La calculadora gráfica en el aula de matemáticas de Bachillerato

Enseñanza-aprendizaje en el análisis de una función real de variable real

Jorge J. Izquierdo González (19004375G)

UNIVERSITAT JAUME I

Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas

Especialidad en Matemáticas

Dirigido por: D. Antonio Beltrán Felip

Julio 2015

Resumen

Desde que en 1985 apareciera la primera calculadora gráfica, han sido muchos los trabajos e investigaciones que han defendido su implementación en el aula de matemáticas como herramienta didáctica. Treinta años después, y con incontables recursos tecnológicos a nuestro alcance, la calculadora gráfica continúa ocupando una posición de privilegio para muchos de los investigadores en didáctica de las matemáticas. Sin embargo, no parece que el panorama en las escuelas haya cambiado un ápice respecto a su incorporación.

En este trabajo se recogen algunos de estos estudios que, junto con el trabajo de investigación de campo realizado durante el periodo de prácticas por el autor de este documento, intentarán poner de manifiesto los beneficios de enseñar y aprender a través del uso de la calculadoras -con capacidades de representación gráfica y simbólica-. Se presentan, además, diversas propuestas de actividades para el análisis de una función real de variable real con apoyo de material didáctico elaborado expresamente a tal efecto.

Índice

1. Introducción

El artículo 15 del Real Decreto 1393/2007 establece, a propósito de los estudios de máster universitario, que «estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa pública de un trabajo de fin de Máster, que tendrá entre 6 y 30 créditos». Dicho trabajo -TFM en adelante- debe estar orientado hacia la evaluación de las competencias asociadas al título del Máster y, por tanto, al «ejercicio de la profesión para la que habilita». Así también lo recoge la 'NORMATIVA DE LOS TRABAJOS FINALES DE MÁSTER DE LA UNIVERSITAT JAUME I': «El TFM tiene que mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias adquiridas asociadas al título de máster universitario».

Entre otros, uno de los objetivos principales del **Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas** (en adelante MS), es que el estudiante «demostre la seua competència en l'exercici de la professió docent i que siga capaç d'aplicar els esmentats coneixements en la pràctica real d'aula mitjançant el pràcticum i, a més, ser capaç de defensar-los i integrar-los en el Treball Final de Màster».

Gran parte de dichas competencias son consolidadas durante el citado periodo de prácticas -prácticum-, y el TFM brinda la oportunidad de completar el proceso aprendizaje-observación-intervención con el análisis reflexivo de la experiencia real en la docencia. Dicho análisis debe situarse dentro de un campo de acción o modalidad que, en el caso particular de este estudio, pretende recopilar los conocimientos y vivencias adquiridas, fruto de la puesta en práctica de un curso práctico en calculadoras gráficas (en adelante CG) para profesores y alumnos del Bachiller Internacional (BI).

En el presente trabajo se presentan las observaciones recogidas durante la realización del 'Curso práctico en el uso de la calculadora gráfica TI-84 (para Bachiller Internacional)' realizado como parte del prácticum del MS, así como las reflexiones posteriores originadas en la recopilación de experiencias de los asistentes, y las conclusiones derivadas del análisis de todo lo expuesto.

Como complemento a la parte con raíz experimental, se procurará un conjunto de recursos didácticos con dos objetivos: alentar a los docentes a hacer uso de la CG como herramienta educativa -y no sólo `conciliadora', en el sentido de reducir las labores operacionales- en la asignatura de matemáticas, en los cursos de 1° y 2° de BI. Y que esta utilización motive su extrapolación a las clases de los mismos cursos del bachillerato nacional, con los que comparten buena parte del temario. Concretamente, y por limitar la extensión y la dispersión del trabajo, la propuesta se articula sobre el bloque de análisis de función real de una variable real.

2. Marco teórico

2.1 La introducción de la calculadora gráfica en el aula de matemáticas: una cuestión de tres décadas

Al mismo tiempo que se publicaba en España, en el año 1985, una traducción del tantas veces citado 'Informe Cockcroft' (*The Cockcroft Report*. Cockcroft, 1982), la compañía **Casio Computer Co., Ltd.** anunciaba el lanzamiento de la primera calculadora gráfica del mercado. El modelo **fx-7000G**, y su variante **fx-6000G** (*ilustración 1*), mantenían la mayoría de las características de sus predecesoras -no 'graficadoras'- en cuanto a los algoritmos operacionales, pero contaban además con una –hoy por hoy- modestísima memoria de medio kilobyte de capacidad (Toth, 2000).

Ilustración 1 - Casio fx-7000G (izda.) y fx-6000G (dcha.)

La coincidencia no resulta baladí para el propósito de este trabajo, pues en uno de los pasajes del mencionado informe se apunta hacia un pilar de la escena educativa actual: la inmersión tecnológica en la escuela con fines educativos.

En aquel entonces, por NNTT podría entenderse máquinas de calcular electrónicas. Y al igual que sucede en la actualidad –aunque con muchísima menos amplitud-, el debate parecía situarse entorno a la conveniencia del uso de los avances tecnológicos y si éste pudiere producir un defecto en la capacidad de cálculo numérico y simbólico del alumnado (Rivière Gómez, 2002).

> ...las pruebas hoy disponibles indican la existencia de ventajas que compensan sobradamente los posibles inconvenientes. En cualquier caso, el conjunto de las investigaciones prueba de forma fehaciente que el uso de las calculadoras no ha producido ningún efecto adverso sobre la capacidad de cálculo básica. (Informe Cockcroft, 1985)

A pesar de ser un informe de gran repercusión internacional, el tema de la inclusión de las calculadoras gráficas no parece haber calado profundamente, si bien en algunos países como Francia, podemos encontrarla en el currículum de secundaria. En Australia, el uso de calculadoras gráficas –sin capacidad de procesamiento simbólico- está aprobado desde 1995, por el Victorian Board Studies, para el curso de último año de secundaria. Del mismo modo ocurre en EEUU e Inglaterra. Desde 1995, en Portugal se recomienda la utilización de CG en secundaria y, posteriormente en 1998, se aprobó su uso en exámenes. Por último, las calculadoras gráficas en Suecia, aunque permitidas, tienen la misma función que una calculadora tradicional o una tabla de cálculo. Expuesto todo esto, es importante subrayar que prácticamente en ningún país el rol de la calculadora es educacional, si bien su uso está demostrado que fortalece la capacidad de comprensión y resolución de problemas (Del Puerto & Minnaard, 2002).

Todo esto evidencia que la comunidad educativa sigue, actualmente, planteándose las mismas preguntas entorno a los límites y conveniencia de la inclusión de la tecnología en el aula. Hasta qué punto puede repercutir favorablemente en la construcción del conocimiento. Cuáles pueden ser las consecuencias de dejar el cálculo numérico y/o simbólico de lado. Qué dejamos atrás al subirnos -inevitablemente- al carro de la tecnología. En qué punto del itinerario educativo es conveniente introducir la tecnología de apoyo. Cómo influirá esto en la didáctica de la matemática. Si cambiará, y en qué medida, la figura del profesor y su desempeño en el aula. Son muchas preguntas –y no son todas-, que un gran número de teóricos han intentado responder a través de investigaciones y experimentación analítica.

Dunham & Dick (1994) convienen en reconocer el beneficio de la CG como herramienta en la resolución de problemas debido a que: reduce significativamente el tiempo de resolución analítica, homogeneiza la destreza algebraica; y focaliza la atención en la comprensión del problema.

En términos generales, la integración de la calculadora en el aula ha modificado notablemente el currículo matemático en varios aspectos, según Monzó & Olrilles (1995):

1. Ha dejado atrás las viejas tablas de funciones –logarítmicas y trigonométricas especialmente-.
2. Pone en duda la enseñanza de algoritmos como el de la raíz cuadrada o los de las operaciones elementales –si bien están de acuerdo en que su enseñanza resulte razonable para ayudar a comprender las operaciones-.
3. Ha hecho la estadística más asequible, permitiendo el manejo de grupos de datos más voluminosos y acercando, por lo tanto, los problemas de clase a situaciones reales. Al mismo tiempo, los autores apuntan a que en esta rama de la matemática, el hecho de simplificar el cálculo intermedio, ayuda a que los estudiantes puedan centrarse en el origen del problema, cosa que de otro modo fomentaba que se perdiera la referencia inicial del problema.
4. Por último, destacan que al disminuir el tiempo dedicado a la reiteración de ejercicios para la consolidación de habilidades, se ha posibilitado la profundización en «el análisis exploratorio de números y operaciones».

Una lectura inequívoca es que, sea cual sea el nivel o la forma de integración de la calculadora -gráfica o no-, el objetivo principal es el de recortar el tiempo empleado en el cálculo numérico o simbólico. Un tiempo que, en las condiciones apropiadas -como puedan ser una buena predisposición del profesor y estudiantes, previsión, elaboración del material didáctico adecuado-, debería emplearse en labores de comprensión, análisis de resultados y reflexión, establecimiento de conjeturas... En definitiva, «se trata de ofrecer al alumno una calculadora que le permita experimentar, concentrar su esfuerzo en las tareas importantes de lo que se traiga entre manos, trivializando tareas secundarias, y visualizar en el acto sus propias intuiciones, todo ello en los momentos adecuados». (González, 2015)

Transcurridos treinta años desde la aparición de la primera CG, parece ser ahora más que nunca el momento apropiado para integrarla en la clase de matemáticas. Pero con un uso, como venimos induciendo, que vaya más allá de la potencialidad intrínseca de una máquina –realizar una tarea de forma más rápida y eficiente-. Que utilice esa ventaja para diseñar nuevos espacios dentro del currículum matemático, donde tenga cabida el análisis, la modelización, la profundización en los aspectos más interesantes de las matemáticas desde el punto de vista de su aplicación en el campo de lo real.

En una sociedad como la actual, rodeada y plena de tecnología, comprendemos la relevancia del manejo de las TIC para la lectura, análisis, selección y producción de información digital. A nadie nos sorprende que el estudio de la caligrafía pueda pasar a un segundo plano. O incluso, como anunció el Gobierno finlandés hace medio año, desaparecer del currículo –sustituida por la escritura en ordenador y la 'letra de palo'-. La tendencia a la confluencia entre educación y NNTT es inevitable y exige esfuerzos por parte de toda la comunidad educativa. Las nuevas generaciones necesitan currículos actuales y adaptados a las demandas de la sociedad. Esto requiere la aceptación, por parte de los profesores e investigadores en educación, de que los métodos tradicionales son válidos, pero insuficientes –u obsoletos-.

Las Matemáticas se conciben actualmente como «una actividad social y cultural en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación, formulación, contrastación y justificación de conjeturas» (Del Puerto & Minnaard, 2003). El cambio en el currículo de matemáticas se está produciendo de forma pausada, controlada, pero no debemos dejar que la sociedad se adelante demasiado, si no la capacidad de reacción cada vez es más limitada. La tendencia general es emplear cada vez menos tiempo en los tradicionales métodos de 'lápiz y papel', a la vez que los métodos de enseñanza inciden más en la labor investigadora con ayuda de las NNTT.

2.2 Influencia de la calculadora en el rendimiento de los estudiantes

Ruthven (1990) comparó dos muestras de estudiantes que tomaban el mismo curso de matemáticas, en una de las cuales se empleaba la CG mientras que en la otra no. Después de realizar un test de evaluación enfocado al análisis de funciones, y en vista de que la clase que empleó CG obtuvo mejores resultados en los ítems de simbolización -más influenciados por el dominio de la expresión gráfica de una función-, concluyó que tales diferencias se debían a que dichos estudiantes habían fortalecido el reconocimiento de las expresiones gráficas asociándolas a su forma algebraica. Además, añade que el rendimiento general de los estudiantes de este grupo aumentó considerablemente, inducido de forma indirecta por el éxito de la prueba, siendo además ostensiblemente mejor el de las estudiantes femeninas, por encima del de sus compañeros, en el grupo que usaba la calculadora, ocurriendo lo contrario en el que no las empleó.

En una investigación similar Quesada & Maxwell (1994) optaron por hacer que el grupo experimental empleara CG junto con material específicamente diseñado para tal efecto, mientras que el grupo de control diera la clase de forma tradicional, con uso de calculadora científica y libro de texto. El examen de evaluación, a diferencia del empleado por Ruthven, tenía carácter general, y podía ser resuelto perfectamente con una calculadora científica -sin capacidad de graficar-. Los resultados en las preguntas relativas al análisis de funciones y los problemas de ecuaciones fueron mejores para aquellos que usaron CG. De nuevo, su uso obtuvo mejores resultados en aquellos apartados donde la calculadora permitía la aproximación gráfica y la posibilidad de comprobar las respuestas, aumentando, además, el interés y la motivación de los estudiantes.

En el estudio que Del Puerto & Minnaard (2003) efectúan sobre las consecuencias del empleo de CG en los cursos de secundaria y el curso de precálculo universitario, se recoge un análisis de diversas investigaciones -entre las que se encuentras las de Ruthven y Quesada y Maxwell comentadas más arriba- y las clasifican en tres ámbitos de influencia: rendimiento, comprensión y actitud. Las conclusiones de dicho trabajo señalan que las calculadoras gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, a la vez que suscitan la interacción estudiante-docente y entre los propios estudiantes, lo que supone un cambio importante a nivel actitudinal. Y concluyen:

> ...se debe tener en cuenta que los efectos de su uso no son producto de su mera presencia en el salón de clase. Estos efectos dependen del papel que se le asigne a la tecnología dentro del sistema curricular. Además, el comportamiento de este sistema depende de muchos factores que interactúan de manera dinámica entre ellos. La calculadora gráfica es un elemento potenciador del cambio en el sistema, que produce mejoras en la formación Matemática del estudiante. (Del Puerto & Minnaard, 2003)

3. Prácticum: 'curso práctico en la calculadora gráfica TI-84'

3.1 Justificación

Este periodo de aprendizaje completa la formación del MS permitiendo poner en práctica las capacidades adquiridas durante el curso a la vez que proporciona una visión realista del estado actual del sistema educativo.

La etapa inicial del prácticum, la de observación, muestra la aplicabilidad real de las nuevas tendencias en formación, el grado de penetración de las NNTT en las aulas, el nivel de actualización de los profesionales de la docencia, los tiempos y espacios disponibles en el centro, así como la tipología del alumnado y sus singularidades.

Fruto de la estancia de aprendizaje en el centro educativo Ágora Lledó International School de Castellón de la Plana, se propuso la realización de un pequeño curso práctico -tanto para alumnos como para profesores- que facilitara la manipulación y comprensión de los algoritmos y programas de cálculo empleados por la calculadora gráfica TI-84 -de la marca Texas Instruments®-. Esta calculadora es una de las CG más utilizadas internacionalmente -junto con su equivalente de la marca Casio- en las pruebas de evaluación externa que la Organización de Bachillerato Internacional –en adelante OBI- realiza a sus estudiantes. Y esta es la calculadora que el instituto provee a todos sus alumnos de BI.

Los métodos de evaluación externa utilizados por la OBI -anexo II- requieren estrategias de resolución distintas a las que se suelen encontrar en los exámenes españoles de selectividad. El apoyo en métodos gráficos o analíticos a través de la tecnología es parte casi ineludible –o como mínimo muy conveniente- en estos exámenes. De ahí que desenvolverse con soltura en la

CG fuera indispensable.

El curso también se pensó para ser usado como base de apoyo del TFM que aquí se presenta, dado que trata un factor importante en el contexto educativo actual, como es el uso e implementación de las NNTT en la construcción del conocimiento. Es por ello que diseñar un **manual específico** -anexo I- para tal curso se presentaba como algo muy conveniente, pues serviría de apoyo en las sesiones y, al ser fundamentalmente práctico, permitiría de forma sencilla la exploración y experimentación autónoma.

Los dos objetivos principales del curso eran: que los estudiantes desarrollaran la suficiente destreza para alcanzar buenos resultados en las pruebas, y que también los docentes adquiriesen soltura y confianza para poder ayudar a sus alumnos y alumnas en las clases posteriores al curso.

3.2 Desarrollo de las sesiones del curso

El grupo asistente contó con 11 alumnos –cinco de la rama tecnológica y seis de la social- y las dos profesoras de los cursos correspondientes. Todos ellos contaban con su propia calculadora TI-84 y una copia del manual práctico elaborado para el curso. Los contenidos del manual abarcaban todos los bloques correspondientes al currículo de BI –aunque sólo aquellas unidades comunes a la vía científica y la social-. A través de fichas, se presentaban ejercicios resueltos paso a paso -acompañados de un pantallazo de la calculadora- siguiendo el algoritmo de manipulación de la CG en cada caso. Las imágenes capturadas se obtuvieron del simulador para ordenador de la TI-84 -**TI-Smartview™**-. Además, este mismo simulador sirvió de apoyo en el curso, mediante su proyección en pantalla, en aquellos ejercicios que pudieron revertir cierta dificultad o crearon confusión. Aunque la idea principal era que, a través del manual, fueran capaces de seguir perfectamente los pasos fijados para cada ejercicio.

