i_{(m)}\right)^{-2}+.....+\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]$$

Utilizando (4.17) puede calcularse de un modo más sencillo (4.18):

$$V_0=a\cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.11

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, semestral (de 3 períodos), pospagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 100 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 4 %.

La renta queda representada en el siguiente eje temporal:

	100	100	100	Frec
0	1	2	3	2

Nótese que junto al eje se ha situado una leyenda sobre la frecuencia (2), ya que los términos son semestrales. Por lo tanto, el tipo de interés que debe usarse para valorar la renta es el semestral, equivalente al 4 % efectivo anual, del que se dispone como dato:

$$i_{(2)} = \left(1+0{,}04\right)^{1/2} - 1 = 0{,}019804$$

Aplicando (4.17) y (4.18):

$$V_0 = 100 \cdot a_{\overline{3}|0{,}019804} = 100 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}019804\right)^{-3}}{0{,}019804} = 288{,}50 \text{ u.m.}$$

La ecuación (4.17) representa el valor inicial de una renta constante, unitaria, inmediata, pospagable valorada a un tipo de interés periodal de $i_{(m)}$. En efecto, esta renta unitaria se ha representado en la figura 4.22.

	1	1	……..	1	1	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 4.22. Esquema general de una renta unitaria, constante, inmediata y pospagable

Aplicando (4.18) para calcular el valor inicial de la renta de esta figura 4.22 se obtiene:

$$V_0 = 1 \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} = a_{\overline{n}|i_{(m)}}$$

Por este motivo al término $a_{\overline{n}|i_{(m)}}$ se alude como valor actual de una renta inmediata, unitaria, constante, pospagable, valorada a un tipo de interés $i_{(m)}$.

Conocido el valor inicial, el valor final de la renta representada en la figura 4.21 puede obtenerse capitalizando dicho valor inicial hasta el momento final (momento n):

$$V_n = V_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n$$

Si en la anterior ecuación se sustituye el valor inicial por las expresiones recogidas en (4.17) y (4.18) se obtiene:

$$V_n = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n$$

Operando:

$$V_n = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \qquad (4.19)$$

La expresión que multiplica al término constante de la renta para calcular su valor final, se suele abreviar utilizando la siguiente nomenclatura (4.20):

$$s_{\overline{n}|i_{(m)}} = \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \quad s_{\overline{n}|i_{(m)}} \qquad (4.20)$$

Por lo que la ecuación (4.19) se puede reescribir del siguiente modo (4.21):

$$V_n = a \cdot s_{\overline{n}|i_{(m)}} \qquad (4.21)$$

Ejemplo 4.12

Calcúlese el valor final de una renta inmediata, semestral (de 3 períodos), pospagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 100 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 4 %.

La renta queda representada en el siguiente eje temporal:

	100	100	100	Frec
0	1	2	3	2

Se trata de la renta del ejemplo 4.11, por lo que el tipo de interés a usar en su valoración es el semestral calculado en dicho ejemplo: 0,019804.

Sustituyendo los valores en (4.20) y (4.21) se obtiene el valor final de la renta:

$$V_n = 100 \cdot s_{\overline{3}|0,019804} = 100 \cdot \frac{\left(1+0,019804\right)^3 - 1}{0,019804} = 305,98 \text{ u.m.}$$

4.3.1.2. Rentas temporales prepagables

La figura 4.23 muestra el esquema general de una renta inmediata, constante y prepagable.

a	*a*	*a*	….....	*a*		Frec
0	1	2	….....	n-1	n	*m*

Figura 4.23. Esquema general de una renta constante, inmediata y prepagable

La renta de la figura 4.23 es idéntica a la de la figura 4.21 salvo en un aspecto: esta última era pospagable, mientras que la de la figura 4.23 es prepagable. Recuérdese que en el epígrafe anterior, para el caso general de las rentas variables, se ha visto que los valores iniciales y finales de las rentas prepagables estaban relacionados con los de las rentas pospagables (véanse ecuaciones 4.9 y 4.10). Las rentas constantes no son sino un caso particular de las variables, por lo que la relación que se demostró entre prepagables y pospagables para rentas variables es extensible a rentas constantes.

Para valores iniciales la ecuación (4.9) muestra la siguiente relación:

$$\ddot{V}_0 = V_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Sustituyendo V_0 (el valor inicial de la pospagable) por las expresiones (4.17) y (4.18) se obtiene:

$$\ddot{V}_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = a \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \left(1 + i_{(m)}\right)$$

La expresión que multiplica al término de la renta se suele abreviar como $\ddot{a}_{\overline{n}|i_{(m)}}$ (4.22).

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i_{(m)}} = \frac{1 - \left(1 + i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \tag{4.22}$$

Por lo que el cálculo del valor inicial de esta renta prepagable se puede expresar del siguiente modo (4.23):

$$\ddot{V}_0 = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i_{(m)}} \tag{4.23}$$

Por un camino similar al utilizado en las rentas pospagables se puede ver que $\ddot{a}_{\overline{n}|i_{(m)}}$ es el valor inicial de una renta unitaria, constante, inmediata y prepagable.

Ejemplo 4.13

Calcular el valor inicial de una renta inmediata, semestral (de 3 períodos), prepagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 100 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 4 %. Se sabe, demás, que el valor inicial de una renta idéntica pero pospagable asciende a 288,50 u.m.

La representación de la renta es la siguiente:

100	100	100		Frec
0	1	2	3	2

Como puede apreciarse se trata de la misma renta de los ejemplos 4.11 y 4.12, pero prepagable. Teniendo en cuenta que se conoce el valor inicial de la renta pospagable (288,50 u.m.) y el tipo de interés (0,019804), el valor inicial de la prepagable se puede obtener de un modo sencillo:

$$\ddot{V}_0 = 288{,}50 \cdot \left(1 + 0{,}019804\right) = 294{,}21 \text{ u.m.}$$

El cálculo proporciona el mismo resultado si se aplica la ecuación (4.23).

$$\ddot{V}_0 = 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|0{,}019804} = 100 \cdot \frac{1 - \left(1 + 0{,}019804\right)^{-3}}{0{,}019804} \cdot \left(1 + 0{,}019804\right) = 294{,}21 \text{ u.m.}$$

El valor final de una renta inmediata constante y prepagable se puede calcular capitalizando su valor inicial hasta el final de la renta. En el caso de la renta de la figura 4.23, el valor final se calculará del siguiente modo:

$$\ddot{V}_n = \ddot{V}_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^n = a \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \left(1 + i_{(m)}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

Operando:

$$\ddot{V}_n = a \cdot \frac{\left(1 + i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Los factores que multiplican al término de la renta se suelen abreviar como $\ddot{s}_{\overline{n}|i_{(m)}}$ (4.24).

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i_{(m)}} = \frac{\left(1 + i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \tag{4.24}$$

Por lo que el procedimiento de cálculo del valor final de la renta se suele expresar de la siguiente manera (4.25).

$$\ddot{V}_n = a \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i_{(m)}} \tag{4.25}$$

Ejemplo 4.14

Calcúlese el valor final de una renta inmediata, semestral (de 3 períodos), prepagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 100 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 4 %. Se sabe, además, que el valor inicial de esta renta asciende a 294,21 u.m. y que el valor final de una renta idéntica pero pospagable asciende a 305,98 u.m.

Se trata de la renta del ejemplo 4.13 cuya representación es la siguiente:

100	100	100		Frec
0	1	2	3	2

La renta se diferencia de la de los ejemplos 4.11 y 4.12 en que, en ellos, es pospagable, mientras que la del presente ejemplo es prepagable.

Con los datos de los que se dispone, el valor final se puede calcular por varias vías.

La más sencilla quizá es utilizando el valor final de una renta idéntica pero prepagable:

$$\ddot{V}_3 = 305{,}98 \cdot \left(1 + 0{,}019804\right) = 312{,}04 \text{ u.m.}$$

La segunda posibilidad es calcular el valor final de la renta a partir de su valor inicial:

$$\ddot{V}_3 = 294{,}21 \cdot \left(1 + 0{,}019804\right)^3 = 312{,}04 \text{ u.m.}$$

Finalmente, también se puede calcular el valor final usando la expresión general para rentas prepagables:

$$\ddot{V}_3 = 100 \cdot \frac{\left(1 + 0{,}019804\right)^3 - 1}{0{,}019804}\left(1 + 0{,}019804\right) = 312{,}04 \text{ u.m.}$$

4.3.1.3. Rentas perpetuas pospagables y prepagables

El esquema general de una renta perpetua pospagable se muestra en la figura 4.24.

	a	*a*	….....	Frec
0	1	2	….....	*m*

Figura 4.24. Esquema general de una renta constante, inmediata, pospagable y perpetua

En una renta perpetua, lógicamente, no se puede calcular el valor final. Solo tiene sentido calcular el valor inicial. En esta renta perpetua, el número de términos tiende a infinito, por lo que su valor inicial debe calcularse como el límite, cuando *n* tiende a infinito, del valor inicial de una renta temporal:

$$V_0 = a_{\overline{\infty}|i_{(m)}} = \lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|i_{(m)}}$$

Desarrollando:

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} = a \cdot \frac{1}{i_{(m)}}$$

Por tanto, el valor inicial de una renta pospagable y perpetua se puede expresar del siguiente modo:

$$V_0 = a \cdot \frac{1}{i_{(m)}} \tag{4.26}$$

Ejemplo 4.15

Calcular el valor inicial de una renta inmediata, trimestral, perpetua, pospagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 50 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 6 %.

La renta se puede representar en el siguiente esquema:

	50	50	…......	Frec
0	1	2	…......	4

La periodicidad de los pagos es trimestral, por lo que el tipo de interés relevante para calcular el valor inicial de la renta es el trimestral. Aplicando la ecuación de equivalencia de tantos se obtiene este tipo interés:

$$i_{(4)} = \left(1+0{,}06\right)^{1/4} - 1 = 0{,}014674$$

Aplicando (4.26) calculamos el valor inicial de la renta:

$$V_0 = 50 \cdot \frac{1}{0{,}014674} = 3.407{,}39 \text{ u.m.}$$

El esquema general para una renta perpetua constante pero prepagable es el que muestra la figura 4.25.

a	a	a	…......	Frec
0	1	2	…......	m

Figura 4.25. Esquema general de una renta constante, inmediata, prepagable y perpetua

Teniendo en cuenta las relaciones que se han visto anteriormente entre rentas prepagables y pospagables (ecuación 4.9), el valor inicial de la renta prepagable se puede obtener multiplicando el de la pospagable por uno más el tipo de interés.

$$\ddot{V}_0 = V_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Sustituyendo (4.27):

$$V_0 = a \cdot \frac{\left(1 + i_{(m)}\right)}{i_{(m)}} \tag{4.27}$$

Ejemplo 4.16

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, trimestral, perpetua, prepagable y constante, cuyos términos tienen una cuantía de 50 u.m. Para valorar esta renta se utiliza un tipo de interés efectivo anual del 6 %.

La renta se puede representar en el siguiente esquema:

50	50	50	….....	Frec
0	1	2	….....	4

El tipo de interés trimestral se ha calculado en el ejemplo 4.15 y es de 0,014674. Aplicando (4.27) el valor de la renta asciende a:

$$V_0 = 50 \cdot \frac{\left(1 + 0{,}014674\right)}{0{,}014674} = 3.457{,}39 \text{ u.m.}$$

4.3.2. Rentas anticipadas y diferidas

Como se vio en el epígrafe dedicado a las rentas variables, lo relevante o diferente en el caso de las rentas diferidas es el cálculo de su valor inicial, mientras que en el caso de las anticipadas lo es el cálculo de su valor final. En ambos casos se vio que dichos cálculos podían abordarse directamente o mediante un proceso divido en dos etapas. Va a ser este último proceso el que utilizará para las rentas constantes.

Comencemos por las diferidas. En la figura 4.26 se ha representado el esquema general de una de estas rentas (concretamente una pospagable).

		a	*a* ….....	*a*	*a*	Frec
0 …….	r	r+1	r+2 ….....	r+n-1	r+n	*m*

Figura 4.26. Esquema general de una renta constante, diferida *r* períodos y pospagable

El proceso de cálculo en dos etapas del valor inicial de esta renta se muestra en la figura 4.27.

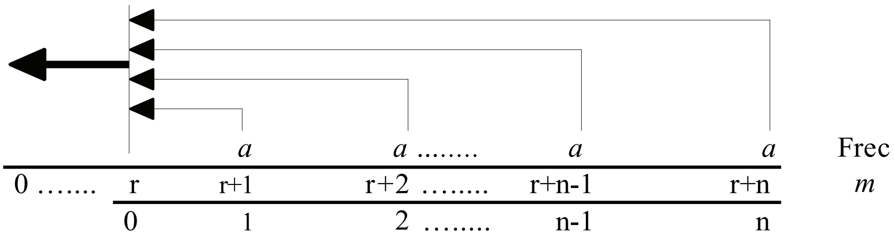


Figura 4.27. Esquema de cálculo en dos etapas del valor inicial de una renta diferida

Las dos etapas que muestra la figura 4.27 consisten en lo siguiente:

- En la primera etapa se calcula el valor de la renta en el momento *r*.
- A partir de este valor, en la segunda etapa se calcula el valor de la renta en el momento 0 (valor inicial de la renta).

El eje auxiliar situado debajo del eje temporal de la renta nos permite ver, de un modo sencillo, que el valor de la renta en *r* es igual al valor inicial de una renta constante, inmediata y pospagable:

$$V_r = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}}$$

El valor inicial de la renta se obtendrá descontando este valor al momento inicial (4.28).

$$r \diagup V_0 = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-r} \qquad (4.28)$$

Ejemplo 4.17

Calcúlese el valor inicial de una renta cuatrimestral, pospagable, con 4 términos constantes de 40 u.m., diferida 3 períodos, si se valora con un tipo de interés efectivo anual del 4 %.

La renta se puede representar a través del siguiente esquema temporal.

		40	40	40	40	Frec
0	3	4	5	6	7	3

Junto al eje se ha situado la periodicidad de los términos: 3 en este caso, pues el año tiene 3 cuatrimestres. El tipo de interés para valorar la renta es, por tanto, el cuatrimestral:

$$i_{(3)} = \left(1+0{,}04\right)^{(1/3)} - 1 = 0{,}013159$$

Para valorar las rentas diferidas es conveniente dibujar un eje auxiliar:

		40	40	40	40	Frec
0 …….	3	4	5	6	7	3
	0	1	2	3	4	

Este eje nos permite ver que el valor de la renta en el momento 3 es igual al valor inicial de una renta inmediata constante y pospagable:

$$V_3 = a \cdot a_{\overline{4|}0,013159} = 40 \cdot \frac{1-\left(1+0,013159\right)^{-4}}{0,013159} = 154,87 \text{ u.m.}$$

El valor inicial buscado se obtiene descontando al momento 0 ese valor del momento 3:

$$3 \big/ V_0 = 154,87 \cdot \left(1+0,013159\right)^{-3} = 148,91$$

Por lo que respecta a las rentas anticipadas, su esquema general se recoge en la figura 4.28.

	a	*a* ……...		*a*			Frec
0	1	2	……...	n	n+1	……. n+h	*m*

Figura 4.28. Esquema general de una renta constante, anticipada *h* períodos y pospagable

El proceso de cálculo en dos etapas del valor inicial de esta renta se muestra en el figura 4.29.

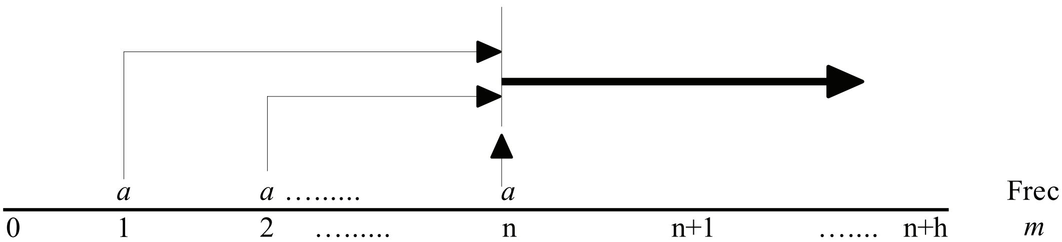


Figura 4.29. Esquema de cálculo en dos etapas del valor final de una renta anticipada

Tal y como se puede apreciar en este esquema, en una primera etapa se calcula el valor de la renta en *n*. En la segunda, este valor se capitaliza hasta el momento final *n* + *h*.

El valor en *n* es igual al valor final de una renta inmediata, constante y pospagable:

$$V_n = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}}$$

Capitalizando este valor hasta *n* + *h* se obtiene el valor final de la renta (4.28):

$$V_n \diagup h = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^h \qquad (4.28)$$

Ejemplo 4.18

Calcúlese el valor final de una renta trimestral, con 3 términos constantes de 37 u.m., anticipada dos períodos, si se valora con un tipo de interés efectivo anual del 4 %.

El esquema de la renta es el siguiente:

	37	37	37			Frec
0	1	2	3	4	5	4

El tipo de interés relevante es el trimestral:

$$i_{(4)} = \left(1+0{,}04\right)^{(1/4)} - 1 = 0{,}009853$$

Aplicando (4.28) obtenemos el valor final de la renta:

$$V_3 \diagup 2 = 37 \cdot \frac{\left(1+0{,}009853\right)^3 - 1}{0{,}009853} \cdot \left(1+0{,}009853\right)^2 = 114{,}32 \text{ u.m.}$$

Anexo
Capítulo 4. Rentas variables en progresión geométrica y rentas variables en progresión aritmética

A.4.1. Rentas variables en progresión geométrica

Se trata de rentas variables en las que los términos siguen una progresión geométrica. Esto es, cada término se obtiene mulitplicando el anterior por una constante (*k*) denominada razón de la progresión (véase figura A4.1).

	a	$k\ a$	….....	$k^{n-2}\ a$	$k^{n-1}\ a$	Frec
0	1	2	….....	n-1	n	m

Figura A4.1. Esquema general de una renta pospagable creciente en progresión geométrica

El valor inicial de esta renta será igual a la suma financiera en 0 de los términos de la renta:

$$V_0 = \frac{a}{\left(1+i_{(m)}\right)} + \frac{k \cdot a}{\left(1+i_{(m)}\right)^2} + ... + \frac{k^{n-2} \cdot a}{\left(1+i_{(m)}\right)^{n-1}} + \frac{k^{n-1} \cdot a}{\left(1+i_{(m)}\right)^n}$$

Sacando factor común:

$$V_0 = a\left[\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-2} + ... + k^{n-2} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-1)} + k^{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]$$

En la anterior ecuación, dentro de los corchetes aparece la suma de los *n* términos de una progresión geométrica de razón $k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}$. En efecto, cada sumando (cada término de la progresión geométrica) lo obtenemos multiplicando el precedente por la razón.

Según se ha visto en el apartado dedicado a las rentas constantes, la suma de los *n* términos de una progresión geométrica se puede obtener dividiendo:

- Numerador: el primer término menos el último multiplicado por la razón.
- Denominador: uno menos la razón.

Por tanto, la suma contenida en el interior de los corchetes se puede calcular:

$$\left[\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-2} + ... + k^{n-2} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-1)} + k^{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right] =$$

$$= \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} - k^{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \cdot k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}{1-k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}$$

Operando y sacando factor común:

$$\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} - k^{n-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \cdot k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}}{1-k \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}} = \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} \cdot \left[1-k^{n} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]}{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} \cdot \left[\left(1+i_{(m)}\right)-k\right]}$$

Simplificando:

$$\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} \cdot \left[1-k^{n} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}\right]}{\left(1+i_{(m)}\right)^{-1} \cdot \left[\left(1+i_{(m)}\right)-k\right]} = \frac{1-k^{n} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{1+i_{(m)}-k}$$

Luego el valor inicial de una renta pospagable, creciente en progresión geométrica se calculará como (A4.1):

$$V_0 = a \cdot \frac{1-k^{n} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{1+i_{(m)}-k} \tag{A4.1}$$

Ejemplo A4.1

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual, de 4 términos, creciente en progresión geométrica de razón 1,1, cuyo primer término asciende a 20 u.m. La renta se valora utilizando un tipo de interés efectivo anual del 3 %.

El esquema de la renta es el siguiente:

	20	1,1 20	$1{,}1^2$ 20	$1{,}1^3$ 20	Frec
0	1	2	3	4	12

El tipo de interés relevante es el mensual:

$$i_{(12)} = \left(1+0{,}03\right)^{(1/12)} - 1 = 0{,}002466$$

El primer término de la renta asciende a 20 u.m. El último a 26,62 u.m. ($1{,}1^3$ 20)

Por tanto, el valor inicial de la renta será:

$$V_0 = 20 \cdot \frac{1-1,1^4 \cdot \left(1+0,002466\right)^{-4}}{1+0,002466-1,1} = 92,22 \text{ u.m.}$$

El valor inicial de una renta creciente en progresión geométrica pero prepagable se obtendrá multiplicando el de la correspondiente renta pospagable por $\left(1+i_{(m)}\right)$.

Por su parte, los valores finales de la rentas crecientes en progresión geométrica (pospagables y prepagables) se obtendrán mutiplicando los correspondientes valores iniciales por $\left(1+i_{(m)}\right)^n$.

Un caso interesante de las rentas crecientes en progresión geométrica es el de las rentas perpetuas.

Una renta perpetua, pospagable, creciente en progresión geométrica sería la siguiente (figura A4.2):

	a	$k\ a$	$k^2\ a$	….....	Frec
0	1	2	3	….....	m

Figura A4.2. Esquema general de una renta pospagable, perpetua, creciente en progresión geométrica

El valor inicial de esta renta deberá calcularse de acuerdo con la siguiente expresión:

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \cdot k^n}{1+i_{(m)}-k}$$

El anterior límite solo tendrá una solución finita en caso de que k sea menor que $(1+i_{(m)})$, en ese caso el numerador tenderá a 1 (el denominador no depende de n):

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \cdot k^n}{1+i_{(m)}-k} = a \cdot \frac{1}{1+i_{(m)}-k} \quad sii \;\; k < \left(1+i_{(m)}\right)$$

Por tanto, el valor inicial de una renta pospagable, perpetua, creciente en progresión geométrica será (A4.2):

$$V_0 = a \cdot \frac{1}{1+i_{(m)}-k} \quad sii \;\; k < \left(1+i_{(m)}\right) \qquad \text{(A4.2)}$$

Ejemplo A4.2

Calcúlese el valor inicial de una renta semestral, perpetua, creciente en progresión geométrica de razón 1,01, cuyo primer término asciende a 15 u.m. La renta se valora utilizando un tipo de interés efectivo anual del 10 %.

La representación de la renta es la siguiente:

	15	1,01 15	$1{,}01^2$ 15	…..	Frec
0	1	2	3	…..	2

El tipo de interés relevante es el semestral:

$$i_{(2)} = \left(1+0{,}1\right)^{(1/2)} - 1 = 0{,}048809$$

Antes de proceder al cálculo del valor inicial debe comprobarse si se cumple la condición:

$$k < (1+i_{(m)})$$

$$k = 1{,}01;\ (1+i_{(m)}) = 1{,}048809$$

La condición se cumple, luego se puede aplicar (A4.2):

$$V_0 = 15 \cdot \frac{1}{1+0{,}048809-1{,}01} = 386{,}51 \text{ u.m.}$$

El valor inicial de la renta prepagable, perpetua, creciente en progresión geométrica se obtendrá multiplicando el valor inicial de la correspondiente renta pospagable por $(1+i_{(m)})$.

A.4.2. Rentas variables en progresión aritmética

Se trata de rentas variables en las que los términos siguen una progresión aritmética. Esto es, cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante (d) denominada razón de la progresión (véase figura A4.3).

	a	$a+d$	……..	$a+(n\text{-}2)\ d$	$a+(n\text{-}1)\ d$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

Figura A4.3. Esquema general de una renta pospagable creciente en progresión aritmética

La anterior renta se puede descomponer en la suma aritmética de las siguientes rentas constantes (una de ellas inmediata y las otras diferidas):

	a	*a*	……..	*a*	*a*	Frec	Renta 0
0	1	2	……..	n-1	n	*m*	
		d	……..	*d*	*d*	Frec	Renta 1
0	1	2	……..	n-1	n	*m*	
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
			……..	*d*	*d*	Frec	Renta n-2
0	1	2	……..	n-1	n	*m*	
			……..		*d*	Frec	Renta n-1
0	1	2	……..	n-1	n	*m*	

Por lo que el valor inicial de la renta recogida en la figura A4.3 será igual a la suma aritmética de los valores iniciales de la rentas anteriormente mencionadas.

$$V_0 = V_0^{(0)} + V_0^{(1)} + ... + V_0^{(n-1)}$$

La primera de las rentas (renta 0) es una renta constante, de *n* períodos, inmediata y pospagable, por lo que su valor inicial será:

$$V_0^{(0)} = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}}$$

La segunda de las rentas (renta 1) es una renta de constante, de *n*-1 períodos, diferida 1 período y pospagable, por lo que su valor inicial será:

$$V_0^{(1)} = d \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-1)}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1}$$

....

La penúltima de las rentas (renta *n*-2) es una renta de constante, de 2 períodos (*n*-(*n*-2)), diferida (*n*-2) períodos y pospagable, por lo que su valor inicial será:

$$V_0^{(n-2)} = d \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-(n-2))}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-2)}$$

Y la última de las rentas (renta *n*-1) es una renta de constante, de 1 período (*n*-(*n*-1)), diferida (*n*-1) períodos y pospagable, por lo que su valor inicial será:

$$V_0^{(n-1)} = d \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-(n-1))}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-1)}$$

A continuación se realiza el siguiente cambio de variable: en todas excepto en la primera renta:

$$\omega = \left(1 + i_{(m)}\right)^{-1}$$

Por tanto:

$$\omega^2 = \left(1 + i_{(m)}\right)^{-2} \;.....\; \omega^{n-2} = \left(1 + i_{(m)}\right)^{-(n-2)} \text{ y } \omega^{n-1} = \left(1 + i_{(m)}\right)^{-(n-1)}$$

Con este cambio de variable el valor de las anteriores rentas quedará:

$$V_0^{(1)} = d \cdot \frac{1 - \omega^{(n-1)}}{i_{(m)}} \cdot \omega = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\left(1 - \omega^{(n-1)}\right) \cdot \omega\right] = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega - \omega^n\right]$$

$$......$$

$$V_0^{(n-2)} = d \cdot \frac{1 - \omega^{(n-(n-2))}}{i_{(m)}} \cdot \omega^{(n-2)} = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\left(1 - \omega^{(n-(n-2))}\right) \cdot \omega^{(n-2)}\right] = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega^{(n-2)} - \omega^n\right]$$

$$V_0^{(n-1)} = d \cdot \frac{1 - \omega^{(n-(n-1))}}{i_{(m)}} \cdot \omega^{(n-1)} = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\left(1 - \omega^{(n-(n-1))}\right) \cdot \omega^{(n-1)}\right] = \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega^{(n-1)} - \omega^n\right]$$

Se puede reescribir, por tanto, el valor inicial de la renta de la figura A4.3 del siguiente modo:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega - \omega^n\right] + ... + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega^{(n-2)} - \omega^n\right] + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega^{(n-1)} - \omega^n\right]$$

Sacando factor común:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega - \omega^n + ... + \omega^{(n-2)} - \omega^n + \omega^{(n-1)} - \omega^n\right]$$

Reordenando los sumandos del interior de los corchetes y operando:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega + ... + \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} - (n-1) \cdot \omega^n\right]$$

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega + ... + \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} - (n-1) \cdot \omega^n + \omega^n - \omega^n\right]$$

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\omega + ... + \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} - n \cdot \omega^n + \omega^n\right]$$

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[\left(\omega + ... + \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} + \omega^n\right) - n \cdot \omega^n\right]$$

Si ahora se deshace el cambio de variable realizado anteriormente, dentro de los corchetes, los sumandos que aparecen ente paréntesis, proporcionan el siguiente resultado:

$$\left(\omega + ... + \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} + \omega^{n}\right) = \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-1)} + \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} = a_{\overline{n}|i_{(m)}}$$

Y, por tanto, el valor inicial de la renta quedará del siguiente modo:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot \left[a_{\overline{n}|i_{(m)}} - n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \right]$$

Operando:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} - n \cdot d \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}}$$

Si, en el lado derecho de la anterior igualdad, sumamos y restamos un mismo importe, la igualdad no se altera:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} - n \cdot d \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} + \frac{n \cdot d}{i_{(m)}} - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}}$$

Reordenando y operando:

$$V_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + n \cdot d \cdot \left(\frac{1}{i_{(m)}} - \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \right) - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}} =$$

$$= a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + n \cdot d \cdot \left(\frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}} \right) - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}} =$$

$$= a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + \frac{d}{i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} + n \cdot d \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}}$$

Sacando factor común se obtiene la expresión que habitualmente se utiliza para calcular el valor inicial de una renta creciente en progresión aritmética (A4.3):

$$V_0 = a_{\overline{n}|i_{(m)}} \cdot \left(a + \frac{d}{i_{(m)}} + n \cdot d \right) - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}} \qquad \text{(A4.3)}$$

Ejemplo A4.3

Calcular el valor inicial de una renta mensual, de 4 términos, creciente en progresión aritmética de razón 5 u.m., cuyo primer término asciende a 40 u.m. La renta se valora utilizando un tipo de interés efectivo anual del 4 %.

