

**UNIVERSITAT
JAUME·I**

**MEDIA MUESTRAL INTRÍNSECA EN EL
ESPACIO DE FORMAS PLANAS**

TRABAJO FIN DE MÁSTER
Máster en Matemática Computacional

Presentada por: María Jesús Flores Compañ
Directores: Dr. Ximo Gual Arnau
Dra. Amelia Simó Vidal

Castellón, Septiembre 2014

Agradecimientos

Este Trabajo fin de Máster ha sido posible gracias a la ayuda de mis dos tutores, Ximo Gual y Amelia Simó.

Quiero expresarles mi más sincero agradecimiento por su paciencia, dedicación y orientación siempre que las he necesitado.

No quiero olvidar agradecerles que hayan confiado en mi para formar parte de su proyecto de investigación y por haberme brindado la oportunidad de conocer un mundo hasta entonces desconocido para mi.

Por último, dar las gracias a Irene Epifanio por ser la persona que me comunicó la existencia de dicho proyecto.

Simplemente gracias.

Índice general

Agradecimientos	I
Índice general	III
1. Introducción	1
1.1. Motivación.	1
1.2. Geometría Diferencial.	4
1.3. Probabilidad y Estadística.	5
2. Geometría Riemanniana	9
2.1. Conceptos Básicos.	9
2.2. Existencia de la métrica Riemanniana y distancia intrínseca.	11
2.3. Geodésicas.	13
2.4. Variedad de Stiefel y Variedad de Grassmann.	17
3. Estadística en Variedades Riemannianas	21
3.1. Conceptos Básicos.	21
3.2. Esperanza y valor medio.	23
3.3. Algoritmo de gradiente descendente para obtener la media.	24
4. Espacio de las formas planas	29
4.1. Introducción.	29
4.2. \mathcal{B} como variedad de Riemann.	30
4.3. Cálculo de distancias y geodésicas en \mathcal{B}	36
4.4. Cálculo de distancias y geodésicas en \mathcal{S}	42
5. Media muestral intrínseca en el Espacio Forma.	47
5.1. Medias en los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2	47
5.1.1. Ejemplo trivial en \mathbb{R}^2	47

5.1.2. Ejemplo trivial en S^2	54
5.2. Media en el espacio de formas.	67
5.2.1. Algoritmo.	69
5.2.2. Método Algorítmico.	70
5.2.3. Resultados.	75
5.2.4. Otros resultados.	76
6. Conclusiones y trabajo futuro	83
7. Apéndice: Códigos Matlab	85
7.1. Función PrincipalMitjaEntreFormesInter	85
7.2. Función CalculFuncionsE1F1	87
7.3. Función Mitja	89
7.4. Función CalculaCorbaLong1	92
7.5. Función DistanciaEntreFormes	94
7.6. Función CalculaFuncionsE1tF1tiE2tiF2t	98
7.7. Función CalculaVectorTangent	100
7.8. Función CalculGeodesicaDonatPuntIVectorTangent	102
7.9. Función CalculaIDibuixaGeodesicaEntreDuesFormes	104
Bibliografía	107

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación.

El análisis de formas es un campo de la estadística matemática que ha sido muy estudiado en las últimas décadas. Podría definirse como el análisis estadístico en el conjunto de formas, donde podemos medir y describir propiedades geométricas para formas similares.

La caracterización de objetos complejos utilizando sus formas geométricas globales se ha convertido en una herramienta importante en muchos campos científicos, en concreto, en la visión por ordenador y en la interpretación de imágenes.

Uno de los aspectos importantes del análisis de formas es obtener una medida de la distancia entre formas, con el propósito de obtener la forma media de una muestra formada por diversas formas. En este caso, ejemplos de aplicaciones concretas son: en medicina, por ejemplo, encontrar la forma media del cuerpo calloso del cerebro humano dadas las muestras de un conjunto de individuos, con la intención de conocer el estado “normal” (o sano) de esta parte que conecta los dos hemisferios cerebrales [1] (Véase Figura 1.1 (a)). Otro ejemplo, en este caso con aplicación a la industria textil sería encontrar prototipos que representen de manera precisa cada clase en un sistema de tallaje [2] (Véase Figura 1.1 (b)). Otro aspecto importante derivado de la obtención de la forma media, consiste en la la clasificación de objetos en grupos, por ejemplo, un algoritmo de análisis de formas podría ayudar a clasificar automáticamente tipos de animales usando el contorno de su apa-

riencia (Véase Figura 1.1 (c)). Otros ejemplos de aplicación que se muestran en la Figura 1.1 son: el contraste de hipótesis con el objetivo de decidir si un hueso tiene o no alguna patología en la Figura 1.1 (d) [3], y el estudio de la variabilidad de un tumor prostático en la Figura 1.1 (e) [4].

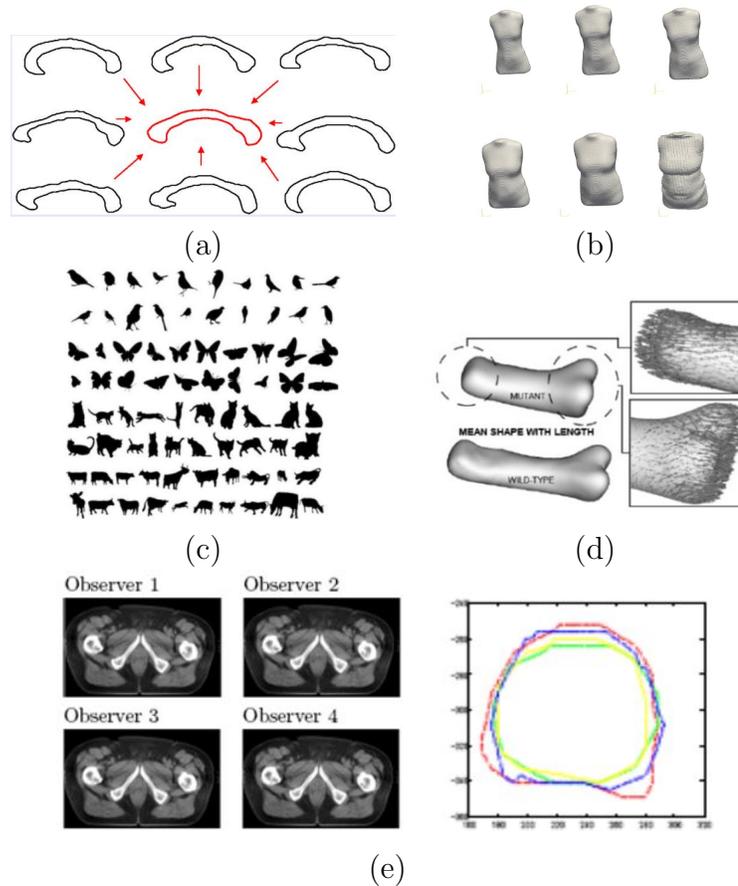


Figura 1.1: (a) Media muestral de Cuerpos Callosos Cerebrales. (b) Conjunto de medias de diferentes grupos para determinar un sistema de tallaje. (c) Clasificación por grupos de animales. (d) Contraste de Hipótesis en huesos. (e) Variabilidad de un tumor prostático.

Con el fin de realizar un análisis estadístico de formas, se requieren herramientas matemáticas sofisticadas, en concreto, es necesario definir un espacio de formas y modelos de probabilidad para poder hacer inferencia sobre ellos.

Desde el punto de vista matemático hay muchas maneras diferentes de entender o definir una forma y, por tanto, muchas maneras de representar el espacio de formas. Todos estos espacios de formas pretenden englobar en un mismo representante a todas las transformaciones afines de una forma; es decir, una forma será invariante por traslaciones, rotaciones y cambios de escala. Esta idea la podemos ver reflejada en la Figura 1.2.

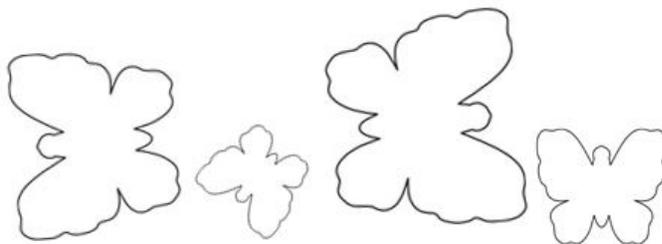


Figura 1.2: Cuatro “copias” de la misma forma, afectadas por diferentes transformaciones afines.

En muchos artículos dedicados al estudio de formas, definen el concepto de forma, utilizando “landmarks”; es decir, definen un espacio donde cada elemento (forma) viene representado a partir de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^2 . Un ejemplo de este caso es el llamado Espacio de formas de Kendall. El principal inconveniente en este tipo de espacios es que los puntos pueden ser proporcionados de manera muy burda y la precisión del análisis de formas resultante es muy dependiente de la elección de puntos escogida.

Un enfoque más preciso consiste en considerar las formas como curvas continuas cerradas (aunque cualquier implementación computacional requerirá de una discretización concreta). Sin embargo, este enfoque requiere trabajar en espacios de dimensión infinita, en concreto, en variedades Riemannianas de dimensión infinita.

En este trabajo vamos a tratar de mostrar las herramientas geométricas, estadísticas y computacionales necesarias para hacer inferencia estadística en espacios de estas características. En concreto, nuestro objetivo será encontrar la forma media de un conjunto de formas que están en una variedad Riemanniana de dimensión infinita.

Así pues, será necesario por una parte extender los conocimientos de la geometría diferencial estudiada para superficies a variedades Riemannianas de dimensión infinita, y por otra, generalizar los conceptos conocidos sobre probabilidad y estadística a este tipo variedades.

1.2. Geometría Diferencial.

La geometría diferencial estudiada a nivel de grado en Matemáticas se centra en el estudio de superficies en \mathbb{R}^3 . Así, se definen los conceptos de curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ en una superficie S y de campo vectorial $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tangente a S a lo largo de la curva α . El vector $\frac{dV}{dt}(t), t \in I$, en general, no pertenece al plano tangente a S , $T_\alpha S$. Por tanto, el concepto de diferencial del campo vectorial no es una noción geométrica intrínseca a S . Para remediar este tipo de inconvenientes, se considera la proyección ortogonal de $\frac{dV}{dt}(t)$ en $T_\alpha S$, en lugar de la derivada usual $\frac{dV}{dt}(t)$. Este vector ortogonal proyectado se denomina derivada covariante y se denota por $\frac{DV}{dt}(t)$. La derivada covariante de V es la derivada de V desde el punto de vista de la superficie S .

Un punto básico de la derivada covariante es que sólo depende de la primera forma fundamental de la superficie S . En particular, la noción de derivada covariante nos permite considerar la derivada del vector velocidad de α , la cual nos proporciona la aceleración de la curva α en S . Se demuestra que las curvas con aceleración nula son precisamente las geodésicas en S (curvas de menor longitud entre dos puntos de la superficie).

En el caso particular en que S es el plano \mathbb{R}^2 , la noción de campo paralelo a lo largo de una curva se reduce a la de campo constante sobre la curva; es decir, son constantes la longitud del vector y el ángulo con una dirección fija.

En el caso de superficies en \mathbb{R}^3 la noción de paralelismo no es tan intuitiva y se introduce a partir de una familia de planos tangentes a S a lo largo de la curva α . Esta familia de planos determina una superficie E , que involucra a estos planos tangentes (véanse págs. 195-197 del Capítulo 3 de [5]). No es difícil demostrar que el paralelismo a lo largo de α , definida de manera que anula la derivada covariante, es lo mismo considerarlo en relación a S que en relación a E .

Por otra parte, las superficies con curvatura nula son localmente isométricas al plano. Por tanto, el paralelismo es invariante por isometrías y podemos trabajar 'euclidianamente' en la imagen isométrica de E y después volver a la superficie original S .