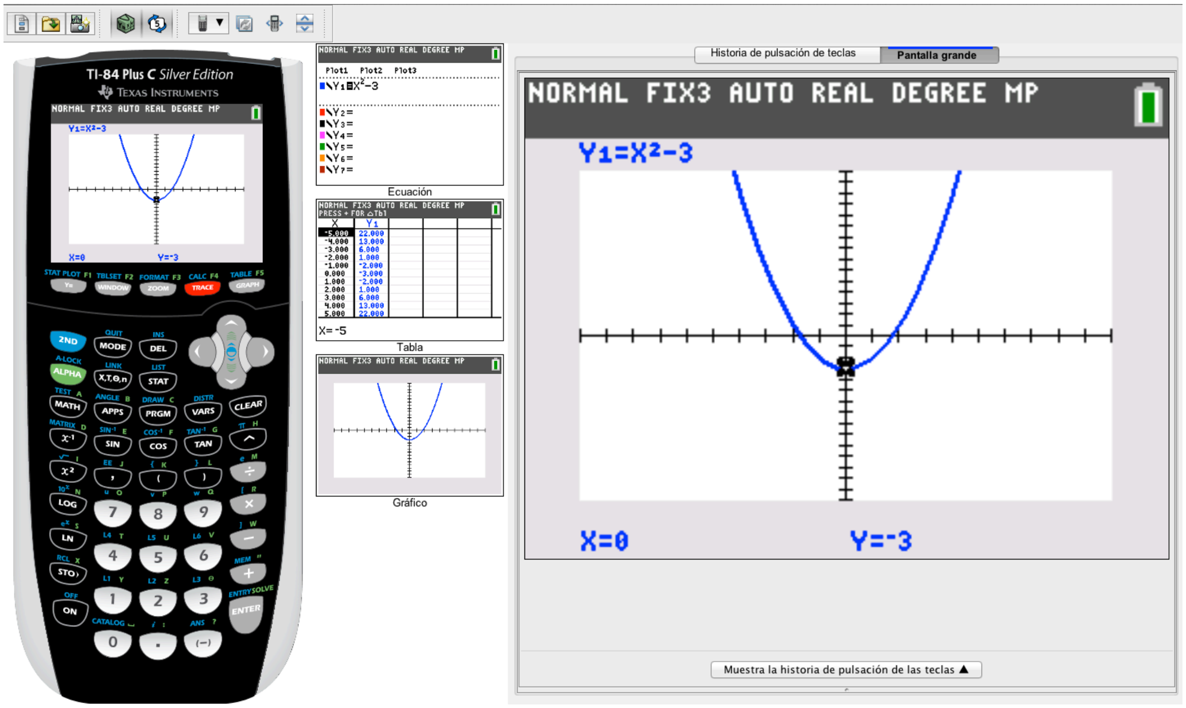


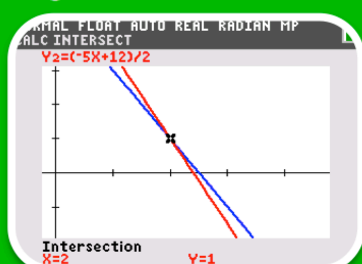
Ilustración 2 - Captura de pantalla del interfaz del software TI-Smartview™

Ninguna de las dos clases prepararon en modo alguno el curso. Es decir, en las clases regulares de matemáticas previas a la cita no se repasaron los fundamentos matemáticos que se iban a tratar ni se prestó especial atención a la calculadora -otra que no fuera su uso operacional habitual-. De esta manera, todas las dudas y dificultades surgirían durante las sesiones de aprendizaje y se pondría a prueba la eficacia del manual y, al mismo tiempo, se podrían apreciar las diferentes destrezas de alumnos y profesores en el manejo de la máquina. Otra cosa interesante en la que prestar atención sería la fuerza centrípeta que generara la TI-84, es decir, las reacciones comunes frente a los problemas que se fueran presentando y el nivel de interactividad entre los asistentes alrededor de la calculadora.

A lo largo de las tres sesiones que duró el curso, se resolvieron todos y cada uno de los ejercicios que planteaba el documento. Previamente, y para su uso posterior como contraste, se realizó una pequeña prueba a todos los asistentes que permitiera evaluar el nivel general de la clase. No se pretendía juzgar los conocimientos matemáticos –frente a los que los profesores tenían clara ventaja- sino la pericia en la manipulación de la TI-84. -Es algo muy habitual realizar sistemáticamente labores cuyo trasfondo teórico no se conoce o entiende bien, con o sin la ayuda de la tecnología-.

Todos estos ejercicios contaban, como ya se ha explicado anteriormente, con una ilustración paso a paso del algoritmo de manipulación que llevara a la solución. No se realizó ninguna explicación previa de contenido matemático. El manual aportaba, en los casos que se consideró pertinente, cuadros con aclaraciones, alertas o recordatorios de los lugares comunes de los fallos o dificultades que pudieran aparecer (ilustración 2).

Recuerda: las parejas de soluciones (x_1,x_2) de un sistema de ecuaciones son las coordenadas de los puntos de intersección de las correspondientes gráficas de cada función. Es decir, que también podríamos resolverlo por métodos gráficos.



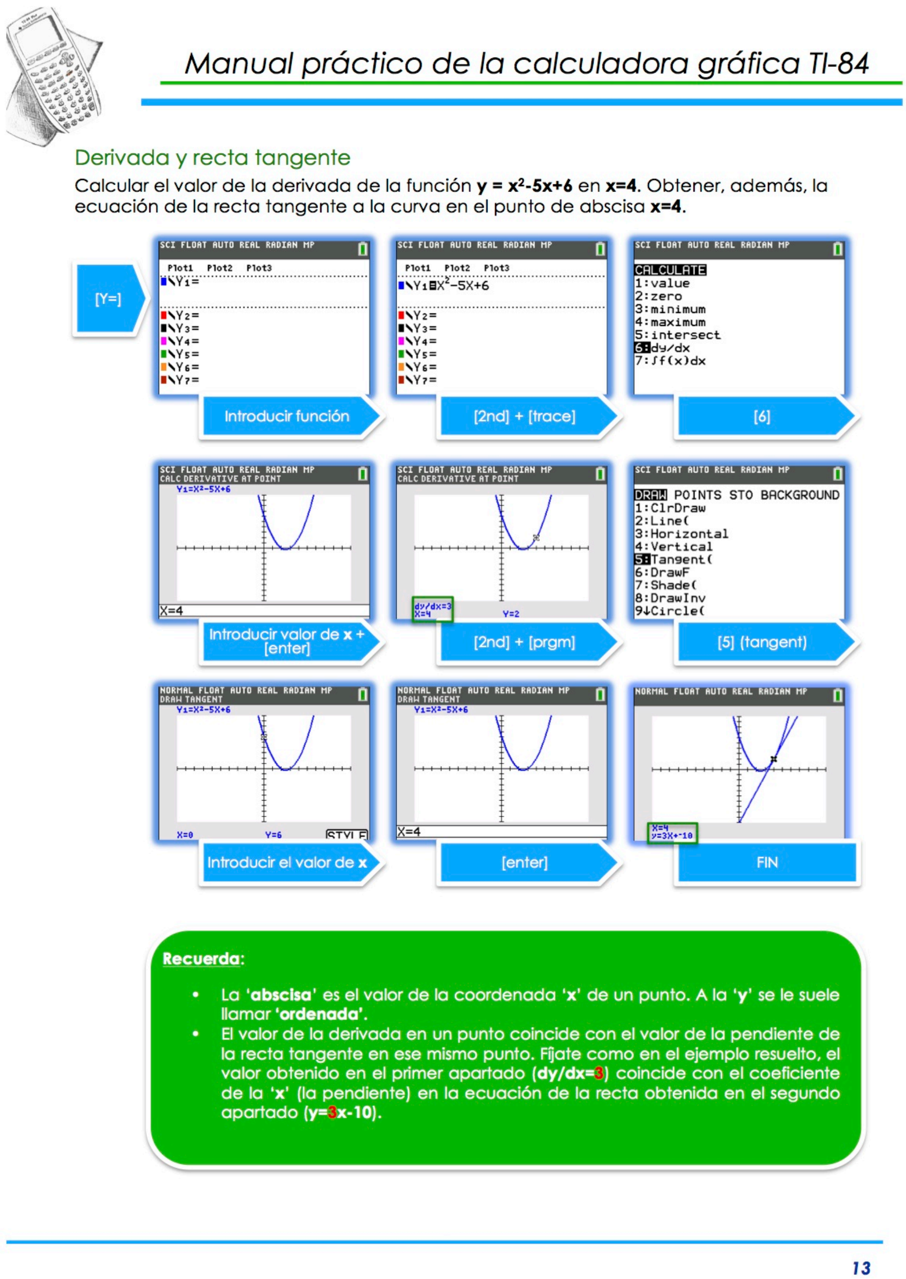
Atención: antes de introducir los coeficientes no olvides reordenar (y operar, en caso necesario) las ecuaciones. El sistema debe quedar en la forma:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

donde **A**, **B** y **C** son los coeficientes a introducir.

Ilustración 3 – Cuadros 'recuerda' y 'atención' en el ejercicio: 'resolución de ecuaciones múltiples'

En la parte final de la tercera sesión, se pasó un nuevo examen de evaluación (apéndice III) con tres ejercicios similares a los realizados durante las sesiones anteriores. La prueba se llevó a cabo usando como materiales permitidos la calculadora gráfica y el manual. Se calificó como 'correcto' el hecho de que la respuesta final fuera acertada. Por ello, sólo se solicitó a los asistentes que dieran el resultado obtenido, sin necesidad de justificar los procedimientos seguidos o los razonamientos aplicados. De esta manera, no sólo se podrían mesurar las mejoras que pudiera haber aportado el curso, además se pondría a prueba la versatilidad del manual como material de apoyo al estudio.


Manual práctico de la calculadora gráfica TI-84

Derivada y recta tangente

Calcular el valor de la derivada de la función **y = x²-5x+6** en **x=4**. Obtener, además, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa **x=4**.

Recuerda:

- La '**abscisa**' es el valor de la coordenada '**x**' de un punto. A la '**y**' se le suele llamar '**ordenada**'.
- El valor de la derivada en un punto coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto. Fíjate como en el ejemplo resuelto, el valor obtenido en el primer apartado (**dy/dx=3**) coincide con el coeficiente de la '**x**' (la pendiente) en la ecuación de la recta obtenida en el segundo apartado (**y=3x-10**).

13

Ilustración 4 - Determinación de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto (muestra del manual)

3.3 Exposición de resultados

3.3.1 Evaluación inicial

Los resultados de la prueba inicial fueron más o menos lo que se esperaba. La mayor parte de los asistentes mostró enormes dificultades en la manipulación de la calculadora, incluso en aquellas cuestiones que requerían conocimientos matemáticos muy básicos. Tanto profesoras como estudiantes demostraron un nivel muy bajo de destreza en el uso la TI-84, pese a haber trabajado con ella durante el curso -si bien es cierto que, dado que el currículum del BI se da al tiempo que el del nacional, el uso de la CG durante el curso oficial no era obligatorio en ninguno de los exámenes de evaluación de bachiller-. Los algoritmos básicos de operación generaban dudas cuando se subía levemente el nivel de dificultad. Tan sólo dos de los estudiantes lograron resolver alguno de los ejercicios planteados en el bloque de problemas y, sorprendentemente, sólo una de las profesoras logró resolver apenas uno. Un claro indicio de la aprensión que se suele encontrar entre los profesionales docentes al uso de NNTT como herramienta educativa habitual.

Las sensaciones recogidas en el debate posterior fueron de desánimo generalizado y frustración. Algunos de los alumnos se encontraron por primera vez frente a frente con la calculadora, reconociendo que nunca se habían preocupado de prestarle atención a aprender a usarla dado que «con la de toda la vida se puede hacer igual y más fácil», como espetó uno de ellos. Prácticamente todos ellos coincidían en que resulta muy difícil atender a todas las exigencias que conlleva cursar las dos vías y que al haberse acostumbrado a usar la calculadora científica 'de toda la vida' en clase, empezar a preparar los exámenes con una tan compleja resultaba muy arriesgado.

Por parte de las profesoras, la prueba inicial les sirvió para confirmar algo que ya advirtieron antes de realizar el curso y que fue uno de los motivos por los que se llevó a cabo: su nivel de conocimiento en la TI-84 era muy bajo, admitiendo que cada año, cuando se acercan las fechas de las pruebas de evaluación externa del BI, su nivel de ansiedad se disparaba debido al sobreesfuerzo que supone volver a revisar sus conocimientos y aprender a usar la calculadora de nuevo. Todo esto sumado al hecho de que dichas pruebas se realizan en mayo durante el curso escolar, lo que supone gestionar el tiempo de clase con una habilidad casi prodigiosa.

3.3.2 Fase de aprendizaje

Las dificultades observadas en la prueba inicial se fueron superando a medida que se avanzó en el manual. Con cada ejercicio surgieron dudas relacionadas con los fundamentos matemáticos, que las profesoras o los mismos estudiantes se encargaron de refrescar. Otras dudas que puntualmente aparecieron eran relativas a la manipulación de la calculadora y generalmente, muy básicas como: el borrado de la pantalla, la recuperación de resultados o la edición de operaciones.

El uso del manual también presentó algunas dificultades iniciales. Una minoría de los asistentes pareció no comprender el lenguaje de pantallazos empleado y les costaba identificar en qué paso se encontraban. Conforme se fue avanzando en los ejercicios, las órdenes dispuestas en ellos se fueron interpretando de forma más natural y las dudas se difuminaron.

Por otro lado, a pesar de que todos los modelos de calculadora eran de la serie TI-84, no todos tenían exactamente el mismo dispositivo, y aunque prácticamente idénticas en los menús, algunos de las directrices del manual podían no llevarse a cabo con éxito en según qué modelo.

Ilustración 5 - Modelo TI-84 Plus C (izda.) y TI-84 Plus (dcha.)

Algo notable fue la mayor facilidad con la que los alumnos se adaptaron al lenguaje gráfico empleado en el manual, frente a las profesoras que buscaban ayuda en sus estudiantes constantemente. Esto es un hecho remarcable y muy positivo, pues estos se convirtieron por momentos en posesores y transmisores de conocimiento, lo cual, a la vez que consolidaba las nuevas habilidades parecía inyectarles cierto grado de confianza en sí mismos.

En líneas generales, los resultados experimentales recogidos en esta fase permiten inferir que los estudiantes de las generaciones actuales tienen mucha más versatilidad que los docentes en la interpretación de textos gráficos, debido probablemente a su continua exposición a la imagen encuadrada en una pantalla. Y fue precisamente este hecho el que inclinó la balanza hacia la elaboración del manual a partir de imágenes.

3.3.3 Evaluación final

El examen final constó de ejercicios muy similares al inicial. Una primera parte de manipulación corta y una segunda de problemas que exigen un proceso más largo de resolución.

Las preguntas eran las mismas para todos, estudiantes y docentes, independientemente de si cursaban la opción de tecnología o de ciencias sociales.

En el examen estaba permitido el uso de la CG y el manual del curso. Todas las pruebas eran individuales y en ellas sólo se exigía dar el resultado final.

Ambas partes obtuvieron mayor número de aciertos en todos los casos, pero fue la parte de problemas, que supuestamente entraña más dificultad por su mayor componente teórica en fundamentos matemáticos, la que obtuvo mayor número de respuestas correctas.

Las dudas entorno al funcionamiento general de la calculadora seguían presentes pero menos frecuentes, sin embargo, el éxito cosechado en los problemas dio fe de la eficacia del manual.

Respecto a los resultados por vía de estudio, los estudiantes del bachiller científico obtuvieron mejores resultados que los de la rama social y fueron casi todos más rápidos en terminar el examen.

El tiempo de realización fue significativamente menor en esta prueba final, como era de esperar.

3.4 Conclusiones de la implementación del curso

El uso de la tecnología en el aula se encuentra inicialmente con una barrera natural: la costumbre. Cualquier cambio que proponga salir de la rutina de la clase y encontrar nuevas formas de enseñar, de evaluar, de aprender, supone un esfuerzo para todas las partes implicadas, lo que conlleva intrínsecamente un rechazo inicial. Si algo funciona, para qué cambiarlo, se suele escuchar. Más aún, si la persona responsable de producir ese cambio no posee el tiempo, la motivación ni la seguridad de que vaya a ser capaz de manejar la situación con soltura. Ese rechazo/miedo no es más que la inercia de la costumbre. De la comodidad. La introducción de elementos tecnológicos en el aula no significa disponer de ellos. La presencia de una calculadora gráfica en una clase no mejora las estrategias, ni las capacidades, ni las probabilidades de éxito de los estudiantes. Tampoco hace más fácil la vida del docente. Todo lo contrario. Si lo que se pretende con el uso de la misma es abrir nuevos espacios a la enseñanza-aprendizaje, abrir camino al razonamiento y la estrategia, la vida del docente, con toda seguridad, será más complicada. La presencia de estos elementos que facilitan los aspectos más tediosos de la matemática sólo tiene sentido si la actitud del docente hacia ellos es proactiva. Y esto supone reestructurar el tiempo y los espacios de la clase, adaptar el material didáctico e incluso diseñar nuevas herramientas que giren entorno al potencial de la tecnología.

La prueba inicial realizada en el curso y las reflexiones posteriores de los estudiantes y sobre todo de las profesoras, refuerza este pensamiento. El contar con un material específico de apoyo mejora las expectativas y reduce la necesidad de la reiteración de ejercicios y explicaciones. Además, permite, al menos en este caso, la experimentación autónoma una vez se ha comprendido su funcionamiento.

La elaboración del material es un trabajo arduo y requiere de constantes evaluaciones y revisiones. Sólo de esta manera es posible atender a las necesidades de todos los estudiantes pues, tal y como se ha visto, es difícil alcanzar la uniformidad en cuanto a materiales y, por otra parte, los razonamientos deductivos y las capacidades de todos los alumnos no son iguales, lo que implica que el material debe ser capaz de suplir las carencias de unos y complementar las exigencias de otros.

El trabajo con las NNTT es algo que los alumnos asocian a entretenimiento y distracción, a una salida de la aburrida cotidianidad. Sin embargo, cuando el uso de éstas es imperativo y conlleva una evaluación, la postura es la misma que frente a cualquier otro elemento de la clase, ¿para qué cambiar? Esa opinión viró cuando empezaron a obtener resultados y vieron reducido el laborioso trabajo operacional de muchos ejercicios. La habilidad en la calculadora les dio seguridad en sí mismos y esto puede conducir en muchos casos a una situación en la que, en lugar de cuestionar los algoritmos empleados, se cuestionen los procedimientos y resultados.

Como consecuencia de esa seguridad y buenos resultados comentada, la perspectiva de la asignatura cambió para muchos y se les veía más motivados de cara a las pruebas del BI. No sólo eso, el poder disponer del manual fue para muchos de ellos lo más interesante del curso. Tener confianza en una herramienta de cara a preparar los exámenes disminuía su ansiedad.

Por último, algo que ya se ha comentado más arriba. La tremenda fuerza centrípeta que genera la tecnología en el aula, en tanto que promueve el trabajo cooperativo, el intercambio de información -fomentando la creatividad- y la ayuda entre iguales.

4. Propuesta de mejora: uso de la calculadora gráfica en el análisis de una función real de variable real

4.1 Justificación

Los buenos resultados y sensaciones cosechadas al finalizar el curso de la calculadora gráfica TI-84 motivaron una larga reflexión posterior y una nueva exploración bibliográfica, en busca de textos y material que pudieran complementar y ampliar de alguna forma toda la labor realizada.

El uso de CG en el aula no está implementado de una forma rigurosa ni adaptada a las necesidades del currículo, sin embargo, hay una gran cantidad de artículos que respaldan la idea de la introducción de estos elementos como base para el diseño de nuevos materiales didácticos orientados a la enseñanza de las matemáticas a través de las ellos.

El manual práctico empleado en las sesiones probó ser un buen apoyo para el aprendizaje de los mecanismos usados por la calculadora en la resolución de muy diversos problemas. La resolución asistida por calculadora de estos ejercicios redujo el tiempo de realización notablemente y cambió la percepción que de ella tenían profesoras y estudiantes.

Pero no sólo eso, la manera en que docentes y estudiantes interactuaban era completamente distinta al de una clase corriente. Se produjo un mayor nivel de cooperación y de intercambio de información del que habría surgido de seguir las técnicas clásicas de resolución, más laboriosas y menos equitativas en respecto a la heterogeneidad del aula.

Los alumnos que durante el curso encontraron dificultad en seguir los métodos analíticos de resolución propuestos por el currículum se vieron compitiendo con los más aventajados en otras ocasiones por ver quién llegaba a la respuesta correcta más rápidamente. Esto es altamente motivador para ellos.