El esquema de la renta es el siguiente:

	40	40 + 5	40 + 5 x 2	40 + 5 x 3	Frec
0	1	2	3	4	12

El tipo de interés a usar será el mensual, calculado del siguiente modo:

$$i_{(12)} = \left(1+0{,}04\right)^{(1/12)} - 1 = 0{,}003274$$

El valor inicial de la renta será:

$$V_0 = \frac{1-\left(1+0{,}003274\right)^{-4}}{0{,}003274} \cdot \left(40 + \frac{5}{0{,}003274} + 4\cdot 5\right) - \frac{4\cdot 5}{0{,}003274} = 188{,}37 \text{ u.m.}$$

Para calcular el valor final de una renta creciente en progresión aritmética, se tomará el valor inicial y se multiplicará por uno más el tipo de interés periodal elevado al número de períodos. Y para calcular el valor inicial (o final) de una renta prepagable se tomará el valor inicial (o final) de la correspondiente renta pospagable y se multiplicará por uno más el tipo de interés periodal. Es decir, se procederá como en el resto de rentas financieras.

A.4.3. Rentas fraccionadas

Dentro de las rentas variables, un grupo singular lo constituyen aquellas rentas fraccionadas en las que los términos, dentro de un mismo año permanecen constantes, aunque varían de un año a otro. El esquema general de este tipo de rentas sería el recogido en la figura A4.4.

	a_1	…..	a_1	a_2	…..	a_2	…..	a_n	a_n	Frec
0	1	…..	m	m+1	…..	2m	…..	n-1	n	*m*
	Año		1	Año		2		Año n/m		

Figura A4.4. Esquema general de una renta pospagable fraccionada en la que los términos son constantes dentro de un mismo año y varían entre un año y otro

Teniendo en cuenta que dentro de cada año los términos son constantes, se puede establecer lo siguiente:

$$a_1 = \frac{Q_1}{m};\ a_2 = \frac{Q_2}{m};\ldots;\ a_n = \frac{Q_n}{m}$$

Q_j es la suma aritmética de los términos de la renta del año j.

El cálculo del valor inicial de la renta de la figura A4.4, se realiza en dos etapas:

- En la primera etapa se calcula la suma financiera al final de cada uno de los años de los términos de la renta pertenecientes a dicho año:

  – Año 1: $a_1 \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} = \frac{Q_1}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}}$

  – Año 2: $a_2 \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} = \frac{Q_2}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}}$

  – ...

  – Año n/m: $a_n \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} = \frac{Q_n}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}}$

- En la segunda etapa estos valores se descuentan al momento inicial, utilizando el tipo de interés efectivo anual (téngase en cuenta que, tras la primera etapa, se dispone de un valor monetario al final de cada uno de los años):

$$V_0 = \frac{Q_1}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-1} + \frac{Q_2}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-2} + ... + \frac{Q_n}{m} \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-n/m}$$

Reordenando:

$$V_0 = Q_1 \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{m \cdot i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-1} + Q_2 \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{m \cdot i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-2} + ... + Q_n \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}{m \cdot i_{(m)}} \cdot \left(1+i\right)^{-n/m}$$

Usando las ecuaciones de equivalencia de tantos se pueden realizar las siguientes sustituciones:

$$\left(1+i_{(m)}\right)^m = \left(1+i\right)$$

$$j\left(m\right) = m \cdot i_{(m)}$$

Con lo que el valor inicial de la renta quedaría del siguiente modo:

$$V_0 = Q_1 \cdot \frac{\left(1+i\right) - 1}{j\left(m\right)} \cdot \left(1+i\right)^{-1} + Q_2 \cdot \frac{\left(1+i\right) - 1}{j\left(m\right)} \cdot \left(1+i\right)^{-2} + ... + Q_n \cdot \frac{\left(1+i\right) - 1}{j\left(m\right)} \cdot \left(1+i\right)^{-n/m}$$

Operando en los numeradores de la anterior fracción:

$$V_0 = Q_1 \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot (1+i)^{-1} + Q_2 \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot (1+i)^{-2} + ... + Q_n \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot (1+i)^{-n/m}$$

Sacando factor común se obtiene (A4.4):

$$V_0 = \frac{i}{j(m)} \cdot \left[Q_1 \cdot (1+i)^{-1} + Q_2 \cdot (1+i)^{-2} + ... + Q_n \cdot (1+i)^{-n/m} \right] \qquad \text{(A4.4)}$$

En la anterior expresión, los sumandos incluidos dentro de los corchetes nos proporcionan el valor inicial de la siguiente renta (figura A4.5):

	Q_1	Q_2	……..	$Q_{n\text{-}1}$	Q_n	Frec
0	1	2	……..	n-1	n/m	1

Figura A4.5. Esquema general de una renta pospagable anual en la que cada término es igual a la suma aritmética de los términos, del correspondiente año, de la renta fraccionada

Esto es, una renta anual pospagable, variable en la que el valor de cada uno de los términos es igual a la suma aritmética de los términos de la renta de la figura A4.4 del correspondiente año.

$$Q_1 = m \cdot a_1;\ Q_2 = m \cdot a_2; ...;\ Q_n = m \cdot a_n$$

El valor inicial de esta última renta (que denominaremos renta auxiliar) es:

$$V_0^{aux} = Q_1 \cdot (1+i)^{-1} + Q_2 \cdot (1+i)^{-2} + ... + Q_n \cdot (1+i)^{-n/m}$$

Si este valor lo multiplicamos por el tipo de interés efectivo anual y lo dividimos por el tipo de interés nominal, obtenemos el valor inicial de la renta fraccionada, de la figura A4.4 (véanse ecuaciones A4.4 y A4.5):

$$V_0 = V_0^{aux} \cdot \frac{i}{j(m)} \qquad \text{(A4.5)}$$

La anterior expresión es válida para cualquier renta fraccionada en la que los términos sean constantes dentro de un mismo año pero varíen año a año. Ahora bien, donde resulta especialmente útil esta expresión (A4.5) es en aquellas rentas en las que la variación de año en año se produce bien en progresión geométrica, bien en progresión aritmética.

En efecto, tómese el caso, por ejemplo, de una renta fraccionada, en la que los términos dentro de un mismo año son constantes, pero en la que, de un año a otro los términos crecen en progresión geométrica (véase figura A4.6):

	a	…..	a	$k\ a$	…..	$k\ a$	…..	$k^{\frac{n}{m}-1}\ a$	$k^{\frac{n}{m}-1}\ a$	Frec
0	1	…..	m	m+1	…..	2m	…..	n-1	n	m
	Año		1	Año		2		Año n/m		

Figura A4.6. Esquema general de una renta pospagable fraccionada en la que los términos son constantes dentro de un mismo año y varían en progresión geométrica entre un año y otro.

La que se ha denominado renta auxiliar quedaría representada por el siguiente esquema (figura A4.7)

	$m\ a$	$k\ m\ a$	….....	$k^{\frac{n}{m}-2}\ m\ a$	$k^{\frac{n}{m}-1}\ m\ a$	Frec
0	1	2	….....	n-1	n/m	1

Figura A4.7. Esquema general de una renta pospagable anual en la que cada término es igual a la suma aritmética de los términos, del correspondiente año, de la renta fraccionada. Los términos anuales crecen en progresión geométrica

Como se puede apreciar en esta figura A4.7:

$$Q_1 = m \cdot a;\ Q_2 = k \cdot m \cdot a; \ldots;\ Q_n = k^{\frac{n}{m}-1} \cdot m \cdot a$$

Esto es, los términos de la renta auxiliar crecen en progresión geométrica de razón k. Por lo que el valor inicial de esa renta auxiliar será:

$$V_0^{aux} = m \cdot a \cdot \frac{1 - k^{n/m} \cdot (1+i)^{-n/m}}{1+i-k}$$

Por tanto, el valor inicial de la renta fraccionada (de acuerdo con A4.5) será (véase ecuación A4.6):

$$V_0 = m \cdot a \cdot \frac{1 - k^{n/m} \cdot (1+i)^{-n/m}}{1+i-k} \cdot \frac{i}{j(m)} \tag{A4.6}$$

Ejemplo A4.4

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual de 5 años de duración en la que los términos mensuales son constantes dentro del mismo año, pero varían en progresión geométrica de razón 1,1 de un año al siguiente. El término mensual del primero de los años asciende a 20 u.m. y la renta se valora con un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Antes de nada se procede a la representación gráfica de la renta:

	20	…..	20	1,1 20	…..	1,1 20	…..	$1{,}1^4$ 20	$1{,}1^4$ 20	Frec
0	1	…..	12	13	…..	24	…..	59	60	12
	Año		1	Año		2		Año 5		

$$Q_1 = 12 \cdot 20 = 240;\ Q_2 = 1{,}1 \cdot 240;\ldots;\ Q_5 = 1{,}1^4 \cdot 240$$

Luego la renta auxiliar será:

	240	1,1 240	$1{,}1^2$ 240	$1{,}1^3$ 240	$1{,}1^4$ 240	Frec
0	1	2	3	4	5	1

El tipo de interés nominal anual se calculará a partir del mensual:

$$i_{(12)} = \left(1+0{,}05\right)^{1/12} - 1 = 0{,}004074$$

$$j\left(12\right) = 0{,}004074 \cdot 12 = 0{,}048888$$

Con estos datos ya se puede calcular el valor inicial de la renta fraccionada:

$$V_0 = 240 \cdot \frac{1-1{,}1^5 \cdot \left(1+0{,}05\right)^{-5}}{1+0{,}05-1{,}1} \cdot \frac{0{,}05}{0{,}048888} = 1.285{,}60 \text{ u.m.}$$

Dentro de las fraccionadas, el caso de las rentas crecientes en progresión aritmética es similar al de las crecientes en progresión geométrica. Tómese el caso de una renta fraccionada, en la que los términos dentro de un mismo año son constantes, pero en la que, de un año a otro los términos crecen en progresión aritmética (véase figura A4.8):

	a	…..	a	$a+d$	…..	$a+d$	…..	$a+\left(\frac{n}{m}-1\right)d$	$a+\left(\frac{n}{m}-1\right)d$	Frec
0	1	…..	m	m+1	…..	2m	…..	n-1	n	m
	Año		1	Año		2		Año n/m		

Figura A4.8. Esquema general de una renta pospagable fraccionada en la que los términos son constantes dentro de un mismo año y varían en progresión aritmética entre un año y otro

La que se ha denominado renta auxiliar quedaría representada por el siguiente esquema (figura A4.9):

	$m\,a$	$m\,a + m\,d$	…….	$m\,a+\left(\frac{n}{m}-2\right)m\,d$	$m\,a+\left(\frac{n}{m}-1\right)m\,d$	Frec
0	1	2	……..	(n/m)-1	n/m	1

Figura A4.9. Esquema general de una renta pospagable anual en la que cada término es igual a la suma aritmética de los términos, del correspondiente año, de la renta fraccionada. Los términos anuales crecen en progresión aritmética

Como se puede apreciar en esta figura A4.9:

$$Q_1 = m \cdot a;\ Q_2 = m \cdot a + m \cdot d; \ldots;\ Q_{\frac{n}{m}} = m \cdot a + (n-1) \cdot m \cdot d$$

Esto es, los términos de la renta auxiliar crecen en progresión aritmética de razón *m d*. Por lo que el valor inicial de esa renta auxiliar será:

$$V_0^{aux} = a_{\overline{n/m}|i} \cdot \left(m \cdot a + \frac{m \cdot d}{i} + \frac{n}{m} \cdot m \cdot d \right) - \frac{\frac{n}{m} \cdot m \cdot d}{i}$$

Por tanto, el valor inicial de la renta fraccionada (de acuerdo con A4.5) será (véase ecuación A4.7):

$$V_0 = \left[a_{\overline{n/m}|i} \cdot \left(m \cdot a + \frac{m \cdot d}{i} + \frac{n}{m} \cdot m \cdot d \right) - \frac{\frac{n}{m} \cdot m \cdot d}{i} \right] \cdot \frac{i}{j(m)} \qquad \text{(A4.7)}$$

Ejemplo A4.5

Calcúlese el valor inicial de una renta trimestral de 3 años de duración en la que los términos trimestrales son constantes dentro del mismo año, pero varían en progresión aritmética de razón 10 u.m. de un año al siguiente. El término trimestral del primero de los años asciende a 40 u.m. y la renta se valora con un tipo de interés efectivo anual del 6 %.

Primeramente se procede a la representación gráfica de la renta:

	40	…..	40	' 40 + 10	…..	' 40 + 10	…..	' 40 + 2x10	' 40 + 2x10	Frec
0	1	…..	4	5	…..	8	…..	11	12	4
	Año		1	Año		2		Año 3		

$$Q_1 = 4 \cdot 40 = 160;\ Q_2 = 160 + 4 \cdot 10 = 200;\ Q_3 = 160 + 2 \cdot 4 \cdot 10 = 240$$

Luego la renta auxiliar será:

	160	200	240	Frec
0	1	2	3	1

Se trata de una renta creciente en progresión aritmética de razón 40, cuyo valor inicial es:

$$V_0^{aux} = a_{\overline{3}|0,06} \cdot \left(160 + \frac{40}{0,06} + 3 \cdot 40 \right) - \frac{3 \cdot 40}{0,06} = 530,45 \text{ u.m.}$$

El tipo de interés nominal anual se calculará a partir del tipo trimestral:

$$i_{(4)} = \left(1+0,06\right)^{1/4} - 1 = 0,014674$$

$$j\left(4\right) = 0,0146744 \cdot 4 = 0,058696$$

El valor inicial de la renta fraccionada será, por tanto:

$$V_0 = 530,45 \cdot \frac{0,06}{0,05896} = 542,24 \text{ u.m.}$$

Problemas propuestos

Problema 4.1

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, pospagabe, mensual de 5 términos la cuantía de los cuales es, respectivamente (datos en u.m.): 400, 340, 600, 800, 100. La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Problema 4.2

Calcúlese el valor final de la renta del problema 4.1.

Problema 4.3

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, prepagable, mensual de 5 términos la cuantía de los cuales es, respectivamente (datos en u.m.): 400, 340, 600, 800, 100. La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Problema 4.4

Calcúlese el valor inicial de una renta constante, inmediata, pospagable, trimestral, de 5 años de duración que se valora a un tipo de interés efectivo anual del 3 %. La cuantía del término constante de la renta es de 50 u.m.

Problema 4.5

Calcúlese el valor final de la renta del problema 4.4.

Problema 4.6

Calcúlese el valor inicial de una renta constante, inmediata, prepagable, trimestral, de 5 años de duración que se valora a un tipo de interés efectivo anual del 3 %. La cuantía del término constante de la renta es de 50 u.m.

Problema 4.7

Calcúlese el valor inicial de una renta pospagable, cuatrimestral, de 25 términos constantes de una cuantía igual a 40 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 4 %. La renta está diferida 5 períodos.

Problema 4.8

Calcúlese el valor inicial de una renta prepagable, cuatrimestral, de 25 términos constantes de una cuantía igual a 40 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 4 %. La renta está diferida 5 períodos.

Problema 4.9

Calcúlese el valor final de una renta pospagable, semestral, de 80 términos constantes de una cuantía igual a 10 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 7 %. La renta está anticipada 17 períodos.

Problema 4.10

Calcúlese el valor final de una renta prepagable, semestral, de 80 términos constantes de una cuantía igual a 10 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 7 %. La renta está anticipada 17 períodos.

Problema 4.11

Calcúlese el valor inicial de una renta anual, inmediata, pospagable y perpetua en la que la cuantía de los términos es constante e igual a 5 u.m. La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 10 %.

Problema 4.12

Calcúlese el valor inicial de una renta anual, inmediata, prepagable y perpetua en la que la cuantía de los términos es constante e igual a 5 u.m. La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 10 %.

Problema 4.13

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, pospagable, semestral, de 25 términos que crecen en progresión geométrica de razón 1,02 si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 2,25 %. La cuantía del primero de los términos es de 20 u.m.

Problema 4.14

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, prepagable, semestral, de 25 términos que crecen en progresión geométrica de razón 1,02 si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 2,25 %. La cuantía del primero de los términos es de 20 u.m.

Problema 4.15

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, pospagable, semestral, de 15 términos que crecen en progresión aritmética de razón 3 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 2,45 %. La cuantía del primero de los términos es de 17 u.m.

Problema 4.16

Calcúlese el valor inicial de una renta inmediata, prepagable, semestral, de 15 términos que crecen en progresión aritmética de razón 3 u.m. si se valora a un tipo de interés efectivo anual del 2,45 %. La cuantía del primero de los términos es de 17 u.m.

Problema 4.17

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual, inmediata y pospagable de las siguientes características:

- La renta tiene una duración de 10 años.
- Los términos mensuales pertenecientes a un mismo año son constantes. No obstante, año tras año los términos de la renta crecen en progresión geométrica de razón 1,01.
- Cada uno de los términos mensuales del primero de los años tiene una cuantía igual a 15 u.m.
- La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Problema 4.18

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual, inmediata y prepagable de las siguientes características:

- La renta tiene una duración de 10 años.
- Los términos mensuales pertenecientes a un mismo año son constantes. No obstante, año tras año los términos de la renta crecen en progresión geométrica de razón 1,01.
- Cada uno de los términos mensuales del primero de lo años tiene una cuantía igual a 15 u.m.
- La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 5 %.

Problema 4.19

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual, inmediata y pospagable de las siguientes características:

- La renta tiene una duración de 7 años.
- Los términos mensuales pertenecientes a un mismo año son constantes. No obstante, año tras año los términos de la renta crecen en progresión aritmética de razón 4 u.m.
- Cada uno de los términos mensuales del primero de lo años tiene una cuantía igual a 19 u.m.
- La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 7,5 %.

Problema 4.20

Calcúlese el valor inicial de una renta mensual, inmediata y prepagable de las siguientes características:

- La renta tiene una duración de 7 años.
- Los términos mensuales pertenecientes a un mismo año son constantes. No obstante, año tras año los términos de la renta crecen en progresión aritmética de razón 4 u.m.
- Cada uno de los términos mensuales del primero de lo años tiene una cuantía igual a 19 u.m.
- La renta se valora a un tipo de interés efectivo anual del 7,5 %.

Capítulo 5
Operaciones de constitución

Las operaciones de constitución van encaminadas a la obtención de un capital, al final de un determinado período, mediante la realización de una serie de aportaciones efectuadas dentro del mencionado período. Es habitual que dichas aportaciones se realicen de un modo regular. De este modo, el conjunto de aportaciones constituye una renta y para su análisis y valoración se pueden utilizar los conceptos y técnicas vistos en el capítulo anterior.

En el presente capítulo se introduce el cuadro de constitución y se explica el procedimiento para su elaboración. Asimismo, se analizan las operaciones de constitución en las que las aportaciones son constantes, y se muestra el procedimiento de cálculo de los tipos de interés efectivos, procedimiento especialmente útil cuando el tipo de interés varía a lo largo de la operación. En el anexo, se analizan aquellas operaciones de constitución en las que los términos varían en progresión aritmética y en progresión geométrica.

A pesar de ser operaciones a largo plazo que, normalmente, conllevan un elevado número de desembolsos, a efectos didácticos, los ejemplos mostrados en este capítulo se han simplificado, mostrándose operaciones sencillas, con pocos desembolsos.

5.1. Concepto

La finalidad de una operación de constitución es la obtención de un capital financiero, de una determinada cuantía, a través de la realización de una serie de imposiciones que habitualmente se realizan de un modo regular. La cuantía del capital financiero mencionado vendrá dada por la de las imposiciones realizadas más los intereses generados por dichas imposiciones.

Un plan de jubilación es un ejemplo de operación de constitución. Dentro de un plan de jubilación se van haciendo aportaciones periódicas que, junto con los intereses que dichas aportaciones generen, se recuperarán en un momento posterior (momento de la jubilación).

El esquema general de una operación de constitución se muestra en la figura 5.1.

a_1	a_2	a_3	……..	a_n	$-Q_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

Figura 5.1. Esquema general de una operación de constitución

Tal y como se puede apreciar en esta figura 5.1, se trata de una operación financiera compuesta en la que la prestación es múltiple y la contraprestación única. En efecto, la prestación está constituida por las imposiciones o aportaciones (en general prepagables) realizadas por una de las partes (a_1, a_2,..., a_n). A estas imposiciones se les denomina términos constitutivos, mientras que la contraprestación viene dada por el capital constituido que se consigue al final de la operación y que aporta la otra de las partes: Q_n.

El origen de la operación coincide con el vencimiento del primero de los capitales de la prestación (con el primero de los términos constitutivos). Y el final de la operación es el vencimiento del capital constituido.

Como en toda operación financiera, en una operación de constitución se debe cumplir que los capitales de la prestación deben ser financieramente equivalentes a los de la contraprestación, en base al tipo de interés periodal pactado. Aunque la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación puede plantearse en cualquier momento del tiempo, en las operaciones de constitución, por simplicidad, esta equivalencia habitualmente se establece en el momento final de la operación (5.1):

$$Q_n = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1

Sea una operación de constitución de 4 meses de duración. La cuantía de los 4 términos constitutivos mensuales (prepagables) es de 200, 300, 350 y 400 u.m. El capital constituido al final de la operación asciende a 1.275 u.m. Determinar el tipo de interés efectivo anual que se ha pactado en la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

200	300	350	400	-1275	Frec
0	1	2	3	4	12

El tipo de interés periodal de la operación será aquel que iguale, en un determinado momento del tiempo, la suma financiera de los capitales de la prestación con la suma financiera de los capitales de la contraprestación. Planteando esta igualdad en el momento final se tiene:

$$1.275 = 200 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^4 + 300 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^3 + 350 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^2 + 400\left(1+i_{(m)}\right)$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal (la incógnita) no puede despejarse, por lo que debe calcularse mediante una aproximación, usando algún tipo de algoritmo iterativo. Recuérdese que las hojas de cálculo de los paquetes de ofimática tienen funciones que proporcionan esta aproximación de forma inmediata. En nuestro caso hemos utilizado la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» del paquete de ofimática de software libre «LibreOffice». Utilizando dicha función, la aproximación del tipo de interés periodal que se obtiene es la siguiente:

$$i_{(12)} = 0{,}0088596$$

A partir de este tipo periodal, el tipo de interés efectivo anual se obtiene usando las ecuaciones de tantos equivalentes:

$$i = \left(1 + 0{,}0088596\right)^{12} - 1 = 0{,}111652$$

Tal y como se ha dicho, el capital constituido al final de la operación financiera está conformado por las aportaciones realizadas (términos constitutivos) y por los intereses que dichas aportaciones han devengado en base al tipo de interés pactado. Es decir, el capital se constituye de un modo continuo a lo largo de la duración de la operación. En este contexto puede resultar interesante conocer el capital constituido en un momento anterior al vencimiento de la operación. Para ello se puede utilizar el concepto de saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera visto en capítulos anteriores.

En efecto, sea la operación financiera de constitución representada en la figura 5.1. De esta operación, interesa conocer el capital constituido en un momento g anterior al vencimiento ($0 < g < n$). Este capital será igual a la reserva matemática en dicho momento, que podrá calcularse tanto por el método prospectivo como por el retrospectivo. El esquema para calcular la reserva según este último método se ha representado en la figura 5.2.

Figura 5.2. Operación de constitución. Esquema de cálculo de la reserva en g por el método retrospectivo.

Según se puede apreciar en esta figura 5.2, el cálculo planteado es el de la reserva en g por la izquierda, esto es, justo antes de realizar la aportación. Por el método retrospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores al momento g menos la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a dicho momento:

$$R_g^- = \left[a_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g} + a_2 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{g-1} + ... + a_{g-1} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)\right] - 0$$

Como antes del momento *g* no vence ningún capital de la contraprestación, la reserva en este momento será igual a la suma financiera de los capitales de la prestación:

$$R^{-}_{g} = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-1} + ... + a_{g-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Esto es, la reserva en *g* es igual a la suma de las aportaciones realizadas con anterioridad a dicho momento y de los intereses generados por las mismas. Por tanto esta reserva nos está proporcionando la cuantía del capital constituido en *g*, momento anterior al vencimiento (ecuación 5.2).

$$Q_g = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-1} + ... + a_{g-1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \qquad (5.2)$$

La reserva también se puede calcular por el método prospectivo. Por el retrospectivo se ha calculado directamente el capital constituido hasta un determinado momento *g*. Por el prospectivo se calculará la diferencia entre el valor en *g* del capital total a constituir y el valor en *g* de lo que debe aportarse a partir de dicho momento para constituir el mencionado capital. Ambos importes de la reserva son equivalentes.

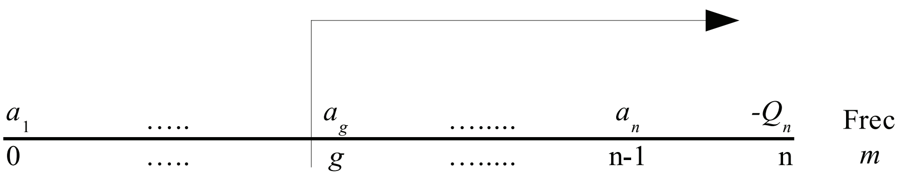


Figura 5.3. Operación de constitución. Esquema de cálculo de la reserva en *g* por el método prospectivo

La reserva en *g* por el método prospectivo se calcula como la suma financiera en dicho momento de los capitales de la contraprestación que vencen con posterioridad al mismo, menos la suma financiera en el momento *g* de los capitales de la prestación que vencen con posterioridad a este momento:

$$R^{-}_{g} = Q_n \left(1+i_{(m)}\right)^{g-n} - \left[a_g + a_{g+1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-(n-1)}\right]$$

Esta expresión también nos proporciona el capital constituido en el momento *g* (ecuación 5.3).

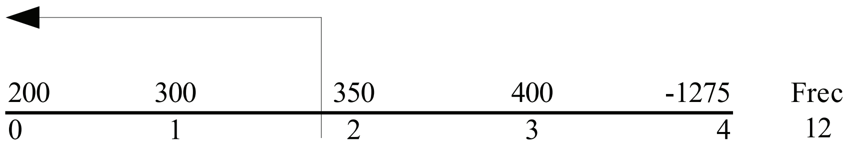
$$Q_g = Q_n \left(1+i_{(m)}\right)^{g-n} - \left[a_g + a_{g+1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-(n-1)}\right] \qquad (5.3)$$

Ejemplo 5.2

Sea una operación de constitución de 4 meses de duración. La cuantía de los 4 términos constitutivos mensuales (prepagables) es de 200, 300, 350 y 400 u.m. El capital constituido al final de la operación asciende a 1.275 u.m. El tipo de interés mensual pactado para esta operación es el 0,0088596. Con estos datos, calcúlese el capital constituido al final del segundo mes.

Vamos a resolver el problema usando primero el método retrospectivo y después el prospectivo.

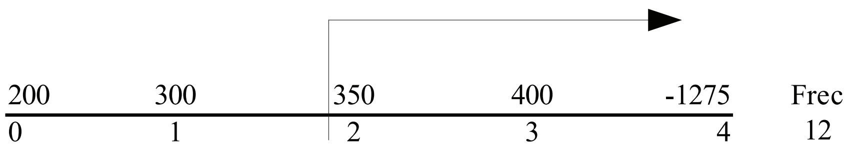
El esquema de la operación para calcular por el retrospectivo es el siguiente:



El capital constituido será:

$$Q_2 = 200 \cdot (1 + 0{,}0088596)^2 + 300 \cdot (1 + 0{,}0088596) = 506{,}22 \text{ u.m.}$$

Para el cálculo por el prospectivo el esquema será:



Y el capital constituido se calculará del siguiente modo:

$$Q_2 = 1275 \cdot (1 + 0{,}0088596)^{-2} - \left[350 + 400 \cdot (1 + 0{,}0088596)^{-1}\right] = 506{,}22 \text{ u.m.}$$

Obviamente, conocido el capital constituido en un momento del tiempo, el capital construido en otro momento distinto podrá calcularse usando las expresiones de las vistas en capítulos anteriores para la determinación de la reserva por el método recurrente.

5.2. Cuadro de constitución

El cuadro de constitución muestra una fotografía de la operación de constitución al final de cada uno de los períodos que la conforman. En el cuadro de constitución, para cada uno de los períodos (*j*), se detallan los siguientes ítems:

- Tipo de interés periodal: $i_{(m)}$
- Término constitutivo: a_j
- Cuota de interés: I_j
- Cuota de constitución: Δ_j
- Capital constituido: Q_j
- Capital pendiente de constituir: P_j

El cuadro de constitución se suele presentar en forma de tabla según la estructura que muestra la figura 5.3.

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		a_1			Q_0	P_0
1	$i_{(m)}$	a_2	I_1	Δ_1	Q_1	P_1
2	$i_{(m)}$	a_3	I_2	Δ_2	Q_2	P_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a_n	I_{n-1}	Δ_{n-1}	Q_{n-1}	P_{n-1}
n	$i_{(m)}$		I_n	Δ_n	Q_n	P_n

Figura 5.3. Cuadro de constitución. Tipo de interés constante

El término constitutivo es la aportación monetaria (normalmente prepagable) que se realiza en cada uno de los períodos.