La definición de derivada covariante tiene consecuencias muy importantes, ya que a partir de ella queda claro que una idea básica como son las geodésicas pueden ser definidas en situaciones más generales. Esto ha estimulado la creación de diferentes "estructuras geométricas" (en variedades diferenciables) más generales que la geometría Riemanniana. De la misma manera que la geometría euclidiana es un caso particular de la geometría afín, la geometría Riemanniana es un caso particular de estructuras geométricas más generales.

En el Capítulo 2 vamos a hacer un resumen de todas las definiciones y resultados en variedades Riemannianas, que generalizan los aquí comentados para el caso de superficies, y que serán necesarios para definir geodésicas, distancias y medias en la variedad Riemanniana del conjunto de formas planas.

1.3. Probabilidad y Estadística.

Los conocimientos de probabilidad y estadística que se estudian en el grado en Matemáticas se centran en el espacio euclídeo. Repasamos a continuación los conceptos básicos.

Para representar los resultados de un experimento aleatorio, construimos un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) donde Ω es el denominado espacio muestral (posibles resultados del experimento), \mathcal{A} es la σ -Álgebra de Borel en Ω y P es una medida de probabilidad.

Aunque este espacio de probabilidad contiene toda la información sobre el experimento aleatorio, normalmente solo estamos interesados en cálculos relacionados con el resultado del experimento.

En el caso unidimensional, tenemos el concepto de variable aleatoria, que es una aplicación medible X de Ω en \mathbb{R} que nos permite 'olvidarnos' del

espacio de probabilidad original y trabajar directamente en \mathbb{R} , asociando a cada posible valor de la variable aleatoria una probabilidad.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por la llamada función de distribución de X que es la función $F_X(x)$, definida por la siguiente expresión:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

En la mayoría de los casos consideramos variables aleatorias teniendo una función de densidad de probabilidad (fdp), es decir, una función f_X (positiva e integrable) cumpliendo que para cualquier intervalo real $]a, b[$:

$$P(x \in]a, b[) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Intuitivamente, puede considerarse $f_X(x) dx$ como la probabilidad de X de caer en el intervalo infinitesimal $[x, x + dx]$. Se tiene que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$.

Cuando estudiamos simultáneamente n características numéricas ligadas al resultado del experimento (caso n -dimensional), definimos el concepto de vector aleatorio como una aplicación $X = (X_1, \dots, X_n)$ de Ω en \mathbb{R}^n .

De esta manera, podemos generalizar el concepto de fdp usando conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n , en vez de intervalos. En este caso es la llamada función de densidad de probabilidad conjunta, f_X y cumple:

$$\begin{aligned} P(X \in]a, b[) &= P(a_i < X_i < b_i, i = 1, \dots, n) = \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Sin embargo, en muchos casos la fdp contiene demasiada información y desde un punto de vista computacional no necesitamos un conocimiento tan exhaustivo. A veces, nos basta con características numéricas que van ligadas a las variables o los vectores aleatorios. Entre ellas, y sin duda las más importantes, son la que nos indica alrededor de que valor se sitúa nuestra variable o vector, llamada esperanza o valor medio, y la que nos indica cuan dispersos o agrupados se presentan los valores alrededor de la primera, llamada varianza.

En primer lugar, en caso de tener valores aleatorios, se definen como:

$$\bar{X} = E[X] = \int X dP = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx,$$
$$\sigma_X^2 = E[(X - \bar{X})^2].$$

En segundo lugar, en caso de tener vectores aleatorios, se definen como:

$$\bar{X} = E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])^T = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)^T,$$
$$\Sigma_{XX} = E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T],$$

donde esta última es la llamada matriz de covarianza.

Conocidos estos conceptos en el caso real, en el Capítulo 3 vamos a tratar de definir y extender esta teoría para variedades Riemannianas.

Capítulo 2

Geometría Riemanniana

Como hemos visto en la sección 1.2 del capítulo anterior, la primera forma fundamental definida en una superficie regular se basa en que la superficie está contenida en un espacio euclídeo, \mathbb{R}^3 . Es decir, dado un vector v tangente a una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$, para calcular la norma $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ se utiliza el producto interno canónico en \mathbb{R}^3 restringido a $T_p S$. En una situación más general, si queremos hacer lo mismo en una variedad diferenciable de dimensión cualquiera, la situación se puede complicar si la variedad no está contenida en un espacio euclídeo. Sin embargo, Riemann planteó que podía definirse un producto interno en cada espacio tangente de una variedad y utilizar ese producto para obtener una métrica. La condición que se exige es que dicho producto varíe diferenciablemente. Precisamente es lo que dio origen a lo que hoy se conoce como Geometría Riemanniana.

Lo que pretendemos en este Capítulo es, en primer lugar, hacer un breve resumen de esta geometría (Véase [6] para más detalles) y a continuación dar dos ejemplos de variedades Riemannianas (Variedad de Stiefel y Variedad Grasmanniana) que serán indispensables para continuar con nuestro objetivo.

2.1. Conceptos Básicos.

El primer concepto necesario será precisamente el concepto de producto interno definido sobre un espacio vectorial. De esta manera, podremos extenderlo al espacio tangente de una variedad (el cual es un espacio vectorial).

Definición 2.1.1. Sea E un espacio vectorial. Se llama *producto interno* en E , a una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, simétrica y definida positiva.

Nota: Gracias a la noción de producto interno es posible definir la distancia entre dos vectores y la longitud de un vector: dado un vector $v \in E$ su longitud viene dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. La noción de producto interno hace posible también hablar de ángulo entre dos vectores: dados dos vectores $u, v \in E$, el ángulo θ entre u y v viene dado por $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$.

La idea es trasladar estas definiciones a una variedad diferenciable que no tiene porque coincidir con un espacio vectorial E . Por tanto, antes de iniciar con esta tarea conviene definir lo que se entiende por variedad diferenciable.

Definición 2.1.2 (Variedad Diferenciable). Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto \mathcal{M} y una familia de aplicaciones biyectivas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{M}$ de abiertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ en \mathcal{M} tales que:

1. $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathcal{M}$.
2. Para todo par α, β tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ y $\varphi_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ son diferenciables.
3. La familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es máxima respecto a las condiciones (1) y (2).

Cada aplicación $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{M}$, con $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ se denomina *sistema de coordenadas* de \mathcal{M} en p . La colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ que cumple las condiciones (1) y (2) de la definición anterior recibe el nombre de *estructura diferenciable*.

Definición 2.1.3 (Métrica Riemanniana). Una *métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable \mathcal{M} es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente $T_p \mathcal{M}$, esto es, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, de manera que varía diferenciablemente; es decir, si (U, φ) es un sistema de coordenadas de \mathcal{M} alrededor de p , tal que $\varphi(x) = q \in \varphi(U)$, las funciones $g_{ij}^\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g_{ij}^\varphi(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ son diferenciables en todo punto $x \in U$.

Nota: En la definición 2.1.3 se observa la presencia de un sistema de coordenadas (U, φ) y de las funciones $g_{ij}^\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, que se construyen en

términos de dicho sistema. A pesar de ésto, la definición de métrica Riemanniana no depende de la elección del sistema de coordenadas. Las funciones $g_{ij}^\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ se denominan *Expresión local de la métrica Riemanniana en términos del sistema (U, φ)* .

Obsérvese que si (U, φ) es un sistema de coordenadas de \mathcal{M} en p y $V, W \in T_p\mathcal{M}$ son vectores tangentes expresados de la siguiente forma

$$V = \sum_{i=1}^n v_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \text{ y } W = \sum_{i=1}^n w_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

entonces el producto interno de V y W viene dado por:

$$\langle V, W \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n v_i(p) w_j(p) g_{ij}^\varphi(p).$$

Análogamente la longitud del vector $V \in T_p\mathcal{M}$ quedará expresada por:

$$\|V\|_p = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n v_i(p) w_j(p) g_{ij}^\varphi(p)}.$$

Definición 2.1.4 (Variedad Riemanniana). *Una variedad diferenciable \mathcal{M} provista de una métrica Riemanniana recibe el nombre de Variedad Riemanniana.*

2.2. Existencia de la métrica Riemanniana y distancia intrínseca.

Una vez introducido el concepto matemático de variedad Riemanniana, detallaremos cuando dos de estos objetos son “el mismo” desde un punto de vista geométrico.

Definición 2.2.1 (Isometría). *Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, (biyección diferenciable con inversa diferenciable) es una isometría si:*

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in \mathcal{M}$ y todo $v, w \in T_p\mathcal{M}$.

En este caso diremos que \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades Riemannianas isométricas (es decir, “la misma” variedad desde un punto de vista geométrico).

Proposición 2.2.2. *Una variedad diferenciable \mathcal{M} (de Hausdorff y con base numerable) posee una métrica Riemanniana.*

Ahora vamos a mostrar como una métrica Riemanniana puede ser usada para calcular longitudes de curvas.

Definición 2.2.3. *Una curva parametrizada en una variedad diferenciable \mathcal{M} es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.*

Definición 2.2.4. *Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ es una aplicación diferenciable que a cada $t \in I$ asocia un vector tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{M}$. Este campo V será diferenciable cuando para toda función diferenciable $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, la función $t \mapsto V(t)f := V_{\alpha(t)}f$ es diferenciable.*

En términos de un sistema de coordenadas:

$$V_{\alpha(t)}f = \sum_{i=1}^n v_i(\alpha(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t)),$$

y V es diferenciable a lo largo de $\alpha(t)$ si las funciones $v_i(\alpha(t))$ son diferenciables.

Dada una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$, el campo vectorial $\frac{d\alpha}{dt}$ recibe el nombre de *campo vectorial tangente de α* (o campo velocidad) y viene dado por:

$$\frac{d\alpha}{dt}(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}.$$

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$, la restricción $\alpha|_{[a, b]}$ se llama *segmento*. Cuando \mathcal{M} es una variedad Riemanniana, se define la longitud del segmento $\alpha|_{[a, b]}$ como:

$$\ell_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} dt.$$

Definición 2.2.5 (Curva seccionalmente diferenciable). *Una curva $\alpha : [a, b] \subset I \rightarrow \mathcal{M}$ se llama seccionalmente diferenciable si es continua y existe una partición $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ tal que las restricciones $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ son diferenciables para todo $i = 1, \dots, k$.*

A partir de la noción de longitud de un segmento y de curva seccionalmente diferenciable ya podemos definir la distancia entre dos puntos cualesquiera de \mathcal{M} .

Definición 2.2.6 (Distancia intrínseca). *Dados dos puntos $p, q \in \mathcal{M}$, se llama distancia intrínseca entre p y q al número*

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\alpha) \mid \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \mid \alpha(0) = p, \alpha(1) = q\},$$

siendo α una curva seccionalmente diferenciable; es decir, la longitud de la curva más corta en \mathcal{M} que conecta p y q .

2.3. Geodésicas.

Una vez fijada la terminología básica, pasamos a continuación a estudiar uno de los conceptos fundamentales de la geometría Riemanniana: las geodésicas. Para ello vamos a necesitar algunas definiciones previas:

Definición 2.3.1 (Conexión afín). *Sea $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ en \mathcal{M} , una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable \mathcal{M} es una aplicación*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $f, g \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$, donde $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ representa el anillo de todas las funciones reales de clase C^∞ definidas en \mathcal{M} .

Definición 2.3.2 (Derivada Covariante). *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$, otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de α , llamada derivada covariante de V a lo largo de α , tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde W es un campo vectorial a lo largo de α y f es una función diferenciable en I .
3. Si V viene dado a partir de un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, es decir, $V(t) = Y(\alpha(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}}Y$.

El concepto de paralelismo ahora vendrá dado de manera natural.

Definición 2.3.3 (Campo vectorial paralelo). *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ , un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ se dice que es paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Definición 2.3.4 (Conexión afín compatible). *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ y con una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Una conexión afín se dice que es compatible con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si para cualquier curva α y cualquier par de campos vectoriales paralelos P y P' a lo largo de α , se cumple $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.*

A partir de ahora \mathcal{M} denotará una variedad Riemanniana, junto con su conexión Riemanniana (conexión afín compatible y simétrica).