La puesta en común con las profesoras dejó entrever que el material didáctico aportado en el curso no sólo les daba 'un respiro' frente a la apretada agenda de aquellas fechas, sino que les permitía disponer de ese tiempo ganado para enfocar de forma distinta las pruebas de evaluación externas de los cursos venideros.

La idea de que tuvieran la oportunidad de comenzar un curso trabajando con la calculadora desde el inicio con apenas un par de sesiones de preparación, abrió una puerta a esta propuesta didáctica en la que se pretende proporcionar, a los docentes que imparten el BI, nuevas herramientas orientadas a la enseñanza-aprendizaje de la matemática mediante el uso de CG.

Estos materiales son perfectamente útiles para los mismos menesteres dentro del currículo del bachiller español, pues se van a centrar en el bloque de análisis -dado que es el que ha obtenido mejores resultados en la bibliografía consultada- que también comparte el BI. Precisamente, uno de los objetivos principales es motivar a los docentes a llevar los métodos y materiales empleados a todos los cursos de bachiller nacional. Por tanto, y en definitiva, que la inmersión de las CG sea poco a poco una realidad en el aula, para que acabe siéndolo también en el currículo oficial.

4.2 Contextualización: el material didáctico de apoyo para la enseñanza con las NNTT

Las competencias básicas en las que se basa actualmente el aprendizaje en el marco europeo de educación están recogidas en el **Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria**. Son aquellas que al finalizar la enseñanza secundaria obligatoria deben haber adquirido los estudiantes para garantizar «su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida».

Una de ellas, el **Tratamiento de la información y competencia digital** «incluye utilizar las tecnologías de la información y la comunicación extrayendo su máximo rendimiento a partir de la comprensión de la naturaleza y modo de operar de los sistemas tecnológicos, y del efecto que esos cambios tienen en el mundo personal y sociolaboral [...]» El decreto añade que ésta «igualmente permite aprovechar la información que proporcionan y analizarla de forma crítica mediante el trabajo personal autónomo y el trabajo colaborativo». Y concluye: «en definitiva, la competencia digital comporta hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas reales de modo eficiente».

Para exprimir al máximo la tecnología, su uso en el aula de matemáticas no puede reducirse al de simplificar las tareas más triviales del cálculo o del algebra operacional. Es necesario aliarse con ella, hacer de ella un apéndice del cerebro. De ahí que la competencia digital requiera hacer un "uso habitual" de la tecnología, porque sólo mediante su integración al trabajo diario y no de otra forma seremos capaces de comprender su "naturaleza y modo de operar". Sin embargo, esto tampoco es suficiente, como apuntan Del Puerto & Minaard (2003), debido a que los efectos del uso de la tecnología dependen de su función dentro del currículo.

Se han comentado ya los beneficios de la integración de las CG en el aula y se ha podido comprobar a través de datos bibliográficos y en primera persona que la mejor forma de aumentar la eficiencia de estas herramientas es contando con material apropiado, específico, que allane el camino hacia la convergencia entre estas NNTT y los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El material utilizado en el curso práctico de la TI-84 sirvió para salvar el salto inicial que supone un nuevo aprendizaje. Tanto profesores como alumnos vencieron el rechazo instintivo a la incorporación de una herramienta extraña en las tareas que fundamentalmente habían estado llevando a cabo por medios que dominaban –tecnológicos o no-. Un manual de esta índole debe estar destinado a los estudiantes, pero se demostró una vez más que los docentes sienten el mismo miedo hacia la tecnología, o más. Y son ellos los responsables de su incorporación paulatina en el currículo. Parece lógico que el diseño de este tipo de materiales deba tener en cuenta que el primer obstáculo que encuentra un artilugio como una CG en su camino hacia el aula es el propio profesor de la asignatura, y es por esta razón que estos recursos de apoyo a la tecnología son también muy importantes.

En la investigación de Quesada y Maxwell citada en la primera parte de este trabajo, el grupo experimental, que contaba con calculadoras gráficas, recibió las clases con la ayuda de un simulador de la calculadora –que se proyectó sobre una pantalla- muy similar al empleado por el autor de este trabajo en el curso práctico, alcanzando mejores resultados en la evaluación posterior. La incorporación de este tipo de herramientas de apoyo a la docencia potencia aún más las capacidades de la calculadora gráfica.

Algo similar sugiere el informe Cockcroft (Cockcroft, 1985), que en un apartado resalta la importancia de la calculadora como elemento auxiliar en la enseñanza y la necesidad de «elaborar materiales de uso en las aulas, destinados a promover la comprensión de los principios fundamentales».

En cierta manera, se trata de ayudar a crear un material que permita a los profesores adaptarse a los nuevos contextos educativos, sus formas y sus recursos; y a mejorar su formación didáctica. De tenderles una mano y guiarles para que ellos a su vez sean capaces de encaminar a los jóvenes estudiantes por las vías del currículo actual. De cambiar la forma de percibir la tecnología en el aula de los docentes pero también de los alumnos y alumnas, para que dejen de verla como un proveedor de ahorro temporal y energético y pasen a entenderla como una nueva perspectiva de aprendizaje, una oportunidad de exploración y de acercamiento a los problemas reales desde la matemática.

Como recuerda Ortiz (2002) del texto de Ruthven (1992), la calculadora modifica qué y cómo se enseña, y el uso de la misma puede suprimir «tanto la monotonía en aritmética elemental, como las manipulaciones simbólicas del álgebra y del cálculo infinitesimal» de forma que se pueda focalizar el esfuerzo en formas alternativas de construcción de modelos matemáticos que representen situaciones del mundo real. Si bien, al intentar sacar el máximo rendimiento de la tecnología, se corre el riesgo de que en esa nueva construcción del conocimiento los estudiantes se centren demasiado en la representación gráfica de los objetos matemáticos dejando completamente de lado su expresión analítica. Las gráficas pasan entonces a convertirse en forma simbólica en tanto que son un sistema de notación con sus propias reglas, sesgando la forma de concebir los objetos matemáticos (Gómez & Carulla, 1998).

4.3 Actividades propuestas para el análisis de una función real de variable real con el uso de la calculadora gráfica

4.3.1 ACTIVIDAD I: puntos de corte con el eje 'x'

Si se pregunta a la clase por los puntos de corte de la función con los ejes coordenados, algunos puede que lo recuerden de cursos anteriores, donde estudian estas intersecciones, generalmente, en funciones de primer y segundo grado. Alguien pronunciará aquello de: "Si es con el eje 'x', hacemos la 'y' cero. Si es con el eje 'y', hacemos la 'x' cero". Como muchas otras veces, la reiteración puede haber hecho su labor, pero no lo hará en la gran mayoría de estudiantes, ni mejorará la comprensión del problema.

Paso 1: resolver por métodos numéricos –con el empleo de la calculadora preferiblemente- las siguientes ecuaciones:

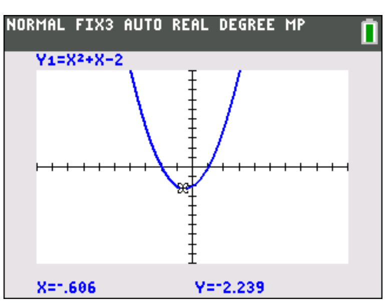
e_1: $x^2 + x - 2 = 0$; e_2: $x^2 + x + 2 = 0$; e_3: $x^2 - 5x + 6 = 0$

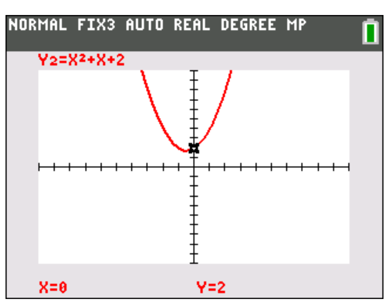
Se obtendrán las soluciones

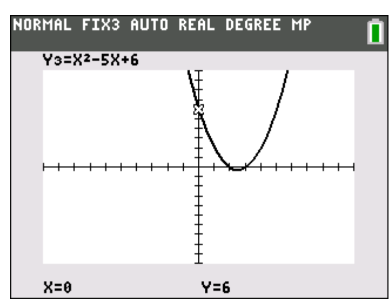
$x_{11} = 1$, $x_{12} = -2$ **No hay soluciones para e_2** $x_{31} = 2$, $x_{32} = 3$

Paso 2: representar ahora las funciones anteriores:

$y_1 = x^2 + x - 2$; $y_2 = x^2 + x + 2$; $y_3 = x^2 - 5x + 6$



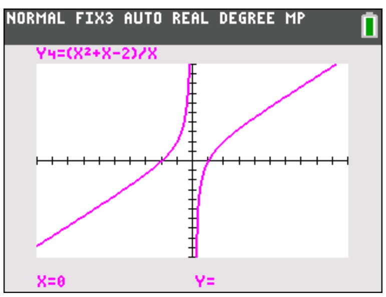


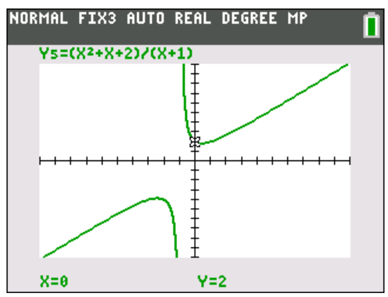


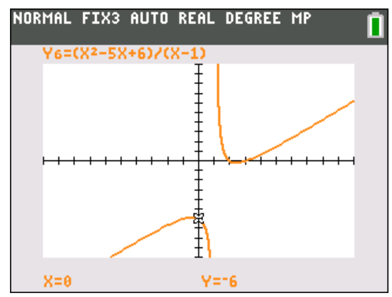
Dejar un rato para que ellos mismos se percaten de la relación entre las raíces y los puntos de corte –aunque esto ya se ha visto en el currículo de la ESO, e incluso con anterioridad en el propio bachiller, la tendencia general que el autor de este trabajo ha experimentado a lo largo de los años es que tiende a olvidarse con facilidad-.

Paso 3: representar las siguientes funciones racionales:

$$y_1 = \frac{x^2 + x - 2}{x}; \qquad y_2 = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}; \qquad y_3 = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}$$







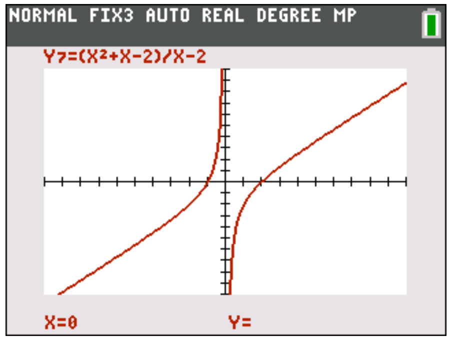
De esta forma, pueden relacionar las raíces del numerador con los puntos de corte de la función racional con el eje ‘x’.

Paso 4: Hallar los puntos de corte de la función

$$y_7 = \frac{x^2 + x - 2}{x} - 2$$

No deben representar la función. Hay que indicarles que los deduzcan a partir de lo visto anteriormente

Paso 5: representar la función con la ayuda de la CG



Dejar que traten de explicar a qué se debe que en este caso las raíces del numerador no coincidan con los puntos de corte.

Paso 6: operar la función sacando mínimo común múltiplo

$$y_7 = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

Una vez se den cuenta de la importancia de que la función esté expresada en un sólo término, pedirles que comprueben cómo ahora sí que coinciden las raíces del numerador y los puntos de corte con el eje ‘x’ de la función racional.

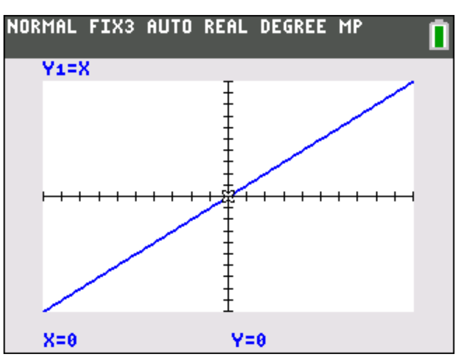
4.3.2 ACTIVIDAD II: dominio y asíntotas verticales de una función racional

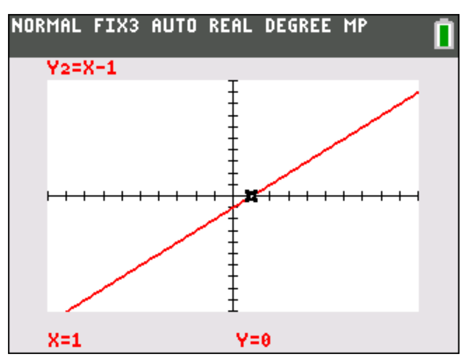
La enseñanza del 'estudio del dominio de una función' suele verse reducida a una serie de cálculos sistemáticos, asociados al reconocimiento de la expresión algebraica de dicha función. Así, es habitual escuchar a alumnos repetir frases como: "si hay 'x' en el denominador, igualamos el denominador a cero y las soluciones las quitamos del dominio". O, respecto a las asíntotas verticales: "Los valores que anulan el denominador, son asíntotas verticales". Ejemplos como éstos, son formas poco rigurosas de enseñar algo tremendamente importante para el análisis posterior de las distintas funciones. Y, además, no necesariamente ciertos, como se verá más adelante.

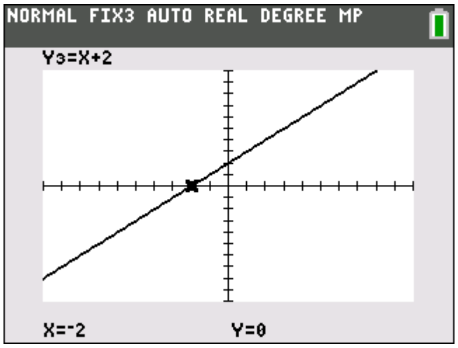
Evidentemente, no todos los alumnos son capaces de seguir el ritmo que impone el currículo, y estas 'pequeñas' libertades que se toma el profesor hacen que los estudiantes menos capaces puedan ser, cuanto menos, solventes. Pero si estamos dispuestos a conceder hasta ese punto, ¿por qué no apoyarnos en la CG? ¿Por qué realizar operaciones algebraicas sin conocimiento cuando podemos evitarlas –parcialmente- y al mismo tiempo comenzar a reconocer y asociar las diversas formas de expresión de una función?

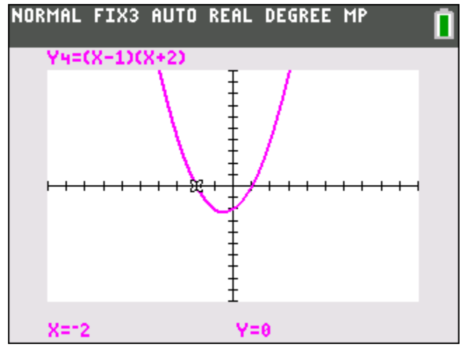
Paso 1: representar las siguientes funciones polinómicas:

1) $y = x$; **2)** $y = x - 1$; **3)** $y = x + 2$ **4)** $y = (x-1)(x+2)$





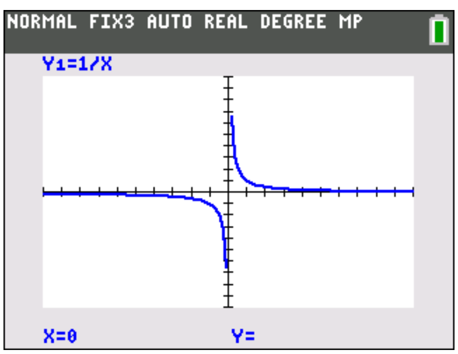


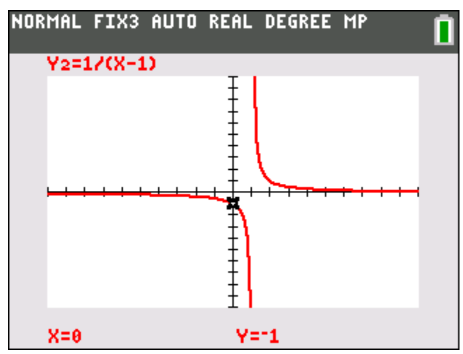


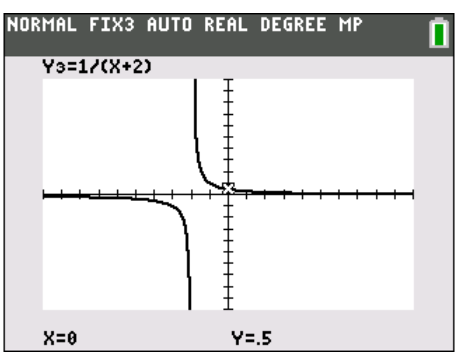
La intención es refrescar el concepto de raíz como punto de corte con el eje 'x'.

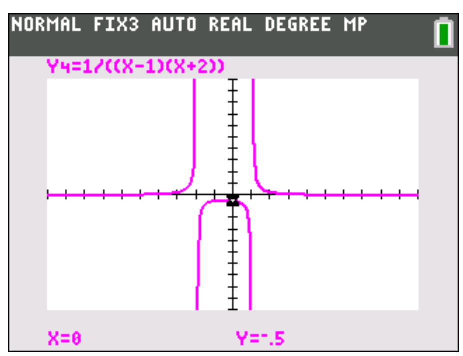
Paso 2: representar a continuación las funciones racionales siguientes, obtenidas a partir de las cuatro primeras:

$$y_1 = \frac{1}{x}; \qquad y_2 = \frac{1}{x-1}; \qquad y_3 = \frac{1}{x+2}; \qquad y_4 = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$









Incidir en el hecho de que al tratar de calcular la imagen de las abscisas de los puntos de corte -o raíces- de las funciones del denominador, se produciría una situación en la que habría que 'dividir entre cero'. Esta operación no da un valor real, de ahí que este valor no pertenezca al dominio de la función racional y que no tenga representación en esa abscisa. Se llega a la solución:

$$\mathbf{Domf_1(x)=\Re - \{0\};\ \ Domf_2(x)=\Re - \{1\};\ \ Domf_3(x)=\Re - \{-2\};}$$

$$\mathbf{Domf_4(x)=\Re - \{-2,1\}}$$

Es posible que muchos perciban cómo la función parece presentar cierto comportamiento en las proximidades a los puntos que están fuera del dominio -asíntotas verticales-. Es un buen momento para explicar el concepto gráfico de asíntota vertical y comentar su relación con las raíces del polinomio 'denominador', pero sin llegar a ninguna conclusión definitiva al respecto.