La cuota interés muestra el monto de intereses generados en el período. En la medida en que las aportaciones se realizan solamente al principio de cada período, la cuota de interés se determinará multiplicando el tipo de interés periodal (que en la figura 3 se ha supuesto constante en todos los períodos) por la suma del capital constituido al principio del período y el término constitutivo desembolsado también al inicio del período (5.4).

$$I_j = \left(a_j + Q_{j-1}\right) \cdot i_{(m)} \tag{5.4}$$

Por su parte, la cuota de constitución informa sobre la aportación monetaria total que la operación ha recibido en el período; esto es, la aportación monetaria directa realizada a través del término constitutivo más la que podría denominarse indirecta, que son los intereses generados en el período (5.5).

$$\Delta_j = a_j + I_j \tag{5.5}$$

El capital constituido informa sobre el monto de dinero disponible al final de cada uno de los períodos; monto que procede tanto de las aportaciones realizadas (términos constitutivos) como de los intereses generados. Por tanto, si la cuota de constitución, como se ha visto, es la aportación monetaria total (directa más intereses) que la operación recibe en un período concreto, el capital constituido al final de dicho período será igual al constituido al final del período anterior más la cuota de constitución del período en cuestión (5.6).

$$Q_j = Q_{j-1} + \Delta_j \tag{5.6}$$

Alternativamente, el capital constituido se puede calcular como la suma aritmética de las cuotas de constitución generadas hasta la fecha. En efecto, en la medida en que la cuota de constitución de un período contiene la aportación directa y los intereses generados en dicho período, la suma de esa cuota y de las anteriores será igual a la suma de todas las aportaciones e intereses generados hasta dicho período, esto es, el capital constituido (5.7).

$$Q_j = \sum_{r=1}^{j} \Delta_r \tag{5.7}$$

Lógicamente, el capital constituido al principio de la operación (Q_0), cuando no se ha realizado todavía ninguna aportación es igual a 0.

Por su parte, el capital pendiente al final de cada período vendrá dado por la diferencia entre el capital total constituido al final de la operación y el capital constituido al final de dicho período (5.8).

$$P_j = Q_n - Q_j \tag{5.8}$$

El capital pendiente al principio de la operación (P_0), cuando no se ha realizado todavía ninguna aportación, es igual a Q_n.

Ejemplo 5.3

Sea una operación de constitución de 4 meses de duración. La cuantía de los 4 términos constitutivos mensuales (prepagables) es de 200, 300, 350 y 400 u.m. El capital constituido al final de la operación asciende a 1.275 u.m. El tipo de interés mensual pactado para esta operación es el 0,0088596. Con estos datos confeccionar el cuadro de constitución.

Lo primero que se hará será representar la operación:

200	300	350	400	-1275	Frec
0	1	2	3	4	12

Y, a continuación, en el cuadro de constitución se introduce la información de la que se dispone. En este caso, términos constitutivos, tipo de interés periodal y capital pendiente al inicio de la operación.

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		200,00			0	1.275,00
1	0,0088596	300,00				
2	0,0088596	350,00				
3	0,0088596	400,00				
4	0,0088596					

El cuadro de constitución se confecciona calculando período a período las distintas magnitudes.

La cuota de interés del primer período vendrá dada por el producto entre el tipo de interés y el capital que hay en la operación al principio del período. Este capital será igual a la suma del capital constituido en el período anterior (que en este caso es 0 al ser el primero de los períodos) y la aportación realizada al principio del período (término constitutivo):

$$I_1 = \left(0 + 200\right) \cdot 0{,}0088596 = 1{,}77 \text{ u.m.}$$

Esta operación, por tanto, dentro del primer período, ha tenido, por un lado, la aportación o término constitutivo (200 u.m.) y, por otro, ha generado unos intereses (cuota de interés) que ascienden a 1,77 u.m. La suma de ambos importes es la cuota de constitución del período:

$$\Delta_1 = 200 + 1{,}77 = 201{,}77 \text{ u.m.}$$

El capital constituido lo obtendremos sumándole al constituido al final del período anterior (0, ya que era el constituido al inicio de la operación) la cuota de constitución del período:

$$Q_1 = 0 + 201{,}77 = 201{,}77 \text{ u.m.}$$

Finalmente, el capital pendiente será la diferencia entre el constituido al final de la operación y el constituido al final del primer período:

$$P_1 = 1.275 - 201{,}77 = 1.073{,}23 \text{ u.m.}$$

Los cálculos realizados se trasladan al cuadro de constitución:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		200,00			0	1.275,00
1	0,0088596	300,00	1,77	201,77	201,77	1.073,23
2	0,0088596	350,00				
3	0,0088596	400,00				
4	0,0088596					

Para el segundo período se procede de un modo similar. En el período anterior el capital constituido asciende a 201,77 u.m. La aportación del período asciende a 300 u.m. La suma de ambos importes,

$$300 + 201{,}77 = 501{,}77 \text{ u.m.}$$

es la que se tomará como base para calcular los intereses generados en el segundo mes:

$$I_2 = \left(300 + 201{,}77\right) \cdot 0{,}0088596 = 4{,}45 \text{ u.m.}$$

La cuota de constitución será igual a la suma de la aportación realizada a principio de período y de los intereses generados:

$$\Delta_2 = 300 + 4{,}45 = 304{,}45 \text{ u.m.}$$

El capital constituido al final del segundo mes se obtiene sumando el capital constituido al final del primer mes (201,77 u.m.) y la cuota de constitución del segundo mes (304,45 u.m.):

$$Q_2 = 201{,}77 + 304{,}45 = 506{,}22 \text{ u.m.}$$

Finalmente, el capital pendiente de constituir será la diferencia entre este último importe y 1.275 u.m.:

$$P_1 = 1.275 - 506{,}22 = 768{,}78 \text{ u.m.}$$

Trasladando los anteriores importes al cuadro de constitución, este queda conformado del siguiente modo:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		200,00			0	1.275,00
1	0,0088596	300,00	1,77	201,77	201,77	1.073,23
2	0,0088596	350,00	4,45	304,45	506,22	768,78
3	0,0088596	400,00				
4	0,0088596					

Para el resto de períodos se procede de un modo similar al mostrado para los dos primeros. El cuadro de constitución resultante es el siguiente:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		200,00			0	1.275,00
1	0,0088596	300,00	1,77	201,77	201,77	1.073,23
2	0,0088596	350,00	4,45	304,45	506,22	768,78
3	0,0088596	400,00	7,59	357,59	863,81	411,19
4	0,0088596		11,19	411,19	1.275,00	0,00

5.3. Constitución mediante imposiciones constantes

En los epígrafes anteriores se ha tratado el caso general de una operación de constitución en la que las imposiciones (términos constitutivos) varían sin seguir ningún patrón. Ahora bien, dentro de ese caso general hay casos particulares. El primero de ellos, el correspondiente a aquellas operaciones en las que las imposiciones son constantes, se trata en el presente epígrafe. Otros casos particulares, no tan habituales (imposiciones crecientes en progresión aritmética o en progresión geométrica y cuotas de constitución constantes), se tratan en el anexo del presente tema.

El esquema general de una operación de constitución con términos constitutivos constantes se muestra en la figura 5.4.

a	a	a	….....	a	$-Q_n$	Frec
0	1	2	….....	n-1	n	m

Figura 5.4. Esquema de una operación de constitución con términos constitutivos constantes

En estas operaciones, el término constitutivo se puede calcular conociendo el capital a constituir y el tipo de interés de la operación. En efecto, si observamos la figura 5.4 podemos ver que la prestación de la operación es una renta constante y prepagable. En la medida en que prestación y contraprestación deben ser equivalentes en términos financieros, el valor final de esa renta prepagable debe ser igual al capital a constituir:

$$Q_n = a \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i_{(m)}} = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^n - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Despejando de la anterior ecuación el término constitutivo se obtiene (5.9):

$$a = \frac{Q_n}{\ddot{s}_{\overline{n}|i_{(m)}}} \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.4

Sea una operación de constitución de dos años de duración en la que las imposiciones semestrales prepagables son constantes. El capital a constituir asciende a 1.032,92 u.m. y el tipo de interés semestral utilizado en la operación es del 1,3 %. Con los anteriores datos se desea conocer el valor del término constitutivo.

En primer lugar se plantea el esquema de la operación:

a	a	a	a	1032,92	Frec
0	1	2	3	4	2

Aplicando la ecuación (5.9) el valor del término constitutivo será:

$$a = \frac{1.032,92}{\frac{(1+0,013)^4 - 1}{0,013} \cdot (1+0,013)} = 250 \text{ u.m.}$$

En las operaciones de constitución con términos constitutivos constantes resulta bastante sencillo el calcular el capital constituido en cualquier período g anterior al final de la operación ($0 < g < n$). Como se vio en el primer epígrafe de este capítulo, este cálculo es equivalente al de la reserva matemática o saldo financiero de la operación y se puede hacer tanto por el método prospectivo como por el retrospectivo (también por el recurrente).

Por el método retrospectivo el cálculo del capital constituido en un período anterior al final de la operación se realizará en base al siguiente esquema (figura 5.5):

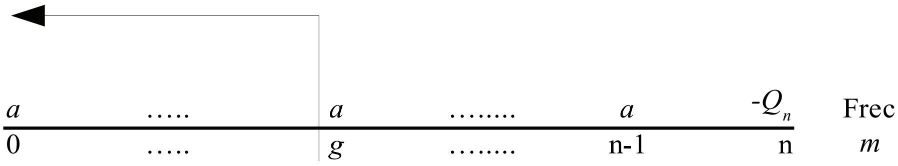


Figura 5.5. Operación de constitución con términos constitutivos constantes.
Esquema de cálculo de la reserva en g por el método retrospectivo

Por el método retrospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores al momento g menos la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a dicho momento. La suma financiera de los capitales de la prestación será igual al valor final de una renta prepagable y antes del momento g no vence ningún capital de la contraprestación:

$$R_g^- = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^g - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - 0$$

Por lo tanto, la reserva en este momento será igual a la suma financiera de los capitales de la prestación:

$$R_g^- = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^g - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

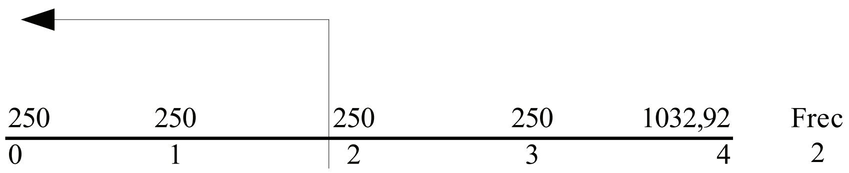
Esto es, la reserva en g es igual a la suma financiera de las aportaciones realizadas anteriormente a dicho momento y de los intereses generados por las mismas. Es decir, esta reserva nos está proporcionando la cuantía del capital constituido en g, momento anterior al vencimiento (ecuación 5.10).

$$Q_g = a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^g - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.5

Sea una operación de constitución de dos años de duración en la que las imposiciones semestrales prepagables constantes tienen una cuantía de 250 u.m. El capital a constituir asciende a 1.032,92 u.m. y el tipo de interés semestral utilizado en la operación es del 1,3 %. Con los anteriores datos se desea conocer el capital constituido al final del período 2. Calcúlese dicho capital utilizando el método retrospectivo para el cálculo de la reserva matemática.

El esquema de cálculo será el siguiente:



Y la ecuación que se utilizará será la siguiente:

$$Q_2 = 250 \cdot \frac{\left(1+0{,}013\right)^2 - 1}{0{,}013} \cdot \left(1+0{,}013\right) = 509{,}79 \text{ u.m.}$$

La reserva también se puede calcular por el método prospectivo. Por el retrospectivo se ha calculado directamente el capital constituido hasta un determinado momento g. Por el prospectivo se calculará la diferencia entre el valor en g del capital total a constituir y el valor en g de lo que debe aportarse a partir de dicho momento para constituir el mencionado capital. Ambos importes de la reserva son equivalentes.

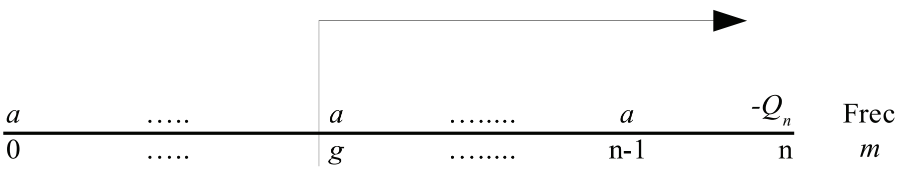


Figura 5.6. Operación de constitución con términos constitutivos constantes.
Esquema de cálculo de la reserva en g por el método prospectivo

La reserva en g por el método prospectivo se calcula como la suma financiera en dicho momento de los capitales de la contraprestación que vencen con posterioridad al mismo, menos la suma financiera en el momento g de los capitales de la prestación que vencen con posterioridad a ese momento. Como estamos en el caso de términos constitutivos constantes, el valor en g de los mencionados capitales de la prestación será igual al valor inicial de una renta constante, prepagable de n-g períodos de duración; mientras que el valor en g de los capitales de la contraprestación será igual al valor actualizado (a dicho momento) del capital a constituir al final de la operación:

$$R_g^{-} = Q_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)} - a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

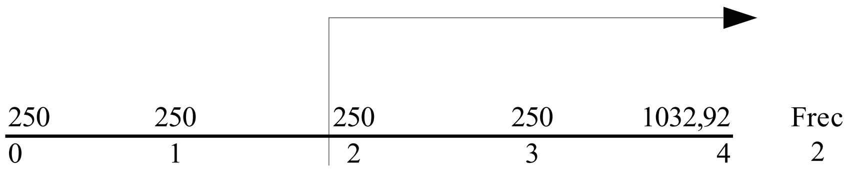
Y esta expresión también proporciona el capital constituido en el momento g (ecuación 5.11).

$$Q_g = Q_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)} - a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)}}{i_{(m)}} \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \qquad (5.11)$$

Ejemplo 5.6

Sea una operación de constitución de dos años de duración en la que las imposiciones semestrales prepagables constantes tienen una cuantía de 250 u.m. El capital a constituir asciende a 1.032,92 u.m. y el tipo de interés semestral utilizado en la operación es del 1,3 %. Con los anteriores datos se desea conocer el capital constituido al final del período 2. Calcúlese dicho capital utilizando el método prospectivo para el cálculo de la reserva matemática.

La representación gráfica será la siguiente:



Y el cálculo del capital constituido se realiza directamente a través de la ecuación (5.11):

$$Q_2 = 1.032{,}92 \cdot \left(1+0{,}013\right)^{-2} - 250 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}013\right)^{-2}}{0{,}013} \cdot \left(1+0{,}013\right) = 509{,}79 \text{ u.m.}$$

El cuadro de constitución en operaciones con imposiciones constantes se confecciona de un modo similar al visto para operaciones con imposiciones variables. Conocida la cuantía de la imposición y el tipo de interés, el cuadro será de las características del mostrado en la figura 5.7:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		a			Q_0	P_0
1	$i_{(m)}$	a	I_1	Δ_1	Q_1	P_1
2	$i_{(m)}$	a	I_2	Δ_2	Q_2	P_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a	I_{n-1}	Δ_{n-1}	Q_{n-1}	P_{n-1}
n	$i_{(m)}$		I_n	Δ_n	Q_n	P_n

Figura 5.7. Cuadro de constitución. Términos constitutivos y tipo de interés constantes

Las magnitudes correspondientes al primer período serán:

$$I_1 = \left(0 + a\right) \cdot i_{(m)} = a \cdot i_{(m)}$$

Aplicando (5.10), el capital constituido será:

$$Q_1 = a \cdot \frac{\left(1 + i_{(m)}\right)^1 - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = a \cdot \frac{1 + i_{(m)} - 1}{i_{(m)}} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = a \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Por otro lado, por definición de cuota de constitución, la correspondiente al primer período se puede calcular del siguiente modo:

$$\Delta_1 = Q_1 - Q_0 = a \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - 0 = a \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Y el capital pendiente de constituir de la forma vista anteriormente:

$$P_1 = Q_n - Q_1$$

En relación con el segundo período, el capital constituido se puede calcular utilizando el método recurrente para el cálculo de la reserva. Esto es, conocido el capital constituido en 1, por el método recurrente se puede calcular la reserva por la izquierda en 2, o lo que es lo mismo, el capital constituido en 2 (figura 5.8).

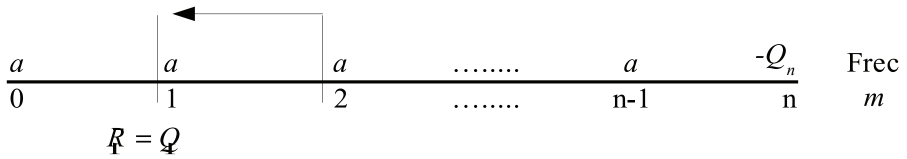


Figura 5.8. Esquema de cálculo de la reserva (capital constituido) por el método recurrente

El capital constituido en 2, o lo que es lo mismo, la reserva en 2 por la izquierda, lo obtendremos según el siguiente procedimiento:

- Se toma el capital constituido en 1 (reserva por la izquierda en 1).
- Se calcula el equivalente financiero en 2 de dicho capital.
- A dicho equivalente se suma el valor financiero en 2 de todos los capitales de la prestación que han vencido entre 1 y 2 (los que se encuentran entre las líneas verticales trazadas en la figura 5.8).
- Y al resultado de dicha suma se le resta el valor financiero en 2 de todos los capitales de la contraprestación que han vencido entre 1 y 2 (los que se encuentran entre las líneas verticales trazadas en la figura 5.8, donde, como se puede apreciar, no hay ningún capital de la contraprestación).

Analíticamente:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_1 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Por definición, la cuota de constitución del período 2 será igual a la diferencia entre el capital constituido al final de dicho período y el capital constituido al final del período 1:

$$\Delta_2 = Q_2 - Q_1 = \left(Q_1 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - Q_1 = Q_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - Q_1 =$$
$$= a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \Delta_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

La cuota de interés y el capital pendiente de constituir se calcularán del siguiente modo:

$$I_2 = \left(Q_1 + a\right) \cdot i_{(m)}$$

$$P_2 = Q_n - Q_2$$

En el período 3, el capital constituido, o lo que es lo mismo, la reserva en 3 por la izquierda, lo obtendremos según un procedimiento similar al usado para el período 2:

- Se toma el capital constituido en 2.
- Se calcula el equivalente financiero en 3 de dicho capital.
- A dicho equivalente se suma el valor financiero en 3 de todos los capitales de la prestación que han vencido entre 2 y 3 (el término constitutivo del período 3).
- Y al resultado de dicha suma se le resta el valor financiero en 3 de todos los capitales de la contraprestación que han vencido entre 2 y 3 (ninguno, ya que la contraprestación de esta operación es única y tiene el vencimiento al final de la misma).

Analíticamente:

$$Q_3 = Q_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right) + a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_2 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

La cuota de constitución es, por definición, la diferencia entre el capital constituido al final del período corriente y el capital constituido al final del período anterior. El capital constituido al final del período 3 es:

$$Q_3 = \left(Q_2 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Y el capital constituido al final del período 2, como se ha visto, era:

$$Q_2 = \left(Q_1 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Restando estas dos últimas expresiones se obtiene la cuota de constitución del tercer período:

$$\Delta_3 = Q_3 - Q_2 = \left(Q_2 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - \left(Q_1 + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_2 - Q_1\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) +$$
$$+ a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) - a \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_2 - Q_1\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \Delta_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right) =$$
$$= \Delta_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right) = \Delta_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^2$$

La cuota de interés y el capital pendiente de constituir se calcularán del modo habitual:

$$I_3 = \left(Q_2 + a\right) \cdot i_{(m)}$$

$$P_3 = Q_n - Q_3$$

Y así sucesivamente.

Según se puede apreciar en lo demostrado anteriormente, en una operación con términos constitutivos constantes, las cuotas de constitución siguen una progresión geométrica de razón $\left(1+i_{(m)}\right)$. Esto es, cada cuota de constitución, se puede calcular multiplicando la anterior por dicha razón. En efecto, en términos generales se tiene:

$$Q_j = \left(Q_{j-1} + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

$$Q_{j-1} = \left(Q_{j-2} + a\right) \cdot \left(1+i_{(m)}\right)$$

Detrayendo al capital constituido al final del período j, el capital constituido al final del período j-1 se obtiene la cuota de constitución del período j, que tendrá la siguiente expresión:

$$\Delta_j = Q_j - Q_{j-1} = \left(Q_{j-1} + a\right)\cdot\left(1+i_{(m)}\right) - \left(Q_{j-2} + a\right)\cdot\left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_{j-1} - Q_{j-2}\right)\cdot\left(1+i_{(m)}\right) +$$
$$+ a\cdot\left(1+i_{(m)}\right) - a\cdot\left(1+i_{(m)}\right) = \left(Q_{j-1} - Q_{j-2}\right)\cdot\left(1+i_{(m)}\right)$$

Teniendo en cuenta que la diferencia $\left(Q_{j-2} - Q_{j-1}\right)$ es, por definición, la cuota de constitución del período j-1, podemos expresar la cuota de constitución del período j en función de la del j-1 (5.12).

$$\Delta_j = \Delta_{j-1}\cdot\left(1+i_{(m)}\right) \tag{5.12}$$

Si utilizamos esta expresión de forma recurrente, podemos expresar la cuota de constitución del período j en función de la del primer período:

$$\Delta_j = \Delta_1\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^{j-1}$$

Sabiendo además que, como se ha visto, la cuota de constitución del primer período tiene la siguiente expresión,

$$\Delta_1 = a\cdot\left(1+i_{(m)}\right)$$

la cuota de constitución del período j puede calcularse a partir del término constitutivo constante (5.13):

$$\Delta_j = a\cdot\left(1+i_{(m)}\right)^{j} \tag{5.13}$$

Ejemplo 5.7

Sea una operación de constitución de dos años de duración en la que las imposiciones semestrales prepagables constantes tienen una cuantía de 250 u.m. El capital a constituir asciende a 1.032,92 u.m. y el tipo de interés semestral utilizado en la operación es del 1,3 %. Con los anteriores datos se desea confeccionar el cuadro de constitución. Adicionalmente se desea mostrar el procedimiento de cálculo de la cuota de constitución del tercer período a partir del término constitutivo.

El esquema de la operación será:

250	250	250	250	1032,92	Frec
0	1	2	3	4	2

Trasladando los datos conocidos al cuadro de constitución se tiene:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		250,00			0	1.032,92
1	0,013	250,00				
2	0,013	250,00				
3	0,013	250,00				
4	0,013					

Comenzamos calculando las magnitudes correspondientes al primero de los períodos:

$$I_1 = 0{,}013 \cdot (0 + 250) = 3{,}25 \text{ u.m.}$$

$$\Delta_1 = 250 + 3{,}25 = 253{,}25 \text{ u.m.}$$

$$Q_1 = 0 + 253{,}25 = 253{,}25 \text{ u.m.}$$

$$P_1 = 1.032{,}92 - 253{,}25 = 779{,}67 \text{ u.m.}$$

Trasladando las anteriores magnitudes al cuadro ya se está en condiciones de calcular las correspondientes al segundo período.

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		250,00			0	1.032,92
1	0,013	250,00	3,25	253,25	253,25	779,67
2	0,013	250,00				
3	0,013	250,00				
4	0,013					

$$I_2 = 0{,}013 \cdot (253{,}25 + 250) = 6{,}54 \text{ u.m.}$$

$$\Delta_2 = 250 + 6{,}54 = 256{,}54 \text{ u.m.}$$

$$Q_2 = 253{,}25 + 256{,}54 = 509{,}79 \text{ u.m.}$$

$$P_2 = 1.032{,}92 - 509{,}79 = 523{,}13 \text{ u.m.}$$

Y para el resto de período se procede de un modo similar. El cuadro de constitución completo se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		250,00			0	1.032,92
1	0,013	250,00	3,25	253,25	253,25	779,67
2	0,013	250,00	6,54	256,54	509,79	523,13
3	0,013	250,00	9,88	259,88	769,67	263,25
4	0,013		13,25	263,25	1.032,92	0

El cálculo de la cuota de constitución del tercer período a partir del término constitutivo se realizará aplicando (5.13):

$$\Delta_3 = 250 \cdot \left(1+0,013\right)^3 = 259,88 \text{ u.m.}$$

5.4. Cálculo de tantos efectivos

El cálculo del tipo de interés efectivo anual en una operación de constitución se realiza del mismo modo que en cualquier operación financiera: determinando el tipo de interés que en todo momento iguala la suma financiera de los capitales de la prestación y la de los capitales de la contraprestación. Por comodidad, es en el momento final cuando se calcula la suma financiera de los capitales de la prestación y los de la contraprestación. Téngase en cuenta que la contraprestación es única y vence precisamente en ese momento final.

En el caso de una operación en la que no haya gastos y el tipo de interés pactado sea constante, el tipo de interés efectivo anual podrá calcularse directamente a partir del interés periodal acordado. En efecto, el esquema general de una operación de este tipo sería el de la figura 5.1:

a_1	a_2	a_3	……..	a_n	$-Q_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

en donde se ha pactado un tipo de interés periodal igual a $i_{(m)}$.

Por definición, el tipo de interés que hace equivalentes prestación y contraprestación es el periodal pactado.

$$Q_n = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^n + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{n-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right) \rightarrow i_{(m)}$$

Y el tipo de interés efectivo anual de la operación será el equivalente a dicho periodal:

$$i = \left(1+i_{(m)}\right)^m - 1$$

Ejemplo 5.8

Sea una operación de constitución de 4 meses de duración. La cuantía de los 4 términos constitutivos mensuales (prepagables) es de 200, 300, 350 y 400 u.m. El capital constituido al final de la operación asciende a 1.275 u.m. En esta operación se ha pactado un tipo de interés mensual del 0,88596 %. Determínese el tipo de interés efectivo anual.

El esquema de la operación es el siguiente:

200	300	350	400	-1275	Frec
0	1	2	3	4	12

Se sabe que el tipo de interés mensual que iguala prestación y contraprestación es: 0,0088596. Luego el tipo de interés efectivo anual será:

$$i = \left(1 + 0{,}0088596\right)^{12} - 1 = 0{,}111652$$

Si la operación de constitución tuviera gastos, estos repercutirían en el tipo de interés efectivo anual. Un caso frecuente es el de que deba pagarse alguna comisión en el momento de retirar los fondos constituidos. Asúmase una operación de constitución como la de la figura 5.1, pero en la que, la prestación, a la hora de recibir los fondos de la contraprestación, debe pagarle a esta última una comisión de c u.m. El esquema de la operación para calcular el tipo de interés efectivo anual ya no sería el de la figura 5.1, sino el mostrado en la figura 5.9.

a_1	a_2	a_3	……..	a_n	$-Q_n+c$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

Figura 5.9. Operación de constitución. Esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual cuando hay gastos pagados a la finalización de la operación

En efecto, según se puede ver en esta figura 5.9, en términos netos, la cantidad que entregará la contraprestación a la prestación no será el capital constituido, sino un importe menor: minorará dicho capital en la cuantía de la comisión que la prestación le pague.

El tipo de interés periodal que hace equivalentes prestación y contraprestación vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$Q_n - c = a_1 \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^{n} + a_2 \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^{n-1} + ... + a_n \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right) \to i'_{(m)}$$

Y el tipo de interés efectivo anual se calculará a partir de este periodal:

$$i' = \left(1 + i'_{(m)}\right)^{m} - 1$$

Ejemplo 5.9

Sea una operación de constitución de 4 meses de duración. La cuantía de los 4 términos constitutivos mensuales (prepagables) es de 200, 300, 350 y 400 u.m. El capital constituido al final de la operación asciende a 1.275 u.m. Esta operación tiene unos gastos de 4 u.m. que la prestación debe pagar a la contraprestación en el momento final. Determínese el tipo de interés efectivo anual.

El esquema de la operación es el siguiente:

200	300	350	400	-1271	Frec
0	1	2	3	4	12

En el momento final se ha situado como cuantía de la contraprestación 1.271 u.m., pues es esa la cantidad que, en términos netos, debe satisfacer esta parte de la operación (1.275 – 4).

Igualando las sumas financieras de prestación y contraprestación se puede obtener el tipo de interés periodal (recuérdese que este tipo de interés debe aproximarse usando algún algoritmo iterativo, ya que no es posible despejarlo en al ecuación planteada):

$$1.271 = 200 \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^4 + 300 \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^3 + 350 \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^2 + 400\left(1 + i'_{(m)}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow i'_{(m)} = 0{,}0074513$$

El tipo de interés efectivo anual equivalente al periodal será:

$$i' = \left(1 + 0{,}0074513\right)^{12} - 1 = 0{,}093173$$

Hasta este punto del capítulo, se ha asumido que, en las operaciones de constitución, el tipo de interés pactado permanece constante durante la vida de la operación. No obstante, es habitual que este tipo de interés varíe. Concretamente, la variación suele ir ligada a un índice de referencia, de modo que lo pactado no es un tipo de interés fijo, sino el valor del índice más un diferencial. Es normal pactar la revisión anual del tipo de interés, de modo, que cada principio de año, en base al valor del índice, se determina el tipo de interés que se va a aplicar a la operación de constitución durante el próximo período. En estos casos el capital constituido no se conocerá hasta que se produzca la última revisión del tipo de interés: en tanto en cuanto el tipo de interés a aplicar en todos los períodos no se conozca, tampoco se podrá conocer el capital que estará constituido al finalizar la operación, aunque se conozcan los términos constitutivos. Hasta que no se realice la última revisión en los tipos de interés tampoco se podrá conocer el tipo de interés efectivo anual de la operación.

Finalmente, y por lo que se refiere al cuadro de constitución, tampoco podrá elaborarse, en términos reales, hasta que se produzca la última revisión de los tipos de interés. Al inicio de la operación se suele elaborar un cuadro de constitución haciendo la hipótesis de que el tipo de interés permanecerá constante. Este cuadro nos proporciona unos datos sobre capital constituido que, más allá de la primera de las fechas previstas para la revisión de los tipos, no son reales.

Ejemplo 5.10

Sea una operación de constitución de dos años de duración en la que las imposiciones semestrales prepagables constantes tienen una cuantía de 250 u.m. Para el primero de los años se ha pactado un tipo de interés nominal anual del 2,6 %. El tipo de interés se revisará a final de año según el valor que en dicho momento tenga el índice de referencia euríbor. Concretamente, el tipo de interés nominal anual para el segundo año se calculará añadiéndole un 1,5 % al valor que, al final de año presente el euríbor.