Definición 2.3.5 (Geodésica). *Una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = 0$ en el punto t_0 . Si α es una geodésica en t , para todo $t \in I$, diremos que α es una geodésica. Si $[a, b] \subset I$ y $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ es una geodésica, la restricción de α en $[a, b]$ se llama segmento geodésico que une $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$.*

Ahora vamos a determinar las ecuaciones que satisface una geodésica α en un sistema de coordenadas (U, x) . Una curva definida por $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ será una geodésica si y solo si:

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

donde Γ_{ij}^k son los denominados *coeficientes de la conexión Riemanniana* ∇ o más conocidos como *Símbolos de Christoffel*.

Por tanto el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que deberá cumplir una geodésica será:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

De hecho, la existencia y la unicidad de soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios, puede ser usado para probar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.6. *Sea \mathcal{M} una variedad Riemanniana, para cada punto $p \in \mathcal{M}$ y para cada vector $v \in T_p\mathcal{M}$, existe un intervalo $(-\eta, \eta)$ y una única geodésica,*

$$\alpha_v : (-\eta, \eta) \longrightarrow \mathcal{M},$$

que satisface las condiciones:

$$\alpha_v(0) = p, \quad \alpha'_v(0) = v.$$

Proposición 2.3.7. *Sean dos geodésicas, $\alpha_1 : I_1 \longrightarrow \mathcal{M}$ y $\alpha_2 : I_2 \longrightarrow \mathcal{M}$, si $\alpha_1(a) = \alpha_2(a)$ y $\alpha'_1(a) = \alpha'_2(a)$ para algún $a \in I_1 \cap I_2$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ en $I_1 \cap I_2$.*

Las dos proposiciones anteriores implican que para cada $p \in \mathcal{M}$ y cada $v \in T_p\mathcal{M}$, existe una única geodésica, denotada por α_v , cumpliendo $\alpha_v(0) = p$ y $\alpha'_v(0) = v$. Además el dominio de α_v no puede ser extendido.

Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 2.3.8 (Función exponencial). *Sea \mathcal{M} una variedad Riemanniana y $p \in \mathcal{M}$, definimos la función exponencial o mapeo exponencial como:*

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ v &\longmapsto \exp_p(v) = \alpha(1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde α es la única geodésica que en el instante $t = 0$ pasa por el punto p , con velocidad v .

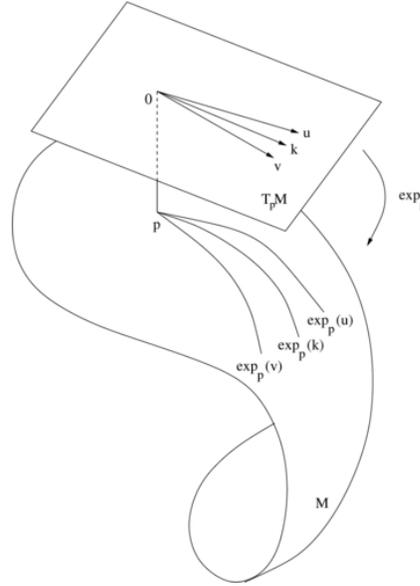


Figura 2.1: Representación de la función exponencial.

Si definimos una geodésica α_1 como $\alpha_1(0) = p$ y $\alpha_1'(0) = v$, y otra geodésica α_2 como $\alpha_2(0) = p$ y $\alpha_2'(0) = tv$, reparametrizando se tiene que $\alpha_2(1) = \alpha_1(t)$ o lo que es lo mismo $\exp_p(tv) = \alpha_1(t)$. Es decir, la función envía rectas pasando a través de cero en el espacio tangente, a geodésicas pasando a través de p en \mathcal{M} (Figura 2.1).

Definición 2.3.9 (Cut Point). *Sea $v \in T_p\mathcal{M}$ tal que $\|v\| = 1$. El conjunto de números $s > 0$ tal que el segmento geodésico $\{\exp_p(tv) : 0 \leq t \leq s\}$ minimiza la distancia entre $\exp_p(0)$ y $\exp_p(sv)$ es $[0, +\infty)$ o bien $[0, r(v))$ donde $r(v) > 0$. Si $r(v) < +\infty$, entonces $\exp_p(r(v)v)$ se llama Cut Point de p en la dirección de v .*

Definición 2.3.10 (Cut Locus). *El Cut Locus de $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto de todas los Cut Points de $p \in \mathcal{M}$ y se denota por $C(p) \in \mathcal{M}$. El conjunto de los correspondiente vectores tangentes se llama Cut Locus Tangente y se denota por $\mathcal{C}(p) \in T_p\mathcal{M}$.*

De esta manera, tenemos $C(p) = \exp_p(\mathcal{C}(p))$ y el máximo dominio de definición sería el que contiene al 0 y delimitado por el Cut Locus Tangente, y se denota por $\mathcal{D}(p)$.

2.4. Variedad de Stiefel y Variedad de Grassmann.

Hasta ahora hemos repasado conceptos básicos en variedades Riemannianas de dimensión finita. Los conceptos de variedad de Stiefel y variedad de Grassmann son variedades de Hilbert, que son casos particulares de variedades Riemannianas, pero pueden ser definidas también en dimensión infinita.

Una variedad de Hilbert es una variedad modelada localmente sobre espacios de Hilbert. En particular, cualquier espacio de Hilbert, H , es una variedad de Hilbert con una única carta dada por la función identidad en H . Además, como H es un espacio vectorial, el espacio tangente $T_p H$ de H para cualquier punto $p \in H$ es canónicamente isomorfo al propio H y por tanto, el producto interior en $T_p H$ vendrá dado de forma natural, es decir, el mismo que para H . De esta manera, podemos dar a H una estructura de variedad Riemanniana utilizando la métrica:

$$g_p(u, v) := \langle v, w \rangle_H, \quad u, v \in T_p H,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ denota el producto interior en H .

Definición 2.4.1 (Variedad de Stiefel 2-dimensional de V). *Sea V un espacio de Hilbert dotado del producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ y su norma inducida $\|\cdot\|_V$, llamamos variedad de Stiefel 2-dimensional de V , al conjunto de todos los pares (u, v) de V ortonormales, es decir*

$$St(2, V) = \{(u, v) \in V \times V \mid \|u\|_V = \|v\|_V = 1, \langle u, v \rangle_V = 0\}.$$

Si V es de dimensión infinita, $St(2, V)$ es una variedad de Hilbert de dimensión infinita modelada sobre V .

Definición 2.4.2 (Variedad de Grassmann 2-dimensional de V). *Sea $St(2, V)$ una variedad de Stiefel 2-dimensional y sea $O(2)$ el grupo ortogonal de las rotaciones, definimos la variedad de Grassmann 2-dimensional en V como*

$$Gr(2, V) = \frac{St(2, V)}{O(2)}.$$

Es decir, $Gr(2, V)$ es la variedad de todos los subespacios lineales de V de dimensión dos (planos).

La definición de estos dos tipos de variedades son de nuestro interés porque, como veremos mas detalladamente en el Capítulo 4, si consideramos la variedad $St(2, V)$, siendo $V = L^2([0, 1])$, obtenemos una isometría entre $St(2, V)$, con la métrica usual, y el espacio de curvas planas cerradas, modulo traslaciones y cambios de escala, considerando la métrica de Sobolev de orden 1. Por tanto, $Gr(2, V)$, con $V = L^2([0, 1])$, será isométrico al espacio de curvas planas cerradas modulo traslaciones, cambios de escala y además rotaciones. Como consecuencia, cualquier resultado que esté probado en las variedades de Stiefel y de Grassmann se podrá extender al espacio de formas (curvas planas) en cuestión.

Pasamos ahora a mostrar algunos resultados sobre las geodésica en estas variedades. Para mas detalles véanse [7], [8] y [9].

Como en cualquier variedad general, tenemos dos maneras diferentes de encontrar la expresión de una geodésica: dado un punto inicial de la variedad y una dirección o dados dos puntos de la variedad. La siguiente proposición nos proporciona la solución para el primer caso, en una variedad de Stiefel 2-dimensional.

Proposición 2.4.3. *Sea la variedad $St(2, V)$ dotada de la métrica inducida de V^2 y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow St(2, V)$ una curva. Las ecuaciones de las geodésicas cumplen $\ddot{\gamma} + \gamma(\dot{\gamma}^T \dot{\gamma}) = 0$. Por tanto, las soluciones vendrán dadas, para todo $t \in [0, 1]$, por:*

$$(\gamma(t)e^{At}, \dot{\gamma}(t)e^{At}) = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \exp t \begin{pmatrix} A & -S \\ Id & A \end{pmatrix},$$

donde $A = \gamma(0)^T \dot{\gamma}(0)$, $S = \dot{\gamma}(0)^T \dot{\gamma}(0)$ e Id denota la matriz identidad 2×2 .

En este caso el punto inicial vendrá dado por $\gamma(0)$ y la dirección por $\dot{\gamma}(0)$ que son las condiciones iniciales del sistema de EDOs.

En una variedad Riemanniana \mathcal{M} de dimensión finita, el Teorema de Hopf-Rinow nos muestra que la completitud del espacio métrico definido por (\mathcal{M}, d) es equivalente a la completitud de la geodésica de (\mathcal{M}, g) , y ambas implican que cualquier par de puntos de \mathcal{M} pueden ser conectados por una geodésica mínima. Puede verse en [9], [8] y [7] que incluso cuando V es de dimensión infinita, cualquier par de puntos en $St(p, V)$ y en $Gr(p, V)$ pueden ser conectados por una geodésica mínima. Además, el “Cut locus” de un punto está caracterizado [7].

Capítulo 3

Estadística en Variedades Riemannianas

En este apartado vamos a generalizar los conceptos básicos de probabilidad en espacios vectoriales, a medidas en una variedad de Riemann. Como se ha mencionado en la introducción, no consideraremos que los resultados de un experimento aleatorio son variables reales o vectores en \mathbb{R}^n , si no que a los resultados de un experimento asociaremos elementos de una variedad Riemanniana (veáanse [10] y [11]). Un estudio detallado más general puede consultarse en [12].

3.1. Conceptos Básicos.

Empezamos generalizando el concepto de variable o vector aleatorio, cuando trabajemos en una variedad Riemanniana lo denominaremos *primitiva aleatoria*. La definición formal es:

Definición 3.1.1 (Primitiva aleatoria). *Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad. Una primitiva aleatoria en la variedad Riemanniana \mathcal{M} es una función medible X de Ω en a \mathcal{M} .*

Como en el caso real y vectorial podemos asociar a X una función de densidad de probabilidad que permite calcular las probabilidades de la primitiva aleatoria a partir de la su integral en \mathcal{M} . Para ello necesitamos introducir previamente el concepto de integración en una variedad Riemanniana.

La métrica Riemanniana $G(x) = [g_{ij}^{\varphi}(x)]$ introducida en la definición 2.1.3, induce un elemento infinitesimal de volumen en cada espacio tangente, y así una medida en la variedad:

$$d\mathcal{M}(x) = \sqrt{|G(x)|}$$

Esto significa que podemos integrar indiferentemente en \mathcal{M} o en cualquier carta exponencial. Si f es una función integrable de la variedad y $f_x(\vec{x}\vec{y}) = f(\exp(\vec{x}\vec{y}))$ es su imagen en la carta exponencial en x , tenemos:

$$\int_{\mathcal{M}} f(x) d\mathcal{M}(x) = \int_{\mathcal{D}_x} f_x(\vec{z}) \sqrt{G_{\vec{x}}(\vec{z})} d\vec{z}$$

Definición 3.1.2 (Función densidad de probabilidad). *Sea \mathcal{B} la σ -Álgebra de Borel en \mathcal{M} . La primitiva aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad, f_X (función real, positiva e integrable) si:*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad , \quad Pr(X \in A) = \int_A f_X(x) d\mathcal{M}(x) \quad y$$

$$Pr(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} f_X(x) d\mathcal{M}(x) = 1.$$

Ejemplo. Un ejemplo simple de fdp es la fdp uniforme en un conjunto acotado A :

$$f_A(x) = \frac{1}{\int_A d\mathcal{M}} 1_A(x) = \frac{1_A(x)}{\nu(A)},$$

donde $\nu(A)$ es el volumen del conjunto A .