Paso 3: hallar a continuación el dominio de la función:

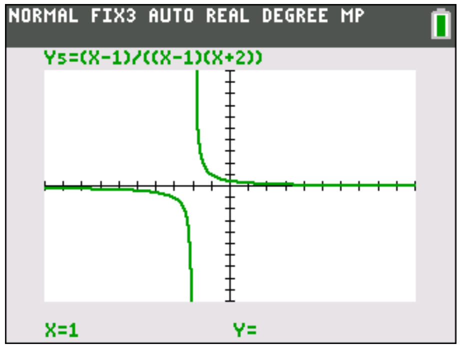
$$y_5 = \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

Antes de representarla, pedirles que lo calculen representando la función 'denominador' para hallar sus puntos de corte con el eje 'x', o bien hallando las raíces de la misma por métodos numéricos –empleando en cualquier caso la CG-.

Llegarán con facilidad al resultado:

$$\mathbf{Domf_5(x)=\Re - \{-2,1\}}$$

Paso 4: representar a continuación la función $f_5(x)$ con ayuda de la CG.



Realizar un sondeo y ver si alguien puede explicar por qué en x=1 no aparece la asíntota vertical que, sin embargo, sí aparecía en $f_4(x)$.

Seguidamente, pedirles que factoricen el denominador y simplifiquen.

$$y_5 = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Explicar este hecho puntualizando que el valor x=1, si bien no pertenece al dominio, no representa una asíntota, y que no debería representarse en la expresión gráfica de la función.

Paso 5: a modo de ejercicio, pedir que cada uno proponga la expresión analítica de tres funciones racionales.

- Una que tenga una asíntota vertical en x=3/2.
- Otra, una asíntota vertical en x=4 y que su dominio sea:

  Domf(x)=$\Re$ - {4,6}
- Por último, una sin asíntotas verticales.

Comprobar los resultados mediante la representación gráfica con la calculadora.

4.3.3 ACTIVIDAD III: asíntotas horizontales. Los límites en el infinito.

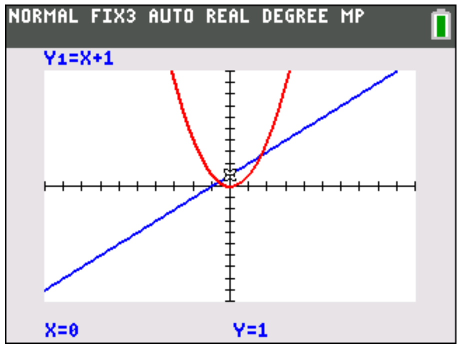
El concepto de límite ‘en el infinito’ o ‘tendencia a largo plazo’ de una función es fácilmente comprensible desde su expresión gráfica. Cuando se encuentran con la expresión analítica de una función racional, suelen aplicar el concepto de ‘grado del numerador’ y ‘grado del denominador’ para determinar a priori si dicha función posee asíntotas horizontales. Esto es indiscutiblemente eficaz. Y aquí está el problema. Como funciona bien, se pierde la perspectiva en favor del pragmatismo. Al enfrentarse a un problema en el que se les demanda que razonen el comportamiento de una simple función de beneficios -por emplear un ejemplo usual-, no son capaces de asociar el concepto de asíntota al término ‘tendencia a largo plazo’.

Representaremos las siguientes funciones

*Las asíntotas oblicuas, aunque importantes, no pueden determinarse mediante la calculadora gráfica. La representación puede esclarecer su existencia pero no nos dará la expresión algebraica de la misma, que debe obtenerse mediante el cálculo numérico de límites o la división polinómica de la función racional. Por esta razón, no se hará mención especial a las mismas en esta actividad, ya que la comparación de los órdenes de numerador y denominador es igualmente efectivo.

Paso 1: Representar conjuntamente las funciones

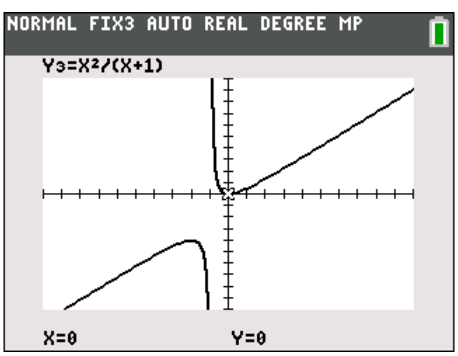
$y_1 = x + 1;$ $y_2 = x^2$

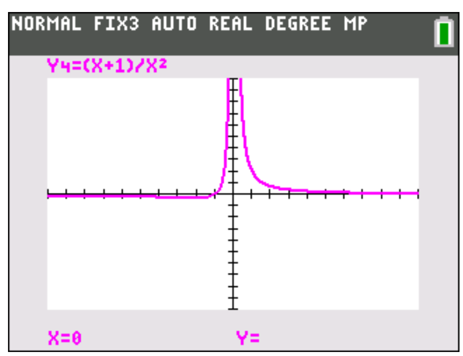


Comparar, a partir de la gráfica, la intensidad de crecimiento –o de decrecimiento- de una y otra función, tanto desplazándonos en sentido positivo como negativo del eje de abscisas. Comentar la tendencia en el infinito de estas funciones.

Paso 2: Representar, separadamente, las siguientes funciones:

$y_3 = \dfrac{x^2}{x+1};$ $y_4 = \dfrac{x+1}{x^2}$





Volver a comparar la tendencia de ambas funciones y lanzar preguntas a la clase sobre la posible relación del intercambio numerador-denominador.

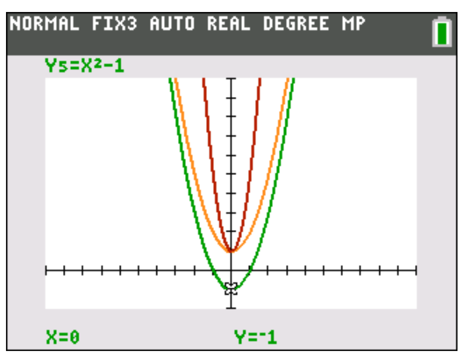
*Posteriormente, puede aprovecharse la gráfica de $\mathbf{y_3}$ para revisar las condiciones de existencia de una asíntota oblicua.

EL objetivo es que se entienda cómo la mayor rapidez de crecimiento de la función de segundo grado y su posición –numerador o denominador- determina la tendencia de la función racional.

Se puede hacer un avance del siguiente paso preguntando acerca de lo que crean que pasaría si los grados fueran iguales.

Paso 3: Representar conjuntamente las siguientes funciones:

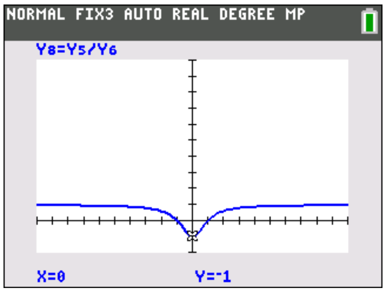
$y_5 = x^2 - 1$; $y_6 = x^2 + 1$; $y_7 = 4x^2 + 1$

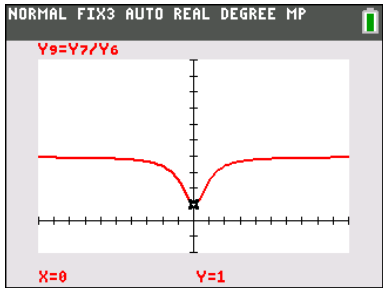


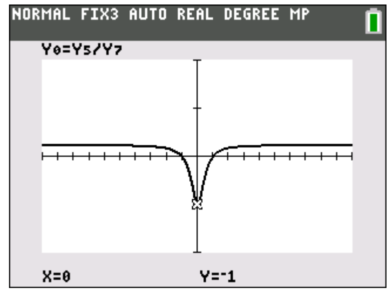
Destacar que el crecimiento de $\mathbf{y_5}$ e $\mathbf{y_6}$ es muy similar, mientras que el de $\mathbf{y_7}$ es más intenso.

Paso 4: representar ahora las funciones racionales:

$$y_8 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \qquad y_9 = \frac{4x^2 + 1}{x^2 + 1}; \qquad y_{10} = \frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}$$







Observar las reacciones y preguntar sobre las posibles razones de la aparición en determinados lugares de las asíntotas horizontales. Aprovechar para preguntar a qué se debe que no hayan asíntotas verticales y así repasar conceptos previos.

Paso 5: solicitarles que propongan tres* funciones racionales:

- Una con una asíntota horizontal en **y=3/5** y una asíntota vertical en **x=-2**
- Otra con asíntota horizontal en **y=√3** y sin asíntotas verticales
  Por último, una con asíntota horizontal en y=0, asíntota vertical en x=1 y cuyo dominio sea

$$\mathbf{Domf(x)} = \Re - \{1,3\}$$

Comprobar los resultados mediante la representación gráfica con la calculadora.

4.3.4 ACTIVIDAD IV: monotonía y extremos relativos

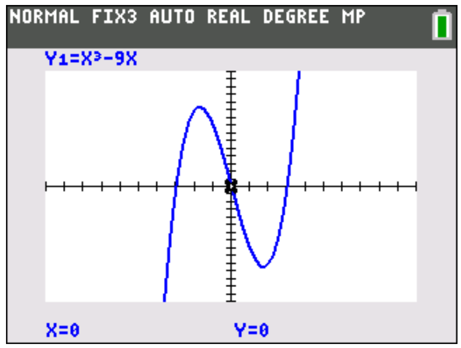
El estudio de la monotonía no suele presentar un problema de comprensión, ya que los conceptos de crecimiento y de decrecimiento se asocian inmediatamente a situaciones reales perfectamente descriptibles –la inclinación o pendiente de una carretera o montaña es un ejemplo gráfico ampliamente utilizado-. La mera representación de la función, con la ayuda de la CG, bastaría para interpretar correctamente sus intervalos de monotonía.

En este caso, la ayuda de la faceta 'gráfica' de la calculadora parece alejar este apartado -del análisis de una función- de su relación con el cálculo diferencial. La interpretación del signo de la derivada –en un sentido más amplio, el de la pendiente de la recta tangente en un punto- no sólo es importante en el estudio de monotonía, sino en la contribución más importante de las derivadas en el currículo de las matemáticas de bachillerato: la determinación de máximos y mínimos. Es por esto que la representación gráfica de la derivada junto a la de la función primitiva puede fortalecer la asociación entre monotonía y signo de la función derivada.

*Los puntos de inflexión y el estudio de la curvatura a través de la derivada segunda de la función, pese a estar en el currículo de matemáticas, son características que han ido paulatinamente desapareciendo de esta unidad en las clases de bachiller, razón por la cual no se tratarán.

Paso 1: Comenzaremos representando la función polinómica

$$y = x^3 - 9x$$



Inmediatamente se pueden detectar los intervalos de monotonía. Se hace una breve explicación-recordatorio de cómo se enuncian correctamente y se les pide que intenten escribirlos.

Se encontrarán con el problema de que no pueden determinar exactamente entre qué valores definirlos, y les tocará aproximar 'a ojo'. Es importante señalarles que los cambios de monotonía se producen, en el caso de una función polinómica, en los extremos relativos.

Paso 2: obtener la expresión de la derivada de la función y calcular valores de la derivada en puntos situados en cada uno de los distintos intervalos de monotonía.

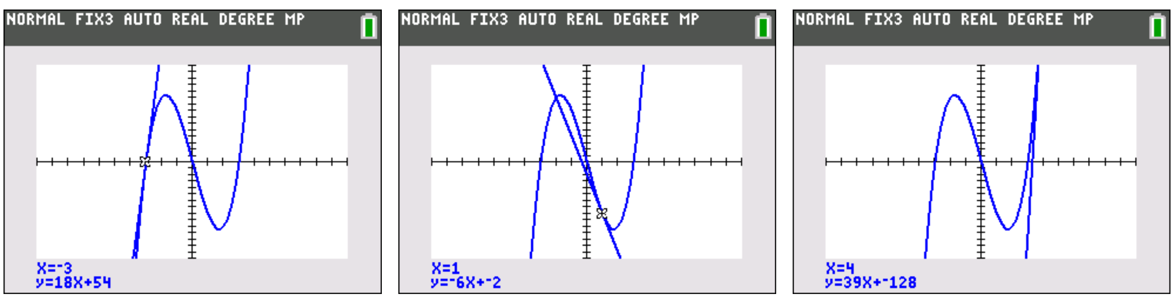
La derivada es recomendable que la calculen 'a mano', si bien es interesante repasar el cálculo de la derivada en un punto con la CG, tal y como deben haber visto en el 'curso práctico de la TI-84'. Se les puede remitir al manual para que revisen cómo se hace.

Una vez hayan comprobado la asociación 'signo de la derivada' con monotonía, se puede pasar al siguiente punto.

f'(-3)=18 (creciente); f'(1)=-6 (decreciente); f'(4)=39 (creciente)

Paso 3: Representar las rectas tangentes a la función en los puntos calculados en el apartado anterior

*Se puede hacer otro breve recordatorio sobre la interpretación geométrica de la derivada –que debe haberse dado previamente al análisis completo de la función-.



Así asociarán el valor -y el signo- calculado con la pendiente de cada una de las rectas representadas. Cabe recordar que además de representar la recta tangente, nos da su ecuación, con lo que pueden contrastar los valores calculados de la derivada en los puntos de tangencia con la pendiente de cada una de las tangentes.

Preguntar qué creen que pasará cuando calculemos el valor de la derivada en uno de los extremos relativos. Indicar que averiguarlo será nuestro objetivo desde ese momento.

Paso 4: calcular valores de la derivada en varios puntos, tomándolos de forma que cada vez estén más próximos a un extremo relativo.

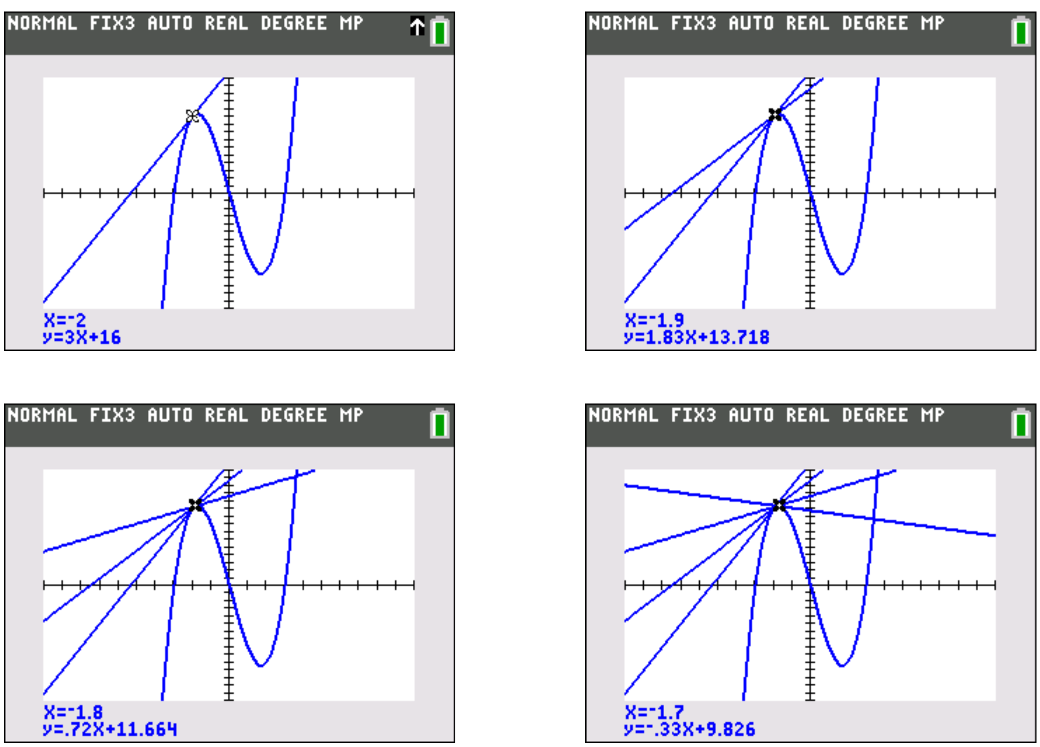
f'(-2)=3 (creciente); f'(-1,9)=1,83 (creciente);

f'(-1,8)=0,72 (creciente) f'(-1,7)=-0,33 (decreciente)

Aquí ya pueden empezar a intuir cuál va a ser el valor de la derivada cuando estemos sobre el extremo relativo. Remarcar el cambio de signo.

Paso 5: representar las rectas tangentes en los puntos calculados en el paso 5

Si aún no han llegado por sí mismos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente en un extremo relativo toma el valor cero –y por lo tanto también la derivada en dicho punto-, es el momento de aclararlo.

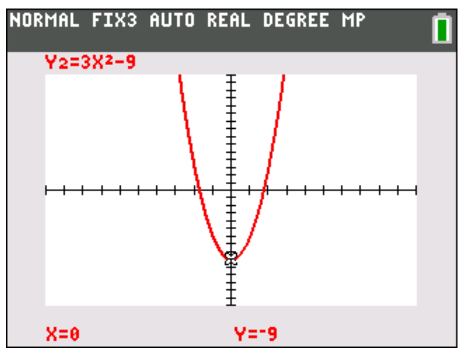


Paso 6: representar la función derivada y hallar sus raíces

Al representar la derivada, debemos dejarles que deduzcan qué pueden tener que ver las raíces con lo que estamos intentando averiguar. Esto debe quedar muy claro.

Finalmente, explicar, si alguien no lo ha intuido ya, que los intervalos positivos y negativos de la función representada están directamente relacionados con

la monotonía de la función. Tras la reflexión, aclarar todas las dudas que pudieran haber.



Paso 7: estudiar la monotonía y hallar los extremos relativos de la función racional

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Y acompañarles en el proceso con la ayuda de TI-Smartview si se dispone de un proyector.

5. Conclusiones

En la actualidad existen multitud de recursos tecnológicos que pueden emplearse en el aula. Buena parte de ellos –al menos los más novedosos- implica la manipulación de un ordenador o una 'tablet'. La razón por la que se decidió realizar un trabajo sobre calculadoras gráficas es porque son, en opinión del que escribe, la opción más económica, eficiente y transportable.

A lo largo del documento se ha defendido el beneficio potencial del empleo de una calculadora gráfica como herramienta educativa. No sólo eso, se han presentado resultados experimentales propios, que junto al de otros investigadores respaldan esta propuesta. Así mismo, se ha afirmado que el éxito del uso de esta herramienta no es incondicional, y que el simple hecho de introducir las CG en el aula no garantiza logros educativos más altos. Este éxito es función, principalmente, de dos factores: la predisposición y preparación del educador, y el material didáctico adaptado a las nuevas formas de enseñar con esta tecnología. La experiencia vivida en la estancia en prácticas permite, precisamente, poner de relevancia la difícil empresa de 'tecnificar' al profesor. Y es que la costumbre es el principal aliado de la parálisis educativa.

Muchos de estos docentes no ven con buenos ojos la idea de 'volver a aprender', en el sentido de renovarse para adaptarse a las exigencias de las nuevas tendencias en educación. Para muchos de ellos, su método –cualquiera que sea- da igualmente buenos resultados. Y puede que no se equivoquen. Pero se comete un error de base: el que el alumno esté preparado para el aula no implica que lo esté para el mundo real. Quizá sea éste el principal motivo por el cual se ha implantado la enseñanza por competencias. Lo aprendido en el aula debe trascenderla.