Transcurrido un año desde el inicio de la operación el EURÍBOR se ha situado en el 0,5 %.

Con los anteriores datos se desea conocer el capital que se habrá constituido al finalizar la operación, y su tipo de interés efectivo anual.

El esquema de la operación es el siguiente:

250	250	250	250	Q_4	Frec
0	1	2	3	4	2
j(m) = 2,6 %		euríbor + 1,5 %			

Para el primer año (para lo dos primeros semestres) el tipo de interés nominal anual es del 2,6 %. O lo que es lo mismo, el tipo de interés semestral es del 1,3 %:

$$i_{(2)} = \frac{0{,}026}{2} = 0{,}013$$

Si este tipo de interés no variara, el capital constituido al finalizar la operación sería de 1.032,92 u.m. (véanse ejemplos anteriores). Pero como el tipo de interés se revisará transcurridos los dos primeros semestres, en el momento inicial no estamos en condiciones de determinar el capital constituido al finalizar la operación. Solo estamos en condiciones de determinar el capital constituido al finalizar el primer año (que es para el período para el que conocemos el interés). Este capital lo podemos calcular en el cuadro de constitución para los dos primeros períodos (lógicamente en este cuadro de constitución no se podrá calcular el capital pendiente en cada período, pues se desconoce el capital a constituir):

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		250,00			0	
1	0,013	250,00	3,25	253,25	253,25	
2	0,013	250,00	6,54	256,54	509,79	
3	*f*(euríbor)	250,00				
4	*f*(euríbor)					

Cuando ya ha finalizado el primer año es cuando conocemos el tipo de interés que se aplicará a la operación para el segundo año. Concretamente, el tipo de interés nominal anual será del 2 %: 0,5 % (euríbor en ese momento) + 1,5 % (diferencial pactado). El tipo de interés semestral será:

$$i_{(2)} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01$$

Este será el tipo vigente hasta el final de la operación, ya que la operación termina en el segundo año.

La cuota de interés correspondiente al tercer período (primer semestre del segundo año) será:

$$I_3 = 0{,}01 \cdot \left(250 + 509{,}79\right) = 7{,}6 \text{ u.m.}$$

La cuota de constitución:

$$\Delta_3 = 250 + 7{,}6 = 257{,}6 \text{ u.m.}$$

Y el capital constituido:

$$Q_3 = 509{,}76 + 257{,}6 = 767{,}39 \text{ u.m.}$$

Estos datos se pueden trasladar al cuadro de constitución junto con los del cuarto período que se calculan de un modo similar.

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		250,00			0	
1	0,013	250,00	3,25	253,25	253,25	
2	0,013	250,00	6,54	256,54	509,79	
3	0,01	250,00	7,60	257,60	767,39	
4	0,01		10,16	260,16	1.027,55	

Por tanto, el capital constituido al finalizar la operación será de 1.027,55 u.m.

Para calcular el tipo de interés efectivo anual se planteará el esquema real de la operación:

250	250	250	250	-1027,55	*Frec*
0	1	2	3	4	2

Y, en el momento final, se iguala la suma financiera de los capitales de la prestación y los de la contraprestación:

$$250 \cdot \frac{\left(1+i_{(2)}\right)^{4}-1}{i_{(2)}} \cdot \left(1+i_{(2)}\right) = 1.027,55 \rightarrow i_{(2)} = 0,0109005$$

En la anterior ecuación, no se puede despejar el tipo de interés, por lo que se ha aproximado utilizando un algoritmo iterativo. El tipo de interés obtenido es el semestral. El tipo de interés efectivo anual de la operación se calcula utilizando las ecuaciones de equivalencia de tantos:

$$i = \left(1+0,0109005\right)^{2} - 1 = 0,0219198$$

Anexo
Capítulo 5. Cuotas de constitución constantes y términos constitutivos crecientes en progresión aritmética y geométrica

A4.1. Cuotas de constitución constantes

Un caso particular de operaciones de constitución, interesante desde un punto de vista matemático pero poco habitual en la práctica, es el de cuotas de constitución constantes. En este tipo de operaciones no son los términos constitutivos, sino las cuotas de constitución las que tienen una cuantía idéntica. Por tanto, el esquema de una operación de estas características sería el general de una operación de constitución (figura A5.1).

a_1	a_2	a_3	……..	a_n	$-Q_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura A5.1. Esquema de una operación con cuotas de constitución constantes

Por definición, la suma aritmética de todas las cuotas de constitución de una operación es igual al capital constituido al final de dicha operación (recuérdese la ecuación 5.7):

$$Q_n = \sum_{r=1}^{n} \Delta_r$$

Teniendo en cuenta que las cuotas de constitución son constantes,

$$\Delta_r = \Delta \forall r = 1,.....,n$$

El capital constituido al finalizar la operación se podrá calcular del siguiente modo:

$$Q_n = n \cdot \Delta$$

O lo que es equivalente, las cuotas de constitución se podrán calcular según (A5.1):

$$\Delta = \frac{Q_n}{n} \qquad \text{(A5.1)}$$

En las operaciones con cuotas de constitución constantes, el cuadro de constitución comienza a construirse precisamente a partir de dichas cuotas. De hecho, conocida la primera cuota de constitución (que tiene una cuantía idéntica a todas las demás), y sabiendo cuál es el tipo de interés, se puede calcular tanto el término constitutivo como la cuota de interés:

$$\Delta = I_1 + a_1 = a_1 \cdot i_{(m)} + a_1 = a_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \rightarrow a_1 = \frac{\Delta}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$$

$$I_1 = a_1 \cdot i_{(m)}$$

El capital constituido en el primer período será igual a la cuota de constitución (ya que al tratarse del primer período el capital constituido en el período anterior es nulo):

$$Q_1 = \Delta$$

Vamos a focalizar nuestra atención en esta última magnitud, en el capital constituido. En el segundo período, este capital se puede calcular por el método recurrente para el cálculo de la reserva. Esto es, conocido el capital constituido en 1, por el método recurrente se puede calcular la reserva por la izquierda en 2, o lo que es lo mismo, el capital constituido en 2 (figura A5.2):

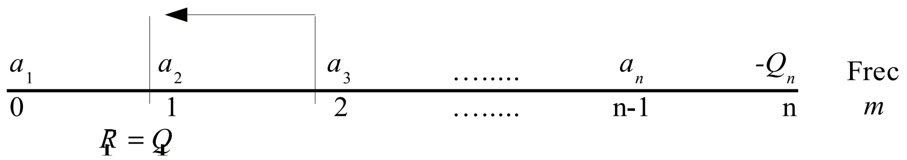


Figura A5.2. Esquema de cálculo de la reserva (capital constituido) por el método recurrente

El capital constituido en 2, o lo que es lo mismo, la reserva en 2 por la izquierda, lo obtendremos según el siguiente procedimiento:

- Se toma el capital constituido en 1.
- Se calcula el equivalente financiero en 2 de dicho capital.
- A dicho equivalente se suma el valor financiero en 2 de todos los capitales de la prestación que han vencido entre 1 y 2 (los que se encuentran entre las líneas verticales trazadas en la figura A5.2).
- Y al resultado de dicha suma se le resta el valor financiero en 2 de todos los capitales de la contraprestación que han vencido entre 1 y 2 (los que se encuentran entre las líneas verticales trazadas en la figura A5.2, donde, como se puede apreciar, no hay ningún capital de la contraprestación).

Analíticamente:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) + a_2 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - 0 = \left(Q_1 + a_2\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Por un procedimiento similar se puede calcular el capital constituido en al final del tercer período:

$$Q_3 = \left(Q_2 + a_3\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

En general, para los períodos j -1 y j el capital constituido será:

$$Q_{j-1} = \left(Q_{j-2} + a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

$$Q_j = \left(Q_{j-1} + a_j\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Si se restan estas dos últimas expresiones se obtiene:

$$Q_j - Q_{j-1} = \left(Q_{j-1} - Q_{j-2}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) + \left(a_j - a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

La diferencia entre los capitales constituidos al final de dos períodos consecutivos es, por definición, la cuota de constitución (que en este caso es constante). Luego la anterior expresión se puede reescribir del siguiente modo:

$$\Delta = \Delta \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) + \left(a_j - a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

Operando:

$$\Delta - \Delta \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = \left(a_j - a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \rightarrow -\Delta \cdot i_{(m)} = \left(a_j - a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

$$-\Delta \cdot i_{(m)} = \left(a_j - a_{j-1}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \rightarrow a_j - a_{j-1} = \frac{-\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$$

Despejando:

$$a_j = a_{j-1} - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)} \qquad \text{(A5.2)}$$

Esto es, el término constitutivo de un período se obtiene restándole al del anterior una cantidad constante, $\frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$. O lo que es lo mismo, los términos constitutivos siguen una progresión aritmética de razón $\frac{-\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$.

El hecho de que los términos constitutivos sigan una progresión aritmética, permite calcular la cuantía de cualquiera de ellos en función de la cuantía del primero. En efecto:

$$a_2 = a_1 - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)} = a_1 - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)} - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)} = a_1 - 2 \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

…..............................

$$a_j = a_1 - \left(j-1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

Teniendo en cuenta que, como se ha visto, el término constitutivo del primer período tiene la siguiente expresión:

$$a_1 = \frac{\Delta}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

$$a_j = a_1 - \left(j-1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)} = \frac{\Delta}{\left(1+i_{(m)}\right)} - \left(j-1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)} = \left(1-\left(j-1\right) \cdot i_{(m)}\right) \cdot \frac{\Delta}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

Esto es, la cuantía de cualquier término constitutivo se podrá calcular a partir de la cuota de constitución (A5.3):

$$a_j = \left(1-\left(j-1\right) \cdot i_{(m)}\right) \cdot \frac{\Delta}{\left(1+i_{(m)}\right)} \tag{A5.2}$$

Centrémonos ahora en la otra magnitud que se necesita para completar el cuadro de constitución: las cuotas de interés. La cuota de interés correspondiente a un período cualquiera se puede calcular del siguiente modo:

$$I_j = \Delta - a_j$$

Sustituyendo:

$$I_j = \Delta - \left[a_{j-1} - \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)}\right] = \Delta - a_{j-1} + \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1+i_{(m)}\right)}$$

Considerando que:

$$\Delta = I_{j-1} + a_{j-1} \rightarrow I_{j-1} = \Delta - a_{j-1}$$

La cuota de interés se puede expresar del siguiente modo (A5.3):

$$I_j = I_{j-1} + \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)} \tag{A5.3}$$

Es decir, las cuotas de interés varían en progresión aritmética de razón $\frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$.

Esto nos permitirá, conocida la primera cuota de interés, calcular cualquiera de las demás, aplicando una expresión muy simple:

$$I_j = I_1 + \left(j - 1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$I_1 = a_1 \cdot i_{(m)} = \frac{\Delta}{\left(1 + i_{(m)}\right)} \cdot i_{(m)} = \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$$

Sustituyendo:

$$I_j = \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)} + \left(j - 1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)} = \left(1 + j - 1\right) \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)}$$

Llegamos a una expresión que permite el cálculo de cualquier cuota de interés a partir de la cuota de constitución constante (A5.4):

$$I_j = j \cdot \frac{\Delta \cdot i_{(m)}}{\left(1 + i_{(m)}\right)} \tag{A5.4}$$

Ejemplo A5.1

Sea una operación de constitución en la que las imposiciones prepagables se realizan trimestralmente. En esta operación el capital a constituir asciende a 2.000 u.m., las cuotas de constitución son constantes y el tipo de interés trimestral pactado es del 1 %. Sabiendo que la duración de la operación es de un año, calcúlese la cuantía de los términos constitutivos y confecciónese el cuadro de constitución.

Como las imposiciones son trimestrales y la operación dura 1 año, en total se tendrán 4 períodos. El esquema de la operación es el siguiente:

a_1	a_2	a_3	a_4	-2000	Frec
0	1	2	3	4	4

Como las cuotas de constitución son constantes, la cuantía de dichas cuotas será:

$$\Delta = \frac{2000}{4} = 500 \text{ u.m.}$$

Trasladando al cuadro de constitución los datos de los que se dispone, se tiene lo siguiente:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0					0	2.000,00
1	0,01			500,00		
2	0,01			500,00		
3	0,01			500,00		
4	0,01			500,00		

La cuantía del primero de los términos constitutivos será:

$$a_1 = \frac{500}{(1+0,01)} = 495,05 \text{ u.m.}$$

Teniendo en los términos constitutivos siguen una progresión aritmética de razón $\frac{-500\cdot 0,01}{(1+0,01)}$, el cálculo del resto de términos es inmediato:

$$a_2 = 495,05 - \frac{500\cdot 0,01}{(1+0,01)} = 490,10 \text{ u.m.}$$

$$a_3 = 490{,}10 - \frac{500 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)} = 485{,}15 \text{ u.m.}$$

$$a_4 = 485{,}15 - \frac{500 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)} = 480{,}21 \text{ u.m.}$$

Conocidos los términos constitutivos, las cuotas de interés, capital pendiente y capital constituido se calculan de la forma vista para las operaciones con imposiciones variables, en el primer epígrafe del presente capítulo. El cuadro de constitución completo será el siguiente:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		495,05			0	2.000,00
1	0,01	490,10	4,95	500,00	500,00	1.500,00
2	0,01	485,15	9,90	500,00	1.000,00	1.000,00
3	0,01	480,21	14,85	500,00	1.500,00	500,00
4	0,01		19,79	500,00	2.000,00	0,00

A5.2. Términos constitutivos variables en progresión geométrica

Se trata de operaciones de constitución en las que los términos de la prestación (las imposiciones) son variables, pero varían de acuerdo con una determinada pauta: crecen (o decrecen) en progresión geométrica. Esto significa que cada término puede calcularse multiplicando el anterior por una cantidad constante y positiva denominada razón de la progresión. Cuando dicha razón sea mayor que 1, los términos constitutivos serán crecientes. Cuando la razón sea menor que la unidad, los términos constitutivos serán decrecientes.

El esquema general de una operación de constitución de las características que se están comentando se muestra en la figura A5.3:

a	$k\ a$	$k^2\ a$	……..	$k^{n-1}\ a$	$-Q_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura A5.3. Esquema de una operación en la que los términos constitutivos varían en progresión geométrica de razón *k*

Tal y como se puede apreciar en esta figura, la prestación de esta operación es una renta creciente en progresión geométrica. En este sentido, si tomamos como referencia el final de la operación para establecer la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, para el cálculo de la suma financiera de los términos de aquella podrán utilizarse las expresiones para rentas vistas en el capítulo anterior. Concretamente, la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación en el momento final queda establecida del siguiente modo:

$$Q_n = \left[a \cdot \frac{1 - k^n \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{-n}}{1 + i_{(m)} - k} \right] \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

En la anterior expresión, en el interior de los corchetes se ha situado el valor inicial de una renta pospagable creciente en progresión geométrica. Este valor se multiplica por uno más el tipo de interés (para pasar a prepagable) y por uno más el tipo de interés elevado al número de períodos (para pasar a valor final).

Conocido el tipo de interés, la razón y el capital a constituir, la anterior expresión puede servir para calcular el valor del primero (y a partir de él, el de los demás) de los términos constitutivos.

Ejemplo A5.2

Sea una operación de constitución en la que las imposiciones prepagables se realizan trimestralmente. Estas imposiciones son crecientes en progresión geométrica de razón 1,05. En esta operación el capital a constituir asciende a 441,61 u.m. y el tipo de interés trimestral pactado es del 1 %. Sabiendo que la duración de la operación es de un año, calcúlese la cuantía de los términos constitutivos y confecciónese el cuadro de constitución.

El esquema de la operación será el siguiente:

a	$1{,}05\ a$	$1{,}05^2\ a$	$1{,}05^3\ a$	-441,61	Frec
0	1	2	3	4	4

Como se trata de una operación en la que la prestación es una renta creciente en progresión geométrica, el valor final de dicha renta deberá ser igual a la contraprestación, esto es, al capital a constituir:

$$441{,}61 = a \cdot \frac{1 - 1{,}05^4 \cdot \left(1 + 0{,}01\right)^{-4}}{1 + 0{,}01 - 4} \cdot \left(1 + 0{,}01\right) \cdot \left(1 + 0{,}01\right)^4$$

Expresión de la que se puede espejar el primero de los términos constitutivos:

$$a = 441{,}61 \cdot \left[\frac{1 - 1{,}05^4 \cdot \left(1 + 0{,}01\right)^{-4}}{1 + 0{,}01 - 4} \cdot \left(1 + 0{,}01\right) \cdot \left(1 + 0{,}01\right)^4 \right]^{-1} = 100{,}00 \text{ u.m.}$$

Conocido el primer término constitutivo, el cálculo de los demás es inmediato:

$$a_2 = 100{,}00 \cdot 1{,}05 = 105{,}00 \text{ u.m.}$$

$$a_3 = 105{,}00 \cdot 1{,}05 = 110{,}25 \text{ u.m.}$$

$$a_4 = 110{,}25 \cdot 1{,}05 = 115{,}76 \text{ u.m.}$$

Una vez se sabe el valor de los términos constitutivos, el resto de elementos del cuadro (cuota de interés, capital constituido y capital pendiente) se calculan de la forma general vista para las operaciones de constitución con términos constitutivos variables. El cuadro de constitución es el siguiente:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		100,00			0,00	441,61
1	0,01	105,00	1,00	101,00	101,00	340,61
2	0,01	110,25	2,06	107,06	208,06	233,55
3	0,01	115,76	3,18	113,43	321,49	120,12
4	0,01		4,36	120,12	441,61	0,00

A5.3. Términos constitutivos variables en progresión aritmética

Se trata de operaciones de constitución en las que los términos de la prestación (las imposiciones) son variables, pero varían de acuerdo con una determinada pauta: crecen (o decrecen) en progresión aritmética. Esto significa que cada término puede calcularse sumando al anterior una cantidad constante denominada razón de la progresión. Cuando dicha razón sea positiva, los términos constitutivos serán crecientes. Cuando la razón sea negativa, los términos constitutivos serán decrecientes.

El esquema general de una operación de constitución de las características que se están comentando se muestra en la figura A5.4.

a	$a+d$	$a+2\,d$	……..	$a+(n-1)\,d$	$-Q_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

Figura A5.4. Esquema de una operación en la que los términos constitutivos varían en progresión aritmética de razón d

Tal y como se puede apreciar en esta figura, la prestación de esta operación es una renta creciente en progresión aritmética. En este sentido, si tomamos como referencia el final de la operación para establecer la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, para el cálculo de la suma financiera de los términos de aquella, podrán utilizarse las expresiones para rentas vistas en el capítulo anterior. Concretamente, la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación en el momento final queda establecida del siguiente modo:

$$Q_n = \left[a_{\overline{n}|i_{(m)}} \cdot \left(a + \frac{d}{i_{(m)}} + n \cdot d \right) - \frac{n \cdot d}{i_{(m)}} \right] \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

Esto es, en el lado derecho de la anterior igualdad se tiene, entre corchetes, el valor inicial de una renta pospagable, variable en progresión aritmética. Dicho valor se multiplica por uno más el tipo de interés, para que sea el valor de una prepagable, y por uno más el tipo de interés elevado al número de períodos para que sea el valor final.

Conocidos el tipo de interés, la razón y el capital a constituir, la anterior expresión puede servir para calcular el valor del primero (y a partir de él el de los demás) de los términos constitutivos.

Ejemplo A5.3

Sea una operación de constitución en la que las imposiciones prepagables se realizan trimestralmente. Estas imposiciones son crecientes en progresión aritmética de razón 100. En esta operación el capital a constituir asciende a 1.225,20 u.m. y el tipo de interés trimestral pactado es del 1 %. Sabiendo que la duración de la operación es de un año, calcúlese la cuantía de los términos constitutivos y confecciónese el cuadro de constitución.

El esquema de la operación será el siguiente:

a	*a* + 100	*a* +2 100	*a* +3 100	-1225,2	Frec
0	1	2	3	4	4

Como se trata de una operación en la que la prestación es una renta creciente en progresión aritmética, el valor final de dicha renta deberá ser igual a la contraprestación, esto es, al capital a constituir:

$$1.225,2 = \left[a_{\overline{4}|0,01} \cdot \left(a + \frac{100}{0,01} + 4 \cdot 100 \right) - \frac{4 \cdot 100}{0,01} \right] \cdot (1 + 0,01) \cdot (1 + 0,01)^4$$

Siendo:

$$a_{\overline{4}|0,01} = \frac{1 - (1 + 0,01)^{-4}}{0,01}$$

Despejando el valor del primer término constitutivo se tiene:

$$a = \frac{\dfrac{1.225,2}{(1+0,01)\cdot(1+0,01)^4} + \dfrac{4\cdot 100}{0,01}}{a_{\overline{4}|0,01}} - \frac{100}{0,01} - 4\cdot 100 = 150 \quad \text{u.m.}$$

Conocido el primer término constitutivo, el cálculo de los demás es inmediato:

$$a_2 = 150,00 + 100,00 = 250,00 \text{ u.m.}$$

$$a_3 = 250,00 + 100,00 = 350,00 \text{ u.m.}$$

$$a_4 = 350,00 + 100,00 = 450,00 \text{ u.m.}$$

Una vez se han determinado los términos constitutivos, el resto de elementos del cuadro (cuota de interés, capital constituido y capital pendiente) se calculan de la forma general vista para las operaciones de constitución con términos constitutivos variables. El cuadro de constitución es el siguiente:

Per	Int	a_j	I_j	Δ_j	Q_j	P_j
0		150,00			0,00	1.225,20
1	0,01	250,00	1,50	151,50	151,50	1.073.70
2	0,01	350,00	4,02	254,02	405,52	819,68
3	0,01	450,00	7,56	357,56	763,08	462,12
4	0,01		12,12	462,12	1.225,20	0,00

Problemas propuestos

Problema 5.1

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones trimestrales prepagables constantes
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 6 %
- Capital a constituir: 5.000 u.m.

Con los datos anteriores, determínese la cuantía del término constitutivo.

Problema 5.2

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones trimestrales prepagables constantes
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 6 %
- Capital a constituir: 5.000 u.m.

Con los datos anteriores, confecciónese el cuadro de constitución de la operación.

Problema 5.3

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones semestrales prepagables constantes de cuantía 100 u.m.
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual:
  - Para el primer año: 4 %
  - Para los años sucesivos: euríbor (vigente al inicio del año) + 1 %

Una vez finalizada la operación se sabe que el euríbor vigente al inicio de los diferentes años ha sido el siguiente:

- Segundo año: 3 %
- Tercer año: 2,7 %
- Cuarto año: 2,6 %
- Quinto año: 2,9 %

Con los datos anteriores, determínese la cuantía del término constitutivo.

Problema 5.4

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones semestrales prepagables constantes de cuantía 100 u.m.
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual:
  - Para el primer año: 4 %
  - Para los años sucesivos: euríbor (vigente al inicio del año) + 1 %

Una vez finalizada la operación, se sabe que el euríbor vigente al inicio de los diferentes años ha sido el siguiente:

- Segundo año: 3 %
- Tercer año: 2,7 %
- Cuarto año: 2,6 %
- Quinto año: 2,9 %

Con los datos anteriores, determínese el tipo de interés efectivo anual de la operación.

Problema 5.5

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones semestrales prepagables crecientes en progresión geométrica de razón 1,01
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 5 %
- Capital a constituir: 6.000 u.m.

Con los datos anteriores, determínese la cuantía de los términos constitutivos.

Problema 5.6

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones semestrales prepagables crecientes en progresión geométrica de razón 1,01
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 5 %
- Capital a constituir: 6.000 u.m.

Con los datos anteriores, determínese confeccionar el cuadro de constitución de la operación.

Problema 5.7

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones trimestrales prepagables crecientes en progresión aritmética de razón 10 u.m.
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 8 %
- Capital a constituir: 7.000 u.m.

Con los datos anteriores, determínese la cuantía de los términos constitutivos.

Problema 5.8

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones trimestrales prepagables crecientes en progresión aritmética de razón 10 u.m.
- Duración: 5 años
- Tipo de interés nominal anual: 8 %
- Capital a constituir: 7.000 u.m.

Con los datos anteriores, confecciónese el cuadro de constitución de la operación.

Problema 5.9

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones mensuales prepagables
- Duración: 15 años
- Cuotas de constitución constantes
- Tipo de interés nominal anual: 3 %
- Capital a constituir: 18.000 u.m.

Con los datos anteriores, calcúlese el importe del término constitutivo correspondiente al período 144.

Problema 5.10

Sea una operación de constitución de las siguientes características:

- Imposiciones mensuales prepagables
- Duración: 2 años
- Cuotas de constitución constantes
- Tipo de interés nominal anual: 6 %
- Capital a constituir: 18.000 u.m.

Con los datos anteriores, confecciónese el cuadro de constitución de la operación.

Capítulo 6
Operaciones de amortización

El segundo gran grupo de operaciones a largo plazo son las denominadas operaciones de amortización. En estas operaciones, una de las partes desembolsa, al inicio de la operación (normalmente de una sola vez) un determinado importe monetario. La otra parte realiza desembolsos periódicos durante toda la vida de la operación que, en términos nominales son superiores, al desembolso inicial. En esencia se trata, por tanto, de préstamos.

Teóricamente existen múltiples esquemas de amortización. No obstante, los más habituales son el denominado método francés y el americano. Estos métodos, junto con el de cuotas de amortización constantes, se analizan en el presente capítulo.

Por otra parte, también es habitual que para estas operaciones de amortización se pacte un tipo de interés variable, revisado periódicamente en función de la evolución de un índice. Este tipo de operaciones indiciadas o indexadas también se tratan dentro de este capítulo.

Finalmente, el anexo recoge el funcionamiento del denominado método alemán y el de las operaciones con carencia. En estas últimas, a lo largo de una serie de períodos, una de las partes no realiza desembolso alguno en concepto de devolución del principal (carencia de principal) o no realiza ningún desembolso (carencia de principal e intereses).

A pesar de ser operaciones a largo plazo que, normalmente, conllevan un elevado número de desembolsos, a efectos didácticos, los ejemplos mostrados en este capítulo se han simplificado, mostrándose operaciones sencillas, con pocos desembolsos.

6.1. Concepto

En una operación de amortización, las partes se intercambian dos conjuntos de capitales en las siguientes condiciones:

- Los capitales de la prestación vencen en los períodos iniciales. De hecho, habitualmente, la prestación entrega un único capital en el momento inicial de la operación.
- Los capitales de la contraprestación vencen, generalmente de forma regular, durante toda la vida de la operación.

Los préstamos constituyen el ejemplo típico de operaciones de amortización. En un préstamo, el prestamista entrega al prestatario un importe monetario (prestación) y este prestatario devuelve al prestamista el importe recibido más los intereses generados a lo largo de la vida de la operación. En la mayor parte de operaciones de préstamo (aunque no siempre es así), la prestación es única. Por eso habitualmente una operación de préstamo se suele representar mediante un esquema (como el de la figura 6.1) que recoge una operación financiera de prestación única y contraprestación múltiple.[1]

C_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 6.1. Esquema general de una operación de amortización de prestación única y contraprestación múltiple

Como en toda operación financiera, en una operación de amortización se debe cumplir que los capitales de la prestación deben ser financieramente equivalentes a los de la contraprestación, en base al tipo de interés periodal pactado (la ley financiera utilizada es habitualmente la capitalización compuesta). Aunque la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación puede plantearse en cualquier momento del tiempo, en las operaciones de amortización, por simplicidad, esta equivalencia habitualmente se establece en el momento inicial de la operación (6.1):

$$C_0 = a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-2} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-n} \tag{6.1}$$

Ejemplo 6.1

Sea un préstamo (operación de amortización) en el que el capital prestado (prestación) asciende a 1.000 u.m. Se ha pactado la devolución de dicho capital, junto con el pago de los correspondientes intereses en 4 semestres, en cada uno de los cuales se pagará, respectivamente, 200, 300, 350 y 275 u.m. Determínese el tipo de interés efectivo anual que se ha pactado en la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

1000	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

El tipo de interés periodal de la operación será aquel que iguale, en un determinado momento del tiempo, la suma financiera de los capitales de la prestación con la suma financiera de los capitales de la contraprestación. Planteando esta igualdad en el momento inicial se tiene:

1. Cuando, en una operación de préstamo, la prestación es múltiple, los capitales de esta prestación vencen en los períodos iniciales de la operación.

$$1.000 = 200 \cdot \left(1+i_{(2)}\right)^{-1} + 300 \cdot \left(1+i_{(2)}\right)^{-2} + 350 \cdot \left(1+i_{(2)}\right)^{-3} + 275\left(1+i_{(2)}\right)^{-4}$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal (la incógnita) no puede despejarse, por lo que debe calcularse mediante una aproximación, usando algún tipo de algoritmo iterativo. Como ya se ha comentado, las hojas de cálculo de los paquetes de ofimática tienen funciones que proporcionan esta aproximación de forma inmediata. Como en anteriores ocasiones, en nuestro caso hemos utilizado la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» del paquete de ofimática de software libre «LibreOffice». Utilizando dicha función, la aproximación del tipo de interés periodal que se obtiene es la siguiente:

$$i_{(2)} = 0{,}046385$$

A partir de este tipo periodal, el tipo de interés efectivo anual se obtiene usando las ecuaciones de tantos equivalentes:

$$i = \left(1+0{,}046385\right)^{2} - 1 = 0{,}094922$$

Al igual que en las operaciones de constitución interesaba conocer el capital constituido al final de cualquiera de los períodos de la operación, en las operaciones de amortización, en los préstamos, se calcula el capital pendiente de amortización, el capital pendiente de devolución, al final de cada uno de los períodos de la operación financiera. Para ello se puede utilizar el concepto de saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera, visto en capítulos anteriores.