NOTA: Debemos ser cuidadosos en cuanto a que esta fdp es uniforme con respecto a la medida $d\mathcal{M}$ y no es uniforme para otras medidas de la variedad.

Esperanza de un observable: Sea $g(X)$ una función real Boreliana definida en \mathcal{M} y X una primitiva aleatoria con fdp, f_X . Entonces, $g(X)$ es una variable real aleatoria y podemos definir la esperanza de $g(X)$ como:

$$E[g(X)] = E_X[g] = \int_{\mathcal{M}} g(x) f_X(x) d\mathcal{M}(x).$$

Esta noción de esperanza corresponde a la definida en variables o vectores aleatorios reales. Sin embargo, no podemos extender directamente este concepto para definir la media o la esperanza de X puesto que no existe una generalización de esta integral en \mathbb{R} a una integral con valores en la variedad \mathcal{M} .

3.2. Esperanza y valor medio.

En esta sección vamos a centrarnos en la noción del valor central de una distribución. Vamos a utilizar la denominación de *valor medio* o *primitiva media* en vez de *primitiva esperada* para recalcar la diferencia entre esta noción y la de esperanza de una función real.

Cuando utilizamos el concepto de media, existen dos posibilidades:

- *Media intrínseca*: Los cálculos y las soluciones están siempre en \mathcal{M} .
- *Media extrínseca*: Mediante un “embedding” de \mathcal{M} en un espacio vectorial, se realizan los cálculos y la definición de media y posteriormente se proyecta la media en \mathcal{M} .

En nuestro caso trabajaremos “intrínsecamente”.

Fréchet definió en [13] una generalización de la media de un vector aleatorio teniendo en cuenta que la media es aquel valor de la variable que minimiza la varianza, es decir: sea X un vector aleatorio de \mathbb{R}^n , $\sigma_X^2(x) = E[\text{dist}(X, x)^2]$ es mínima para el vector media $\bar{X} = E[X]$.

La idea importante para definir la generalización es que la esperanza de una función real si que está bien definida en una variedad de Riemann geodesicamente completa \mathcal{M} .

Definición 3.2.1 (Varianza de una primitiva aleatoria). *Sea X una primitiva aleatoria con fdp, f_X . la varianza $\sigma_X^2(x)$ es la esperanza de las distancias al cuadrado entre la primitiva aleatoria X y la primitiva fija y :*

$$\sigma_X^2(y) = E[\text{dist}(X, y)^2] = \int_{\mathcal{M}} \text{dist}(x, y)^2 f_X(x) d\mathcal{M}(x).$$

Definición 3.2.2 (Media de Fréchet para primitivas aleatorias). *Sea X una primitiva aleatoria. Si la varianza $\sigma_X^2(y)$ es finita para todas las primitivas $x \in M$ (las cuales lo son para una densidad con un soporte compacto), cada primitiva \bar{X} que minimiza esta varianza es llamada primitiva media. Por tanto, el conjunto de primitivas medias es:*

$$\mathbb{E}[X] = \arg \min_{y \in \mathcal{M}} (E[\text{dist}(X, y)^2]).$$

Si existe al menos una primitiva media, \bar{X} , llamaremos varianza al valor mínimo $\sigma_X^2 = \sigma_X^2(\bar{X})$ y la desviación estándar es la raíz cuadrada.

Análogamente dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n podemos definir la media de Fréchet empírica:

$$\mathbb{E}[\{X_i\}] = \arg \min_{y \in \mathcal{M}} \left(\frac{1}{n} \text{dist}(X_i, y)^2 \right).$$

La definición de media de Fréchet es el resultado de una minimización y por ello su existencia no está asegurada. En el siguiente apartado veremos en que situaciones podemos asegurar su existencia.

3.3. Algoritmo de gradiente descendente para obtener la media.

Una técnica usual para minimizar una función es utilizar un algoritmo de gradiente descendente. Este algoritmo iterativo obtiene este mínimo moviendo un punto inicial, x_k en la dirección opuesta al gradiente en dicho punto, una cantidad α_k . De esta manera, se obtiene el nuevo punto:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Además, como hemos visto en el Capítulo 2, tenemos una manera canónica de pasar del espacio tangente a la variedad gracias a la definición de la función exponencial 2.3.8. De esta manera, este algoritmo está perfectamente adaptado.

Para caracterizar un mínimo local de una función dos veces diferenciable, solo requerimos un gradiente nulo y una matriz Hessiana definida positiva. El problema con la función varianza $\sigma^2(y)$ es que el dominio de integración (denotado $\mathcal{M} - C(y)$) depende de la derivación del punto y . Por esta razón no podemos utilizar el Teorema de Lebesgue. Afortunadamente se puede obtener el siguiente resultado que generaliza la diferenciable para distribuciones uniformes en variedades compactas (Para ver la prueba véase Apéndice A de [14]).

Teorema 3.3.1 (Gradiente descendente de la función varianza). *Sea P una medida de probabilidad en una variedad Riemanniana \mathcal{M} , la función varianza*

$$\sigma^2(y) = \int_{\mathcal{M}} \text{dist}(x, y)^2 dP(x),$$

es diferenciable en cualquier punto $y \in \mathcal{M}$ donde la varianza es finita y el conjunto Cut Locus $C(p)$ tiene medida de probabilidad 0, es decir:

$$P(C(y)) = \int_{C(y)} dP(x) = 0 \quad y \quad \sigma^2(y) = \int_{\mathcal{M}} \text{dist}(x, y)^2 dP(x) < +\infty.$$

En estos puntos el gradiente es:

$$(\text{grad}\sigma^2)(y) = -2 \int_{\mathcal{M}/C(y)} \overrightarrow{y\bar{x}} dP(x).$$

Utilizando el formalismo de primitivas aleatorias podemos reescribirlo de la manera que sigue:

$$\text{grad}(\sigma_X^2(y)) = -2E[\overrightarrow{y\bar{X}}]. \quad (3.1)$$

Corolario 3.3.2 (Caracterización de la Media de Fréchet en variedades sin Cut Locus). *Asumiendo que la función varianza de la primitiva aleatoria X es finita, existe una y solo una media de Fréchet, \bar{X} , caracterizada por:*

$$\mathbb{E}[X] = \{\bar{X}\} \quad \iff \quad E[\overrightarrow{\bar{X}\bar{X}}] = 0.$$

La media muestral \bar{X} se caracteriza por:

$$\sum_i \overrightarrow{\bar{X}\bar{X}_i} = 0,$$

donde $\overrightarrow{\bar{X}\bar{Y}} = \log_X(y)$ y $\text{Hess}(\sigma^2(Y)) = -2Id$.

A partir de ahora vamos a suponer que se cumplen las condiciones de Teorema 3.3.1.

Sea y una estimación de la media de una primitiva aleatoria X , definimos la función $f(y) = \sigma_X^2(y)$. El desarrollo de Taylor de una función en una variedad diferenciable viene expresado por [14]:

$$f(\exp_y(v)) = f(y) + (\text{grad } f)(v) + \frac{1}{2}(\text{Hess } f)(v, v) + \mathcal{O}(\|v\|^3).$$

De acuerdo con esta expresión, una manera de aplicar el gradiente descendente, es minimizar la aproximación de segundo orden de la función en el punto y de manera que, cuando $\|v\| \rightarrow 0$, el término $\mathcal{O}(\|v\|^3)$ puede despreciarse. Por tanto, la aproximación quedaría:

$$f(\exp_y(v)) = f(y) + (\text{grad } f)(v) + \frac{1}{2}(\text{Hess } f)(v, v).$$

Esta es una función que depende del vector $v \in T_y\mathcal{M}$. Asumiendo que $(\text{grad } f)(v) = 0$ y que el Hessiano $(\text{Hess } f)(v, v)$ es definido positivo, esta función es cóncava y tendremos:

$$f(\exp_y(v)) - f(y) > 0 \quad \longrightarrow \quad f(y) < f(\exp_y(v)),$$

y por tanto, que y es mínimo.

Si denotamos $H_f(v)$ la forma lineal que verifica $\langle H_f(v)|w \rangle = (\text{Hess } f)(v, w)$ para todo w , entonces $H_f^{(-1)}$ denota la función inversa. El mínimo está caracterizado por:

$$\text{grad}_v f_y = 0 = \text{grad } f + H_f(v) \quad \Longleftrightarrow \quad v = -H_f^{(-1)}(\text{grad } f).$$

Como hemos visto con anterioridad en la ecuación 3.1, tenemos $\text{grad } f = -2E[\overrightarrow{y\bar{X}}]$. Sin tener en cuenta el Cut Locus en la matriz Hessiana, tenemos una matriz definida positiva, $\text{Hess } f \simeq 2Id$. Por tanto el algoritmo de

gradiente descendiente es:

$$y_{k+1} = \exp_{y_k}(\overrightarrow{E[y_k X]}). \quad (3.2)$$

En el caso muestral que es el que más nos interesa en nuestro trabajo, tendremos exactamente el mismo algoritmo, pero con la media empírica:

$$y_{k+1} = \exp_{y_k}\left(\frac{1}{n} \sum_i \overrightarrow{y_k X_i}\right). \quad (3.3)$$

Notar que en este caso el algoritmo también funcionaría tomando:

$$y_{k+1} = \exp_{y_k}\left(\epsilon \sum_i \overrightarrow{y_k X_i}\right), \text{ con } \epsilon \leq \frac{1}{n}. \quad (3.4)$$

Cabe notar que en un espacio de vectorial, estos dos algoritmos se simplifican con $y_{k+1} = E[X]$ y $y_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$, las cuales son la definición del valor medio y media muestral respectivamente. Además el algoritmo converge en un solo paso.

Recordemos que la función exponencial es una geodésica a lo largo de la variedad \mathcal{M} . Así pues, aplicando el algoritmo del gradiente descendente de la ecuación 3.3, obtendremos un punto de la variedad \mathcal{M} , el cual forma parte de la geodésica con dirección la media empírica.

De esta manera, podemos ver la relación que existe entre la geometría que hemos visto en el Capítulo 2 y la estadística de este mismo capítulo.

Capítulo 4

Espacio de las formas planas

Como se ha mencionado en la introducción, existen muchas maneras diferentes de construir un Espacio Forma. En este trabajo vamos a considerar la idea expuesta en [15]. Puede verse en [16] otra manera distinta de considerar un espacio de formas.

En general, las técnicas utilizadas para la descripción de formas planas se agrupan en dos tipos: técnicas basadas en el contorno de las formas planas y técnicas basadas en la región que ocupan estas formas [17]. En este caso vamos a utilizar una técnica basada en el contorno de las formas planas. Empezaremos, por tanto, dando la definición del conjunto de formas planas a partir de la parametrización de las curvas frontera de estas formas planas [8].

4.1. Introducción.

Definición 4.1.1 (Espacio Pre-Forma). *Definimos el Espacio Pre-Forma como el conjunto formado por curvas parametrizadas cerradas modulo traslaciones, rotaciones y escalas; es decir:*

$$\mathcal{B} = \frac{\text{Inmersiones}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)}{\text{Similitudes}}, \quad (4.1)$$

donde: *Similitudes* = {traslaciones, rotaciones, escalas} e *Inmersions* $(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables entre \mathbb{S}^1 y \mathbb{R}^2 , esto es, $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuya diferencial d_α es inyectiva $\forall p \in \mathbb{S}^1$.

Definición 4.1.2 (Espacio Forma). *Definimos el Espacio Forma como:*

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{B}}{Diff(\mathbb{S}^1)}. \quad (4.2)$$

Notar que en la primera definición no han sido consideradas las diferentes reparametrizaciones de la curva $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$; es decir, no se ha considerado en la definición de \mathcal{B} el módulo por $Diff(\mathbb{S}^1)$. Por tanto, nosotros como trabajaremos en el Espacio Pre-Forma \mathcal{B} no consideraremos en un principio curvas geométricas, sino que nuestros resultados dependen de la parametrización de la curva. Más adelante explicaremos como pasamos al Espacio Forma para pasar los resultados a curvas “geométricas”.