A lo largo de las tres sesiones relatadas en este documento se han reportado indicios de mejora en la comprensión matemática de ciertos problemas cuando su enseñanza se realiza con ayuda de una calculadora gráfica y del material auxiliar apropiado. Pero una lectura habitual y errónea –tanto por parte de alumnos como de profesores- de estos resultados es pensar que la inclusión en el aula de estos elementos tecnológicos es garantía de éxito y está exento de cualquier esfuerzo –otro que no sea el económico-. Se tiende a pensar que es precisamente el esfuerzo –mental, operacional- lo que se va a ver reducido gracias a la máquina. Lo cierto, y lo que han demostrado éste y otros proyectos similares, es que su valía –la de la CG- se mide por la predisposición del docente a hacer de ella un aliado educativo, por el esfuerzo en renovar sus competencias dentro del marco educativo actual basado en competencias, y por el sacrificio de horas dedicadas a la elaboración de material y actividades adaptadas a la calculadora.

Sería injusto pensar que todo ese esfuerzo deben hacerlo ellos solos. La única forma de cambiar la inercia de la costumbre es demostrar su inevitable obsolescencia. Lograrlo requiere de un esfuerzo de toda la comunidad educativa para integrar las buenas costumbres a los beneficios del progreso.

Bajo esta premisa, y fruto de la experiencia, de la observación, de la práctica docente, de la evaluación y de la reflexión, se ha conformado todo lo que aquí se ha presentado. Y también -dejando a un lado el rigor académico que el documento requiere- bajo el deseo de que sirva de utilidad en el futuro a su autor, y a muchos otros compañeros y -presentes o futuribles- docentes.

BIBLIOGRAFÍA

Cockcroft, W. (1985). Informe Cockcroft. Las matemáticas sí cuentan. MEC. Madrid.

Del Puerto, S., & Minnaard, C. (2002). La calculadora como recurso didáctico. Homenatge al professor L. A. Santaló. Barceló i Vidal.

Del Puerto, S., & Minnaard, C. (2003). El uso de la Calculadora Gráfica en el aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Dunham, P. H & Dick, T. (1994). Research on Graphing Calculators. The Mathematics Teacher, vol. 87 (6), 40-445.

Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics

Gómez, P., & Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática. In U. A. de Manizales & RIBIE-COL (Eds.), . Bogotá.

González, L. (INTEF). (2015). Una calculadora gráfica para la enseñanza de las matemáticas. *Observatorio Tecnológico*.

Monzó, O., & Orilles, J. M. (1995). La calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas. *Aula de Innovación Educativa*, (34).

Ortiz, J. (2002). Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación. Universidad de Granada.

Quesada, A., Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance College students performance in precalculus. Educational Studies in Mathematics, 27, pp.205-215.

Rivière Gómez, V. (2002). Un informe muy citado (Reseña sobre l'Informe Cockcroft). *Suma*, 133–140.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. Educational Studies in Mathematics, 21, pp.431-450.

Ruthven, K. (1992). Graphic Calculators in Advanced Mathmatics. Coventry. NCET

Toth, V. (2000). Programmable Calculators. Retrieved from http://www.rskey.org/fx7000g

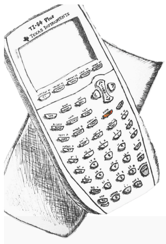
ANEXOS

ANEXO A: Manual práctico en la calculadora gráfica TI-84

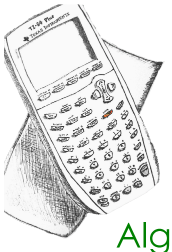
Manual práctico de la calculadora gráfica TI-84

para Bachiller Internacional

Jorge J. Izquierdo González



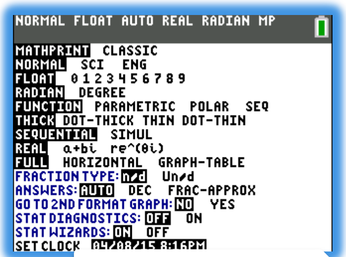
Contenidos



Algunos ajustes previos

Notación científica

[mode]

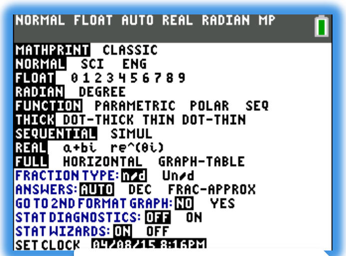


'normal'/'sci'/'eng' + [enter]

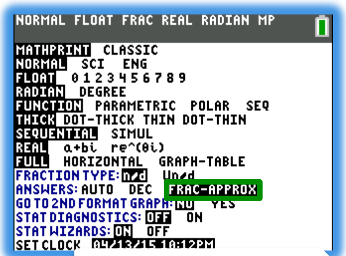
FIN

Modo fracción

[mode]



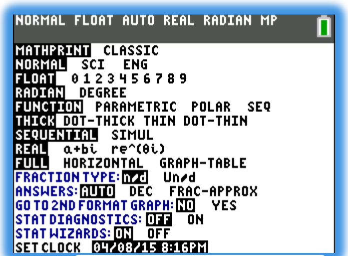
'auto'/'dec'/'frac' + [enter]



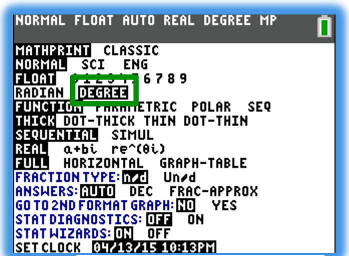
FIN

Radianes y grados

[mode]



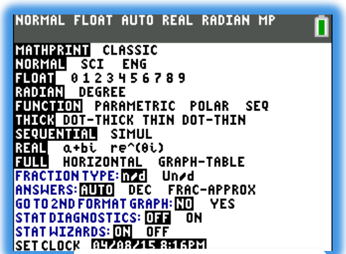
'radian'/'degree' + [enter]



FIN

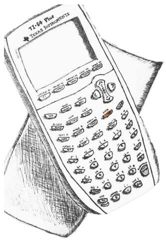
Ajustar el número de decimales de respuesta

[mode]



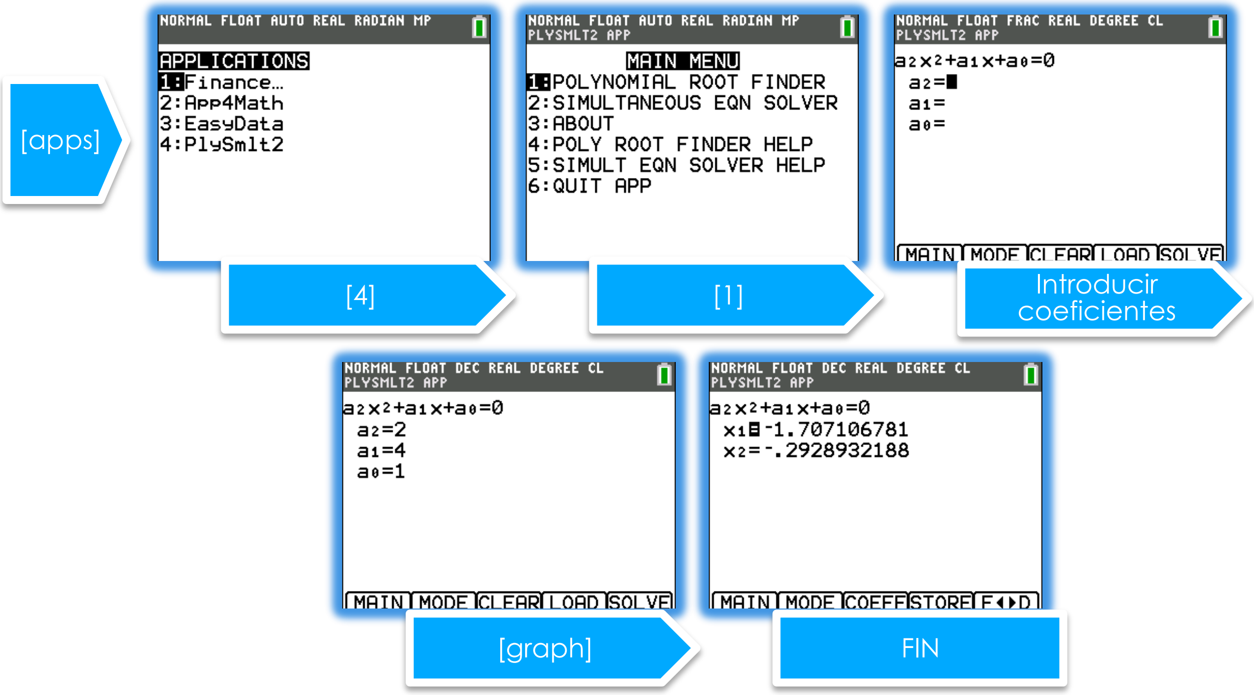
Situarse sobre 'float' + elegir nº + [enter]

FIN



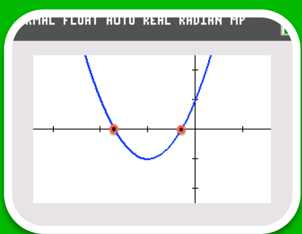
Hallar las raíces (soluciones) de un polinomio.

Cómo hallar las raíces del polinomio **p(x)= 2x²+4x+2**



Recuerda: las raíces (soluciones) de un polinomio son los valores que hacen el valor del polinomio '**cero**'.

En el caso de una función polinómica, las raíces son, además, el valor de los puntos de corte de la gráfica de dicha función con el eje '**x**'. Esto último implica que **se pueden hallar las raíces representándola**.



Atención: el **número de raíces** de un polinomio puede oscilar entre 'cero' y un valor que será, como máximo, igual al grado del polinomio.

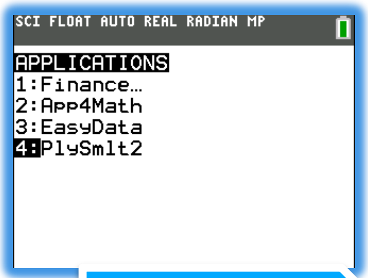
Ecuaciones simultáneas.

A continuación, resolveremos el sistema de ecuaciones lineales:

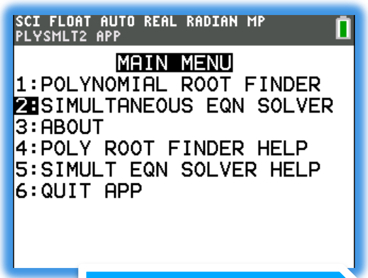
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$

El método es igualmente válido para sistemas lineales de tres o más incógnitas.

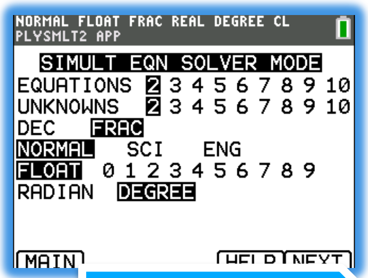
[apps]



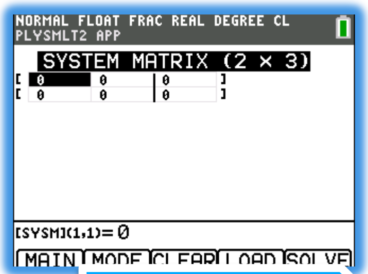
[4] (PlySmlt2)



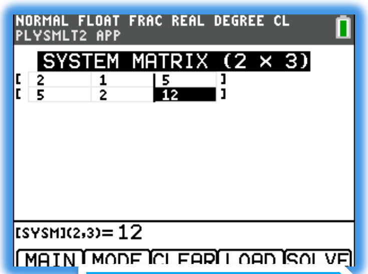
[2] (Simultaneous…)



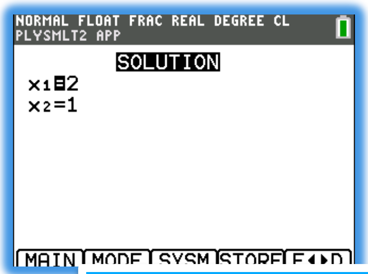
Indicar nº de ecuaciones e incógnitas + [graph]



Introducir coeficientes

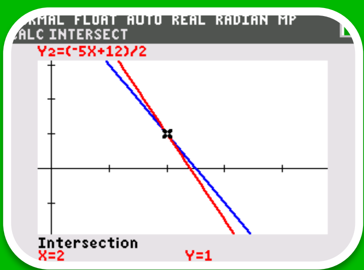


[graph]



FIN

Recuerda: las parejas de soluciones (x_1,x_2) de un sistema de ecuaciones son las coordenadas de los puntos de intersección de las correspondientes gráficas de cada función. Es decir, que también podríamos resolverlo por métodos gráficos.



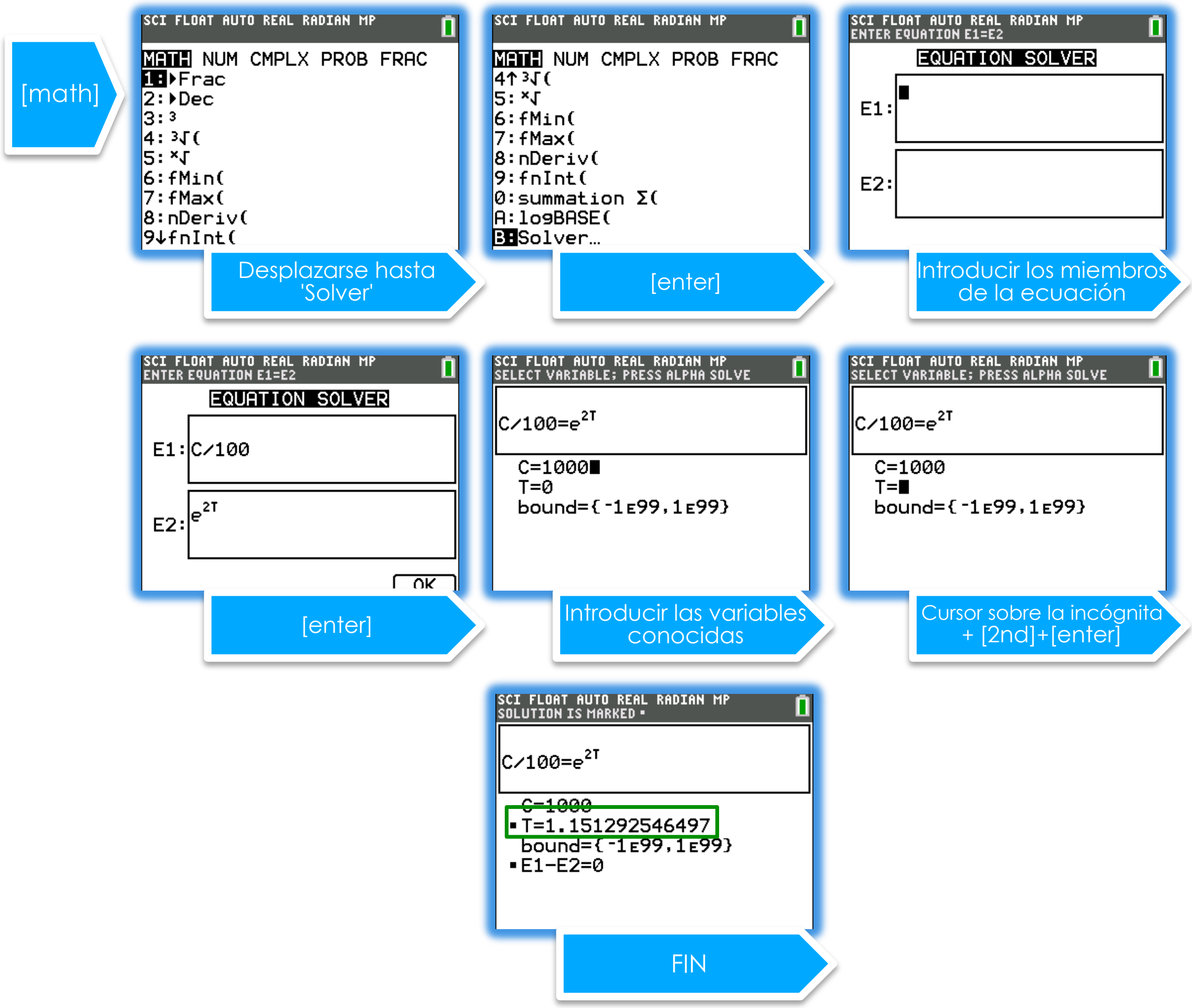
Atención: antes de introducir los coeficientes no olvides reordenar (y operar, en caso necesario) las ecuaciones. El sistema debe quedar en la forma:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

donde **A**, **B** y **C** son los coeficientes a introducir.

Cálculo de la variable de una ecuación (de dos o más incógnitas), conocidas las demás

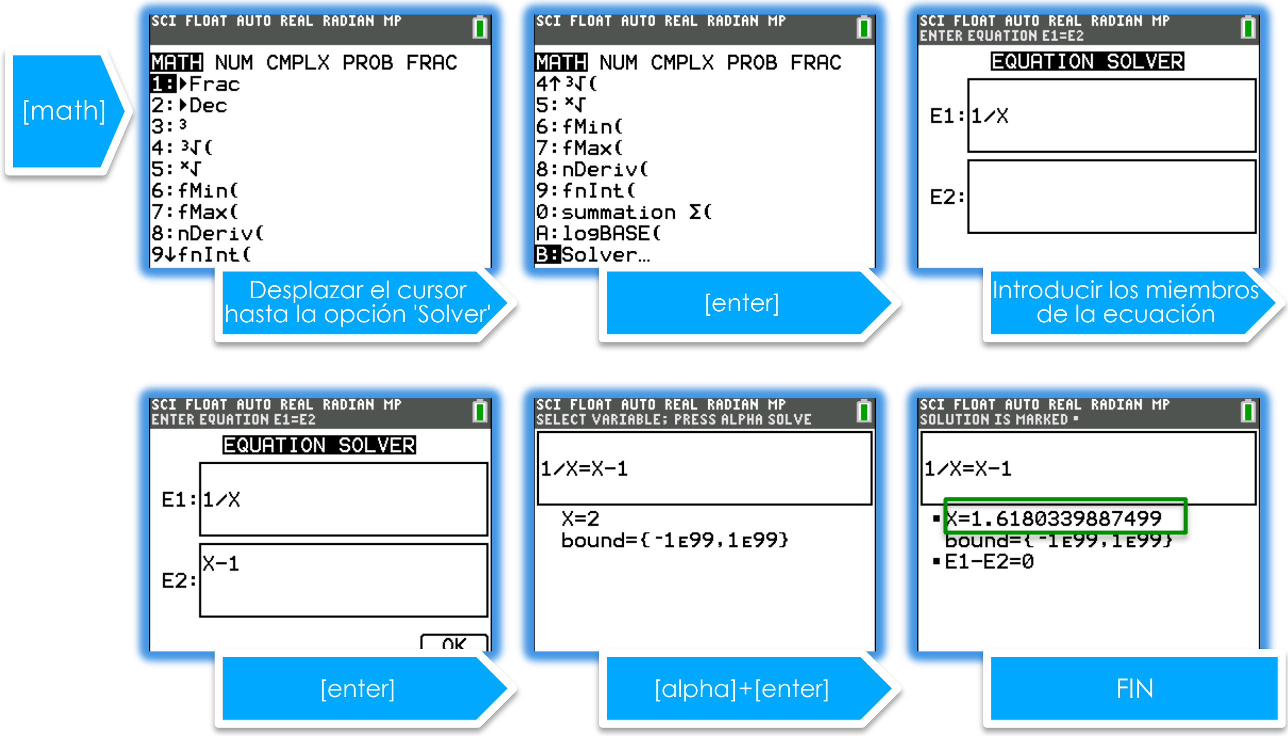
Hallar el valor de **T** en la ecuación: $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{100}} = \mathbf{e^{2T}}$, sabiendo que **C=1000**.