En efecto, sea la operación financiera de amortización representada en la figura 6.1. De esta operación, interesa conocer el capital pendiente en un momento g anterior al vencimiento ($0 < g < n$). Este capital será igual a la reserva matemática en dicho momento, que podrá calcularse tanto por el método prospectivo como por el retrospectivo. El esquema para calcular la reserva según el primero de los métodos se ha representado en la figura 6.2.

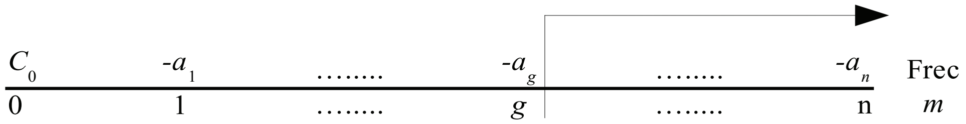


Figura 6.2. Operación de amortización. Esquema de cálculo de la reserva en g por el método prospectivo

Según se puede apreciar en esta figura 6.2, el cálculo planteado es el de la reserva en g por la derecha, esto es, justo después de que la contraprestación realice su pago. Por el método prospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la contraprestación posteriores al momento g menos la suma financiera de los capitales de la prestación posteriores a dicho momento:

$$R_g^+ = \left[a_{g+1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-n} \right] - 0$$

Como después del momento *g*, no vence ningún capital de la prestación, la reserva en este momento será igual a la suma financiera de los capitales de la contraprestación:

$$R_g^+ = a_{g+1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-n}$$

Esto es, la reserva en *g* es igual a la suma financiera de los capitales de la contraprestación que, en dicho momento, están pendientes de vencimiento (pendientes de pago). Por tanto, esta reserva nos está proporcionando la cuantía del capital pendiente (de devolución) en el instante *g*, anterior al final de la operación (ecuación 6.2):

$$C_g = a_{g+1} \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{-1} + ... + a_n \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-n} \qquad (6.2)$$

La reserva también se puede calcular por el método retrospectivo. Por el prospectivo se ha calculado directamente el capital pendiente en un determinado momento *g* como la suma financiera de los capitales de la contraprestación que, en ese momento, quedaban pendientes. Por el retrospectivo se calculará la diferencia entre el valor en *g* del capital total a devolver y el valor en *g* de lo aportado hasta dicho momento para devolver el mencionado capital. Ambos importes de la reserva son equivalentes.

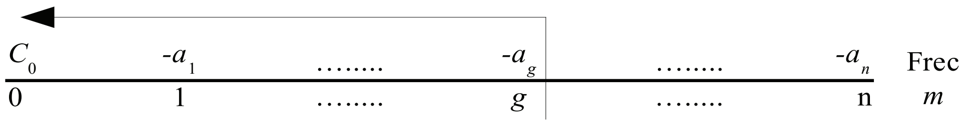


Figura 6.3. Operación de amortización. Esquema de cálculo de la reserva en *g* por el método retrospectivo

Por el método retrospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores al momento *g* menos la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a dicho momento:

$$R_g^+ = C_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g} - \left[a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-2} + ... + a_g \right]$$

Como la reserva en un determinado momento, sea cual sea el método usado para su cálculo, es única, la reserva en *g* por el método retrospectivo también nos proporcionará la cuantía del capital pendiente en dicho momento, justo después de que la contraprestación haya realizado la aportación correspondiente a dicho período (6.3):

$$C_g = C_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g} - \left[a_1 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-1} + a_2 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^{g-2} + ... + a_g \right] \qquad (6.3)$$

Ejemplo 6.2

Sea una operación de amortización de 4 semestres de duración. La cuantía de los 4 pagos –términos amortizativos– semestrales (pospagables) es de 200, 300, 350 y 275 u.m. El capital prestado al inicio de la operación asciende a 1.000 u.m. El tipo de interés semestral pactado para esta operación es el 0,046385. Con estos datos calcúlese el capital pendiente al final del segundo semestre.

Vamos a resolver el problema usando, primero el método prospectivo y después el retrospectivo.

El esquema de cálculo por el método prospectivo será el siguiente:

1000	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

El capital constituido será:

$$C_2 = 350 \cdot \left(1+0{,}046385\right)^{-1} + 275 \cdot \left(1+0{,}046385\right)^{-2} = 585{,}64 \text{ u.m.}$$

Para el cálculo por el retrospectivo el esquema será:

1000	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

Y el capital pendiente se calculará del siguiente modo:

$$C_2 = 1000 \cdot \left(1+0{,}046385\right)^{2} - \left[200 \cdot \left(1+0{,}046385\right) + 300\right] = 585{,}64 \text{ u.m.}$$

Obviamente, conocido el capital pendiente en un momento del tiempo, el capital pendiente en otro momento distinto podrá calcularse usando las expresiones de la vistas en capítulos anteriores para la determinación de la reserva por el método recurrente. De hecho, este método recurrente resulta especialmente interesante para calcular el capital pendiente al final de un determinado período, a partir del capital pendiente al final del período inmediatamente anterior. El esquema de este cálculo se recoge en la figura 6.4.

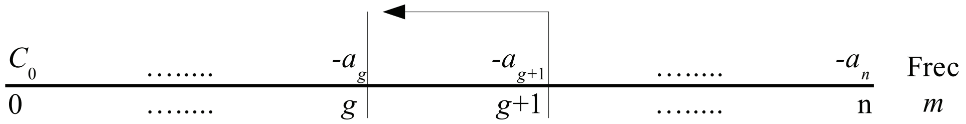


Figura 6.4. Cálculo del capital pendiente (reserva matemática). Método recurrente
Períodos consecutivos

Conocido el capital pendiente al final del período g (C_g) el capital pendiente al final del período siguiente se obtendrá tal y como se detalla a continuación:

1. Se determinará el equivalente financiero del primer capital (C_g) al final del período siguiente (g +1).
2. A dicho equivalente se le sumará el equivalente en g +1 de los capitales de la prestación que venzan entre g y g +1. Como se puede apreciar ningún capital de la prestación vence en dicho período (la prestación es única y vence al principio de la operación).
3. Y, a dicho equivalente se le restará el equivalente en g +1 de los capitales de la contraprestación que venzan entre g y g +1. Hay un único capital que vence en dicho período y lo hace precisamente en el momento g +1: a_{g+1}

La expresión a utilizar es la siguiente (6.4):

$$C_{g+1} = C_g \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - a_{g+1} \tag{6.4}$$

6.2. El cuadro de amortización

El cuadro de amortización permite conocer el capital pendiente de amortizar (y también el capital amortizado) al final de cada uno de los períodos de la operación. Asimismo, ese cuadro de amortización informa sobre el monto de intereses generado y el importe de principal amortizado en cada uno de dichos períodos. Concretamente, dentro del cuadro de amortización se incluyen las siguientes magnitudes, para cada uno de los períodos (j):

- Tipo de interés periodal: $i_{(m)}$
- Término amortizativo: a_j
- Cuota de interés: I_j
- Cuota de amortización: A_j
- Capital pendiente de amortizar: C_j
- Capital amortizado: M_j

El cuadro de amortización se suele presentar en forma de tabla según la estructura que muestra la figura 6.5.

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	M_0
1	$i_{(m)}$	a_1	I_1	A_1	C_1	M_1
2	$i_{(m)}$	a_2	I_2	A_2	C_2	M_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a_{n-1}	I_{n-1}	A_{n-1}	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i_{(m)}$	a_n	I_n	A_n	C_n	M_n

Figura 6.5. Cuadro de amortización. Tipo de interés constante

El capital pendiente, C_j, es el importe (del préstamo) que, al final de cada período, está pendiente de amortización (devolución). Lógicamente, al inicio de la operación, ese capital pendiente será el importe del préstamo, esto es, el principal (o nominal) de la operación.

La cuota de amortización A_j proporciona el monto de principal (nominal) que se va amortizando en cada uno de los períodos. Por lo tanto, la suma de todas las cuotas de amortización debe ser igual al principal del préstamo (6.5):

$$C_0 = \sum_{j=1}^{n} A_j \tag{6.5}$$

Y la cuantía del capital pendiente para un período concreto se podrá obtener restando al pendiente en el período inmediatamente anterior la cuota de amortización del período (6.6):

$$C_j = C_{j-1} - A_j \tag{6.6}$$

El capital amortizado, M_j, es el importe del principal de la operación (nominal de la operación) que se ha amortizado hasta el período en cuestión. Ese capital amortizado será igual a la suma de las cuotas de amortización anteriores (6.7).

$$M_j = \sum_{r=1}^{j} A_r \tag{6.7}$$

La cuota de amortización, A_j, (que es la parte de principal que se amortiza en el período) se podrá calcular como la diferencia entre los capitales amortizados al final del período en cuestión y al final del período inmediatamente anterior (6.8).

$$A_j = C_j - C_{j-1} \tag{6.8}$$

La cuota de interés, I_j, se corresponde con los intereses generados por la operación en el período, y se obtiene multiplicando el tipo de interés periodal por el capital pendiente al final del período inmediatamente anterior. (6.9).

$$I_j = C_{j-1} \cdot i_{(m)} \tag{6.9}$$

Finalmente, el término amortizativo, que es el monto total que paga la contraprestación, se obtiene sumando la cuota de interés y la cuota de amortización del período (6.10).

$$a_j = I_j + A_j \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.3

Sea una operación de amortización de 4 semestres de duración. La cuantía de los 4 pagos –términos amortizativos– semestrales (pospagables) es de 200, 300, 350 y 275 u.m. El capital prestado al inicio de la operación asciende a 1.000 u.m. El tipo de interés semestral pactado para esta operación es el 0,046385. Con estos datos, confecciónese el cuadro de amortización de la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

1000	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

A partir del esquema, el cuadro de amortización siempre empieza a confeccionarse con los datos de los que se dispone: en este caso, los términos amortizativos y el capital pendiente de amortizar:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,046385	200,00				
2	0,046385	300,00				
3	0,046385	350,00				
4	0,046385	275,00				

El resto de ítems se calcula en base a la información disponible. Para el primer período, la cuota de interés será el capital pendiente al inicio multiplicado por el tipo de interés. La cuota de amortización se calculará como diferencia entre el término amortizativo y dicha cuota de interés:

$$I_1 = 0{,}046385 \cdot 1.000 = 46{,}39 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 200 - 46{,}39 = 153{,}61 \text{ u.m.}$$

El capital pendiente se obtendrá restando al pendiente en el período anterior (1.000, el principal, pues se trata del principio de la operación) la cuota de amortización del período:

$$C_1 = 1.000 - 153{,}61 = 846{,}39 \text{ u.m.}$$

Y el capital amortizado será la diferencia entre 1.000 (principal de la operación) y el capital pendiente:

$$M_1 = 1.000 - 846{,}39 = 153{,}61 \text{ u.m.}$$

Los datos se trasladan al cuadro:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,046385	200,00	46,39	153,61	846,39	153,61
2	0,046385	300,00				
3	0,046385	350,00				
4	0,046385	275,00				

Con el segundo de los períodos se procede de un modo similar:

$$I_2 = 0{,}046385 \cdot 846{,}39 = 39{,}26 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 300 - 39{,}26 = 260{,}74 \text{ u.m.}$$

$$C_2 = 846{,}39 - 260{,}74 = 585{,}65 \text{ u.m.}$$

$$M_1 = 1.000 - 585{,}65 = 414{,}35 \text{ u.m.}$$

De nuevo se trasladan al cuadro el resultado de los cálculos realizados:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,046385	200,00	46,39	153,61	846,39	153,61
2	0,046385	300,00	39,26	260,74	585,65	414,35
3	0,046385	350,00				
4	0,046385	275,00				

Y con los períodos restantes se procede de un modo similar. A continuación se muestra el cuadro de amortización completado:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,046385	200,00	46,39	153,61	846,39	153,61
2	0,046385	300,00	39,26	260,74	585,65	414,35
3	0,046385	350,00	27,17	322,83	262,82	737,18
4	0,046385	275,00	12,18	262,82	0,00	1.000,00

6.3. Métodos de amortización

En los apartados anteriores se ha visto el funcionamiento de una operación financiera de amortización de carácter general. No obstante, en la práctica la mayor parte de operaciones siguen unas pautas determinadas en cuanto a la cuantía de los términos amortizativos o la cuantía de las cuotas de amortización. Esto es, en la práctica se utiliza un número reducido de esquemas de amortización, tratándose dentro de este epígrafe los que son más habituales.

6.3.1. Método francés

Los préstamos (operaciones de amortización) que se amortizan por el método o sistema francés se caracterizan porque la cuantía de los términos amortizativos es constante. El esquema de una operación de este tipo será, por tanto, el que se muestra en la figura 6.6.

C_0	*-a*	*-a*	….....	*-a*	*-a*	Frec
0	1	2	….....	n-1	n	*m*

Figura 6.6. Esquema general de una operación de amortización. Sistema francés

Tal y como se puede apreciar en esta figura 6.6, la contraprestación de esta operación es una renta constante pospagable. Por tanto, teniendo en cuenta que prestación y contraprestación deben ser financieramente equivalentes, si en la operación se conoce el tipo de interés periodal y la cuantía del principal del préstamo, la determinación de la cuantía del término amortizativo es inmediata, recurriendo a las expresiones vistas en el capítulo dedicado a las rentas financieras.

En efecto, el principal del préstamo debe ser igual al valor inicial de una renta constante y pospagable valorada al tipo de interés periodal pactado para la operación:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_{(m)}} = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}{i_{(m)}}$$

Despejando el término amortizativo se obtiene la expresión a partir de la cual se puede calcular el valor de dicho término conociendo el tipo de interés periodal y el principal de la operación (6.11):

$$a = \frac{C_0 \cdot i_{(m)}}{1 - \left(1 + i_{(m)}\right)^{-n}} \qquad (6.11)$$

Ejemplo 6.4

Sea un préstamo de cuatro períodos, amortizable mediante el sistema o método francés. La contraprestación (prestatario) realiza sus pagos con una periodicidad cuatrimestral. El principal del préstamo es de 2.000 u.m. y se ha pactado un tipo de interés nominal anual del 6 %. Con estos datos se desea calcular la cuantía del término amortizativo de la operación.

La operación queda representada en el siguiente esquema:

2000	$-a$	$-a$	$-a$	$-a$	Frec
0	1	2	3	4	3

Una vez representada la operación, como el tipo de interés que nos proporcionan es anual, calcularemos el periodal correspondiente usando las ecuaciones de equivalencia de tantos:

$$i_{(3)} = \frac{0,06}{3} = 0,02$$

La cuantía del término amortizativo será:

$$a = \frac{2.000 \cdot 0,02}{1 - \left(1 + 0,02\right)^{-4}} = 525,25 \text{ u.m.}$$

Como en el resto de operaciones de amortización, en aquellas en las que se emplea el método francés, se puede calcular el capital pendiente de amortización al final de cualquiera de los períodos usando las expresiones vistas para el cálculo de la reserva, como se ha hecho en epígrafes anteriores. Ahora bien, dado que los términos amortizativos son constantes, los cálculos se simplifican mucho al poder usarse las expresiones vistas dentro del capítulo de rentas.

En efecto, sea la operación financiera de amortización representada en la figura 6.6. De esta operación, interesa conocer el capital pendiente en un momento «g» anterior al vencimiento de la operación ($0 < g < n$). Este capital será igual a la reserva matemática en dicho momento, que podrá calcularse tanto por el método prospectivo como por el retrospectivo. El esquema para calcular la reserva según el primero de los métodos se ha representado en la figura 6.7.

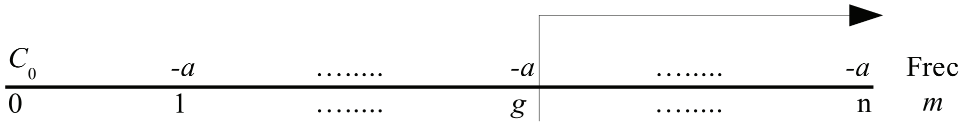


Figura 6.7. Operación de amortización. Método francés. Esquema de cálculo de la reserva en g por el método prospectivo

Según se puede apreciar en esta figura 6.7, el cálculo planteado es el de la reserva en g por la derecha, esto es, justo después de que la contraprestación realice su pago. Por el método prospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la contraprestación posteriores al momento g menos la suma financiera de los capitales de la prestación posteriores a dicho momento. Como los términos amortizativos son constantes, la suma financiera de los capitales de la contraprestación se puede calcular usando las expresiones vistas en capítulos anteriores para las rentas constantes. Concretamente, se puede calcular como el valor inicial de una renta constante pospagable de n-g períodos de duración:

$$R_g^+ = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)}}{i_{(m)}} - 0$$

Nótese que, como después del momento g no vence ningún capital de la prestación, la reserva en este momento será igual a la suma financiera de los capitales de la contraprestación:

$$R_g^+ = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)}}{i_{(m)}}$$

Esto es, la reserva en g es igual a la suma financiera de los capitales de la contraprestación que, en dicho momento, están pendientes de vencimiento (pendientes de pago). Por tanto, esta reserva nos está proporcionando la cuantía del capital pendiente (de devolución) en g, momento anterior al final de la operación (ecuación 6.12):

$$C_g = a \cdot \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(n-g)}}{i_{(m)}} \tag{6.12}$$

Ejemplo 6.5

Sea un préstamo de cuatro períodos, amortizable mediante el sistema o método francés. La contraprestacion (prestatario) realiza sus pagos con una periodicidad cuatrimestral. El principal del préstamo es de 2.000 u.m., la cuantía de los términos amortizativos asciende a 525,25 u.m. y se ha pactado un tipo de interés cuatrimestral del 2 %. Con estos datos, se desea conocer el capital pendiente de amortización al final del segundo período. Úsese el método prospectivo para la determinación de la reserva matemática.

El esquema del cálculo solicitado es el siguiente:

2000	-525.25	-525.25	-525.25	-525.25	Frec
0	1	2	3	4	3

El cálculo del capital pendiente se realizará del siguiente modo:

$$C_2 = 525{,}25 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}02\right)^{-2}}{0{,}02} = 1.019{,}80 \text{ u.m.}$$

El cálculo de la reserva (capital pendiente) también se puede realizar por el método retrospectivo. La figura 6.8 representa el esquema para dicho cálculo.

C_0	*-a*	……..	*-a*	……..	*-a*	Frec
0	1	……..	*g*	……..	n	*m*

Figura 6.8. Operación de amortización. Método francés. Esquema de cálculo de la reserva en *g* por el método retrospectivo

Según se puede apreciar en esta figura 6.8, el cálculo planteado es el de la reserva en *g* por la derecha, esto es, justo después de que la contraprestación realice su pago. Por el método retrospectivo, la reserva se calcula como la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores al momento de corte (*g* por la derecha) menos la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a dicho momento. Como los términos amortizativos son constantes, la suma financiera de los capitales de la contraprestación se puede calcular usando las expresiones vistas en capítulos anteriores para las rentas constantes. Concretamente, se puede calcular como el valor final de una renta constante pospagable de *g* períodos de duración. Por tanto, la expresión para calcular la reserva será:

$$R_g^+ = C_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^g - a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^g - 1}{i_{(m)}}$$

La reserva en un momento determinado es única, sea cual sea el método usado para su cálculo. Por tanto, esta reserva también proporciona una cuantificación del capital pendiente (6.13):

$$C_g = C_0 \cdot \left(1+i_{(m)}\right)^g - a \cdot \frac{\left(1+i_{(m)}\right)^g - 1}{i_{(m)}} \qquad (6.13)$$

Ejemplo 6.6

Sea un préstamo de cuatro períodos, amortizable mediante el sistema o método francés. La contraprestación (prestatario) realiza sus pagos con una periodicidad cuatrimestral. El principal del préstamo es de 2.000 u.m., la cuantía de los términos amortizativos asciende a 525,25 u.m. y se ha pactado un tipo de interés cuatrimestral del 2 %. Con estos datos, se desea conocer el capital pendiente de amortización al final del segundo período. Úsese el método retrospectivo para la determinación de la reserva matemática.

El cálculo requerido se puede representar con el siguiente esquema:

2000	-525.25	-525.25	-525.25	-525.25	Frec
0	1	2	3	4	3

El capital pendiente será:

$$C_2 = 2.000 \cdot \left(1+0{,}02\right)^2 - 525{,}25 \cdot \frac{\left(1+0{,}02\right)^2 - 1}{0{,}02} = 1.019{,}80 \text{ u.m.}$$

El cuadro de amortización en una operación en la que se emplea el método francés se confecciona de un modo similar al de cualquier otra operación de amortización. Se suele empezar por el término amortizativo, ya que es la primera de las magnitudes que, o bien se conoce, o bien debe calcularse. A partir del término amortizativo constante, se van calculando el resto de magnitudes del cuadro. El esquema general de un cuadro de este tipo de operaciones se ha recogido en la figura 6.9.

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	M_0
1	$i_{(m)}$	a	I_1	A_1	C_1	M_1
2	$i_{(m)}$	a	I_2	A_2	C_2	M_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a	I_{n-1}	A_{n-1}	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i_{(m)}$	a	I_n	A_n	C_n	M_n

Figura 6.9. Cuadro de amortización. Tipo de interés constante. Sistema francés

El término amortizativo se calculará a partir de (6.11):

$$a = \frac{C_0 \cdot i_{(m)}}{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-n}}$$

Y a partir de dicho término se calculan el resto de magnitudes, período tras período:

- Cuota de interés: $I_j = C_{j-1} \cdot i_{(m)}$
- Cuota de amortización: $A_j = a - I_j$
- Capital pendiente: $C_j = C_{j-1} - A_j$
- Y capital amortizado: $M_j = C_0 - C_j = M_{j-1} + A_j$

En las operaciones amortizables a través del método francés, resulta interesante detenerse un instante en las cuotas de amortización. De acuerdo con (6.4), el capital pendiente en cualquier momento *j* y *j*-1 se puede calcular según las siguientes expresiones:

$$C_j = C_{j-1} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - a$$

$$C_{j-1} = C_{j-2} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - a$$

Si restamos ambas expresiones se obtiene:

$$C_j - C_{j-1} = C_{j-1} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - a - \left[C_{j-2} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) - a\right] = \left(C_{j-1} - C_{j-2}\right) \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

La diferencia entre el capital pendiente al final de dos períodos consecutivos es por definición la cuota de amortización del período. Por tanto, la anterior igualdad se puede reescribir en los siguientes términos (6.14):

$$A_j = A_{j-1} \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) \qquad (6.14)$$

Esto es, en un préstamo amortizable mediante el sistema francés, cualquier cuota de amortización puede calcularse multiplicando la anterior por una constante. Es decir, las cuotas de amortización siguen una progresión geométrica de razón:

$$\left(1 + i_{(m)}\right)$$

De este modo, a partir de la cuota de amortización de primer período podrá calcularse la cuota de amortización de cualquier período:

$$A_2 = A_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

$$A_3 = A_2 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = A_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^2$$

…............

$$A_j = A_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{j-1} \qquad (6.15)$$

Ejemplo 6.7

Sea un préstamo de cuatro períodos, amortizable mediante el sistema o método francés. La contraprestación (prestatario) realiza sus pagos con una periodicidad cuatrimestral. El principal del préstamo es de 2.000 u.m. y se ha pactado un tipo de interés cuatrimestral del 2 %. Con estos datos, elabórese el cuadro de amortización y calcúlese la cuota de amortización del tercer período a partir de la cuota de amortización del primer período.

El esquema de la operación es el siguiente:

2000	-525.25	-525.25	-525.25	-525.25	Frec
0	1	2	3	4	3

Aunque ya se conoce la cuantía de ejemplos anteriores, vamos a proceder a calcular el término amortizativo:

$$a = \frac{2.000 \cdot 0{,}02}{1-\left(1+0{,}02\right)^{-4}} = 525{,}25 \text{ u.m.}$$

Una vez conocido el término amortizativo se comienza a confeccionar el cuadro de amortización con todos los ítems de los que se dispone:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					2.000,00	0,00
1	0,02	525,25				
2	0,02	525,25				
3	0,02	525,25				
4	0,02	525,25				

Para el primero de los períodos las magnitudes se calculan según las siguientes expresiones:

$$I_1 = 2.000 \cdot 0{,}02 = 40 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 525{,}25 - 40 = 485{,}25 \text{ u.m.}$$

$$C_1 = 2.000 - 485{,}25 = 1514{,}75 \text{ u.m.}$$

$$M_1 = 0 + 485{,}25 = 485{,}25 \text{ u.m.}$$

Se trasladan los resultados al cuadro:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					2.000,00	0,00
1	0,02	525,25	40,00	485,25	1.514,75	485,25
2	0,02	525,25				
3	0,02	525,25				
4	0,02	525,25				

Y con el segundo de los períodos se procede de igual forma:

$$I_2 = 1.514{,}75 \cdot 0{,}02 = 30{,}30 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 525{,}25 - 30{,}3 = 494{,}95 \text{ u.m.}$$

$$C_2 = 1.514{,}75 - 494{,}95 = 1.019{,}80 \text{ u.m.}$$

$$M_2 = 485{,}25 + 494{,}95 = 980{,}20 \text{ u.m.}$$

Para el resto de períodos se procede de un modo similar. El cuadro de amortización completo se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					2.000,00	0,00
1	0,02	525,25	40,00	485,25	1.514,75	485,25
2	0,02	525,25	30,30	494,95	1.019,80	980,20
3	0,02	525,25	20,40	504,85	514,95	1.485,05
4	0,02	525,25	10,30	514,95	0,00	2.000,00

Ahora se procede a calcular la cuota de amortización del tercer período en base a la del primer período:

$$A_3 = 485{,}25 \cdot \left(1 + 0{,}02\right)^2 = 504{,}85 \text{ u.m.}$$

6.3.2. El sistema americano

En los préstamos amortizables mediante el sistema o método americano, las cuotas de amortización son nulas en todos los períodos excepto en el último, período en el cual la cuota de amortización es igual al principal de la operación. Esto es, la contraprestación devuelve el principal (a la prestación) al final de la operación. En el resto de períodos solo paga intereses. El esquema de un préstamo americano es el siguiente (figura 6.10):

C_0	$-I$	$-I$	……..	$-I$	$-I$-C_0	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	m

Figura 6.10. Esquema de un préstamo americano. Tipo de interés constante

El cuadro de amortización de un préstamo americano se muestra en la figura 6.11.

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	0
1	$i_{(m)}$	I	I	0	C_0	
2	$i_{(m)}$	I	I	0	C_0	
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	I	I	0	C_0	0
n	$i_{(m)}$	$I+C_0$	I	C_0	0	C_0

Figura 6.1.1 Cuadro de amortización de un préstamo americano. Tipo de interés constante

La cuota de interés se obtiene multiplicando el tipo de interés por el capital pendiente, que siempre es el principal de la operación, al no haber devolución alguna de principal hasta el final.

Ejemplo 6.8

Sea un préstamo de cuatro períodos, amortizable mediante el sistema o método americano. La contraprestacion (prestatario) realiza sus pagos con una periodicidad semestral. El principal del préstamo es de 1.000 u.m. y para el mismo se ha pactado un tipo de interés semestral del 1,5 %. Con estos datos, elabórese el cuadro de amortización.

El esquema de la operación es el siguiente:

1000	$-I$	$-I$	$-I$	$-I$-1000	Frec
0	1	2	3	4	2

La cuota de interés será:

$$I = 0{,}015 \cdot 1.000 = 15{,}00 \text{ u.m.}$$

Y el cuadro de amortización ya se puede elaborar con los datos de los que se dispone:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	15,00	15,00	0,00	1.000,00	0,00
2	0,015	15,00	15,00	0,00	1.000,00	0,00
3	0,015	15,00	15,00	0,00	1.000,00	0,00
4	0,015	1.015,00	15,00	1.000,00	0,00	1.000,00

6.3.3. El método de cuotas de amortización constantes

El último de los sistemas o métodos de amortización que se tratan dentro del presente epígrafe es el correspondiente a cuotas de amortización constantes. En este sistema, como su nombre indica, en cada uno de los períodos se amortiza el mismo importe, esto es, las cuotas de amoritzación son constantes. El esquema de una operación de esta modalidad es el general de un operación en el que los términos amortizativos son variables (figura 6.12).

C_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 6.12. Esquema de un préstamo con cuotas de amortización constantes. Tipo de interés constante

El esquema de la operación no ofrece ningún tipo de información relevante. Es quizá el cuadro de amortización el que nos permite ver la particularidad de este tipo de operaciones (figura 6.13):

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	M_0
1	$i_{(m)}$	a_1	I_1	A	C_1	M_1
2	$i_{(m)}$	a_2	I_2	A	C_2	M_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a_{n-1}	I_{n-1}	A	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i_{(m)}$	a_n	I_n	A	C_n	M_n

Figura 6.13. Cuadro de amortización de un préstamo con cuotas de amortización constantes. Tipo de interés constante

Teniendo en cuenta que la suma de todas las cuotas de amortización debe ser igual al principal del préstamo, la cuota de amortización constante se calculará dividiendo el principal del préstamo entre el número de períodos (6.16):

$$C_0 = \sum_{j=1}^{n} A = n \cdot A$$

$$A = \frac{C_0}{n} \tag{6.16}$$

Conocida la cuota de amortización, la cuota de interés, el término amortizativo y el capital pendiente del primer período se calculan del siguiente modo:

$$I_1 = C_0 \cdot i_{(m)}$$

$$a_1 = I_1 + A$$

$$C_1 = C_0 - A$$

En el segundo período se procede de un modo similar:

$$I_2 = C_1 \cdot i_{(m)} = \left(C_0 - A\right) \cdot i_{(m)} = C_0 \cdot i_{(m)} - A \cdot i_{(m)} = I_1 - A \cdot i_{(m)}$$

$$a_2 = I_2 + A = I_1 - A \cdot i_{(m)} + A = a_1 - A \cdot i_{(m)}$$

$$C_2 = C_1 - A = C_0 - 2 \cdot A$$

En el tercer período:

$$I_3 = C_2 \cdot i_{(m)} = \left(C_0 - 2 \cdot A\right) \cdot i_{(m)} = \left[C_0 \cdot i_{(m)} - A \cdot i_{(m)}\right] - A \cdot i_{(m)} = I_2 - A \cdot i_{(m)}$$

$$a_3 = I_3 + A = I_2 - A \cdot i_{(m)} + A = a_2 - A \cdot i_{(m)}$$

$$C_3 = C_2 - A = C_0 - 3 \cdot A$$

………..