A continuación, veremos como dotar al conjunto \mathcal{B} una estructura de variedad Riemanniana, lo cual nos permitirá obtener geodésicas y distancias entre formas.

4.2. \mathcal{B} como variedad de Riemann.

Dada una curva $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de \mathcal{B} (en realidad se trata de un elemento representativo de una clase de equivalencia), el espacio tangente $T_\alpha \mathcal{B}$ en α es el conjunto de campos vectoriales h sobre α ; es decir, $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Una métrica Riemanniana sobre \mathcal{B} es una familia de formas bilineales definidas positivas, $G_\alpha(h, k)$, donde $\alpha \in \mathcal{B}$ y $h, k \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ representan campos vectoriales en \mathbb{R}^2 a lo largo de la curva α .

En realidad existen infinitas métricas definidas en \mathcal{B} . Si denotamos s el parámetro longitud de arco de la curva α , la más simple viene dada por

$$G_\alpha^0(h, k) = \int_{\mathbb{S}^1} \langle h(t), k(t) \rangle ds.$$

Sin embargo esta métrica (usada, por ejemplo, en [16]) presenta algunos problemas, por ejemplo, una geodésica que empieza en un punto (curva) puede degenerar a una curva de longitud cero.

En este trabajo consideramos la métrica introducida en [8], definida como:

$$G_\alpha(h, k) = \frac{1}{l(\alpha)} \int_{\mathbb{S}^1} \langle \dot{h}, \dot{k} \rangle ds, \quad (4.3)$$

donde \dot{h} significa derivada de la función h con respecto al parámetro longitud de arco s . Esta métrica nos permitirá relacionar el Espacio Pre-Forma con una variedad Grassmanniana.

Sea V el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones de clase C^∞ , $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, con la norma,

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx.$$

Entonces, dadas dos funciones $e, f \in V$ podemos dar la definición de una aplicación básica que será de suma importancia a partir de ahora.

Definición 4.2.1. Sean $e, f \in V$ y asumiendo que las curvas planas pueden considerarse como curvas inmersas en el plano complejo, se define la aplicación 'básica' como:

$$\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(e, f) \mapsto \alpha(v) = \frac{1}{2} \int_0^v (e(t) + if(t))^2 dt.$$

Nota: De esta definición se deduce, en primer lugar que para $v = 0$, la curva α pasa por el $(0, 0)$; es decir, $\alpha(0) = (0, 0)$. En segundo lugar, que la curva $\alpha(v) = \Phi(e, f)$ será cerrada si y solamente si $\|e\| = \|f\|$ y $\langle e, f \rangle = 0$, ya que:

$$\alpha(2\pi) = \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e(t)^2 - f(t)^2) dt, \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e(t)f(t) dt \right) = (0, 0) = \alpha(0).$$

De ahí se obtiene $\|e\| = \|f\|$ y $\langle e, f \rangle = 0$.

Ahora consideramos la función ángulo tangente de α , θ_α ; es decir, la función que nos proporciona los ángulos que forman el vector tangente en

un punto de la curva α con el eje positivo de las abscisas. Esta función viene dada por:

$$\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| \exp^{i\theta_\alpha(t)} = \|\alpha'(t)\| (\cos(\theta_\alpha(t)), \sin(\theta_\alpha(t))).$$

De esta manera obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.2. *Sea $\theta_\alpha(t)$ la función ángulo tangente de la curva α , podemos expresar $e, f \in V$ como:*

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{2 \|\alpha'(t)\|} \cos\left(\frac{\theta_\alpha(t)}{2}\right), \\ f(t) &= \sqrt{2 \|\alpha'(t)\|} \sin\left(\frac{\theta_\alpha(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como consecuencia, la longitud de una curva α viene dada por:

$$\ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e(t)^2 + f(t)^2) dt = \frac{1}{2} (\|e\|^2 + \|f\|^2).$$

Si consideramos las curvas tal que $\ell(\alpha) = 1$, tendremos que $\|e\| = \|f\| = 1$ y de esta manera tendremos las condiciones necesarias para formar la variedad de Stiefel 2-dimensional de V definida en el Capítulo 2. Esto es,

$$St(2, V) = \{(e, f) \in V \times V / \|e\| = \|f\| = 1, \langle e, f \rangle = 0\}.$$

Sea ahora, $St^0(2, V)$ el subconjunto de la variedad de Stiefel $St(2, V)$, que viene dado por:

$$St^0(2, V) = \{(e, f) \in St(2, V) / \{e(t) = f(t) = 0\} = \emptyset\}.$$

Esta consideración viene dada porque definiendo una curva α de esta manera no tiene porque ser necesariamente una inmersión si e y f se anulan simultáneamente, aunque como veremos esto no afecta en las aplicaciones prácticas propuestas.

Recordemos que los elementos representantes del espacio \mathcal{B} se consideran como inmersiones de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^2 , modulo traslaciones, rotaciones y cambios de escala. El hecho de considerar curvas de manera que $\alpha(0) = (0, 0)$ y $\ell(\alpha) = 1$

hace que en $St^0(2, V)$ estemos considerando todas las traslaciones y cambios de escala respectivamente. En cuanto a las rotaciones, bastará considerar $Gr^0(2, V)$, que será un subconjunto de la variedad Grasmanniana $Gr(2, V)$ definido por los pares e y f con $\{t / e(t) = f(t) = 0\} = \emptyset$.

De esta manera, la ‘magia’ de la aplicación Φ se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.3. *La aplicación*

$$\Phi : St^0(2, V) \longrightarrow \mathcal{B}_1 = \frac{Imm(S^1, \mathbb{R}^2)}{Traslaciones, Escalas}$$

$$(e, f) \longmapsto \Phi((e, f)) = \frac{1}{2} \int_0^v (e(t) + if(t))^2 dt = \alpha(v),$$

define una isometría cuando $St^0(2, V)$ está dotado de su métrica natural g_S , que define la norma $\|(e, f)\|_{g_S} = \sqrt{g_S((e, f), (e, f))} = \sqrt{\langle (e, f), (e, f) \rangle_V}$ y \mathcal{B}_1 está dotado de la métrica G_α , que define la norma $\|h\|_{G_\alpha} = \sqrt{G_\alpha(h, h)} = \left(\frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \langle \dot{h}, \dot{h} \rangle ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Demostración. Sea $(e, f) \in St^0(2, V)$ y $(e_1, f_1) \in T_{(e, f)}St^0(2, V)$. Vamos a calcular la aplicación diferencial $D\Phi_{(e, f)}(e_1, f_1)$ y a demostrar que $\|(e_1, f_1)\|_{g_S} = \|D\Phi_{(e, f)}(e_1, f_1)\|_{G_\alpha}$.

Definimos las funciones $e(t, u)$ y $f(t, u)$ de manera que:

$$\begin{aligned} e(t, 0) &= e(t), \\ f(t, 0) &= f(t), \\ \left. \frac{d e(t, u)}{du} \right|_{u=0} &= e_1(t), \\ \left. \frac{d f(t, u)}{du} \right|_{u=0} &= f_1(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

De este modo la diferencial de la aplicación Φ viene dada por:

$$\begin{aligned} D\Phi_{(e, f)}(e_1, f_1) &= \left. \frac{d (\Phi(e(t, u) + if(t, u)))}{du} \right|_{u=0} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \left(\frac{1}{2} \int_0^v (e(t, u) + if(t, u))^2 dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^v \frac{d((e(t, u) + if(t, u))^2)}{du} \Big|_{u=0} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^v 2(e(t, u) + if(t, u)) \Big|_{u=0} \frac{d(e(t, u) + if(t, u))}{du} \Big|_{u=0} dt = \\
&= \int_0^v (e(t, 0) + if(t, 0)) \left(\frac{de(t, u)}{du} \Big|_{u=0} + i \frac{df(t, u)}{du} \Big|_{u=0} \right) dt = \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_0^v (e(t) + if(t))(e_1(t) + if_1(t)) dt = h(v) \in T_{\Phi((e, f))} \mathcal{B}_1,
\end{aligned}$$

donde:

- (1) Definición aplicación Φ : $\Phi((e(t, u), f(t, u))) = \frac{1}{2} \int_0^v (e(t, u) + if(t, u))^2 dt$.
(2) Ecuaciones 4.4.

Por tanto la norma vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\|D\Phi_{(e, f)}(e_1, f_1)\|_{G_\alpha}^2 &= \|h(v)\|_{G_\alpha}^2 = \frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \langle \dot{h}(v), \dot{h}(v) \rangle ds = \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{h'(v)}{\|\alpha'(v)\|}, \frac{h'(v)}{\|\alpha'(v)\|} \right\rangle \|\alpha'(v)\| dv = \\
&= \frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|\alpha'(v)\|} \langle h'(v), h'(v) \rangle dv = \\
&\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{\|h'(v)\|^2}{\|\alpha'(v)\|} dv = \\
&\stackrel{(3) \text{ y } (5)}{=} \frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{\|e(v) + if(v)\|^2 \|e_1(v) + if_1(v)\|^2}{\frac{1}{2} \|e(v) + if(v)\|^2} dv = \\
&= \frac{2}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \|e_1(v) + if_1(v)\|^2 dv = \\
&\stackrel{(6)}{=} \int_0^{2\pi} \|e_1(v) + if_1(v)\|^2 dv = \\
&\stackrel{(7)}{=} \int_0^{2\pi} \langle (e_1(v), f_1(v)), (e_1(v), f_1(v)) \rangle dv =
\end{aligned}$$

$$= \|(e_1, f_1)\|_{g_S}^2,$$

donde:

(3) Cambio de variable:

$$\begin{aligned} \dot{h}(v) &= \frac{d h(v)}{ds} = \frac{dh}{dv} \frac{dv}{ds} = h'(v) \frac{dv}{ds} = \frac{h'(v)}{\|\alpha'(v)\|}, \\ ds &= \|\alpha'(v)\| dv, \end{aligned}$$

y se ha utilizado:

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \frac{1}{2} \int_0^v (e(t) + if(t))^2 dt, \\ \alpha'(v) &= \frac{1}{2} (e(v) + if(v))^2, \\ \|\alpha'(v)\| &= \frac{1}{2} \|e(v) + if(v)\|^2. \end{aligned}$$

(4) $\|h'(v)\| = \sqrt{\langle h'(v), h'(v) \rangle}.$

(5) Definición de h :

$$\begin{aligned} h(v) &= \int_0^v (e(t) + if(t))(e_1(t) + if_1(t)) dt, \\ h'(v) &= (e(v) + if(v))(e_1(v) + if_1(v)), \\ \|h'(v)\| &= \|e(v) + if(v)\| \|e_1(v) + if_1(v)\|. \end{aligned}$$

(6) $l(\alpha) = 2.$

(7) $\|(e_1(v), f_1(v))\| = \sqrt{\langle (e_1(v), f_1(v)), (e_1(v), f_1(v)) \rangle}.$ □

Como consecuencia de este teorema obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.2.4. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi : Gr^0(2, V) &\longrightarrow \frac{\mathcal{B}_1}{Rotaciones} = \mathcal{B} \\ (e, f) &\longmapsto \Phi((e, f)) = \frac{1}{2} \int_0^s (e(t) + if(t))^2 dt = \alpha(s), \end{aligned}$$

define una isometría cuando $Gr^0(2, V)$ está dotado de su métrica natural g_G , que define la norma $\|(e, f)\|_{g_S} = \sqrt{g_G((e, f), (e, f))} = \sqrt{\langle (e, f), (e, f) \rangle_V}$ y \mathcal{B} está dotado de la métrica G_α , que define la norma $\|h\|_{G_\alpha} = \sqrt{G_\alpha(h, h)} = \left(\frac{1}{l(\alpha)} \int_0^{2\pi} \langle \dot{h}, \dot{h} \rangle ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

La demostración de este corolario se obtiene al considerar en el teorema anterior cocientes en los dos lados y obtener así dos sumersiones Riemannianas que conservan la isometría.