Atención: No es necesario tener incógnitas o valores en ambos miembros de la igualdad. Si la ecuación es del tipo f(x)=0, introduciremos el valor 'cero' en el segundo miembro (casilla 'E_2').

Resolución de cualquier tipo de ecuación (Método numérico):

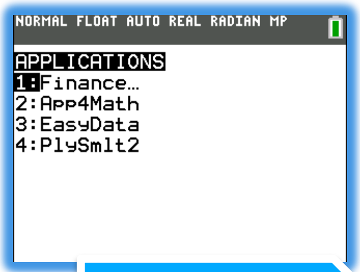
Hallar las soluciones de la ecuación $\frac{1}{x} = x - 1$



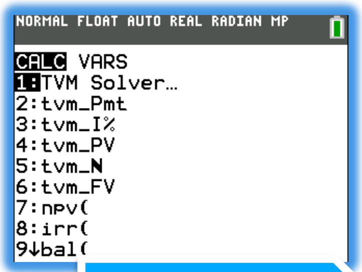
Atención: no se recomienda el uso de SOLVER, ya que únicamente nos da una de las soluciones. Es preferible usar el método gráfico de aproximación explicado más adelante.

Cálculo del interés compuesto

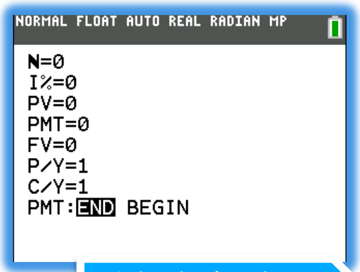
[apps]



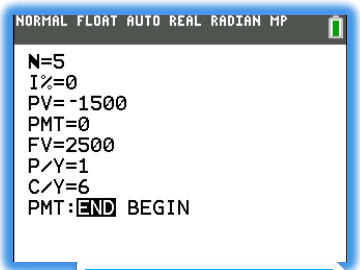
[1] (Finance)



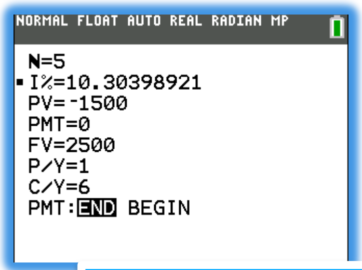
[1] (TVM solver)



Introducir valores conocidos



Situarse sobre incógnita + [alpha]+[enter]



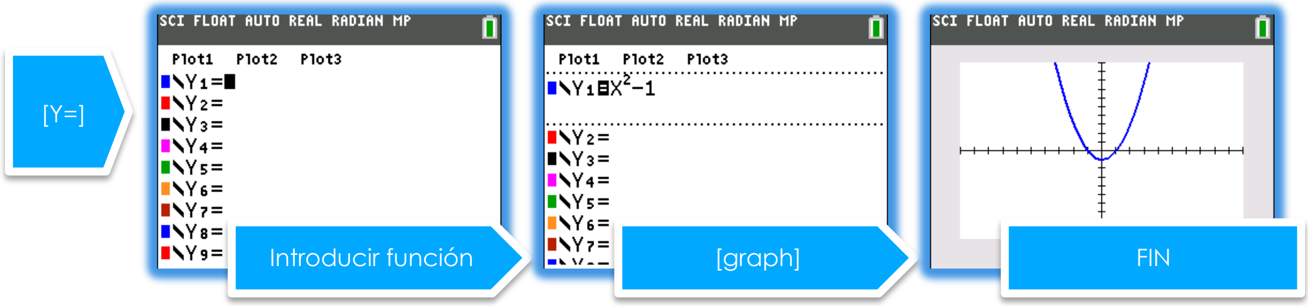
FIN

Recuerda: Interpretación de los símbolos utilizados por la calculadora.

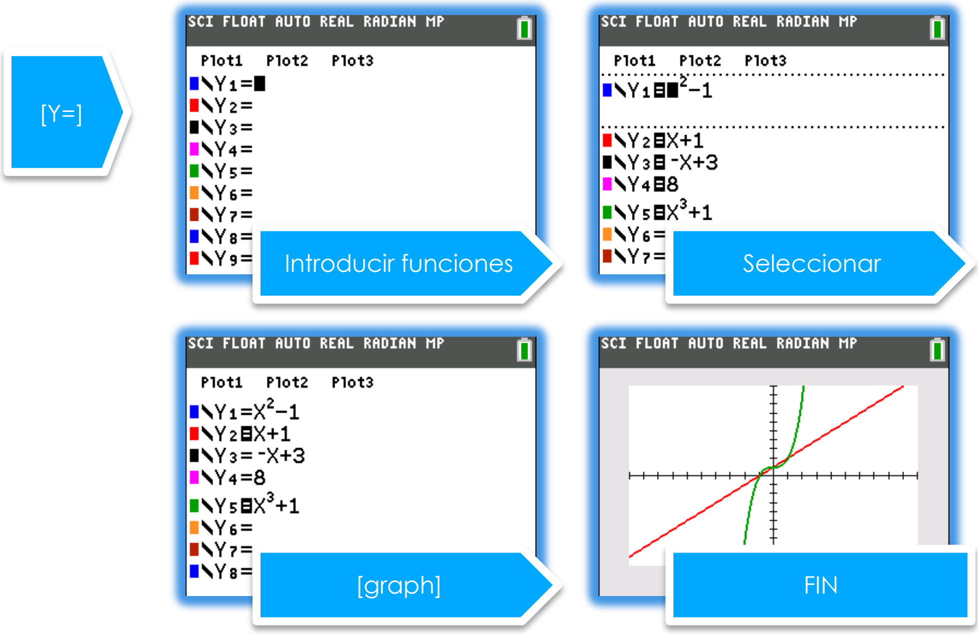
CALC VARS	
1: **N**	Número total de períodos de pago
2: **I%**	Tipo de interés anual
3: PV	Valor actual
4: PMT	Importe de pagos
5: FV	Valor futuro
6: P/Y	Número de períodos de pago por año
7: C/Y	Número de períodos de capitalización/año

Atención: En los cálculos de interés compuesto, el valor de **PV** (la cantidad inicial o valor actual) debe definirse como **negativo**.

Introducir y representar una función



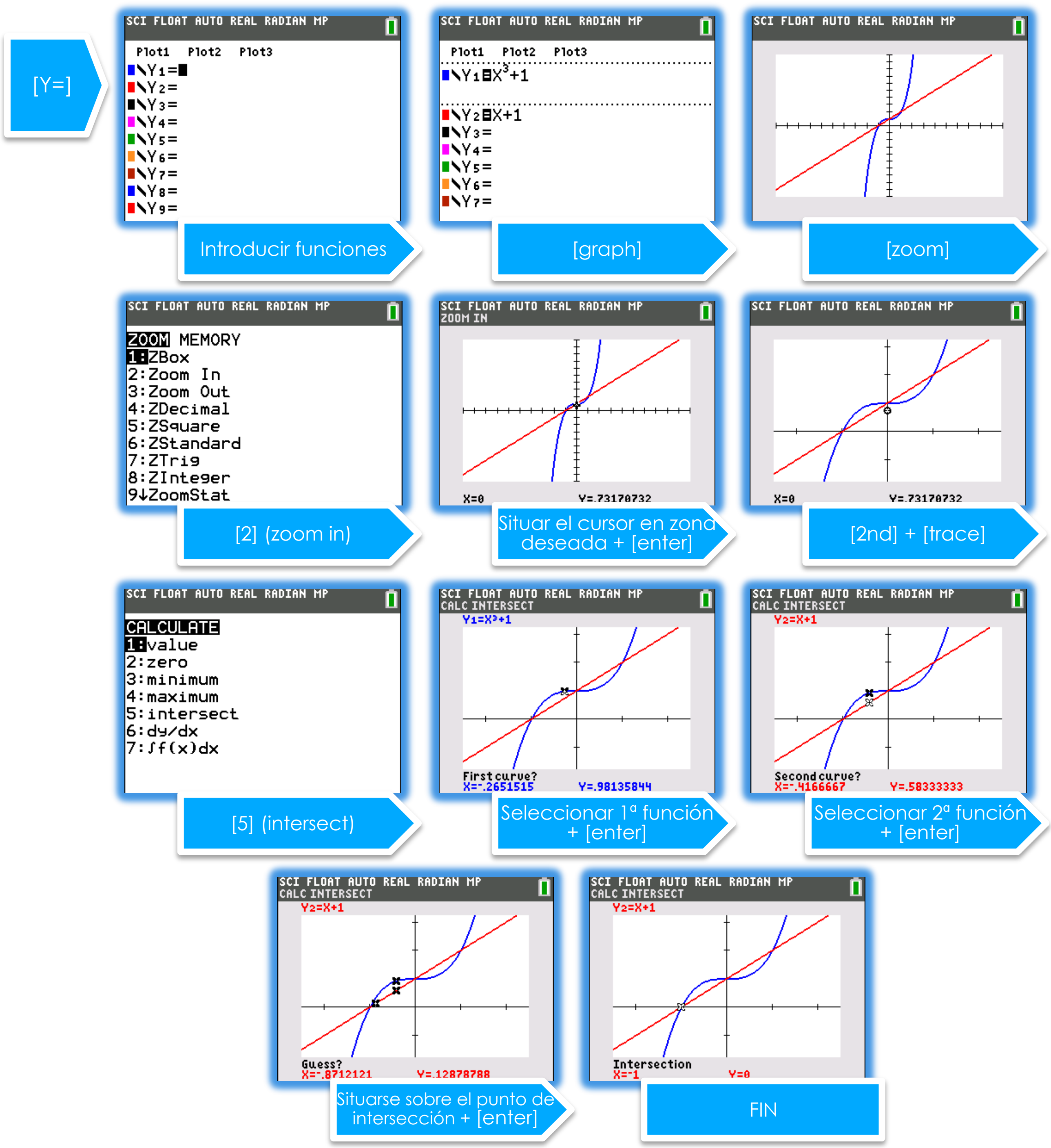
Seleccionar varias funciones y representarlas



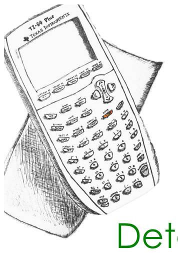
Aclaración:

- Si en lugar de pulsar **[graph]** se pulsa **[trace]** podremos desplazarnos sobre la gráfica para leer valores u obtener imágenes de **x**.
- Para **seleccionar funciones** basta con situar el cursor sobre el símbolo '**=**' y pulsar **[enter]**. Observaremos que el símbolo queda sombreado en negro.
- Podemos cambiar el tipo de línea y el color situando el cursor sobre el icono coloreado junto al símbolo '\'.

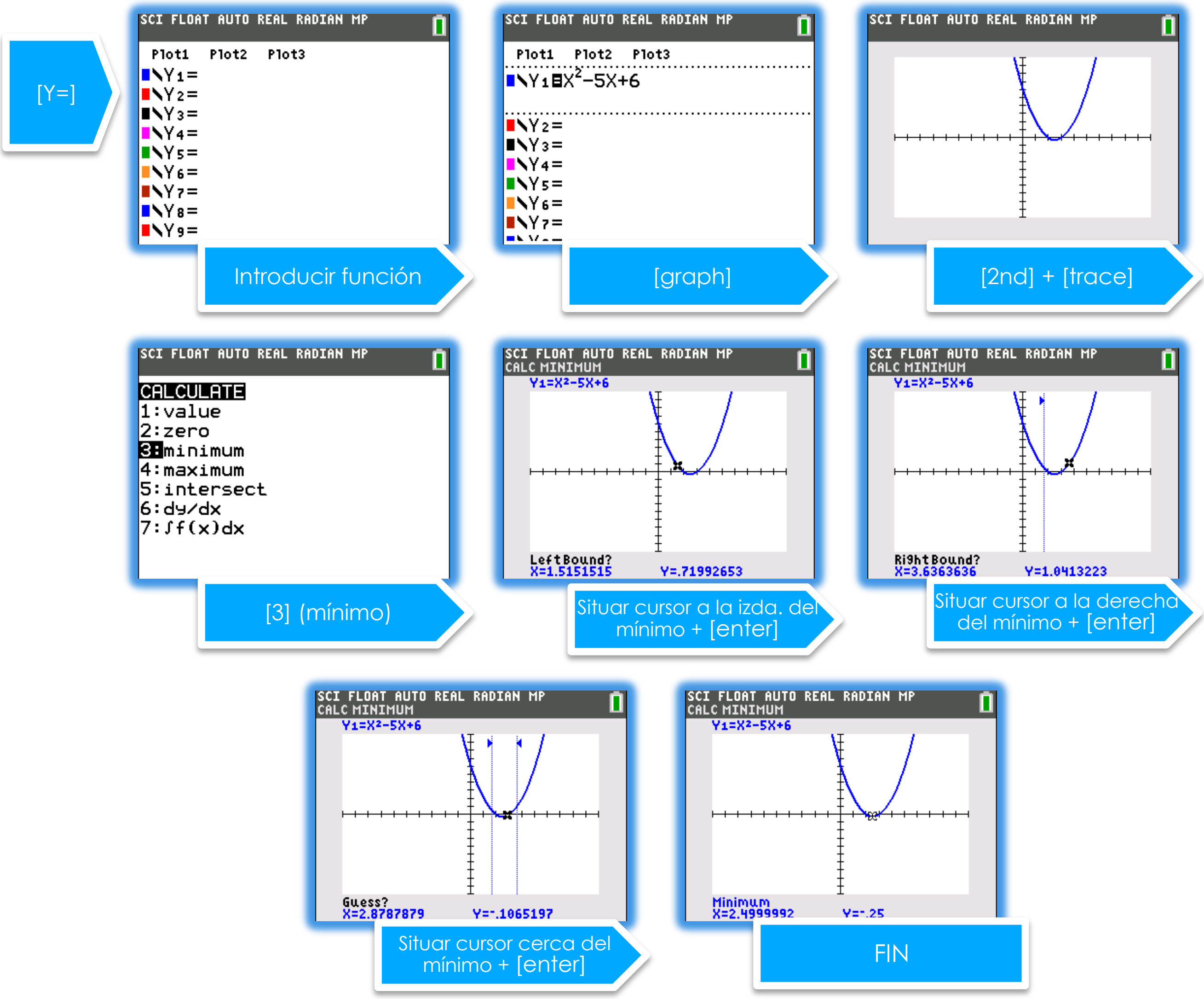
Intersección de funciones



Aclaración: **no** es estrictamente necesario realizar el paso del **'zoom'**. Si en la primera representación se distinguen bien los puntos de intersección, podemos saltar directamente a **[2nd] + [trace]**.



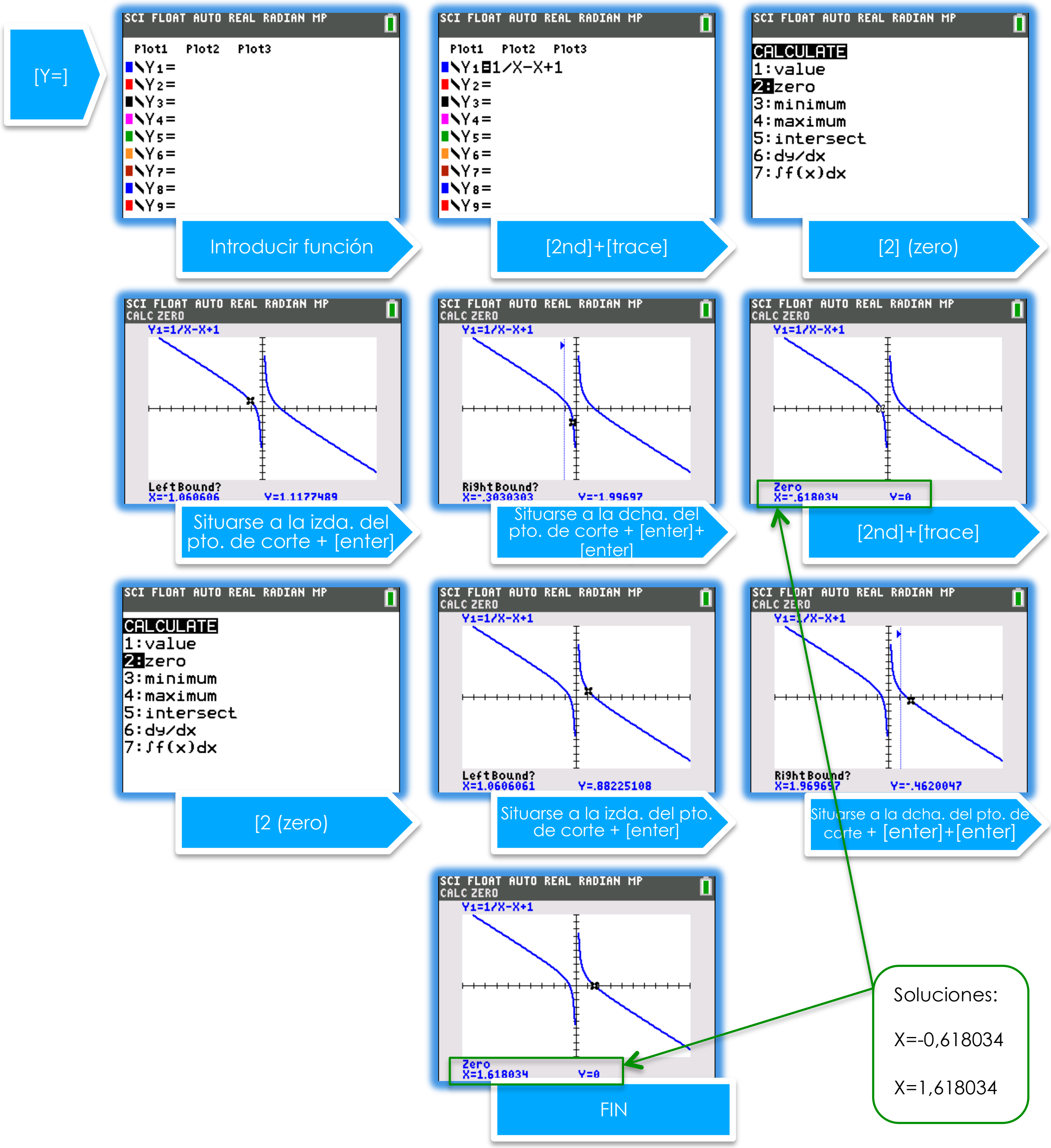
Determinación de los extremos relativos (máximos y mínimos) de una función:



<u>**Atención**</u>: procura familiarizarte con el uso de la función '**zoom**'. En muchas ocasiones, y debido al reducido tamaño de la pantalla de la calculadora, podemos perder extremos relativos, al no ser evidentes en la primera representación obtenida ¡Experimenta un poco con esta función tan útil!