Para el período *j*:

$$I_j = I_{j-1} - A \cdot i_{(m)}$$

$$a_j = a_{j-1} - A \cdot i_{(m)}$$

$$C_j = C_0 - j \cdot A$$

Tal y como se puede apreciar, tanto las cuota de interés como los términos amortizativos varían en progresión aritmética (decreciente) de razón $-A \cdot i_{(m)}$. Por su parte, el capital pendiente varia también en progresión aritmética (decreciente) de razón $-A$. Por tanto, cualquiera de estas magnitudes, de cualquier período, podrá calcularse a partir de las del primer período:

$$I_j = I_1 - (j-1) \cdot A \cdot i_{(m)} \tag{6.17}$$

$$a_j = a_1 - (j-1) \cdot A \cdot i_{(m)} \tag{6.18}$$

$$C_j = C_0 - j \cdot A \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.9

Sea un préstamo amortizable mediante el sistema de cuotas de amortización constantes. La duración del préstamo es de dos años y los pagos son semestrales. Para la operación se ha pactado un tipo de interés semestral del 1,5 %. El principal (nominal) de la operación es de 1.000 u.m. Con esta información, elabórese el cuadro de amortización de la operación. Adicionalmente, calcúlese el término amortizativo, la cuota de interés y el capital pendiente del tercer período, a partir de las respectivas magnitudes del primer período.

El esquema de la operación es el siguiente:

1000	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	Frec
0	1	2	3	4	2

Como se trata de un préstamo amortizable mediante el método de cuotas de amortización constantes, lo primero que debe calcularse es la cuantía de dichos cuotas:

$$A = \frac{1.000}{4} = 250{,}00 \text{ u.m.}$$

Con esta información ya se puede empezar a elaborar el cuadro de amortización:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015			250,00	750,00	250,00
2	0,015			250,00	500,00	500,00
3	0,015			250,00	250,00	750,00
4	0,015			250,00	0,00	1.000,00

La cuota de interés del primer período se calcula multiplicando el capital pendiente por el tipo de interés. Por su parte, el término amortizativo será la suma de dicha cuota de interés y de la cuota de amortización:

$$I_1 = 1.000 \cdot 0{,}015 = 15 \text{ u.m.}$$

$$a_1 = 250 + 15 = 265 \text{ u.m.}$$

Con el resto de períodos se procede de igual modo (téngase en cuenta que, al ser constantes las cuotas de amortización, el capital pendiente se conoce para todos los períodos). El cuadro de amortización completo se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	265,00	15,00	250,00	750,00	250,00
2	0,015	261,25	11,25	250,00	500,00	500,00
3	0,015	257,50	7,50	250,00	250,00	750,00
4	0,015	253,75	3,75	250,00	0,00	1.000,00

Ahora se procede al cálculo de las magnitudes del tercer período a partir de las del primero:

$$I_3 = 15 - 2 \cdot 0{,}015 \cdot 250 = 7{,}50 \text{ u.m.}$$

$$a_3 = 265 - 2 \cdot 0{,}015 \cdot 250 = 257{,}50 \text{ u.m.}$$

$$C_3 = 1.000 - 3 \cdot 250 = 250 \text{ u.m.}$$

6.4. Operaciones de amortización indiciadas

Hasta este punto, en todas las operaciones de amortización que se han visto, el tipo de interés utilizado ha sido el mismo durante toda la operación. No obstante, es bastante usual que el tipo de interés inicialmente pactado se aplique solo durante un reducido número de períodos (habitualmente durante un año). Para el resto de períodos se suele pactar que el tipo de interés esté referenciado a un índice: al inicio de cada uno de los períodos en los que se revisa el tipo de interés (normalmente cada año) se obtiene el valor del índice al cual se añade el diferencial pactado (conocido como «spread»). Y será la suma de ese índice más ese diferencial la que se empleará como tipo de interés de la operación durante varios períodos, hasta que se produzca la nueva revisión de los tipos de interés (normalmente durante un año).

En las operaciones de amortización, de unos años a esta parte, lo más corriente es que, como índice de referencia, se utilice el euríbor. El euríbor es un índice que se calcula diariamente, por el Banco Central Europeo, en base a los tipos de interés a los cuales los bancos están dispuestos a prestar dinero a otros bancos (dentro del mercado interbancario del euro).

Debe destacarse que en estas operaciones indiciadas, a priori no se conoce cuál es el importe que finalmente pagará la contraprestación. Este importe dependerá de cuáles sean las revisiones que se produzcan de los tipos de interés. Así, el modo de proceder en estas operaciones indiciadas es calcular un primer cuadro de amortización con el tipo de interés inicialmente pactado, y cada vez que se produce una revisión en ese tipo de interés recalcular el cuadro de amortización.

Ejemplo 6.10

Sea un préstamo amortizable mediante el sistema de cuotas de amortización constantes. La duración del préstamo es de dos años y los pagos son semestrales. El principal (nominal) de la operación es de 1.000 u.m. y se ha pactado para el primer año un tipo de interés nominal anual del 3 %. Este tipo de interés se revisará cada año en base al valor del euríbor. Concretamente, el tipo de interés a aplicar en los años sucesivos será el euríbor más el 1 %.

- Elaborar el cuadro de amortización de la operación con el tipo de interés inicialmente pactado.
- Si al inicio del segundo año el euríbor se sitúa en el 2,5 %, volver a confeccionar el cuadro de amortización.

El esquema de la operación es el siguiente:

1000	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	Frec
0	1	2	3	4	2

El tipo de interés semestral pactado para el primer año se calcula del siguiente modo:

$$i_{(2)} = \frac{0,03}{2} = 0,015$$

Como se trata de un préstamo amortizable mediante el método de cuotas de amortización constantes, la cuantía de dichos cuotas se puede calcular directamente:

$$A = \frac{1.000}{4} = 250,00 \text{ u.m.}$$

Y el cuadro de amortización con el tipo de interés del primer año es el confeccionado en el ejemplo 6.9:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	265,00	15,00	250,00	750,00	250,00
2	0,015	261,25	11,25	250,00	500,00	500,00
3	0,015	257,50	7,50	250,00	250,00	750,00
4	0,015	253,75	3,75	250,00	0,00	1.000,00

Ahora, supóngase que llegado el final del segundo período, se revisa el tipo de interés. El euríbor se sitúa en el 2,5 % y como el diferencial pactado es del 1 %, el tipo de interés a aplicar será del 3,5 %. El tipo de interés semestral será:

$$i_{(2)} = \frac{0,035}{2} = 0,0175$$

Veamos cuál es la situación de la deuda en ese momento. Esto se puede apreciar confeccionando el cuadro de amortización hasta el final del segundo período:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	265,00	15,00	250,00	750,00	250,00
2	0,015	261,25	11,25	250,00	500,00	500,00
3	0,0175			250,00	250,00	750,00
4	0,0175			250,00	0,00	1.000,00

Como el préstamo es de cuotas de amortización constantes, estas cuotas (y, por tanto, los capitales pendientes) permanecen inalteradas sea cual sea el tipo de interés. Por tanto, lo único que debe recalcularse es la cuota de interés y el término amortizativo para el resto de períodos:

$$I_3 = 0,0175 \cdot 500 = 8,75 \text{ u.m.}$$

$$a_3 = 250 + 8,75 = 258,75 \text{ u.m.}$$

$$I_4 = 0,0175 \cdot 250 = 4,38 \text{ u.m.}$$

$$a_4 = 250 + 4,38 = 254,38 \text{ u.m.}$$

El cuadro de amortización quedará del siguiente modo:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	265,00	15,00	250,00	750,00	250,00
2	0,015	261,25	11,25	250,00	500,00	500,00
3	0,0175	258,75	8,75	250,00	250,00	750,00
4	0,0175	254,38	4,38	250,00	0,00	1.000,00

Ejemplo 6.11

Sea un préstamo de 2.000 u.m. de principal, amortizable mediante el método francés. La duración del préstamo es de dos años y la frecuencia de los pagos semestral. Para la operación se ha pactado, para el primer año, un tipo de interés nominal anual del 3 %. Este tipo de interés se revisará cada año en base al valor del euríbor. Concretamente, el tipo de interés a aplicar en los años sucesivos será el euríbor más el 1 %.

- Elaborar el cuadro de amortización de la operación con el tipo de interés inicialmente pactado.
- Si al inicio del segundo año el euríbor se sitúa en el 2,5 %, volver a confeccionar el cuadro de amortización.

El esquema de la operación es el siguiente:

2000	*-a*	*-a*	*-a*	*-a*	Frec
0	1	2	3	4	2

El tipo de interés semestral pactado para el primer año se calcula del siguiente modo:

$$i_{(2)} = \frac{0{,}03}{2} = 0{,}015$$

Y el término amortizativo para el primer año será el siguiente:

$$a = \frac{2.000 \cdot 0{,}015}{1-\left(1+0{,}015\right)^{-4}} = 518{,}89 \text{ u.m.}$$

Para confeccionar el cuadro de amortización de la operación en base al tipo de interés pactado para el primer año, primero se procede a situar en dicho cuadro todos los ítems para los que se dispone de información:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	518,89				
2	0,015	518,89				
3	0,015	518,89				
4	0,015	518,89				

Y a partir de estos datos el resto de magnitudes se calcula como se ha visto en ejemplos anteriores. Concretamente, para el primero, y segundo períodos, del siguiente modo:

$$I_1 = 0{,}015 \cdot 2.000 = 30{,}00 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 518{,}89 - 30{,}00 = 488{,}89 \text{ u.m.}$$

$$C_1 = 2.000 - 488{,}89 = 1.511{,}11 \text{ u.m.}$$

$$M_1 = 0 + 488{,}89 = 488{,}89 \text{ u.m.}$$

$$I_2 = 0{,}015 \cdot 1.511{,}11 = 22{,}67 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 518{,}89 - 22{,}67 = 496{,}22 \text{ u.m.}$$

$$C_2 = 1.511{,}11 - 496{,}22 = 1.014{,}89 \text{ u.m.}$$

$$M_2 = 488{,}89 + 496{,}22 = 985{,}11 \text{ u.m.}$$

Procediendo de un modo similar para el resto de períodos, el cuadro de amortización, con el tipo de interés inicial, es el que se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	518,89	30,00	488,89	1,511,11	488,89
2	0,015	518,89	22,67	496,22	1.014,89	985,11
3	0,015	518,89	15,22	503,67	511,22	1.488,78
4	0,015	518,89	7,67	511,22	0,00	2.000,00

Ahora, considérese la revisión del tipo de interés al final del segundo período. El euríbor se sitúa en el 2,5 % y como el diferencial pactado es del 1 %, el tipo de interés nominal anual a aplicar será del 3,5 %. El tipo de interés semestral será:

$$i_{(2)} = \frac{0{,}035}{2} = 0{,}0175$$

Veamos cuál es la situación de la deuda en ese momento. Esto se puede apreciar confeccionando el cuadro de amortización hasta el final del segundo período:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	518,89	30,00	488,89	1,511,11	488,89
2	0,015	518,89	22,67	496,22	1.014,89	985,11
3	0,0175					
4	0,0175					

Al ser un préstamo francés, el cambio del tipo de interés implica recalcular el término amortizativo y, por ello, el resto de magnitudes. El término amortizativo se recalcula según los siguientes términos:

1. Se toma el capital pendiente (1.104,89).
2. Se plantea la ecuación para calcular un término amortizativo constante que permita la devolución de dicho capital, al nuevo tipo de interés pactado (1,75 %) en el número restante de períodos (2).

$$a' = \frac{1.014{,}89 \cdot 0{,}0175}{1-\left(1+0{,}0715\right)^{-2}} = 520{,}80 \text{ u.m.}$$

A partir de este nuevo término amortizativo, el resto de magnitudes se calcula del modo visto anteriormente. Por ejemplo, para el tercero de los períodos:

$$I_3 = 1.014{,}89 \cdot 0{,}0175 = 17{,}76 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 520{,}80 - 17{,}76 = 503{,}04 \text{ u.m.}$$

$$C_3 = 1.014{,}89 - 503{,}04 = 511{,}85 \text{ u.m.}$$

$$M_3 = 985{,}11 + 511{,}85 = 1.488{,}15 \text{ u.m.}$$

Y del mismo modo para el cuarto de los períodos. El cuadro de amortización con la revisión del tipo de interés, se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015	518,89	30,00	488,89	1,511,11	488,89
2	0,015	518,89	22,67	496,22	1.014,89	985,11
3	0,0175	520,80	17,76	503,04	511,85	1,488,15
4	0,0175	520,80	8,96	511,85	0,00	2.000,00

6.5. Cálculo de tipos de interés efectivos

En las operaciones de amortización, como en toda operación financiera, el tipo de interés efectivo se obtiene igualando la suma financiera de los capitales de la prestación con la suma financiera de los capitales de la contraprestación.

Sea una operación de amortización (préstamo) definida por el esquema de la figura 6.1:

C_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

El tipo de interés efectivo de esta operación se obtendrá igualando la suma financiera en (por ejemplo) el inicio, de los capitales de la prestación y la suma financiera, en el mismo momento, de los capitales de la contraprestación:

$$C_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^{-j}$$

De la anterior ecuación se obtendrá el tipo de interés periodal. El tipo de interés efectivo anual equivalente se obtendrá aplicando las ecuaciones de equivalencia de tantos:

$$i = \left(1 + i_{(m)}\right)^{m} - 1$$

En el ejemplo 6.1 se ha mostrado el procedimiento para calcular el tipo de interés periodal, primero (que coincide con el tipo de interés periodal pactado para la operación), y el tipo de interés efectivo anual, después, para un caso concreto de operación de amortización pura (sin gastos). Ahora bien, las operaciones de amortización (préstamos) suelen conllevar una serie de gastos que habitualmente paga la contraprestación (prestatario). Estos gastos tienen una doble naturaleza:

- Por un lado, están los gastos que paga una de las partes (normalmente prestatario) y recibe la otra parte (normalmente el prestamista). Son de esta naturaleza las comisiones de estudio, apertura, etc. A este tipo de gastos se les denomina, como se ha visto en capítulos anteriores, características comerciales bilaterales.
- Y, por otro lado, están los gastos que paga una de las partes (prestatario habitualmente) y que recibe un tercero. Son de esta naturaleza, por ejemplo, los gastos de notaría, los de tasación de garantías, etc. A este tipo de gastos se les denomina características comerciales unilaterales.

La existencia de este tipo de gastos provoca que el tipo de interés efectivo anual de la operación para prestamista y prestatario, en general, no coincida con el que se deriva del tipo de interés periodal pactado. De hecho, podrán calcularse dos tipos de interés efectivos:

- El tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario por el dinero recibido.
- El tipo de interés efectivo anual que obtiene el prestamista por el dinero entregado.

6.5.1. Tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario por el dinero recibido

La figura 6.1 planteaba el esquema general de una operación de amortización:

C_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Ahora bien, esta figura representa el esquema de la operación pura, el esquema de devolución del principal de la operación (C_0); pero no puede ser usada para calcular el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario. C_0 no es el importe que realmente recibe el prestatario. Este, teóricamente recibe el principal pero simultáneamente debe pagar los gastos (tanto bilaterales –GB– como unilaterales –GU–). El importe que, en términos efectivos recibe el prestatario es el siguiente:

$$C'_0 = C_0 - GB - GU$$

Por tanto, el esquema que debe utilizarse para calcular el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario es el que compara el importe realmente recibido por este, con los pagos que debe efectuar para la devolución del principal (figura 6.14):

C'_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 6.14. Esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario

El tipo de interés periodal podrá calcularse igualando las sumas financieras de prestación y contraprestación en el momento inicial:

$$C'_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \left(1 + i'_{(m)}\right)^{-j}$$

Y usando las ecuaciones de equivalencia de tantos se obtendrá el tipo de interés efectivo anual:

$$i' = \left(1 + i'_{(m)}\right)^{m} - 1$$

Ejemplo 6.12

Sea un préstamo (operación de amortización) en el que el capital prestado (prestación) asciende a 1.000 u.m. Se ha pactado la devolución de dicho capital, junto con el pago de los correspondientes intereses en 4 semestres, en cada uno de los cuales se pagará, respectivamente, 200, 300, 350 y 275 u.m. Adicionalmente la operación conlleva los siguientes gastos:

- Comisión de apertura: 0,1 %
- Gastos de notaría: 2 u.m.

Cabe determinar el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario de esta operación.

Lo primero que se hace es representar en un esquema los importes realmente recibidos y pagados por el prestatario:

C'_0	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

Los pagados se corresponden con las cuotas (términos amortizativos) del préstamo. Lo recibido será el resultado de restar al principal de la operación, los gastos soportados por el prestatario:

$$C'_0 = 1.000 - 0{,}001 \cdot 1.000 - 2 = 997 \text{ u.m.}$$

La ecuación para calcular el tipo de interés periodal se plantea, por tanto, en los siguientes términos:

$$997 = 200 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-1} + 300 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-2} + 350 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-3} + 275\left(1 + i'_{(2)}\right)^{-4}$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal (la incógnita) no puede despejarse, por lo que debe calcularse mediante una aproximación, usando algún tipo de algoritmo iterativo. Las hojas de cálculo de los paquetes de ofimática tienen funciones que proporcionan esta aproximación de forma inmediata. Como en anteriores ocasiones, en nuestro caso hemos utilizado la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» del paquete de ofimática de software libre «LibreOffice». Utilizando dicha función, la aproximación del tipo de interés periodal que se obtiene es la siguiente:

$$i'_{(2)} = 0{,}0476078$$

A partir de este tipo periodal, el tipo de interés efectivo anual se obtiene usando las ecuaciones de tantos equivalentes:

$$i' = \left(1 + 0{,}0476078\right)^2 - 1 = 0{,}097482$$

6.5.2. Tipo de interés efectivo anual que obtiene el prestamista por el dinero entregado

En una operación de amortización, el prestamista entrega al prestatario el principal o nominal, pero, al mismo tiempo, recibe de este prestatario las denominadas características comerciales bilaterales, esto es, los gastos de la operación que paga el prestatario al prestamista. Luego, en términos reales, el importe entregado por el prestamista al prestatario vendrá dado por la diferencia entre el principal y las características comerciales bilaterales:

$$C''_0 = C_0 - GB$$

El esquema que debe utilizarse para calcular el tipo de interés efectivo anual que recibe el prestamista es el que compara los importes recibidos por este, con el dinero realmente entregado (figura 6.15):

C''_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura 6.15. Esquema para el cálculo del tipo de interés efectivo anual que recibe el prestamista

El tipo de interés periodal podrá calcularse igualando las sumas financieras de prestación y contraprestación en el momento inicial:

$$C''_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \left(1 + i''_{(m)}\right)^{-j}$$

Y usando las ecuaciones de equivalencia de tantos se obtendrá el tipo de interés efectivo anual:

$$i'' = \left(1 + i''_{(m)}\right)^{m} - 1$$

Ejemplo 6.13

Sea un préstamo (operación de amortización) en el que el capital prestado (prestación) asciende a 1.000 u.m. Se ha pactado la devolución de dicho capital, junto con el pago de los correspondientes intereses en 4 semestres, en cada uno de los cuales se pagará, respectivamente, 200, 300, 350 y 275 u.m. Adicionalmente la operación conlleva los siguientes gastos:

- Comisión de apertura: 0,1 %
- Gastos de notaría: 2 u.m.

Hay que determinar el tipo de interés efectivo anual que recibe el prestamista de esta operación.

Lo primero que se hace es representar en un esquema los importes realmente recibidos y pagados por el prestamista:

C''_0	-200	-300	-350	-275	Frec
0	1	2	3	4	2

Los importes recibidos se corresponden con las cuotas (términos amortizativos) del préstamo. Lo pagado o entregado será el resultado de restar al principal de la operación los gastos bilaterales (los que cobra el prestamista):

$$C''_0 = 1.000 - 0{,}001 \cdot 1.000 = 999 \text{ u.m.}$$

La ecuación para calcular el tipo de interés periodal se plantea, por tanto, en los siguientes términos:

$$999 = 200 \cdot \left(1 + i''_{(2)}\right)^{-1} + 300 \cdot \left(1 + i''_{(2)}\right)^{-2} + 350 \cdot \left(1 + i''_{(2)}\right)^{-3} + 275\left(1 + i''_{(2)}\right)^{-4}$$

En la anterior ecuación el tipo de interés periodal (la incógnita) no puede despejarse, por lo que debe calcularse mediante una aproximación, usando algún tipo de algoritmo iterativo. Usando la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» del paquete de ofimática de software libre «LibreOffice» se ha aproximado el tipo de interés periodal:

$$i''_{(2)} = 0{,}0467919$$

A partir de este tipo periodal, el tipo de interés efectivo anual se obtiene usando las ecuaciones de tantos equivalentes:

$$i'' = \left(1 + 0{,}0467919\right)^2 - 1 = 0{,}095773$$

Existan o no existan gastos, una situación en la que resulta interesante calcular el tipo de interés efectivo anual es el de las operaciones indexadas o indiciadas. Como se ha visto, en este tipo de operaciones la cuantía real de la totalidad de términos amortizativos no se conoce hasta que se produce la última de las revisiones de tipos de interés pactadas. Por lo tanto, hasta ese momento no se podrán calcular tipos de interés efectivos reales para la operación.

Ejemplo 6.14

Sea un préstamo de 2.000 u.m. de principal, amortizable mediante el método francés. La duración del préstamo es de dos años y la frecuencia de los pagos semestral. Para la operación se pactó, para el primer año, un tipo de interés nominal anual del 3 %. Este tipo de interés, se acordó, sería revisado cada año en base al valor del euríbor. Concretamente, el tipo de interés a aplicar en los años sucesivos sería el euríbor más el 1 %. Una vez ha transcurrido un año, en el momento de la primera (y única) revisión del tipo de interés, el euríbor se ha situado en el 2,5 %.

Sabiendo que la operación no tuvo gastos, se desea conocer el tipo de interés efectivo anual que ha pagado el prestatario por el dinero recibido.

En el ejemplo 6.11 se ha visto que, en esta operación, los dos primeros términos amortizativos ascienden a 518,89 u.m. y los dos últimos a 520,80 u.m. Estos términos amortizativos serán los pagos que realmente ha realizado el prestatario.

El dinero efectivamente recibido al inicio de la operación ascenderá al principal, ya que la operación no tiene gastos.

Estos datos, como se ha hecho en casos anteriores, se pueden representar en un esquema:

2000	-518.89	-518.89	-520.8	-520.8	Frec
0	1	2	3	4	2

Igualando, en el momento inicial, el importe realmente recibido con la suma financiera de los capitales pagados se obtiene el tipo de interés periodal:

$$2000 = 518{,}89 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-1} + 518{,}89 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-2} + 520{,}8 \cdot \left(1 + i'_{(2)}\right)^{-3} + 520{,}85\left(1 + i'_{(2)}\right)^{-4}$$

$$i'_{(2)} = 0{,}0157411$$

Con la ecuación de tantos equivalentes se calcula el tipo de interés efectivo anual:

$$i' = \left(1 + 0{,}0157411\right)^{2} - 1 = 0{,}03173$$

Nótese que este tipo de interés solo puede calcularse a posteriori, esto es, cuando se ha producido la última de las revisiones del tipo de interés pactado.

Anexo
Capítulo 6. El método alemán y las operaciones con carencia

En las operaciones de préstamo (amortización) no resulta extraño que se pacte un período, inicial, durante el cual o bien no se paga principal (operaciones con carencia de principal) o bien no se paga ni principal ni intereses (operaciones con carencia de principal e intereses). En el presente anexo se muestra cómo funcionan. También se muestra el funcionamiento de un método de amortización, el alemán, que se caracteriza por el pago anticipado de intereses.

A6.1. Operaciones con carencia de principal

Como se ha dicho, en estas operaciones se pacta que, durante k períodos (casi siempre al inicio de la operación), el prestatario no debe satisfacer cantidad alguna en concepto de principal. Esto es, durante estos períodos solo paga intereses. El esquema de una operación de este tipo se muestra en la figura A6.1.

C_0	$-I_1$	……..	$-I_k$	$-a_{k+1}$	……..	$-a_n$	Frec
0	1	…......	k	k+1	…......	n	m

Figura A6.1. Esquema de una operación con carencia de principal

Si se ha pactado un tipo de interés periodal constante para toda la operación igual a $i_{(m)}$, el cuadro de amortización se planteará en los siguientes términos (figura A6.2):

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	0
1	$i_{(m)}$	I	I	0	C_0	0
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
k	$i_{(m)}$	I	I	0	C_0	0
k+1	$i_{(m)}$	a_{k+1}	I_{k+1}	A_{k+1}	C_{k+1}	M_{k+1}
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a_{n-1}	I_{n-1}	A_{n-1}	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i_{(m)}$	a_n	I_n	A_n	C_n	M_n

Figura A6.2. Cuadro de amortización una operación con carencia de principal.
Tipo de interés constante

En la medida en que no se amortiza principal durante los primeros *k* períodos, el capital pendiente durante este tiempo será el principal de la operación. Por lo tanto, la cuota de interés también será constante (A6.1):

$$I_1 = ... = I_k = I = C_0 \cdot i_{(m)} \qquad \text{(A6.1)}$$

Y el térmico amortizativo también será constate e igual a esa cuota de interés (A6.2):

$$a_1 = ... = a_k = a = 0 + I = I \qquad \text{(A6.2)}$$

El capital amortizado durante los primeros *k* períodos será igual a 0.

Téngase en cuenta que en esta operación, el principal debe devolverse en *n*-*k* períodos (A6.3):

$$C_0 = \sum_{j=k+1}^{n} A_j \qquad \text{(A6.3)}$$

Ejemplo A6.1

Sea una operación de amortización (préstamo) amortizable mediante el método francés con las siguientes características:

- Principal: 3.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 4 %
- Duración: 3 años
- Periodicidad de los pagos: semestral
- Gastos. No hay gastos
- Carencia: carencia de principal durante un año

Con los datos anteriores, se confeccionase el cuadro de amortización y se calculase el tipo de interés efectivo anual de la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

3000	*-I*	*-I*	*-a*	…......	*-a*	Frec
0	1	2	3	…......	6	2

Como los pagos de la operación son semestrales y la carencia afecta a un plazo de un año, dicha carencia afecta a dos períodos.

El tipo de interés periodal es:

$$i_{(2)} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$$

Las cuotas de interés de los dos primeros períodos (que son de la misma cuantía que los términos amortizativos) se obtendrán multiplicando este tipo de interés por el capital pendiente (que es el principal).

$$I = 0{,}02 \cdot 3.000 = 60{,}00 \text{ u.m.}$$

Con esto ya se puede elaborar el cuadro de amortización de los dos primeros períodos:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					3.000,00	0,00
1	0,02	60,00	60,00	0,00	3.000,00	0,00
2	0,02	60,00	60,00	0,00	3.000,00	0,00
3	0,02					
4	0,02					
5	0,02					
6	0,02					

En el anterior cuadro de amortización se puede apreciar claramente que el principal de la operación debe devolverse en 4 (y no en 6) períodos, al haber carencia de principal de dos períodos. Por lo tanto, el término amortizativo (constante al tratarse de un préstamo francés) debe calcularse atendiendo a este período de devolución del principal:

$$a = \frac{3.000 \cdot 0{,}02}{1 - \left(1 + 0{,}02\right)^{-4}} = 787{,}87 \text{ u.m.}$$

Con este término amortizativo constante para los períodos 3 a 6 se pueden calcular el resto de magnitudes del cuadro. Por ejemplo, las del tercer período:

$$I_3 = 0{,}02 \cdot 3.000 = 60{,}00 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 787{,}87 - 60{,}00 = 727{,}87 \text{ u.m.}$$

$$C_3 = 3.000 - 727{,}87 = 2.272{,}13 \text{ u.m.}$$

$$M_3 = 0 + 727{,}87 = 727{,}87 \text{ u.m.}$$

Para el resto de períodos se procede de un modo similar. El cuadro completo se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					3.000,00	0,00
1	0,02	60,00	60,00	0,00	3.000,00	0,00
2	0,02	60,00	60,00	0,00	3.000,00	0,00
3	0,02	787,87	60,00	727,87	2.272,13	727,87
4	0,02	787,87	45,44	742,43	1.529,70	1.470,30
5	0,02	787,87	30,59	757,28	772,42	2.227,58
6	0,02	787,87	15,45	772,42	0,00	3.000,00

Por otro lado, como paso previo al cálculo del tipo de interés efectivo anual de la operación, se calcula el tipo de interés periodal igualando prestación y contraprestación. El esquema de la operación (téngase en cuenta que no hay gastos) es el siguiente:

3000	-60	-60	-787.87	….....	-787.87	Frec
0	1	2	3	….....	6	2

Igualando prestación y contraprestación en el momento inicial:

$$3000 = 60 \cdot \frac{1-\left(1+i_{(2)}\right)^{-2}}{i_{(2)}} + 787{,}87 \cdot \frac{1-\left(1+i_{(2)}\right)^{-4}}{i_{(2)}} \cdot \left(1+i_{(2)}\right)^{-2}$$

Téngase en cuenta que los dos primeros términos amortizativos constituyen una renta inmediata constante y pospagable de dos períodos, mientras que los 4 últimos términos amortizativos son una renta constante pospagable diferida dos períodos.