4.3. Cálculo de distancias y geodésicas en \mathcal{B} .

Para calcular las distancias y las líneas geodésicas entre cualquier par de formas en el Espacio Pre-Forma consideraremos la aplicación básica y las distancias y líneas geodésicas en el Grassmanniano. Como dos funciones $e(t)$ y $f(t)$ definen un punto en la variedad de Grassmann $Gr(2, V)$, para realizar dichos cálculos, aplicaremos los métodos usados en [9] y [8].

La distancia entre dos curvas cerradas $\alpha = \Phi(e_1, f_1)$ y $\beta = \Phi(e_2, f_2)$ de longitud 1 es la distancia entre dos subespacios dimensionales, W_1 generado por $\{e_1, f_1\}$ y W_2 generado por $\{e_2, f_2\}$.

La descomposición de valores singulares de la proyección ortonormal p de W_1 en W_2 nos proporciona las bases $\{\hat{e}_1, \hat{f}_1\}$ de W_1 y $\{\hat{e}_2, \hat{f}_2\}$ de W_2 tal que $p(\hat{e}_1) = \lambda_1 \hat{e}_2$ y $p(\hat{f}_1) = \lambda_2 \hat{f}_2$, $\hat{e}_1 \perp \hat{f}_1$, $\hat{e}_2 \perp \hat{f}_2$ donde $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$. De hecho λ_1, λ_2 son los valores singulares de la siguiente matriz (2×2):

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, f_2 \rangle \\ \langle f_1, e_2 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Si escribimos $\lambda_1 = \cos \psi_1$, $\lambda_2 = \cos \psi_2$ entonces ψ_1, ψ_2 son los ángulos de Jordan, $0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq \pi/2$.

Además, si tenemos $\alpha = \Phi(e_1, f_1)$ y $\beta = \Phi(e_2, f_2)$, para obtener la geodésica, tenemos que diagonalizar la matriz A , rotando la curva α por un ángulo constante θ_α , es decir, la base $\{e_1, f_1\}$ por el ángulo $\frac{\theta_\alpha}{2}$ y de manera similar para la curva β por un ángulo constante θ_β . Dichos ángulos θ_α y θ_β vienen dados por sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \theta_\alpha + \theta_\beta &= 2 \arctan \left(\frac{\langle e_1, f_2 \rangle + \langle f_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_2 \rangle - \langle f_1, f_2 \rangle} \right) \\ \theta_\alpha - \theta_\beta &= 2 \arctan \left(\frac{\langle e_1, f_2 \rangle - \langle f_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_2 \rangle + \langle f_1, f_2 \rangle} \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

y con los que obtenemos las bases:

$$\begin{aligned} \{\hat{e}_1, \hat{f}_1\} &= \exp^{i\frac{\theta_\alpha}{2}} (e_1 + if_1), \\ \{\hat{e}_2, \hat{f}_2\} &= \exp^{i\frac{\theta_\beta}{2}} (e_2 + if_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

De esta manera, con las nuevas bases alineadas los elementos de la diagonal de la matriz A , serán los cosenos, $\lambda_1 = \cos \psi_1$ y $\lambda_2 = \cos \psi_2$.

Así pues, tenemos que la distancia de la geodésica entre $\alpha = \Phi(e_1, f_1)$ y $\beta = \Phi(e_2, f_2)$ viene dada por [9]:

$$d(W_1, W_2) = d(\alpha, \beta) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \quad (4.8)$$

y la geodésica que une las curvas α y β se define como:

$$\gamma(s, u) = \Phi(e(t, u), f(t, u)) = \frac{1}{2} \int_0^s (e(t, u) + if(t, u))^2 dt, \quad (4.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} e(t, u) &= \frac{\sin((1-u)\psi_1)\hat{e}_1(t) + \sin(u\psi_1)\hat{e}_2(t)}{\sin \psi_1}, \\ f(t, u) &= \frac{\sin((1-u)\psi_2)\hat{f}_1(t) + \sin(u\psi_2)\hat{f}_2(t)}{\sin \psi_2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

si $\psi_1, \psi_2 \neq 0$. En otro caso tendríamos:

$$\begin{aligned} e(t, u) &= \hat{e}_1(t), \quad \text{si } \psi_1 = 0, \\ f(t, u) &= \hat{f}_1(t), \quad \text{si } \psi_2 = 0. \end{aligned}$$

El vector tangente a la geodésica $(e(t, u), f(t, u))$ en $Gr^0(2, V)$, viene dado por $(e_u(t, 0), f_u(t, 0))$, donde:

$$\begin{aligned} e_u(t, 0) &= \frac{\partial e(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{\psi_1}{\sin \psi_1} (\hat{e}_2(t) - \cos \psi_1 \hat{e}_1(t)), \\ f_u(t, 0) &= \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{\psi_2}{\sin \psi_2} (\hat{f}_2(t) - \cos \psi_2 \hat{f}_1(t)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

si $\psi_1, \psi_2 \neq 0$. En otro caso tendríamos:

$$\begin{aligned} e_u(t, 0) &= 0, & \text{si } \psi_1 &= 0, \\ f_u(t, 0) &= 0, & \text{si } \psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Además, se cumple la siguiente proposición:

Proposición 4.3.1. *La norma del vector $(e_u(t, 0), f_u(t, 0))$ en $V \times V$ coincide con la distancia entre $\alpha_i = \Phi(e_i, f_i)$ y $\alpha_j = \Phi(e_j, f_j)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \|(e_u(t, 0), f_u(t, 0))\|^2 &= \left(\sqrt{\langle (e_u(t, 0), f_u(t, 0)), (e_u(t, 0), f_u(t, 0)) \rangle} \right)^2 = \\ &= \langle (e_u(t, 0), f_u(t, 0)), (e_u(t, 0), f_u(t, 0)) \rangle = \\ &= \langle e_u(t, 0), e_u(t, 0) \rangle + 2 \langle e_u(t, 0), f_u(t, 0) \rangle + \\ &+ \langle f_u(t, 0), f_u(t, 0) \rangle = \\ &\stackrel{(1)}{=} \langle e_u(t, 0), e_u(t, 0) \rangle + \langle f_u(t, 0), f_u(t, 0) \rangle = \\ &\stackrel{(2)}{=} \left\langle \frac{\psi_i}{\sin \psi_i} (\hat{e}_j(t) - \cos \psi_i \hat{e}_i(t)), \frac{\psi_i}{\sin \psi_i} (\hat{e}_j(t) - \cos \psi_i \hat{e}_i(t)) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\psi_j}{\sin \psi_j} (\hat{f}_j(t) - \cos \psi_j \hat{f}_i(t)), \frac{\psi_j}{\sin \psi_j} (\hat{f}_j(t) - \cos \psi_j \hat{f}_i(t)) \right\rangle = \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} \langle \hat{e}_j(t) - \cos \psi_i \hat{e}_i(t), \hat{e}_j(t) - \cos \psi_i \hat{e}_i(t) \rangle + \\ &+ \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} \langle \hat{f}_j(t) - \cos \psi_j \hat{f}_i(t), \hat{f}_j(t) - \cos \psi_j \hat{f}_i(t) \rangle = \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} (\langle \hat{e}_j(t), \hat{e}_j(t) \rangle - 2 \cos \psi_i \langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_j(t) \rangle + \\ &+ \cos^2 \psi_i \langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_i(t) \rangle) + \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} (\langle \hat{f}_j(t), \hat{f}_j(t) \rangle - \\ &- 2 \cos \psi_j \langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_j(t) \rangle + \cos^2 \psi_j \langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_i(t) \rangle) = \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} (1 - 2 \cos \psi_i \langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_j(t) \rangle + \cos^2 \psi_i) + \\ &+ \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} (1 - 2 \cos \psi_j \langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_j(t) \rangle + \cos^2 \psi_j) = \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} (1 - 2 \cos^2 \psi_i + \cos^2 \psi_i) + \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} (1 - 2 \cos^2 \psi_j + \cos^2 \psi_j) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} (1 - \cos^2 \psi_i) + \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} (1 - \cos^2 \psi_j) = \\
&= \frac{\psi_i^2}{\sin^2 \psi_i} \sin^2 \psi_i + \frac{\psi_j^2}{\sin^2 \psi_j} \sin^2 \psi_j = \\
&= \psi_i^2 + \psi_j^2 = \\
&= d^2(\alpha_i, \alpha_j),
\end{aligned}$$

donde:

(1) Ortogonalidad: $\langle e_u(t, 0), f_u(t, 0) \rangle = 0$.

(2) Definiciones de $e_u(t, 0)$ y $f_u(t, 0)$:

$$\begin{aligned}
e_u(t, 0) &= \frac{\psi_i}{\sin \psi_i} (\hat{e}_j(t) - \cos \psi_i \hat{e}_i(t)), \\
f_u(t, 0) &= \frac{\psi_j}{\sin \psi_j} (\hat{f}_j(t) - \cos \psi_j \hat{f}_i(t)).
\end{aligned}$$

(3) Linealidad.

(4) Funciones unitarias:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_i(t) \rangle &= \|\hat{e}_i(t)\|^2 = 1, & \langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_i(t) \rangle &= \|\hat{f}_i(t)\|^2 = 1, \\
\langle \hat{e}_j(t), \hat{e}_j(t) \rangle &= \|\hat{e}_j(t)\|^2 = 1, & \langle \hat{f}_j(t), \hat{f}_j(t) \rangle &= \|\hat{f}_j(t)\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

(5) $\langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_j(t) \rangle$ y $\langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_j(t) \rangle$ son los elementos de la diagonal de la matriz A (Pág. 36). Además, dichas funciones, hacen que esa matriz sea diagonal y por tanto:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{e}_i(t), \hat{e}_j(t) \rangle &= \lambda_1 = \cos \psi_i, \\
\langle \hat{f}_i(t), \hat{f}_j(t) \rangle &= \lambda_2 = \cos \psi_j.
\end{aligned}$$

□

Además de la geodésica que une dos curvas α y β , que será necesaria para calcular distancias entre curvas, también necesitaremos la geodésica definida por un punto y una dirección, que la utilizaremos para calcular la media intrínseca de varias curvas.

Recordamos que, como vimos en el Capítulo 2, podíamos definir la geodésica desde el punto $(e(t), f(t))$ en $Gr^0(2, V)$ con vector tangente inicial $(\tilde{e}(t), \tilde{f}(t))$

como [7]:

$$\gamma(u) = ((e(t), f(t)), (\tilde{e}(t), \tilde{f}(t))) \exp u \begin{pmatrix} A & -S \\ Id_2 & A \end{pmatrix} Id_{4 \times 2} \exp(-Au),$$

donde $A = (e(t), f(t))^T (\tilde{e}(t), \tilde{f}(t))$ y $S = (\tilde{e}(t), \tilde{f}(t))^T (\tilde{e}(t), \tilde{f}(t))$.

Veamos a continuación un ejemplo sencillo del cálculo de la distancia y la geodésica entre una circunferencia y una elipse.