Resolución de cualquier tipo de ecuación (Método gráfico)

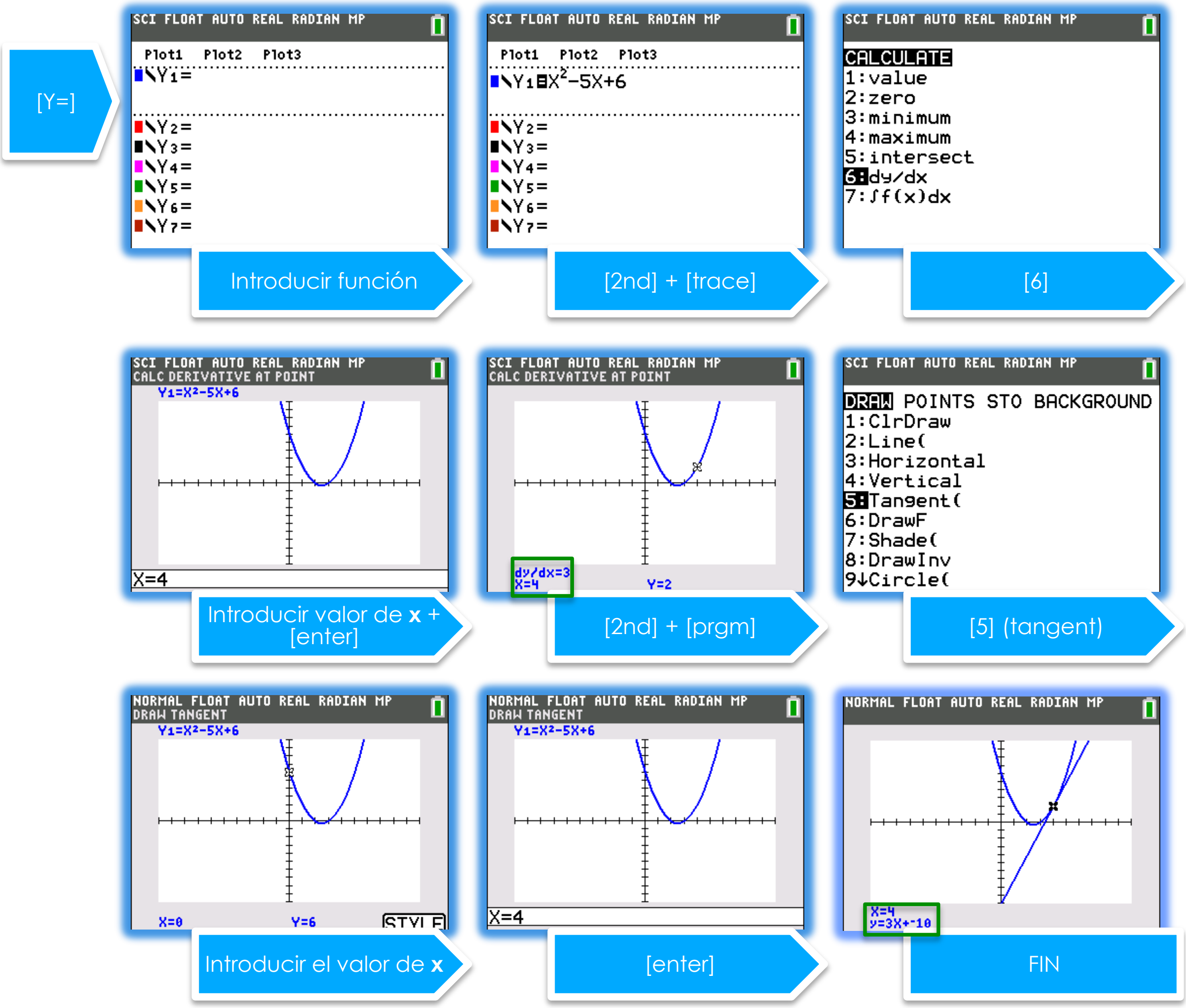
Hallar las soluciones de la ecuación $\frac{1}{x} = x - 1$



Recuerda: Los puntos de corte con el eje **x** son las soluciones a la ecuación. Este método de resolución es preferible al utilizado anteriormente (método numérico) puesto que, como hemos podido comprobar, las soluciones pueden ser más de una. La función resuelta es la misma que en el ejemplo visto para el método numérico.

Derivada y recta tangente

Calcular el valor de la derivada de la función **y = x^2-5x+6** en **x=4**. Obtener, además, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa **x=4**.

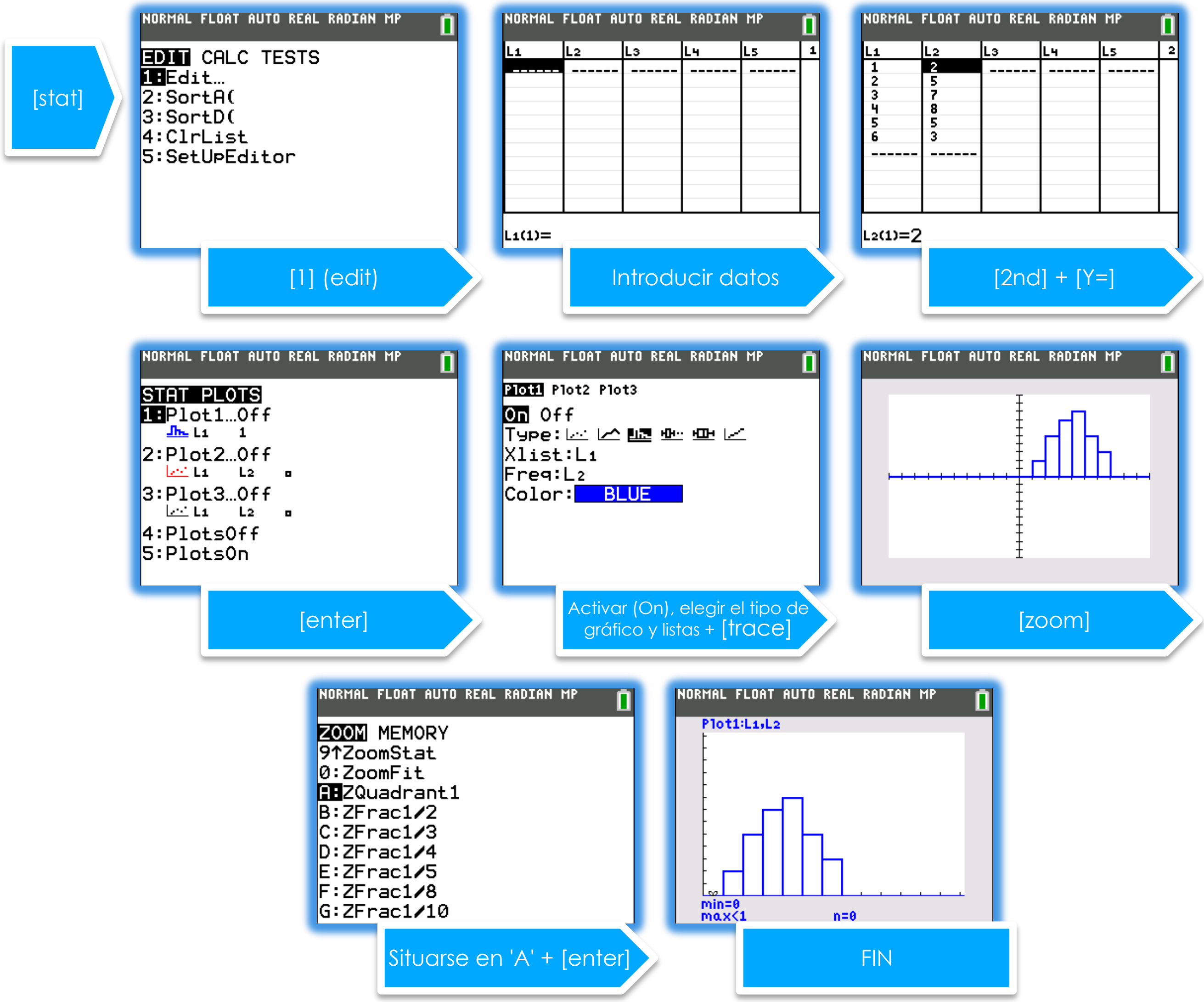


Recuerda:

- La '**abscisa**' es el valor de la coordenada '**x**' de un punto. A la '**y**' se le suele llamar '**ordenada**'.
- El valor de la derivada en un punto coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto. Fíjate como en el ejemplo resuelto, el valor obtenido en el primer apartado (**dy/dx=3**) coincide con el coeficiente de la '**x**' (la pendiente) en la ecuación de la recta obtenida en el segundo apartado (**y=3x-10**).

Introducir datos estadísticos, elaborar una tabla de frecuencias y representar

x	1	2	3	4	5	6
f_i	2	5	7	8	5	3



Atención:

- No olvides introducir las listas que vas a representar (foto 5): '**Xlist**' son los datos observados '**x**' (columna **L1**) y '**Freq**' los valores de frecuencia (que hemos introducido en **L2**). Para introducir la '**lista 2**' pulsaríamos **[2nd]+[2]** una vez situados sobre '**Freq**'.
- Para representar datos estadísticos es necesario haber desactivado todas las funciones del menú **[Y=]**. No hace falta borrarlas. Basta con situarse sobre el símbolo '**=**' de cada una de ellas e ir pulsando **[enter]** hasta que ninguno quede sombreado.

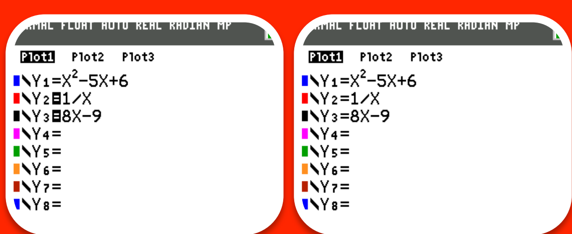
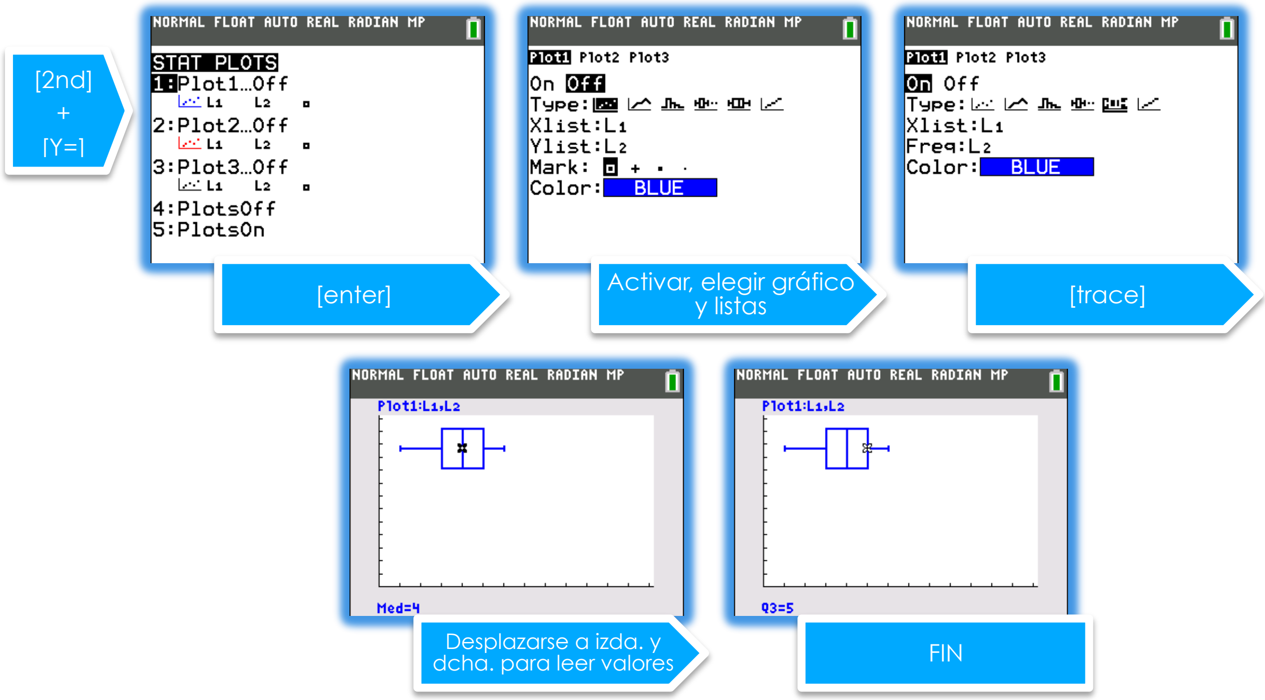


Diagrama de caja y bigotes

Elaborar el gráfico de caja y bigotes con los datos del ejercicio anterior



Cálculo de parámetros estadísticos en distribuciones de una variable

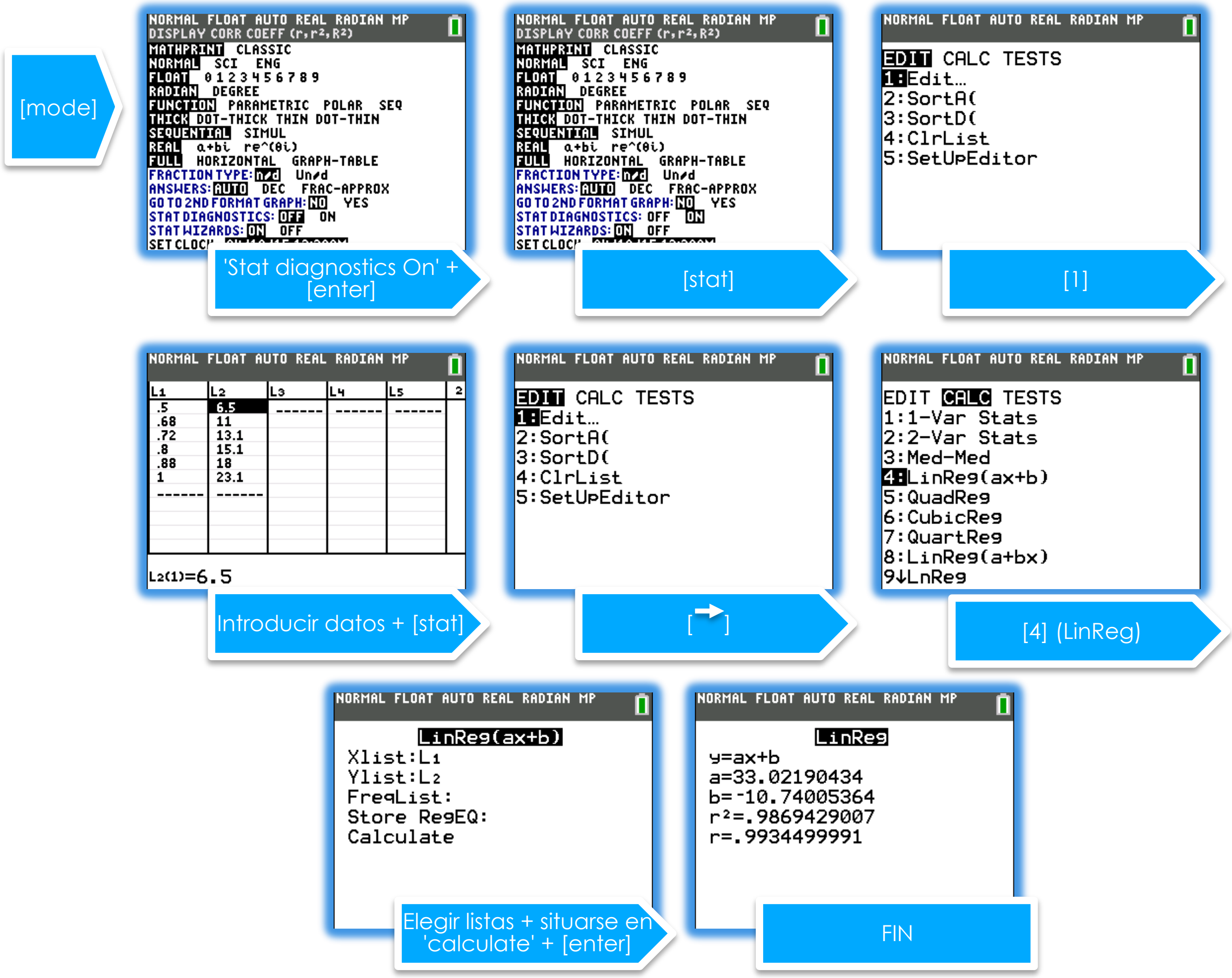
Obtener los parámetros estadísticos a partir de los mismos datos anteriores

<u>Aclaración</u>: Para el caso de distribuciones de **dos variables** el procedimiento es similar, pero elegiríamos la opción '**2 Var Stats**' y, **previamente**, hubiéramos introducido las columnas de datos adicionales.

Regresión lineal

Obtener la ecuación de la recta de ajuste por el método de regresión lineal para los datos de la siguiente tabla

x	0,5	0,68	0,72	0,8	0,88	1
y	6,5	11	13,1	15,1	18	23,1



<u>Aclaración</u>: Al activar el modo '**stat diagnostics**' conseguimos que la calculadora nos muestre en pantalla los coeficientes de correlación y determinación (**r** y **r²**). Este paso no es necesario hacerlo de nuevo a no ser que '**reseteemos**' la máquina.

Cálculos de distribución normal

La media de horas semanales que los estudiantes del instituto Lledó dedican a estudiar es de **22 h**, mientras que la desviación típica de dicha muestra es de **4 h**. Si elegimos un estudiante al azar ¿Qué probabilidad hay de que estudie entre 15 y 30 horas semanales?