Teóricamente, el resultado de la anterior ecuación debería ser un tipo de interés igual al 2 %. En efecto, al no haber gastos y ser el tipo de interés constante a lo largo de toda la operación, el tipo de interés efectivo periodal debe ser el mismo que el tipo de interés periodal pactado para el cálculo de las cuotas de interés. No obstante, si la anterior ecuación se aproxima (utilizando la función «TIR» de la hoja de cálculo «Calc» de «LibreOffice») el resultado que se obtiene es:

$$i'_{(2)} = 0{,}0199996$$

La no coincidencia se debe a que en el cálculo del término amortizativo se ha aproximado al segundo decimal (recuérdese que la unidad monetaria más pequeña con la que se trabaja es el céntimo). De haberse considerado un número elevado de decimales, el resultado hubiera sido del 2 %.

Bien, en todo caso, tomado el tipo de interés periodal calculado, el tipo de interés efectivo anual de la operación será el siguiente:

$$i' = \left(1+0{,}0199996\right)^2 - 1 = 0{,}040399$$

A6.2. Operaciones con carencia de principal e intereses

Estas operaciones son, quizá, las menos habituales. En ellas se pacta que, durante *k* períodos (casi siempre al inicio de la operación), el prestatario no satisfaga cantidad alguna ni en concepto de principal ni de intereses. Esto es, durante estos períodos no realiza ningún tipo de pago. El esquema de una operación de este tipo se muestra en la figura A6.3.

C_0	0	…….	*0*	$-a_{k+1}$	…….	$-a_n$	Frec
0	1	…….	k	k+1	…….	n	*m*

Figura A6.3. Esquema de una operación con carencia de principal e intereses

El que no se paguen intereses durante un determinado número de períodos no significa que, durante dichos períodos, no se generen intereses. Los intereses se generan (según el tipo de interés pactado) y se van acumulando al capital pendiente. De este modo, cuando finaliza el período de carencia, el capital pendiente (el capital que hay que devolver en el resto de períodos) será igual al principal de la operación, más los intereses que se han generado durante esos períodos en los que no se paga importe alguno.

El cuadro de amortización de una operación con carencia de principal e intereses se recoge en la figura A6.4.

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					C_0	0
1	$i_{(m)}$	0	0	0	C_1	0
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
k	$i_{(m)}$	0	0	0	C_k	0
k+1	$i_{(m)}$	a_{k+1}	I_{k+1}	A_{k+1}	C_{k+1}	M_{k+1}
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i_{(m)}$	a_{n-1}	I_{n-1}	A_{n-1}	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i_{(m)}$	a_n	I_n	A_n	C_n	M_n

Figura A6.4. Cuadro de amortización una operación con carencia de principal e intereses. Tipo de interés constante

El capital pendiente de pago al final del primer período se corresponderá, por tanto, al principal de la operación más los intereses generados durante ese primer período:

$$C_1 = C_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)$$

El capital pendiente al final del período 2 será:

$$C_2 = C_1 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right) = C_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^2$$

Por tanto, el capital pendiente al final del período de carencia se calculará según la expresión (A6.4):

$$C_k = C_0 \cdot \left(1 + i_{(m)}\right)^k \qquad \text{(A6.4)}$$

Este será el capital que deberá devolverse en los n-k períodos restantes (A6.5):

$$C_k = \sum_{j=k+1}^{n} A_j \qquad \text{(A6.5)}$$

Ejemplo A6.2

Sea una operación de amortización (préstamo) amortizable mediante el método francés con las siguientes características:

- Principal: 3.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 4 %
- Duración: 3 años
- Periodicidad de los pagos: semestral
- Gastos. No hay gastos
- Carencia: carencia de principal e intereses durante un año

Con los datos anteriores, se confeccionase el cuadro de amortización de la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

3000	0	0	$-a$	……..	$-a$	Frec
0	1	2	3	……..	6	2

Como los pagos de la operación son semestrales y la carencia afecta a un plazo de un año, dicha carencia afecta a dos períodos.

El tipo de interés periodal es:

$$i_{(2)} = \frac{0,04}{2} = 0,02$$

Los capitales pendientes al final de los períodos en los que hay carencia son los siguientes:

$$C_1 = 3.000 \cdot (1 + 0,02) = 3.060,00 \text{ u.m.}$$

$$C_2 = 3.060 \cdot (1 + 0,02) = 3.121,20 \text{ u.m.}$$

Con estos datos ya se puede elaborar el cuadro de amortización correspondiente a los dos primeros períodos:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					3.000,00	0,00
1	0,02	0,00	0,00	0,00	3.060,00	0,00
2	0,02	0,00	0,00	0,00	3.121,20	0,00
3	0,02					
4	0,02					
5	0,02					
6	0,02					

Por tanto, al final del segundo período, la deuda (capital pendiente) asciende a 3.121,20 u.m. Deuda que debe liquidarse a través de términos amortizativos constantes en los períodos restantes (4). El cálculo del término amortizativo se realizará teniendo en cuenta estas premisas:

$$a = \frac{3.121,20 \cdot 0,02}{1 - (1 + 0,02)^{-4}} = 819,70 \text{ u.m.}$$

Conocido el término amortizativo, el resto de magnitudes del cuadro se calculará del modo que se ha visto en ejemplos anteriores. Por ejemplo,las correspondientes al tercer período serán:

$$I_3 = 0,02 \cdot 3.121,20 = 62,42 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 819,70 - 62,42 = 757,28 \text{ u.m.}$$

$$C_3 = 3.121,20 - 757,28 = 2.363,92 \text{ u.m.}$$

$$M_3 = 0 + 757,28 = 757,28 \text{ u.m.}$$

Y para el resto de períodos se procede de un modo similar. El cuadro de amortización completo se muestra a continuación:

Per	Int	a_j	I_j	A_j	C_j	M_j
0					3.000,00	0,00
1	0,02	0,00	0,00	0,00	3.060,00	0,00
2	0,02	0,00	0,00	0,00	3.121,20	0,00
3	0,02	819,70	62,42	757,28	2.363,92	757,28
4	0,02	819,70	47,28	772,42	1.591,50	1.529,70
5	0,02	819,70	31,83	787,87	803,63	2.317,57
6	0,02	819,70	16,07	803,63	0,00	3.121,20

A6.3. El método de amortización alemán

Una variante del método de cuotas de amortización constantes que se ha visto en el presente capítulo es el denominado método de amortización alemán. En este método, las cuotas de amortización son constantes, pero los intereses se pagan de forma anticipada. Esto es, los intereses se pagan al inicio del período. El esquema temporal que representa una operación de amortización en la que se utiliza el sistema alemán es el que se representa en la figura A6.5.

C'_0	$-a_1$	$-a_2$	……..	$-a_{n-1}$	$-a_n$	Frec
0	1	2	……..	n-1	n	*m*

Figura A6.5. Esquema temporal de una operación de amortización. Sistema alemán

Tal y como se puede apreciar, esta figura A6.5 es similar al esquema general de una operación de amortización (figura 6.1). La única diferencia radica en el capital inicial. En el esquema general, el capital inicial es el principal de la operación, mientras que en la operación amortizable por el sistema alemán, el capital inicial será el principal de la operación menos el interés correspondiente al primero de los períodos que, como se ha visto, se pagan por anticipado (A6.6).

$$C'_0 = C_0 - i*_{(m)} C_0 \tag{A6.6}$$

donde C_0 es el principal de la operación e $i*_{(m)}$ es el tipo de interés anticipado periodal.

Las cuotas de amortización del préstamo serán, como se ha visto, constantes. Por tanto, el importe de cada una de estas cuotas se obtendrá a partir de la siguiente expresión (A6.7):

$$A = \frac{C_0}{n}$$

(A6.7)

Teniendo en cuenta lo anterior, el capital pendiente en un período cualquier *j-ésimo* podrá calcularse en base a la siguiente expresión:

$$C_j = C_0 - j \cdot A$$

A partir de este capital pendiente, se puede calcular la cuota de interés, I_{j+1}:

$$I^*_{j+1} = i^*_{(m)}\ C_j = i^*_{(m)} \left(C_0 - j \cdot A\right)$$

El cuadro de amortización de un préstamo amortizable con el método alemán se ha representado en la figura A6.6:

Per	Int	a_j	I^*_j	A_j	C_j	M_j
0		a_0	I^*_1		C_0	M_0
1	$i^*_{(m)}$	a_1	I^*_2	A	C_1	M_1
2	$i^*_{(m)}$	a_2	I^*_3	A	C_2	M_2
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n-1	$i^*_{(m)}$	a_{n-1}	I^*_n	A	C_{n-1}	M_{n-1}
n	$i^*_{(m)}$	a_n		A	C_n	M_n

Figura A6.6. Cuadro de amortización de un préstamo alemán. Tipo de interés constante

El primero de los términos amortizativos se pagará en el momento inicial (recuérdese que los intereses se pagan por anticipado):

$$a_0 = I^*_1$$

El término amortizativo del primer período comprenderá la cuota del interés del segundo período (anticipada) y la cuota de amortización del primer período:

$$a_1 = I^*_2 + A$$

De modo que el *j-ésimo* término amortizativo se calculará del siguiente modo:

$$a_j = I^*_{j+1} + A$$

Lógicamente, el último de los términos amortizativos será la cuota de amortización:

$$a_n = A$$

Ejemplo A6.3

Sea un préstamo amortizable mediante el sistema alemán. La duración del préstamo es de dos años y los pagos son semestrales. Para la operación se ha pactado un tipo de interés anticipado semestral del 1,5 %. El principal (nominal) de la operación es de 1.000 u.m. Con esta información, se puede elaborar el cuadro de amortización de la operación.

El esquema de la operación es el siguiente:

$1000\text{-}I_1^*$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	Frec
0	1	2	3	4	2

Como se trata de un préstamo amortizable mediante el método alemán, lo primero que debe calcularse es la cuantía de las cuotas de amortización (constantes):

$$A = \frac{1.000}{4} = 250{,}00 \text{ u.m.}$$

Con esta información ya se puede empezar a elaborar el cuadro de amortización:

Per	Int	a_j	I^*_j	A_j	C_j	M_j
0					1.000,00	0,00
1	0,015			250,00	750,00	250,00
2	0,015			250,00	500,00	500,00
3	0,015			250,00	250,00	750,00
4	0,015			250,00	0,00	1.000,00

El primer término amortizativo se liquidará en el momento inicial y será igual a la primera cuota de interés:

$$a_0 = 1.000 \cdot 0{,}015 = 15 \text{ u.m.}$$

El término amortizativo correspondiente al primer período se calculará como la suma de la cuota de interés del segundo período (pagada por anticipado) y la cuota de amortización del primer período:

$$a_1 = 0{,}015 \cdot 750 + 250 = 261{,}25 \text{ u.m.}$$

Con el resto de períodos se procede del mismo modo. Los resultados obtenidos se han trasladado al cuadro de amortización:

Per	Int	a_j	I^*_j	A_j	C_j	M_j
0		15,00	15,00		1.000,00	0,00
1	0,015	261,25	11,25	250,00	750,00	250,00
2	0,015	257,50	7,50	250,00	500,00	500,00
3	0,015	253,75	3,75	250,00	250,00	750,00
4	0,015	250,00	0,00	250,00	0,00	1.000,00

Problemas propuestos

Problema 6.1

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 5.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 10 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos. No hay gastos
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: sistema francés

Calcúlese la cuantía del término amortizativo.

Problema 6.2

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 5.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 10 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: sistema francés

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Problema 6.3

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 5.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 2 años
- Periodicidad de los pagos: trimestral
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: sistema francés

Confecciónese el cuadro de amortización del préstamo.

Problema 6.4

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 4.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 2 años
- Periodicidad de los pagos: trimestral
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: cuotas de amortización constantes

Confecciónese el cuadro de amortización del préstamo.

Problema 6.5

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 4.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 2 años
- Periodicidad de los pagos: trimestral
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: cuotas de amortización constantes

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Problema 6.6

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 4.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 10 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: cuotas de amortización constantes

Calcúlese el término amortizativo correspondiente al cuarto mes del noveno año.

Problema 6.7

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 6.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 7 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: sistema americano

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Problema 6.8

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 6.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado:
  - Para el primer año: 6 %
  - Para años sucesivos: euríbor + 2 %
- Duración: 3 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: sin carencia
- Método de amortización: sistema francés

Una vez han transcurrido dos años se sabe que el euríbor ha tenido el siguiente comportamiento:

- Al final del primer año, el euríbor se situó en el 2 %
- Al final del segundo año, el euríbor se ha situado en el 2,5 %

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Problema 6.9

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 6.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 15 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: 1 año de carencia de principal
- Método de amortización: sistema francés

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Problema 6.10

Sea un préstamo de las siguientes características:

- Principal: 6.000,00 u.m.
- Tipo de interés nominal anual pactado: 6 %
- Duración: 15 años
- Periodicidad de los pagos: mensual
- Gastos
  - Comisión de apertura: 0,1 %
  - Gastos de tasación (realizada por un tercero) 7 u.m.
- Carencia: 1 año de carencia de principal e intereses
- Método de amortización: sistema francés

Determínese el tipo de interés efectivo anual que paga el prestatario y el tipo de interés efectivo anual que percibe el prestamista.

Capítulo 7
Cuentas corrientes

En el último de los capítulos del presente manual, se aborda el funcionamiento de la cuenta corriente de crédito. La cuenta corriente de crédito es, dentro de las cuentas corrientes, la que contiene un mayor número de especificidades: intereses recíprocos (deudores y acreedores), intereses en caso de excedidos, comisiones de apertura, de disposición, etc. Este es el motivo por el cual la cuente corriente de crédito se puede considerar como el caso más general y el resto de cuentas corrientes pueden considerarse casos particulares. Por ejemplo, en las libretas de ahorro solo hay un tipo de intereses, los acreedores y comisiones de mantenimiento que se satisfacen en el momento de la liquidación. En las muchas cuentas corrientes comerciales no hay liquidación de intereses. Etc.

Con todo, existen determinados aspectos relacionados con la cuenta corriente de crédito que no se tratan dentro de este capítulo. Este es el caso, por ejemplo, de la fecha valor. Esta es la fecha que se toma como referencia para realizar la liquidación, y muchas veces no coincide con la denominada fecha operación. Esta última es la fecha en la que se realiza el apunte contable. Sobre determinación de fecha valor existe una serie de normativa bancaria que no se ha analizado, ya que se ha entendido que excede la finalidad del manual, el cual se centra en mostrar el funcionamiento de las operaciones desde una óptica financiera.

7.1. Concepto

Según Bonilla *et al.* (2006), una cuenta corriente consiste en el «intercambio no simultáneo de capitales en los que se acuerda saldar las diferencias financieras en un determinado momento, denominado fecha de cierre, y de acuerdo con una ley financiera previamente establecida». Básicamente existen dos tipos de cuentas corrientes: las cuentas corrientes comerciales y las cuentas corrientes bancarias. Como el propósito del presente manual es el estudio financiero de las operaciones, el capítulo 7 se centra en el funcionamiento de estas últimas, ya que las primeras pueden considerarse un caso particular de las cuentas corrientes bancarias.

La cuenta corriente comercial

La cuenta corriente es una operación financiera ampliamente utilizada en el tráfico mercantil. Resulta habitual que una empresa que opera de forma continuada con un cliente, le abra a este una cuenta corriente, en la que se van anotando tanto las ventas que la empresa realiza como los pagos que dicho cliente le va efectuando. Al final, la diferencia entre las ventas y los pagos realizados determinará el saldo de la cuenta.

Piénsese en el caso, por ejemplo, de una empresa dedicada a la comercialización de componentes eléctricos. Sus clientes serán empresas instaladoras. Cada vez que una de esas empresas instaladoras retire material no lo pagará al contado. La venta se anotará en la cuenta corriente. La empresa instaladora irá realizando entregas de efectivo para pagar el material que ha ido retirando. En las fechas establecidas (normalmente a final de mes) se calculará el saldo de la cuenta, como la diferencia entre las ventas realizadas por la comercializadora y las entregas a cuenta del instalador. Esa diferencia será la deuda que este último tiene con aquella.

En las cuentas corrientes comerciales se puede pactar el pago de intereses. En los casos como los del ejemplo que se ha puesto (comercializadora e instalador) no es habitual el pago de intereses. No obstante, si se pactase, el funcionamiento sería idéntico al descrito en apartados posteriores para las cuentas corrientes bancarias.

La cuenta corriente bancaria

En la cuenta corriente comercial ambas partes (prestación y contraprestación) son agentes económicos (en general empresas). En la cuenta corriente bancaria, una de las partes es una entidad de crédito (un banco); la otra (el titular de la cuenta), puede ser un particular o una empresa (o también otro banco).

Dentro de las cuentas corrientes bancarias existen varias modalidades. Quizá las más conocidas sean las cuentas corrientes a la vista y las libretas de ahorro. En ambos casos, un particular va realizando imposiciones y retiradas de efectivo de forma más o menos continuada. El saldo de la cuenta es la diferencia entre las imposiciones realizadas y las retiradas de fondos efectuadas. El saldo de la cuenta corriente a la vista o de la libreta de ahorro será (en general) favorable al titular, ya que (repetimos, en general) el banco no va a permitir que se efectúen retiradas de fondos superiores a las imposiciones realizadas.

Estas cuentas corrientes a la vista y libretas de ahorro generan intereses a favor de sus titulares (aunque existe también la modalidad de cuenta o libreta sin intereses). Estos intereses se liquidan periódicamente (es normal cada fin de mes o cada fin de trimestre) y se calculan siguiendo un procedimiento idéntico al que se verá en el epígrafe siguiente. Adicionalmente, estas cuentas y libretas generan el pago de una serie de comisiones (de administración, de mantenimiento, etc.) a favor del banco.

Otra modalidad de cuenta corriente bancaria es la cuenta de crédito. En esta modalidad, el titular (habitualmente una empresa o un empresario) puede ir realizando disposiciones de efectivo (retiradas de efectivo, transferencias, atender el pago de recibos, etc.) hasta un determinado límite, sin necesidad de haber realizado previamente, imposición alguna: el banco concede al titular un crédito del que este último puede ir disponiendo (hasta el mencionado límite) conforme lo vaya necesitando.

Se trata de una operación algo diferente a un préstamo. En un préstamo, el prestatario dispone de toda la cantidad prestada en el momento inicial, y tiene que ir realizando devoluciones de principal y pago de intereses, según un calendario establecido. Sin embargo, en una cuenta corriente de crédito el titular no dispone, en el momento inicial, de la totalidad del crédito que se le ha concedido, sino que va realizando disposiciones conforme a sus necesidades. Tampoco hay un calendario marcado de devolución del principal . El titular va haciendo imposiciones y cancelando parcialmente la deuda que mantiene con el banco. Es más, puede darse el caso de que, en un momento determinado, las imposiciones sean superiores a las disposiciones. En ese caso, el saldo de la cuenta corriente de crédito será favorable al titular.

Ejemplo 7.1

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy, los siguientes movimientos:

- 05/jul Transferencia realizada por el titular de la cuenta 1.000,00 u.m.
- 23/jul Recibo electricidad domiciliado en la cuenta 200,00 u.m.
- 14/ago Cobro de un cliente 1.300,00 u.m.
- 06/sep Pago a un proveedor 2.000,00 u.m.
- 15/sep Retirada de efectivo 300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m.

Cabe reflejar en una cuenta de mayor los movimientos y saldo de la cuenta, así como interpretar los saldos.

Los movimientos de la cuenta se registran del siguiente modo:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Apertura	0,00	0,00	0,00
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.000,00
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.200,00
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–100,00
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.900,00
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.200,00

Como se puede apreciar, la cuenta tiene saldos positivos (deudores) y saldos negativos (acreedores). Los saldos deudores son a favor del banco: se trata de las disposiciones efectuadas, en términos netos, del crédito concedido. Los saldos acreedores son a favor del titular de la cuenta y se corresponden con el exceso de ingresos en la cuenta de crédito sobre las disposiciones realizadas.

En las cuentas corrientes de crédito, el titular paga intereses que se calculan sobre el saldo dispuesto (sobre los saldos deudores). Asimismo, el titular paga una comisión (la comisión de disposición) que se calcula sobre la parte del crédito no dispuesta. Adicionalmente, el titular percibe intereses sobre los saldos a su favor (saldos acreedores). El importe de intereses a pagar y a cobrar, así como la comisión de disposición, se calcula periódicamente (habitualmente a final de mes o a final de trimestre). Las fechas en las que se efectúan dichos cálculos están prefijadas y se denominan fechas de liquidación de la cuenta.

Además de los reseñados, el titular de la cuenta suele satisfacer al banco una comisión de apertura. Normalmente los contratos de cuenta corriente de crédito se firman para un plazo de un año. Es decir que, formalmente, el titular de la cuenta queda obligado a devolver el saldo pendiente transcurrido ese plazo. No obstante, es habitual que lo que se haga sea renovar la cuenta, con el mismo límite o con uno inferior. En cada una de estas renovaciones, el titular deberá satisfacer la comisión de apertura.

7.2. Liquidación de una cuenta corriente

Desde un punto de vista financiero, la cuenta corriente de crédito puede considerarse como el caso general. El resto de cuentas corrientes no son sino casos particulares. En efecto, por ejemplo, en una cuenta corriente a la vista se liquidan intereses periódicamente y esos intereses son siempre a favor del titular. En la cuenta corriente de crédito también se liquidan intereses a favor del titular, además de liquidarse intereses a favor del banco. Idénticas consideraciones pueden realizarse respecto al resto de cuentas corrientes.

Este es el motivo por el cual este apartado se centra en la liquidación de las cuentas corrientes de crédito, ya que el procedimiento que se verá es extensible (eliminando aquellas partes que no sean aplicables) al resto de cuentas corrientes.

Para liquidar cuentas corrientes existen tres métodos:

- El método directo
- El método indirecto
- Y el método hamburgués

Este último es el que permite efectuar liquidaciones en las que intervengan distintos tipos de interés y, por tanto, el usado en la práctica. Por ello, vamos a centrarnos en su funcionamiento, dejando de lado los otros dos.

7.2.1. Liquidación de intereses

Para la liquidación de intereses se utiliza la ley financiera de capitalización simple. Y en dicha liquidación se utiliza un tipo de interés i_d, para los saldos deudores (para la deuda del titular con el banco) y otro tipo de interés i_a para los saldos acreedores (para los saldos a favor del titular de la cuenta).

Los intereses deudores se calculan en base al saldo dispuesto por el titular. De este modo, si el titular de la cuenta ha dispuesto de un saldo de Sd_j durante n_j días, los intereses que deberá pagar al banco por dicha disposición serán:

$$Sd_j \cdot i_d \cdot \frac{n_j}{360}$$

Siempre, claro está, que la base de liquidación sea ACT/360.

El total de intereses será la suma de los generados por cada uno de los saldos dispuestos (7.1):

$$I_d = \sum_{j=1}^{s} Sd_j \cdot i_d \cdot \frac{n_j}{360} \qquad (7.1)$$

Donde I_d son los intereses (en u.m.) a favor del banco, s es el número de saldos deudores diferentes, Sd_j es el saldo deudor *j-ésimo*, n_j es el número de días de dicho saldo deudor, e i_d es el tipo de interés aplicable a los saldos deudores.

De modo similar, los intereses a favor del titular de la cuenta podrían calcularse del siguiente modo (7.2):

$$I_a = \sum_{j=1}^{t} Sa_j \cdot i_a \cdot \frac{n_j}{360} \qquad (7.2)$$

Donde I_a son los intereses (en u.m.) a favor del titular; t es el número de saldos acreedores diferentes; Sa_j es el saldo acreedor j-ésimo; n_j es el número de días de dicho saldo acreedor; e i_a es el tipo de interés aplicable a los saldos acreedores.

Ejemplo 7.2

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

- 05/jul Transferencia realizada por el titular de la cuenta 1.000,00 u.m.
- 23/jul Recibo electricidad domiciliado en la cuenta 200,00 u.m.
- 14/ago Cobro de un cliente 1.300,00 u.m.
- 06/sep Pago a un proveedor 2.000,00 u.m.
- 15/sep Retirada de efectivo 300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 % y el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores) y a favor del titular (acreedores).

Información adicional: Fecha de liquidación de intereses: 30/9. Base ACT/360

Los movimientos y saldos diarios de la cuenta de crédito se muestran a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep				

Tal y como se puede apreciar, el primer saldo deudor (2,5 u.m.), correspondiente a la comisión de apertura, permanece invariable durante 4 días (desde el 1/7 hasta el 5/7). Esto puede interpretarse del siguiente modo: el banco ha concedido al titular de la cuenta de crédito un préstamo de 2,5 u.m. durante 4 días. Por este «préstamo» el titular de la cuenta debe pagar un 6 % (anual). Esto es, los siguientes intereses en u.m.:

$$2{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{4}{360} = 0{,}0016667$$

El segundo saldo de la cuenta de crédito (también deudor) se mantiene durante 18 días (del 5 al 23 de julio). Esto puede interpretarse del siguiente modo: el banco ha concedido al titular de la cuenta de crédito un préstamo de 1.002,50 u.m. durante 18 días. Por este «préstamo» el titular de la cuenta debe pagar un 6 % (anual). Esto es, los siguientes intereses en u.m.:

$$1.002{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{18}{360} = 3{,}0075$$

Y así sucesivamente para el resto de saldos deudores:

$$1.202{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{22}{360} = 4{,}4091667$$

$$1.902{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{9}{360} = 2{,}85375$$

$$2.202{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{15}{360} = 5{,}50625$$

Téngase en cuenta, en este último cálculo, que entre el 15 y el 30 de septiembre median 15 días.

Los intereses deudores serán por tanto:

$$0{,}0016667 + 3{,}0075 + 4{,}4091667 + 2{,}85375 + 5{,}50625 = 15{,}78 \text{ u.m.}$$

El cálculo de los intereses acreedores puede realizarse de un modo similar, pero aplicando el tipo de interés del 1 %. Como solo hay un saldo acreedor, que permanece en la cuenta durante 23 días (del 14/8 al 6/9), los intereses acreedores son los siguientes:

$$97{,}5 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{23}{360} = 0{,}06 \text{ u.m.}$$

El procedimiento visto hasta este punto ha permitido apreciar que los intereses en la cuenta corriente de crédito se calculan aplicando la ley financiera de capitalización simple. El cálculo, como se ha visto, se hace de modo separado para los saldos deudores y para los saldos acreedores. El método hamburgués también realiza esta separación entre saldos deudores y acreedores, y utiliza las expresiones (7.1) y (7.2) para el cálculo de los intereses. Sin embargo, dichas expresiones no las aplica directamente, sino que las calcula en varias etapas. Concretamente, para el cálculo de los intereses deudores el procedimiento que sigue el método hamburgués es el siguiente:

- En una primera etapa se determinan los números comerciales deudores. Estos se calculan para cada saldo deudor multiplicando el saldo por el número de días y dividendo el resultado de este producto entre 100 (7.3):

$$Nd_j = \frac{Sd_j \cdot n_j}{100} \tag{7.3}$$

- A continuación se suman los números calculados (7.4):

$$Nd = \sum_{j=1}^{s} \frac{Sd_j \cdot n_j}{100} \tag{7.4}$$

- Finalmente, el resultado de esa suma se multiplica por el tipo de interés deudor y también por 100, y el resultado se divide entre 360 (siempre, claro está, que la base sea ACT/360):

$$I_d = \frac{i_d \cdot 100}{360} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{Sd_j \cdot n_j}{100}$$

Se ve claramente que la anterior ecuación no es sino la (7.1). En efecto, operando:

$$I_d = \frac{i_d \cdot 100}{360} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{Sd_j \cdot n_j}{100} = \frac{100}{100} \cdot \sum_{j=1}^{s} Sd_j \cdot i_d \cdot \frac{n_j}{360} = \sum_{j=1}^{s} Sd_j \cdot i_d \cdot \frac{n_j}{360}$$

Téngase en cuenta que, como ni i_d, ni 100, ni 360 están afectados por el subíndice j pueden entrar y salir libremente del sumatorio.

Para los saldos acreedores el procedimiento es el mismo:

- Primero se determinan los números comerciales acreedores (7.5):

$$Na_j = \frac{Sa_j \cdot n_j}{100} \tag{7.5}$$

- A continuación se suman los números calculados (7.6):

$$Na = \sum_{j=1}^{t} \frac{Sa_j \cdot n_j}{100} \tag{7.6}$$

- Finalmente, el resultado de esa suma se multiplica por el tipo de interés acreedor y también por 100, y se divide entre 360 (siempre, claro está, que la base sea ACT/360):

$$I_a = \frac{i_a \cdot 100}{360} \cdot \sum_{j=1}^{t} \frac{Sa_j \cdot n_j}{100}$$

Ejemplo 7.3

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

• 05/jul	Transferencia realizada por el titular de la cuenta	1.000,00 u.m.
• 23/jul	Recibo electricidad domiciliado en la cuenta	200,00 u.m.
• 14/ago	Cobro de un cliente	1.300,00 u.m.
• 06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00 u.m.
• 15/sep	Retirada de efectivo	300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 % y el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués. Además hay que realizar la liquidación de la cuenta.