Ejemplo 4.3.2. *Sea la circunferencia parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y la elipse parametrizada por $\beta(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.*

Notar que las longitudes de estas curvas parametrizadas no son igual a 1. Por tanto, será suficiente considerar en las ecuaciones de la Proposición 4.2.2 lo siguiente:

$$e_1(t) = \sqrt{\frac{2 \|\alpha'(t)\|}{\ell(\alpha)}} \cos\left(\frac{\theta_\alpha(t)}{2}\right), \quad f_1(t) = \sqrt{\frac{2 \|\alpha'(t)\|}{\ell(\alpha)}} \sin\left(\frac{\theta_\alpha(t)}{2}\right). \quad (4.12)$$

$$e_2(t) = \sqrt{\frac{2 \|\beta'(t)\|}{\ell(\beta)}} \cos\left(\frac{\theta_\beta(t)}{2}\right), \quad f_2(t) = \sqrt{\frac{2 \|\beta'(t)\|}{\ell(\beta)}} \sin\left(\frac{\theta_\beta(t)}{2}\right). \quad (4.13)$$

Calculamos $\theta_\alpha(t)$ cumpliendo $\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| (\cos(\theta_\alpha(t)), \sin(\theta_\alpha(t)))$:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)), \\ \|\alpha'(t)\| &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} -\sin(t) = \cos(\theta_\alpha(t)) \\ \cos(t) = \sin(\theta_\alpha(t)) \end{cases}$$

La función ángulo tangente de la curva α resultará: $\theta_\alpha(t) = \arctan\left(-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right) = -\arctan(\cot(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Para asegurar la continuidad de la función arctangente y evitar los dos posibles valores que tiene, consideraremos:

$$\theta_\alpha(t) = t + \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ahora calculamos $\theta_\beta(t)$ cumpliendo $\beta'(t) = \|\beta'(t)\| (\cos(\theta_\beta(t)), \sin(\theta_\beta(t)))$:

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= (-2 \sin(t), \cos(t)), \\ \|\beta'(t)\| &= \sqrt{\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)}.\end{aligned}$$

Por tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} -\frac{2 \sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)}} = \cos(\theta_\beta(t)) \\ \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)}} = \sin(\theta_\beta(t)) \end{cases}$$

La función ángulo tangente de la curva β resultará: $\theta_\beta(t) = \arctan\left(-\frac{\cos(t)}{2 \sin(t)}\right) = -\arctan\left(\frac{\cot(t)}{2}\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Para asegurar la continuidad de la función arco-tangente y evitar los dos posibles valores que tiene, consideraremos:

$$\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\cot(t)}{2}\right) + \pi, & 0 \leq t \leq \pi, \\ -\arctan\left(\frac{\cot(t)}{2}\right) + 2\pi, & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

De esta manera calculamos las funciones $e_1(t)$ y $f_1(t)$ para α y $e_2(t)$ y $f_2(t)$ para β , utilizando las ecuaciones 4.12 y 4.13 respectivamente. Las curvas resultantes de aplicar la definición de Φ tendrán longitud 1 y pasarán por el punto $(0, 0)$. Así, obtendremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0.986299 & 2.34 \times 10^{-17} \\ 2.34 \times 10^{-17} & 0.986299 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz que ya está diagonalizada, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos \psi_1 = 0.986299, \\ \lambda_2 &= \cos \psi_2 = 0.986299.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos: $\psi_1 = \psi_2 = 0.165727$ y utilizando la ecuación 4.8, obtenemos la siguiente distancia:

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.234373.$$

Para obtener la geodésica que une la circunferencia y la elipse con estas parametrizaciones utilizamos la ecuación 4.9 considerando $\hat{e}_1 = e_1$, $\hat{f}_1 =$

$f_1, \hat{e}_2 = e_2$ y $\hat{f}_2 = f_2$, ya que con las funciones e_1, f_1, e_2 y f_2 ya habíamos obtenido una matriz diagonal. En la siguiente figura podemos ver algunas curvas de la geodésica obtenida:

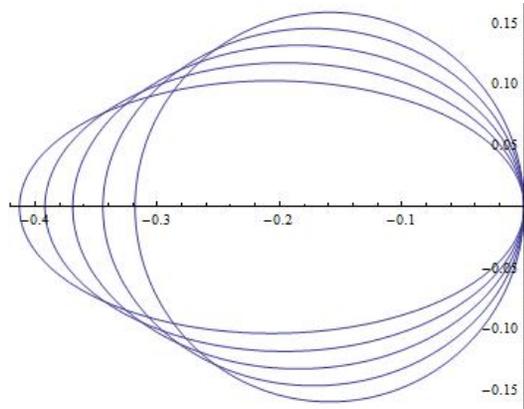


Figura 4.1: Se muestran los puntos (curvas) de la geodésica que une α con β para $s = 0.25$, $s = 0.5$ y $s = 0.75$.

Notar que para $s = 0$ obtenemos la curva inicial α (circunferencia) y para $s = 1$ obtenemos la curva final β (elipse).

4.4. Cálculo de distancias y geodésicas en \mathcal{S} .

Hasta ahora hemos estado trabajando con curvas parametrizadas, pero como hemos mencionado anteriormente, estamos interesados en curvas geométricas. Para ello tenemos dos posibilidades:

1. Considerarlo como un espacio de formas $\mathcal{S} = \mathcal{B}/\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ el cual es una submersión. Entonces, las geodésicas en \mathcal{S} son exactamente las imágenes de las geodésicas en \mathcal{B} que son perpendiculares a las fibras de la submersión, es decir, las geodésicas en \mathcal{S} que con la métrica G_α son geodésicas horizontales en la variedad Grassmanniana 2-dimensional de V , $Gr(2, V)$.
2. **(Nuestra elección).** Considerarlo como curvas digitales que corresponden a contornos de formas. De esta manera, para cada curva, ten-

dremos una misma cantidad de puntos más o menos igualmente espaciados y podremos suponer que las curvas $\alpha \in \mathcal{B}$ tienen velocidad constante $\|\alpha'(t)\|$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Consideramos ahora que $\phi \in Diff(\mathbb{S}^1)$ con $\phi(0) = 0$, $\alpha(t)$ es una curva en \mathcal{B} con $\|\alpha'(t)\| = K$ y $\alpha \circ \phi$ es una reparametrización de α con $\|(\alpha \circ \phi)'(t)\| = K$; entonces tenemos que ϕ es la identidad, $\phi(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Por tanto, en vez de trabajar en el Espacio Forma \mathcal{S} , consideraremos distancias en el Espacio Pre-Forma \mathcal{B} y definiremos la distancia entre dos immersiones (formas) α y β de \mathcal{S} , cada una de ellas de longitud 1 como:

$$d(\alpha, \beta) = \min_{\phi} d(\alpha, \beta \circ \phi), \quad (4.14)$$

donde $\phi \in Diff(\mathbb{S}^1)$ dado por $\phi(t) = t + t_0$, donde $t_0 \in \mathbb{S}^1$ es una constante.

Veamos a continuación un ejemplo del cálculo de la distancia y la geodesica entre dos parametrizaciones diferentes de una misma elipse con el objetivo de ilustrar la importancia que tiene la elección del mínimo.

Ejemplo 4.4.1. Sea la elipse parametrizada por $\alpha(t) = (2 \cos(t + \frac{\pi}{4}), \sin(t + \frac{\pi}{4}))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y la elipse parametrizada por $\beta(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ considerada en el Ejemplo 4.3.2.

Calculamos $\theta_\alpha(t)$ cumpliendo $\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| (\cos(\theta_\alpha(t)), \sin(\theta_\alpha(t)))$:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-2 \sin(t + \frac{\pi}{4}), \cos(t + \frac{\pi}{4})), \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{\cos^2(t + \frac{\pi}{4}) + 4 \sin^2(t + \frac{\pi}{4})}. \end{aligned}$$

Por tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} -\frac{2(\cos(t) + \sin(t))}{\sqrt{5 + 6 \cos(t) \sin(t)}} = \cos(\theta_\alpha(t)) \\ \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\sqrt{5 + 6 \cos(t) \sin(t)}} = \sin(\theta_\alpha(t)) \end{cases}$$

La función ángulo tangente de la curva α resultará ser:

$$\theta_\alpha(t) = \arctan \left(-\frac{\cos(t) - \sin(t)}{2(\sin(t) + \cos(t))} \right) = -\arctan \left(\frac{\cos(t) - \sin(t)}{2(\sin(t) + \cos(t))} \right).$$

Para asegurar la continuidad de la función arcotangente y evitar los dos posibles valores que tiene, consideraremos:

$$\theta_\alpha(t) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2(\sin(t)+\cos(t))}\right) + \frac{3\pi}{4}, & 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}, \\ -\arctan\left(\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2(\sin(t)+\cos(t))}\right) + \frac{7\pi}{4}, & \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}, \\ -\arctan\left(\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2(\sin(t)+\cos(t))}\right) + \frac{11\pi}{4}, & \frac{7\pi}{4} \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Por otra parte, recordemos del Ejemplo 4.3.2 que, la función ángulo tangente de la curva β era:

$$\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\cot(t)}{2}\right) + \pi, & 0 \leq t \leq \pi, \\ -\arctan\left(\frac{\cot(t)}{2}\right) + 2\pi, & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

De esta manera calculamos las funciones $e_1(t)$ y $f_1(t)$ para α y $e_2(t)$ y $f_2(t)$ para β , utilizando las ecuaciones 4.12 y 4.13 respectivamente. Las curvas resultantes de aplicar la definición de Φ tendrán longitud 1 y pasarán por el punto $(0,0)$. Así, obtenemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0.972598 & -0.027016 \\ 0.027016 & 0.972598 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz que “no” está diagonalizada, con lo que la tendremos que diagonalizar para obtener:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \psi_1 = 0.972973, \\ \lambda_2 &= \cos \psi_2 = 0.972973. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos: $\psi_1 = \psi_2 = 0.233023$ y utilizando la ecuación 4.8, obtenemos la siguiente distancia:

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.329544.$$

Cabe destacar que en nuestro Espacio Forma estas dos elipses representan la misma forma y, por tanto, la distancia entre ambas debería de ser 0. Observamos pues que la parametrización afecta a nuestra distancia. De

ahí que para trabajar en el espacio forma se elija el mínimo de las distancias de entre todos los posibles cambios de parametrización. En este ejemplo, obtendríamos el mínimo si consideráramos las parametrizaciones $\beta(t) = \alpha(t)$ o $\beta(t) = \alpha(t + \pi)$.

En la siguiente figura podemos ver la geodésica que se obtiene entre las dos parametrizaciones propuestas para la elipse:

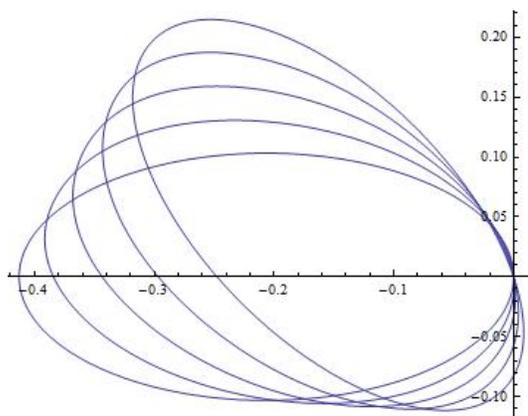


Figura 4.2: Se muestran los puntos (curvas) de la geodésica que une α y β para $s = 0.25$, $s = 0.5$ y $s = 0.75$.

Notar que para $s = 0$ obtenemos la curva inicial α (elipse horizontal), y para $s = 1$ obtenemos la curva final β (elipse inclinada).

Capítulo 5

Media muestral intrínseca en el Espacio Forma.

Una vez analizados los conceptos necesarios, tanto geométricos como estadísticos, de los capítulos anteriores, vamos a obtener en este capítulo un resultado nuevo. Este resultado es la obtención de la media muestral intrínseca en el espacio de formas. Sin embargo, con el objetivo de explicar de manera sencilla el método que vamos a utilizar para definir esta media, vamos a tratar de explicar como se calcula la media muestral intrínseca en tres espacios diferentes. En primer lugar, veremos dos casos sencillos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2 . En concreto, en 5.1.1 veremos una idea de como aplicaríamos el Algoritmo 1 para calcular la media intrínseca de un conjunto de puntos en el plano y en 5.1.2 se aplicará el Algoritmo 2 para calcular dicha media, en este caso para un conjunto de 3 puntos en la esfera. A continuación, en 5.2 trataremos el caso en nuestro Espacio Forma, aplicando el Algoritmo 3 descrito en 5.2.1 para un caso sencillo. Para finalizar, en 5.2.4, mostraremos algunos resultados obtenidos con el último algoritmo mencionado considerando diferentes parámetros y formas.