Recuerda:

En el caso de tratarse de una **distribución normal estándar** (o **tipificada**) los valores de la media y la desviación típica son, respectivamente : **μ=0** y **σ=1**.

Atención:

Es muy habitual confundir la desviación típica '**σ**' (standard deviation) con la varianza '**σ^2**' (variance), que es el cuadrado de la desviación típica.

En caso de que nos den la varianza, podemos obtener el valor de **σ** haciendo la raíz cuadrada de la primera.

σ = $\sqrt{}$varianza

Cálculos con la tabla inversa de distribución normal

De los alumnos del Lledó que menos estudian (del ejercicio anterior), hay un 25% que no superan un cierto número de horas semanales. Cuál es ese número de horas.

Atención:

Al introducir el valor '**area**' debes hacerlo en *tanto por 1*, es decir, el valor del porcentaje que nos dan dividido entre 100.

ANEXO B: Modelo de examen de BI con uso de calculadora gráfica

22107409

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Miércoles 5 de mayo de 2010 (tarde)

Código del examen

2	2	1	0	–	7	4	0	9

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.

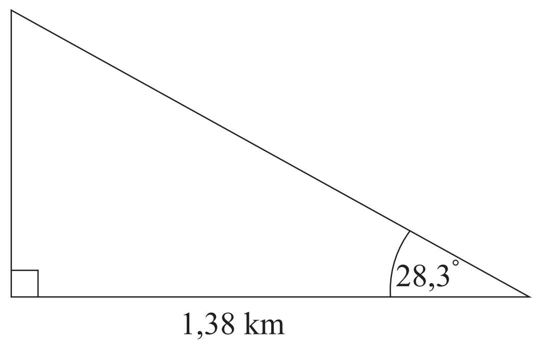
Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Aun cuando una respuesta sea incorrecta, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Escriba sus respuestas en las casillas provistas. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar aproximadamente esas gráficas en su respuesta.

1. José se encuentra a una distancia de 1,38 kilómetros de un precipicio.

(a) Exprese esta distancia en metros. *[1 punto]*

José estima que el ángulo que hay entre la horizontal y la parte superior del precipicio es $28,3^{\circ}$, y utiliza este valor para hallar la altura del precipicio.

la figura no está dibujada a escala



(b) Halle la altura del precipicio, partiendo de los cálculos realizados por José. **Exprese su respuesta en metros, redondeando al número entero de metros más cercano**. *[3 puntos]*

(c) La altura real del precipicio es de 718 metros. Calcule el porcentaje de error que ha cometido José al calcular la altura del precipicio. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

2. (a) Complete la tabla de verdad que aparece a continuación. *[3 puntos]*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

(b) Establezca si la proposición compuesta $(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p$ es una contradicción, una tautología o ninguna de las dos cosas. *[1 punto]*

Considere las siguientes proposiciones.

p: Feng acaba los deberes del colegio
q: Feng va al partido de fútbol

(c) Escriba, en forma simbólica, la siguiente proposición.

Si Feng no va al partido de fútbol, entonces Feng acaba los deberes del colegio. *[2 puntos]*

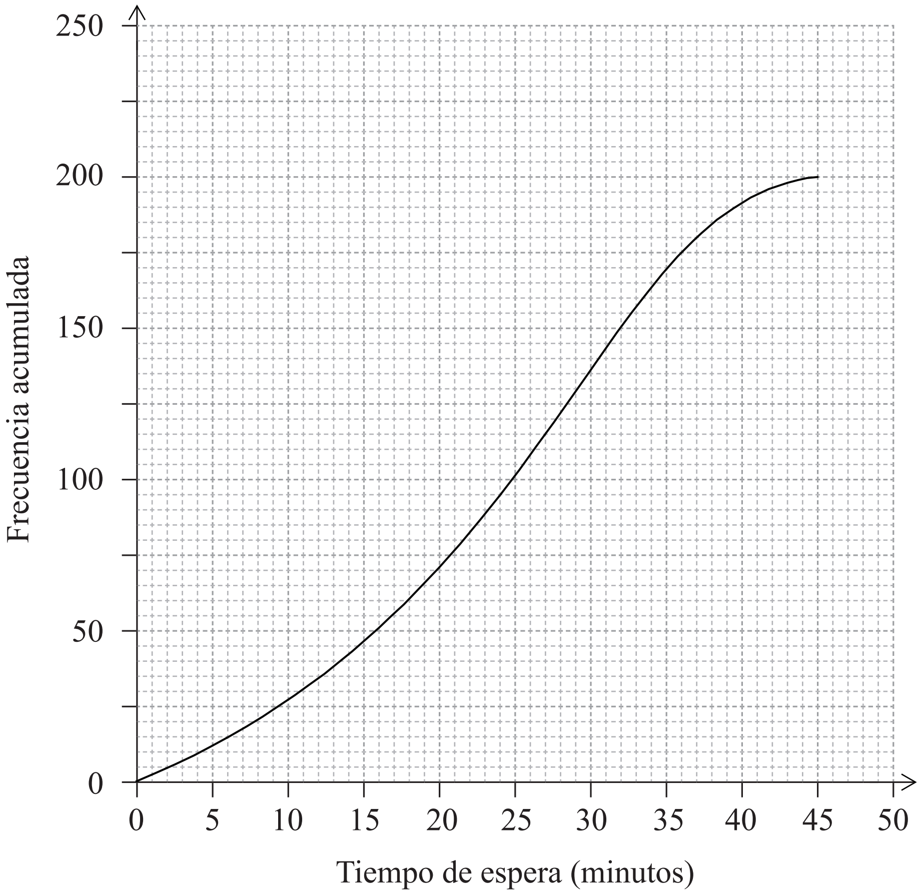
Operaciones:

Respuestas:

(b) . . . .

(c) . . . .

3. La gráfica de frecuencias acumuladas muestra el tiempo en minutos que, una mañana concreta, 200 alumnos estuvieron esperando a que llegara el tren.



(a) Escriba el valor de la mediana del tiempo de espera. *[1 punto]*

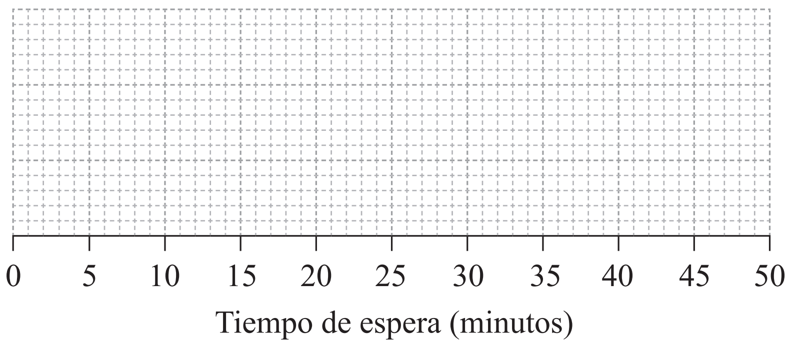
(b) Halle el rango intercuartil correspondiente al tiempo de espera. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

El tiempo de espera mínimo es cero y el tiempo de espera máximo es de 45 minutos.

(c) En la cuadrícula que aparece a continuación, dibuje con precisión un diagrama de caja y bigotes para representar esta información. *[3 puntos]*



Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

4. La recta L_1 tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

(a) Escriba la intersección de L_1 con el eje y. *[1 punto]*

(b) Escriba la pendiente de L_1. *[1 punto]*

La recta L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por el punto $(3, 7)$.

(c) Escriba la pendiente de la recta L_2. *[1 punto]*

(d) Halle la ecuación de L_2. Dé su respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde $a, b, d \in \mathbb{Z}$. *[3 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

(d) . . . .

5. La media de los diez números que se muestran a continuación es igual a 6,8.

$$8\,;\,5\,;\,5\,;\,10\,;\,8\,;\,4\,;\,9\,;\,7\,;\,p\,;\,q$$

(a) Escriba una ecuación en función de p y q. *[2 puntos]*

El valor de la moda para estos diez números es igual a cinco, y p es menor que q.

(b) Escriba el valor de

(i) p;

(ii) q. *[2 puntos]*

(c) Halle la mediana de estos diez números. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) (i) . . . .

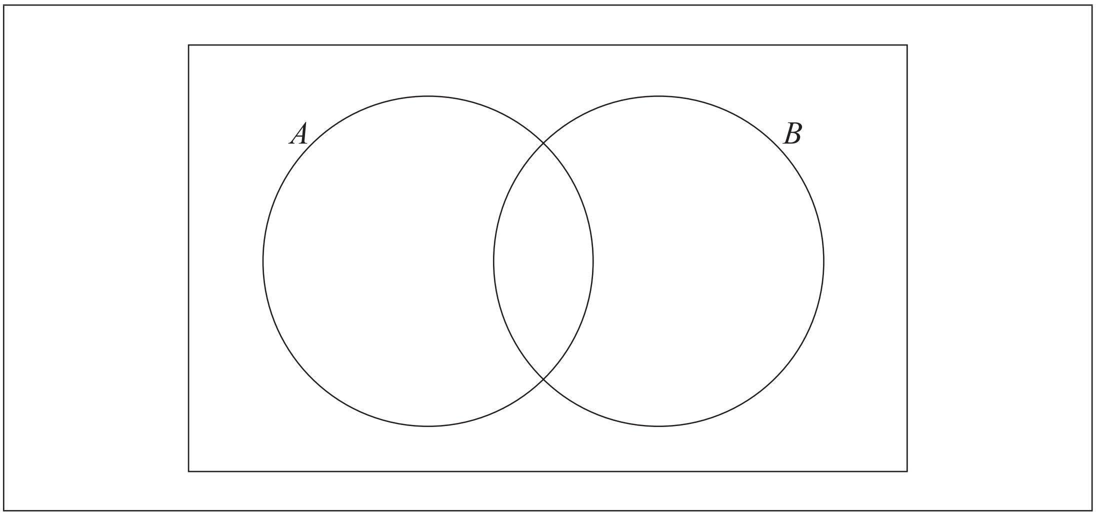
(ii) . . . .

(c) . . . .

6. A un grupo de 30 alumnos se les pregunta con qué les gusta comer las tostadas.

a 18 les gustan con mantequilla (A)
a 10 les gustan con jalea (B)
a 6 no les gustan ninguna de las dos cosas

(a) Muestre esta información en el siguiente diagrama de Venn. *[2 puntos]*



(b) Halle el número de alumnos a los que les gustan ambos: la mantequilla y la jalea. *[2 puntos]*

(c) Halle la probabilidad de que a un alumno de este grupo, elegido al azar, le guste la mantequilla, sabiendo que también le gusta la jalea. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(b) . . . .

(c) . . . .

7. Un coro se dispone a dar un concierto. Sus integrantes se colocan en filas, según una progresión aritmética. Así, en la cuarta fila hay 20 cantantes, y en la octava fila hay 32 cantantes.

(a) Halle la diferencia común de esta progresión aritmética. *[3 puntos]*

En el coro hay 10 filas. En la primera fila hay 11 cantantes.

(b) Halle el número **total** de cantantes que hay en el coro. *[3 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

8. Sea $\mathrm{P}(A) = 0,5$, $\mathrm{P}(B) = 0,6$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,8$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A \cap B)$. *[2 puntos]*

(b) Halle $\mathrm{P}(A \mid B)$. *[2 puntos]*

(c) Decida si A y B son o no sucesos independientes. Dé una respuesta razonada. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

9. Un estudio de mercado entrevistó a hombres y a mujeres para determinar si hay una relación entre el tipo de café que suele beber cada uno y el sexo del entrevistado (hombre o mujer). Los tipos de café son Capuchino, Café con leche, Americano, Cortado y Solo. Se llevó a cabo una prueba de χ^2, a un nivel de significación del 5 %, y el valor de χ^2 resultó ser igual a 8,73.

(a) Escriba

(i) la hipótesis nula;

(ii) la hipótesis alternativa. *[2 puntos]*

(b) Escriba el número de grados de libertad de esta prueba. *[1 punto]*

(c) Escriba el valor crítico de esta prueba. *[1 punto]*

(d) Establezca si el tipo de café que bebe una persona es independiente del sexo (hombre o mujer). Dé una respuesta razonada. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) (i) . . . .

(ii) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

(d) . . . .

. . . .

10. Astrid invierte 1200 euros a cinco años, con un tipo de interés (tasa de interés) nominal anual del 7,2 %, **compuesto mensualmente**.

(a) Halle los intereses que ha cobrado Astrid durante los cinco años que dura la inversión. **Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales**. *[3 puntos]*

Helen invierte 1200 euros a cinco años, y se le aplica un **tipo de interés** (tasa de interés) anual **simple**. En total, cobra **los mismos** intereses que Astrid.

(b) Halle el tipo de interés (tasa de interés) simple que se le ha aplicado a Helen. *[3 puntos]*

Operaciones:

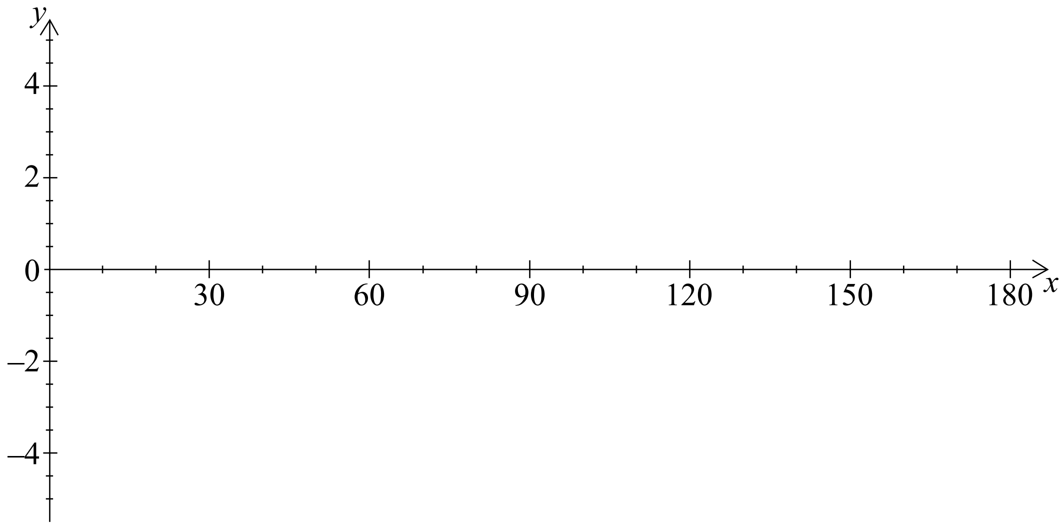
Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

11. Considere la función $y = 3\cos(2x) + 1$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de esta función para $0 \le x \le 180^\circ$. *[3 puntos]*



(b) Escriba el período de la función. *[1 punto]*

(c) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, halle el **menor valor** de x, $0 \le x \le 180^\circ$, para el cual se cumple $3\cos(2x) + 1 = 2$. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(b) . . . .

(c) . . . .

12. Un rumor se propaga entre un grupo de adolescentes, según un modelo exponencial.

$$N = 2\times(1,81)^{0,7t}$$

donde N es el número de adolescentes que se han enterado del rumor t horas después de que empezara a propagarse.

(a) Halle el número de adolescentes que empezaron a propagar el rumor. *[2 puntos]*

(b) Escriba el número de adolescentes que se han enterado del rumor cinco horas después de que empezara a propagarse. *[1 punto]*

(c) Determine cuánto tiempo ha de transcurrir para que se enteren del rumor 150 adolescentes. **Dé la respuesta redondeando al número de minutos más cercano.** *[3 puntos]*

Operaciones:

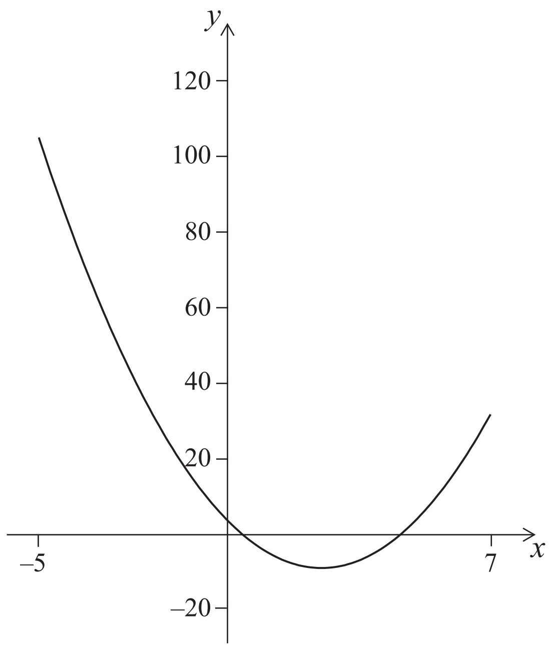
Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

13. A continuación se muestra la gráfica de $y = 2x^2 - rx + q$, para $-5 \le x \le 7$.



La gráfica corta al eje y en el punto $(0, 4)$.

(a) Escriba el valor de q. *[1 punto]*

El eje de simetría es $x = 2,5$.

(b) Halle el valor de r. *[2 puntos]*

(c) Escriba el valor mínimo de y. *[1 punto]*

(d) Escriba el recorrido de y. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

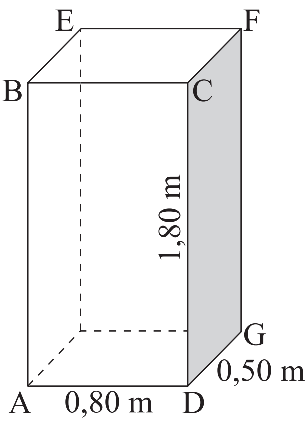
(b) . . . .

(c) . . . .

(d) . . . .

14. Un ortoedro tiene las siguientes dimensiones.

Largo	0,80 metros	(AD)
Ancho	0,50 metros	(DG)
Alto	1,80 metros	(DC)



la figura no está dibujada a escala

(a) Calcule la longitud de AG. *[2 puntos]*

(b) Calcule la longitud de AF. *[2 puntos]*

(c) Halle el valor del ángulo que hay entre AF y AG. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

15. En la siguiente tabla se describe el comportamiento de $f'(x)$, la función derivada de $f(x)$, en el dominio $-4 < x < 2$.

x	$f'(x)$
$-4 < x < -2$	< 0
-2	0
$-2 < x < 1$	> 0
1	0
$1 < x < 2$	> 0

(a) Establezca si $f(0)$ es mayor, menor o igual que $f(-2)$. Dé una respuesta razonada. *[2 puntos]*

El punto $\mathrm{P}(-2, 3)$ está en la gráfica de $f(x)$.

(b) Escriba la ecuación de la tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto P. *[2 puntos]*

(c) A partir de la información que le hemos dado acerca de $f'(x)$, establezca si el punto $(-2, 3)$ es un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas. Dé una respuesta razonada. *[2 puntos]*

Operaciones:

Respuestas:

(a) . . . .

. . . .

(b) . . . .

(c) . . . .