Información adicional: Fecha de liquidación de intereses: 30/9. Base ACT/360

Los movimientos, saldos diarios de la cuenta de crédito y días que permanece cada uno de los saldos se muestran a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50	18
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50	22
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50	23
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15
30/sep					

Los números comerciales deudores se calcularán del siguiente modo. Para el primero de los saldos deudores:

$$Nd_{1/7} = \frac{2{,}5 \cdot 4}{100} = 0{,}1$$

Para el segundo de los saldos deudores:

$$Nd_{5/7} = \frac{1.002{,}5 \cdot 18}{100} = 180{,}45$$

Y así sucesivamente para el resto de saldos deudores.

Para el único saldo acreedor que aparece en el ejemplo, los números se calcularán del siguiente modo:

$$Na_{14/8} = \frac{97{,}5 \cdot 23}{100} = 22{,}425$$

Los números se sitúan junto a los movimientos de la cuenta corriente de crédito y se suman:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días	Nd	Na
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4	0,01	
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50	18	180,45	
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50	22	264,55	
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50	23		22,425
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9	171,225	
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15	330,375	
30/sep							
					91	**946,7**	**22,425**

A partir de la suma de los números comerciales se calculan los intereses deudores y acreedores:

$$I_d = \frac{946{,}7 \cdot 0{,}06 \cdot 100}{360} = 15{,}78 \text{ u.m.}$$

$$I_a = \frac{22{,}425 \cdot 0{,}01 \cdot 100}{360} = 0{,}06 \text{ u.m.}$$

Los intereses deudores son intereses a favor del banco. Por este motivo se cargan en la cuenta de crédito (aumentando su saldo) en la fecha de liquidación. Los intereses acreedores lo son a favor del titular, por eso, en la fecha de liquidación, se abonan en la cuenta de crédito, disminuyendo su saldo. Tras la liquidación de intereses, la cuenta corriente de crédito quedará del siguiente modo:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep	Intereses deudores	15,78		2.218,28
30/sep	Intereses acreedores		0,06	2.218,22

Es decir, tras la liquidación de intereses, la deuda del titular de la cuenta con el banco asciende a 2.218,22 u.m.

7.2.2. Liquidación de la comisión de disposición

Esta comisión, al igual que los intereses, es exigible en la fecha de liquidación de la cuenta corriente de crédito. La comisión se calcula sobre la parte del límite de la cuenta de crédito que no se ha utilizado. El procedimiento es el siguiente:

- Primero se determina el saldo medio dispuesto (*SMD*) de la cuenta. Se trata de una media de los saldos deudores ponderada por el número de días. Se suman los productos entre saldos deudores y los correspondientes números de días y el resultado se divide entre el total de días del período de liquidación (7.7).

$$SMD = \frac{\sum_{j=1}^{s} Sd_j \cdot n_j}{n} \tag{7.7}$$

Donde n representa el total de días del período de liquidación.

Este saldo medio dispuesto también se puede calcular a partir de los números deudores. Teniendo en cuenta que la suma de números deudores es, según (7.4):

$$Nd = \sum_{j=1}^{s} \frac{Sd_j \cdot n_j}{100}$$

El saldo medio dispuesto se podrá determinar del siguiente modo (7.8):

$$SMD = \frac{Nd \cdot 100}{n} \tag{7.8}$$

- En segundo lugar se calcula la diferencia entre el límite de la cuenta de crédito (*LIMI*) y el saldo medio dispuesto (*SMD*). Esta diferencia es el saldo medio no dispuesto (*SMND*).

$$SMND = LIMI - SMD \tag{7.9}$$

- Y, finalmente, la comisión de disposición (C_d) se calcula multiplicando el saldo medio no dispuesto por el tanto por uno de comisión fijado en el contrato (c_d).

$$C_d = c_d \cdot SMND \tag{7.10}$$

Ejemplo 7.4

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

- 05/jul Transferencia realizada por el titular de la cuenta 1.000,00 u.m.
- 23/jul Recibo electricidad domiciliado en la cuenta 200,00 u.m.
- 14/ago Cobro de un cliente 1.300,00 u.m.
- 06/sep Pago a un proveedor 2.000,00 u.m.
- 15/sep Retirada de efectivo 300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 % y el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués.

Hay que calcular también la comisión de disposición sabiendo que esta es del 0,1 % del saldo no dispuesto. Y debe realizarse la liquidación de la cuenta corriente.

Información adicional: Fecha de liquidación: 30/9. Base ACT/360

En el ejemplo 7.3 se ha mostrado el procedimiento de cálculo de los números comerciales. Los movimientos, saldos y números de la cuenta corriente de crédito se muestran a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días	Nd	Na
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4	0,01	
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50	18	180,45	
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50	22	264,55	
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50	23		22,425
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9	171,225	
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15	330,375	
30/sep							
					91	**946,7**	**22,425**

En el ejemplo 7.3 también se ha visto cómo se podían calcular los intereses deudores y acreedores a partir de estos números comerciales. Concretamente, el resultado alcanzado era de 15,78 u.m. para los intereses deudores y de 0,06 u.m. para los acreedores.

En este ejemplo 7.4 vamos, por tanto, a centrarnos en el cálculo de la comisión de disposición. Primero calcularemos el saldo medio dispuesto, a partir de los números deudores:

$$SMD = \frac{946{,}7 \cdot 100}{91} = 1.040{,}33 \text{ u.m.}$$

Por diferencia con el límite de la cuenta se obtiene el saldo medio no dispuesto:

$$SMND = 2500 - 1.040{,}33 = 1.459{,}67 \text{ u.m.}$$

Y la comisión será el 0,1 % de este saldo medio no dispuesto:

$$C_d = 1.459{,}67 \cdot 0{,}001 = 1{,}46 \text{ u.m.}$$

Como se trata de una comisión a favor del banco, se cargará en la cuenta corriente de crédito (como los intereses deudores) aumentando la deuda del titular con el banco. Tras al liquidación, la cuenta corriente de crédito quedará tal y como se muestra a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	1.000,00		1.002,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		1.202,50
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep	Intereses deudores	15,78		2.218,28
30/sep	Intereses acreedores		0,06	2.218,22
30/sep	Comisión disposición	1,46		2.219,68

Es decir, tras la liquidación de intereses y comisión de disposición, la deuda del titular de la cuenta con el banco asciende a 2.219,68 u.m.

7.2.3. Excedidos en la cuenta de crédito

La cuenta corriente de crédito tiene un límite, hasta el cual el titular puede ir disponiendo libremente según sus necesidades. No obstante, en ocasiones el titular solicita realizar una disposición de la cuenta de crédito que, de llevarse a cabo, ocasionaría que el límite se sobrepasase. En estos casos es potestativo para el banco el autorizar o no dicha disposición de fondos. Si la autoriza, por el exceso de fondos dispuesto, el banco le cobrará al titular un tipo de interés superior al tipo de interés deudor pactado. Adicionalmente, el banco cobrará al titular una comisión de excedido que se calcula bien sobre el máximo saldo excedido, o bien sobre el saldo medio excedido.

El procedimiento para el cálculo de los intereses del excedido es el mismo que el descrito para los intereses deudores y acreedores:

- Primero se determinan los números comerciales excedidos (7.11):

$$Ne_j = \frac{Se_j \cdot n_j}{100} \tag{7.11}$$

  donde Se_j representa el *j-ésimo* saldo excedido.

- A continuación se suman los números calculados (7.12):

$$Ne = \sum_{j=1}^{g} \frac{Se_j \cdot n_j}{100} \tag{7.12}$$

  donde g es el número de saldos excedidos.

- Finalmente, el resultado de esa suma se multiplica por el tipo de interés de excedidos y también por 100, y se divide entre 360 (siempre, claro está, que la base sea ACT/360):

$$I_e = \frac{i_e \cdot 100}{360} \cdot \sum_{j=1}^{g} \frac{Se_j \cdot n_j}{100} \tag{7.13}$$

Ejemplo 7.5

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

• 05/jul	Transferencia realizada por el titular de la cuenta	2.500,00 u.m.
• 23/jul	Recibo electricidad domiciliado en la cuenta	200,00 u.m.
• 14/ago	Cobro de un cliente	2.800,00 u.m.
• 06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00 u.m.
• 15/sep	Retirada de efectivo	300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 20 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores y, en su caso, excedidos) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués. Calcúlense también la comisión de disposición sabiendo que esta es del 0,1 % del saldo no dispuesto y realizar la liquidación de la cuenta corriente.

Información adicional: Fecha de liquidación: 30/9. Base ACT/360.

Los movimientos, saldos diarios de la cuenta de crédito y días que permanece cada uno de los saldos se muestran a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50	18
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50	22
14/ago	Cobro de un cliente		2.800,00	–97,50	23
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15
30/sep					

Tal y como se puede apreciar, hay dos saldos excedidos: uno correspondiente al saldo de 2.502,50 u.m. y otro al de 2.702,50 u.m. Para estos dos saldos, el cálculo de los números deudores se realiza sobre el límite (ya que es sobre este importe sobre el que se aplica el tipo de interés deudor). El exceso sobre este límite se incluye en el cálculo de los números excedidos (porque sobre este exceso se aplica el tipo de interés excedido).

El cálculo de números deudores se realizará del siguiente modo:

$$Nd_{1/7} = \frac{2{,}5 \cdot 4}{100} = 0{,}1$$

$$Nd_{5/7} = \frac{2.500 \cdot 18}{100} = 450$$

$$Nd_{23/7} = \frac{2.500 \cdot 22}{100} = 550$$

$$Nd_{6/9} = \frac{1.902{,}50 \cdot 9}{100} = 171{,}225$$

$$Nd_{15/9} = \frac{2.202{,}50 \cdot 15}{100} = 330{,}375$$

Los números excedidos se calcularán del siguiente modo:

$$Ne_{5/7} = \frac{2{,}5 \cdot 18}{100} = 0{,}45$$

$$Ne_{23/7} = \frac{202,50 \cdot 22}{100} = 44,55$$

Los números acreedores se calculan de un modo similar. Trasladando los números calculados a la tabla adjunta a los movimientos de la cuenta de crédito y sumando, se obtienen los siguientes resultados:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días	Nd	Na	Ne
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4	0,01		
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50	18	450		0,45
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50	22	550		44,55
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50	23		22,425	
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9	171,225		
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15	330,375		
30/sep								
					91	**1501,7**	**22,425**	**45**

Cálculo de intereses:

$$I_d = \frac{1.501,7 \cdot 0,06 \cdot 100}{360} = 25,03 \text{ u.m.}$$

$$I_a = \frac{22,425 \cdot 0,01 \cdot 100}{360} = 0,06 \text{ u.m.}$$

$$I_e = \frac{45 \cdot 0,2 \cdot 100}{360} = 2,5 \text{ u.m.}$$

Cálculo de la comisión de disposición:

$$SMD = \frac{1.501,7 \cdot 100}{91} = 1.650,22 \text{ u.m.}$$

$$SMND = 2.500 - 1.650,22 = 849,78 \text{ u.m.}$$

$$C_d = 849,78 \cdot 0,001 = 0,85 \text{ u.m.}$$

La liquidación de la cuenta de crédito, incluyendo intereses y comisión de disposición quedaría en los siguientes términos:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50
14/ago	Cobro de un cliente		2.800,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep	Intereses deudores	25,03		2.557,53
30/sep	Intereses acreedores		0,06	2.227,47
30/sep	Intereses excedidos	2,5		2.229,97
30/sep	Comisión disposición	0,85		2.230,82

Es decir, tras la liquidación de intereses y comisión de disposición, la deuda del titular de la cuenta con el banco asciende a 2.230,82 u.m.

Como se ha comentado anteriormente, cuando se produce un excedido, además de los intereses hay que pagar al banco una comisión. Esta se calcula o bien sobre el mayor excedido que se haya producido o bien sobre el saldo medio excedido (depende de lo estipulado en el contrato de cuenta corriente de crédito). En este último caso, para calcular la comisión deberá deducirse el saldo medio excedido. De modo similar al cálculo del saldo medio dispuesto, el saldo medio excedido (*SME*) puede determinarse a partir de los números comerciales (en este caso, a partir de los números excedidos) del siguiente modo (7.14):

$$SME = \frac{Ne \cdot 100}{n} \tag{7.14}$$

Si la comisión de excedido estipulada, en tanto por uno, es *ce*, la comisión de excedido a pagar (en u.m.) será (7.15):

$$Ce = ce \cdot SME \tag{7.15}$$

Ejemplo 7.6

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

• 05/jul	Transferencia realizada por el titular de la cuenta	2.500,00 u.m.
• 23/jul	Recibo electricidad domiciliado en la cuenta	200,00 u.m.
• 14/ago	Cobro de un cliente	2.800,00 u.m.
• 06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00 u.m.
• 15/sep	Retirada de efectivo	300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 % , el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 20 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores y, en su caso, excedidos) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués.

Hay que calcular también la comisión de disposición sabiendo que esta es del 0,1 % del saldo no dispuesto y, en su caso, la comisión de excedido, sabiendo que esta última es del 2 % del saldo medio excedido. Se debe realizar la liquidación de la cuenta corriente.

Información adicional: Fecha de liquidación 30/9. Base: ACT/360.

El detalle de movimientos, días y números comerciales de la liquidación se muestra a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días	Nd	Na	Ne
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50	4	0,01		
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50	18	450		0,45
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50	22	550		44,55
14/ago	Cobro de un cliente		1.300,00	–97,50	23		22,425	
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50	9	171,225		
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50	15	330,375		
30/sep								
					91	**1501,7**	**22,425**	**45**

Cálculo de intereses:

$$I_d = \frac{1.501,7 \cdot 0,06 \cdot 100}{360} = 25,03 \text{ u.m.}$$

$$I_a = \frac{22,425 \cdot 0,01 \cdot 100}{360} = 0,06 \text{ u.m.}$$

$$I_e = \frac{45 \cdot 0,2 \cdot 100}{360} = 2,5 \text{ u.m.}$$

Cálculo de la comisión de disposición:

$$SMD = \frac{1.501,7 \cdot 100}{91} = 1.650,22 \text{ u.m.}$$

$$SMND = 2.500 - 1.650,22 = 849,78 \text{ u.m.}$$

$$C_d = 849,78 \cdot 0,001 = 0,85 \text{ u.m.}$$

Cálculo de la comisión de excedido:

$$SME = \frac{45 \cdot 100}{91} = 49,45 \text{ u.m.}$$

$$C_e = 49,45 \cdot 0,02 = 0,99 \text{ u.m.}$$

La liquidación de la cuenta de crédito, incluyendo intereses y comisiones quedaría en los siguientes términos:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50
14/ago	Cobro de un cliente		2.800,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep	Intereses deudores	25,03		2.557,53
30/sep	Intereses acreedores		0,06	2.227,47
30/sep	Intereses excedidos	2,5		2.229,97
30/sep	Comisión disposición	0,85		2.230,82
30/sep	Comisión excedido	0,99		2.231,81

Es decir, tras la liquidación de intereses, comisión de excedido y comisión de disposición, la deuda del titular de la cuenta con el banco asciende a 2.231,81 u.m.

7.3. Cálculo del tipo de interés efectivo anual en una cuenta corriente de crédito

La cuenta corriente de crédito constituye, principalmente, una fuente de financiación para su titular. Una empresa o empresario, cuando necesita fondos para cubrir sus necesidades de financiación a corto plazo, puede optar por esta fuente de financiación, como alternativa a otras que ya se han tratado en el presente manual: pedir un préstamo a corto plazo, descontar efectos o realizar una operación repo.

Como toda fuente de financiación, la cuenta corriente de crédito tiene un coste para su titular y reporta un rendimiento al banco que la concede. Como en el resto de fuentes de financiación, dichos coste y rendimiento se miden en términos de tipo de interés efectivo anual. No obstante, la cuenta corriente de crédito tiene una particularidad que la diferencia de otras alternativas de financiación. Como se ha visto, la cuenta corriente de crédito puede presentar un saldo favorable a su titular. Es decir, se trata de un instrumento financiero mixto: es una fuente de financiación pero, a su vez, puede ser también un instrumento de inversión, como puede ser una cuenta corriente a la vista. Este es el motivo por el que, a la hora de calcular costes o rendimientos, es necesario dividir la operación financiera mixta en sus dos componentes. El presente apartado se centra en el instrumento de financiación, dejando de lado la vertiente de inversión. En todo caso, el rendimiento para el titular de la cuenta de crédito de esta vertiente de inversión vendrá dado directamente por el tipo de interés acreedor percibido.

Entrando ya en el análisis del coste financiero para el titular (o el rendimiento financiero para el banco) de una cuenta corriente de crédito en su vertiente de fuente de financiación debe señalarse que este solo podrá ser calculado a posteriori, pues, solo cuando se liquide la cuenta se sabrá en qué momento se han realizado las diferentes disposiciones. El cálculo del tipo de interés efectivo anual debe realizarse, por tanto, en las fechas en las que se liquide la cuenta corriente de crédito.

Una primera opción para determinar ese coste financiero (o rendimiento financiero para el banco) es realizar un cálculo aproximado del tipo de interés efectivo anual. Para ello se calcula el cociente entre los intereses y comisiones (en el numerador) y el saldo medio dispuesto y excedido (en el denominador). Este cociente proporciona una aproximación del tipo de interés periodal. A partir de esta aproximación, el tipo de interés efectivo anual se calculará a través de las ecuaciones de tantos equivalentes.

Ejemplo 7.7

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

- 05/jul Transferencia realizada por el titular de la cuenta 2.500,00 u.m.
- 23/jul Recibo electricidad domiciliado en la cuenta 200,00 u.m.
- 14/ago Cobro de un cliente 2.800,00 u.m.
- 06/sep Pago a un proveedor 2.000,00 u.m.
- 15/sep Retirada de efectivo 300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 20 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores y, en su caso, excedidos) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués.

Hay que realizar la liquidación de la cuenta corriente de crédito, así como efectuar un cálculo aproximado del coste financiero (en términos de tipo de interés efectivo anual) que esta fuente tiene para su titular.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido: 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación 30/9
- Base: ACT/360

Se trata de la cuenta corriente de crédito cuya liquidación se ha realizado en el ejemplo 7.6. Los gastos financieros a considerar para calcular un valor aproximado del tipo de interés periodal (trimestral) son los siguientes:

- Comisión de apertura: 2,5 u.m.
- Intereses deudores: 25,03 u.m.

- Intereses excedidos: 2,5 u.m.
- Comisión disposición: 0,85 u.m.
- Comisión excedido: 0,99 u.m.

El total de costes financieros que el titular de la cuenta ha tenido que afrontar por usar esa fuente de financiación es de 31,87 u.m.

El saldo medio dispuesto ha sido de 1.650,22 u.m. Y el saldo medio excedido de 49,45 u.m.

Por lo tanto, el titular ha dispuesto de una financiación, en total, de 1.699,67 u.m. (1.650,22 + 49,45).

El total de costes financieros sobre la financiación dispuesta proporciona una aproximación del tipo de interés trimestral:

$$i_{(4)} \approx \frac{31,87}{1699,67} = 0,0187507$$

A partir de este tipo periodal, el efectivo anual se puede calcular por las ecuaciones de tantos equivalentes:

$$i \approx \left(1 + 0,0187507\right)^4 - 1 = 0,077139$$

El tipo de interés obtenido, siguiendo el procedimiento descrito, es una aproximación al tipo de interés efectivo anual porque, en su cálculo, se ha cometido una imprecisión: se han sumado, aritméticamente, importes con vencimiento en distintos momentos del tiempo, lo cual, desde un punto de vista financiero, no es correcto.

Para calcular de un modo correcto el tipo de interés efectivo anual deben igualarse las sumas financieras de los capitales de la prestación y de la contraprestación. El tipo de interés que las haga iguales será el tipo de interés efectivo anual.

Como capitales de la prestación deben considerarse las aportaciones del banco, esto es, las disposiciones que se hacen del saldo disponible de la cuenta corriente de crédito. En efecto, estas disposiciones que realiza el titular de la cuenta son entregas de efectivo que el banco realiza a dicho titular de la cuenta.

Como capitales de la contraprestación, deben considerarse las entradas de efectivo que el titular realiza en la cuenta de crédito. Estas entradas de efectivo deben considerarse en tanto en cuanto no transformen el saldo de la cuenta de crédito en saldo acreedor. Esto es, si una entrada de efectivo ocasiona que el saldo de la cuenta se haga acreedor (a favor del titular), solo se tomará en consideración, a efectos de capital de la contraprestación, la parte de la entrada que haría que el saldo quedara en 0. Solo esta parte debe considerarse dentro de la operación de financiación: la que serviría para cancelar la deuda. La otra parte, el exceso sobre el importe necesario para cancelar la deuda, forma parte de una operación de inversión, de lo que sería una cuenta corriente a la vista.

Adicionalmente, para el cálculo del tipo de interés efectivo anual, debe considerarse como capital de la contraprestación el saldo deudor (más, en su caso, excedido) que tenga la cuenta corriente de crédito antes de su liquidación, más los intereses y comisiones asociados a la financiación que se liquidan en ese momento. Este saldo sería el importe que debería pagar el titular para cancelar la operación de financiación.

En realidad, lo que deberá abonar el titular para cancelar la cuenta será el importe reseñado (saldo antes de liquidación más intereses y comisiones deudores) menos los intereses acreedores. Pero, como se ha remarcado, para la determinación del tipo de interés efectivo anual solo debe considerarse aquello relacionado con la operación de financiación.

Ejemplo 7.8

Un banco abrió el pasado 1/7, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy, los siguientes movimientos:

- 05/jul Transferencia realizada por el titular de la cuenta 2.500,00 u.m.
- 23/jul Recibo electricidad domiciliado en la cuenta 200,00 u.m.
- 14/ago Cobro de un cliente 2.800,00 u.m.
- 06/sep Pago a un proveedor 2.000,00 u.m.
- 15/sep Retirada de efectivo 300,00 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 2.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento inicial del 0,1 % de dicho límite.

Si el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 20 %, calcúlense los intereses a favor del banco (deudores y, en su caso, excedidos) y a favor del titular (acreedores) utilizando el método hamburgués.

Se debe realizar la liquidación de la cuenta corriente de crédito y calcular el coste financiero (en términos de tipo de interés efectivo anual) que esta fuente tiene para su titular.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido: 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación 30/9
- Base: ACT/360

Se trata de la cuenta corriente de crédito cuya liquidación se ha realizado en el ejemplo 7.6. Los movimientos y liquidación se muestran a continuación:

Fecha	Concepto	Debe	Haber	Saldo
01/jul	Comisión de apertura	2,50		2,50
05/jul	Transferencia	2.500,00		2.502,50
23/jul	Recibo electricidad domiciliado	200,00		2.702,50
14/ago	Cobro de un cliente		2.800,00	–97,50
06/sep	Pago a un proveedor	2.000,00		1.902,50
15/sep	Retirada de efectivo	300,00		2.202,50
30/sep	Intereses deudores	25,03		2.557,53
30/sep	Intereses acreedores		0,06	2.227,47
30/sep	Intereses excedidos	2,5		2.229,97
30/sep	Comisión disposición	0,85		2.230,82
30/sep	Comisión excedido	0,99		2.231,81

Para determinar el tipo de interés efectivo anual deben determinarse las aportaciones de las partes en cada una de las fechas. En la tabla siguiente se muestran los capitales de prestación y contraprestación en las distintas fechas:

	P	CP
01/jul	2,5	
05/jul	2500	
23/jul	200	
14/ago		2702,5
06/sep	1902,5	
15/sep	300	
30/sep		2231,87

El 1, el 5 y el 23 de julio hay sendos movimientos de 2,5, 2.500 y 200 u.m. Se trata de disposiciones de la cuenta corriente de crédito y, por lo tanto, son capitales de la prestación (las entrega el banco y las recibe el titular).

El 14 de agosto, el titular de la cuenta realiza una aportación de 2.800 u.m. Sin embargo, de ese importe solo se consideran 2.702,5 u.m. a efectos de determinar el capital de la contraprestación. Este importe es el que se necesitaría en ese momento para cancelar la deuda y, por tanto, el único a considerar dentro de la operación de financiación (se trata de una entrega del titular para pagar deuda). El exceso sobre ese importe, 97,5 u.m., no tiene que ver con la financiación concedida por el banco al titular, y por ello no se considera.

El día 6/9 hay un movimiento de 2.000 u.m. en la cuenta. Sin embargo, de ese importe, solo 1.902,5 son los que se emplean del saldo disponible en la cuenta corriente de crédito. Este será, por tanto, el importe que se considerará dentro de la prestación.

El 15/9 hay una disposición de 300 u.m.: prestación. Finalmente, el 30/9 se liquida la cuenta. Para liquidar la parte de financiación, el titular debería satisfacer el saldo pendiente en esa fecha antes de la liquidación (2.202,50) más los intereses y comisiones que tienen que ver con la financiación que se liquidan en esa fecha (25,03 + 2,5 + 0,85 + 0,99). En total, 2.231,87 u.m.

Con esta información, ya se puede plasmar la operación de financiación sobre un eje temporal:

2,5	2500	200	-2702,5	1902,5	300	-2231,87	Frec
0	4	22	44	67	76	91	365

El tipo de interés efectivo anual se calculará igualando la suma financiera de los capitales de la prestación y de la contraprestación. Si ambas sumas se igualan en el momento inicial, la ecuación será:

$$2{,}5+\frac{2500}{(1+i)^{43/365}}+\frac{200}{(1+i)^{22/365}}+\frac{1902{,}5}{(1+i)^{67/365}}+\frac{300}{(1+i)^{76/365}}=\frac{2702{,}5}{(1+i)^{44/365}}+\frac{2231{,}87}{(1+i)^{91/365}}$$

Utilizando la función TIR.NO.PER (TIRX en algunas versiones) de la hoja de cálculo «Calc» del paquete ofimático «LibreOffice», se puede calcular el tipo de interés efectivo anual que asciende a:

$$i = 0{,}071088$$

Problemas propuestos

Problema 7.1

Un banco abrió el pasado 17/8, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Importe
23/ago	Transferencia realizada	3007,50 u.m.
12/sep	Recibo electricidad domiciliado	240,60 u.m.
07/oct	Cobro de un cliente	3368,40 u.m.
05/nov	Pago a un proveedor	2406,00 u.m.
19/nov	Retirada de efectivo	360,90 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 3.500,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento de la apertura del 0,2 % de dicho límite.

Sabiendo que el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6,5 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 21 %, realícese la liquidación de la cuenta corriente de crédito utilizando el método hamburgués.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido; 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación: 30/11
- Base: ACT/360

Problema 7.2

Un banco abrió el pasado 17/8, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Importe
23/ago	Transferencia realizada	3007,50 u.m.
12/sep	Recibo electricidad domiciliado	240,60 u.m.
07/oct	Cobro de un cliente	3368,40 u.m.
05/nov	Pago a un proveedor	2406,00 u.m.
19/nov	Retirada de efectivo	360,90 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 3.100,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento de la apertura del 0,2 % de dicho límite.

Sabiendo que el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6,5 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 21 %, realícese la liquidación de la cuenta corriente de crédito utilizando el método hamburgués.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido; 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación: 30/11
- Base: ACT/360

Problema 7.3

Un banco abrió el pasado 17/8, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Importe
23/ago	Transferencia realizada	3007,50 u.m.
12/sep	Recibo electricidad domiciliado	240,60 u.m.
07/oct	Cobro de un cliente	3368,40 u.m.
05/nov	Pago a un proveedor	2406,00 u.m.
19/nov	Retirada de efectivo	360,90 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 3.100,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento de la apertura del 0,2 % de dicho límite.

Sabiendo que el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6,5 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 21 %, realícese la liquidación de la cuenta corriente de crédito utilizando el método hamburgués y calcular el tipo de interés efectivo anual utilizando un método aproximado.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido; 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación: 30/11
- Base: ACT/360

Problema 7.4

Un banco abrió el pasado 17/8, a uno de sus clientes, una cuenta corriente de crédito que ha tenido hasta hoy los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Importe
23/ago	Transferencia realizada	3007,50 u.m.
12/sep	Recibo electricidad domiciliado	240,60 u.m.
07/oct	Cobro de un cliente	3368,40 u.m.
05/nov	Pago a un proveedor	2406,00 u.m.
19/nov	Retirada de efectivo	360,90 u.m.

La cuenta corriente de crédito tiene un límite de 3.000,00 u.m. Y una comisión de apertura que se carga en el momento de la apertura del 0,2 % de dicho límite.

Sabiendo que el tipo de interés anual que se aplica a los saldos deudores es del 6,5 %, el que se aplica a los saldos acreedores del 1 %, y el que se aplica a los excedidos del 21 %, realícese la liquidación de la cuenta corriente de crédito utilizando el método hamburgués y calcúlese el coste financiero (en términos de tipo de interés efectivo anual) que, para el titular de la cuenta, representa esa fuente de financiación.

Información adicional:

- Comisión de disposición: 0,1 % del saldo no dispuesto
- Comisión de excedido; 2 % del saldo medio excedido
- Fecha de liquidación: 30/11
- Base: ACT/360

Bibliografía

La bibliografía sobre matemática de las operaciones financieras es muy amplia. En el presente apartado se detallan solo aquellas referencias que se han consultado en la preparación del presente manual.

Bonilla, M.; Ivars, A. y Moya, I. (2006): *Matemáticas de las operaciones financieras. Teoría y práctica*. Thomson. Madrid.

Nieto, L. y Cabedo, J. D. (2012): *Matemática de las operaciones financieras*. Psylicom Distribuciones Editoriales. Valencia.

Ruckman, C. y Francis, J. (2005): *Financial Mathematics. A Practical guide for actuaries and other business professionals*. bpp Professional Education. Farmington, CT, ee.uu.

Vaaler, L. J. F. and Daniel, J.W. (2008): *Mathematical Interest Theory*. The Mathematical Association of America, Inc. Washington, DC, ee.uu.