5.1. Medias en los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2 .

5.1.1. Ejemplo trivial en \mathbb{R}^2 .

Consideramos los puntos en \mathbb{R}^2 : $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (0, 2)$ y $P_4 = (2, 2)$.

Obviamente la media intrínseca de estos 4 puntos teniendo en cuenta la métrica euclídeana en \mathbb{R}^2 es el punto $P_M = (1, 1)$. Que, como es bien conocido, es el que minimiza la varianza. Veámoslo a continuación, simplemente como una ilustración trivial, por una parte, planteando el problema analítico, y por otra usando el algoritmo propuesto detalladamente paso por paso.

Método Analítico.

Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \text{dist}^2((x, y), P_i) = \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 + 2(x-2)^2 + 2y^2 + 2(y-2)^2) = \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 + 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 + 2y^2 - 8y + 8) = \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 2y + 4. \end{aligned}$$

Calculamos los puntos críticos resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x - 2, 2y - 2) = (0, 0) \Rightarrow \\ &\left. \begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \\ 2y - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y) = (1, 1). \end{aligned}$$

Calculamos el determinante de la matriz Hessiana,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

y efectivamente como el determinante es positivo tenemos que $(1, 1)$ es el único punto crítico que existe, y además es un mínimo.

Así pues podemos concluir que el punto medio será $P_M = (1, 1)$, ya que es el que minimiza la función suma de distancias al resto de puntos.

Veamos a continuación el algoritmo:

Algoritmo.**Algoritmo 1** MEDIA INTRÍNSECA EN EL PLANO.**Entrada:** Conjunto de puntos $\{P_1, \dots, P_n\}$ del plano, ε y *Error*.**Salida:** Punto medio M .

1. $k \leftarrow 1$,
2. $M_1 \leftarrow P_1$.
PASO 1: Calcular los elementos de la geodésica que une los puntos M_k y P_i , es decir, con punto inicial M_k y dirección \vec{v}_{ki} : $\gamma_{ki}(t) = M_k + t\vec{v}_{ki}$.
3. **para todo** $i = 1, \dots, n$ **hacer**
4. $\vec{v}_{ik} \leftarrow \overrightarrow{M_k P_i}$.
5. **fin para**
PASO 2: Calcular vector de la nueva dirección.
6. $\vec{v}_k \leftarrow \sum_{i=1}^n \vec{v}_{ik}$.
PASO 3: Calcular nuevo candidato a media, M_{k+1} .
7. Geodésica en la nueva dirección \vec{v}_k : $\gamma_k(t) = M_k + t\vec{v}_k$.
8. $M_{k+1} \leftarrow \gamma_k(\varepsilon)$.
PASO 4: Criterio de parada.
9. **si** $d(M_k, M_{k+1}) < \textit{Error}$ **entonces**
10. **devolver** $M \leftarrow M_{k+1}$.
11. **si no**
12. $k \leftarrow k + 1$,
13. Volver al **PASO 1**.
14. **fin si**

Método Algorítmico.

Como se comentó en el capítulo 3 al tratarse de un espacio vectorial el algoritmo del gradiente descendiente obtendría el mínimo en un solo paso considerando la ecuación 3.3.

Sin embargo, el Algoritmo 1 representa el algoritmo de la ecuación 3.4 que sería equivalente al de la ecuación 3.3 considerando $\varepsilon = \frac{1}{n}$. De este modo, obtendríamos el punto medio en el primero de los pasos, aunque para ilustrar como funciona este algoritmo en este ejemplo sencillo, tomaremos un ε menor que $\frac{1}{4}$ para detallar mas pasos.

Consideraremos los siguientes parámetros del algoritmo: $\{P_1 = (0, 0), P_2 = (2, 0), P_3 = (0, 2), P_4 = (2, 2)\}$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$ y $Error = 0.1$ (10%). Además iniciaremos $k = 1$ y el primer candidato a media será $M_1 = P_1 = (0, 0)$.

PASO 1: ($k = 1$) Calculamos los vectores $\vec{v}_i = \overrightarrow{M_1 P_i}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{11} &= \overrightarrow{M_1 P_1} = P_1 - M_1 = (0, 0) - (0, 0) = (0, 0), \\ \vec{v}_{12} &= \overrightarrow{M_1 P_2} = P_2 - M_1 = (2, 0) - (0, 0) = (2, 0), \\ \vec{v}_{13} &= \overrightarrow{M_1 P_3} = P_3 - M_1 = (0, 2) - (0, 0) = (0, 2), \\ \vec{v}_{14} &= \overrightarrow{M_1 P_4} = P_4 - M_1 = (2, 2) - (0, 0) = (2, 2).\end{aligned}$$

PASO 2: ($k = 1$) Calculamos el vector de la nueva dirección, $\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{1i}$:

$$\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{1i} = (0, 0) + (2, 0) + (0, 2) + (2, 2) = (4, 4).$$

PASO 3: ($k = 1$) Construimos la geodésica γ_1 , con punto inicial M_1 y en la nueva dirección \vec{v}_1 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_2 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= M_1 + t\vec{v}_1 = (0, 0) + t(4, 4) = (4t, 4t). \\ M_2 &= \gamma_1(\varepsilon) = \gamma_1\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Nota: Notar que si hubiéramos tomado $\varepsilon = \frac{1}{4}$, llegaríamos al mínimo en un solo paso.

PASO 4: ($k = 1$) Criterio de parada: ¿ $d(M_1, M_2) < Error$?

$$\begin{aligned}d(M_1, M_2) &= d((0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 < 0.1?\end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 2$ y volvemos al **PASO 1**.

PASO 1: ($k = 2$) Calculamos los vectores $\vec{v}_{2i} = \overrightarrow{M_2 P_i}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{21} &= \overrightarrow{M_2 P_1} = P_1 - M_2 = (0, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \vec{v}_{22} &= \overrightarrow{M_2 P_2} = P_2 - M_2 = (2, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \vec{v}_{23} &= \overrightarrow{M_2 P_3} = P_3 - M_2 = (0, 2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \\ \vec{v}_{24} &= \overrightarrow{M_2 P_4} = P_4 - M_2 = (2, 2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

PASO 2: ($k = 2$) Calculamos el vector de la nueva dirección, $\vec{v}_2 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{2i}$:

$$\vec{v}_2 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{2i} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = (2, 2).$$

PASO 3: ($k = 2$) Construimos la geodésica γ_2 , con punto inicial M_2 y en la nueva dirección \vec{v}_2 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_3 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= M_2 + t\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + t(2, 2) = \left(2t + \frac{1}{2}, 2t + \frac{1}{2}\right), \\ M_3 &= \gamma_2(\varepsilon) = \gamma_2\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 2$) Criterio de parada: ¿ $d(M_2, M_3) < \text{Error}$?

$$\begin{aligned}d(M_2, M_3) &= d\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3536 < 0.1?\end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 3$ y volvemos al **PASO 1**.

PASO 1: ($k = 3$) Calculamos los vectores $\vec{v}_{3i} = \overrightarrow{M_3P_i}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{31} &= \overrightarrow{M_3P_1} = P_1 - M_3 = (0, 0) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right), \\ \vec{v}_{32} &= \overrightarrow{M_3P_2} = P_2 - M_3 = (2, 0) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right), \\ \vec{v}_{33} &= \overrightarrow{M_3P_3} = P_3 - M_3 = (0, 2) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \\ \vec{v}_{34} &= \overrightarrow{M_3P_4} = P_4 - M_3 = (2, 2) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right).\end{aligned}$$

PASO 2: ($k = 3$) Calculamos el vector de la nueva dirección, $\vec{v}_3 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{3i}$:

$$\vec{v}_3 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{3i} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) = (1, 1).$$

PASO 3: ($k = 3$) Construimos la geodésica γ_3 , con punto inicial M_3 y en la nueva dirección \vec{v}_3 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_4 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned}\gamma_3(t) &= M_3 + t\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + t(1, 1) = \left(t + \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4}\right), \\ M_4 &= \gamma_3(\varepsilon) = \gamma_3\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right).\end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 3$) Criterio de parada: ¿ $d(M_3, M_4) < Error$?

$$\begin{aligned}d(M_3, M_4) &= d\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0.1768 < 0.1?\end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 4$ y volvemos al **PASO 1**.

PASO 1: ($k = 4$) Calculamos los vectores $\vec{v}_{4i} = \overrightarrow{M_4P_i}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{41} &= \overrightarrow{M_4P_1} = P_1 - M_4 = (0, 0) - \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) = \left(-\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}\right), \\ \vec{v}_{42} &= \overrightarrow{M_4P_2} = P_2 - M_4 = (2, 0) - \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}, -\frac{7}{8}\right), \\ \vec{v}_{43} &= \overrightarrow{M_4P_3} = P_3 - M_4 = (0, 2) - \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) = \left(-\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right), \\ \vec{v}_{44} &= \overrightarrow{M_4P_4} = P_4 - M_4 = (2, 2) - \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right).\end{aligned}$$

PASO 2: ($k = 4$) Calculamos el vector de la nueva dirección, $\vec{v}_4 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{4i}$:

$$\vec{v}_4 = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_{4i} = \left(-\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}\right) + \left(\frac{9}{8}, -\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

PASO 3: ($k = 4$) Construimos la geodésica γ_4 , con punto inicial M_4 y en la nueva dirección \vec{v}_4 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_5 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned}\gamma_4(t) &= M_4 + t\vec{v}_4 = \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{7}{8}, \frac{1}{2}t + \frac{7}{8}\right), \\ M_5 &= \gamma_4(\varepsilon) = \gamma_4\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{15}{16}, \frac{15}{16}\right).\end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 4$) Criterio de parada: $d(M_4, M_5) < \text{Error}$?

$$\begin{aligned}d(M_4, M_5) &= d\left(\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{15}{16}, \frac{15}{16}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{15}{16} - \frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{15}{16} - \frac{7}{8}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{1}{16^2}\right)} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = 0.0884 < 0.1?\end{aligned}$$

SI, entonces el punto medio será: $M_5 = \left(\frac{15}{16}, \frac{15}{16}\right)$.

Resultados.

En la siguiente figura podemos ver todos los pasos, donde representamos en color rojo los puntos medios encontrados en cada una de las iteraciones y en azul el punto medio real:

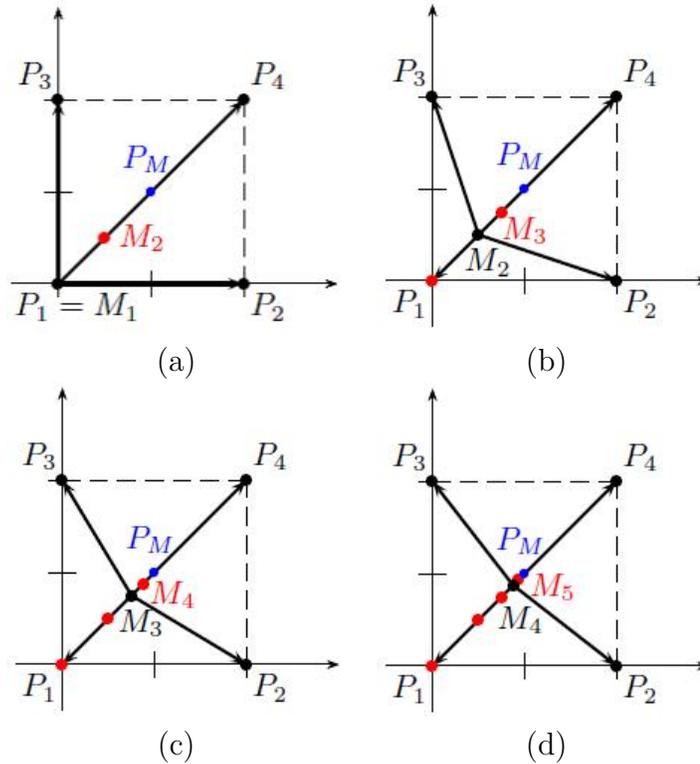


Figura 5.1: (a) Iteración $k = 1$ del algoritmo, (b) Iteración $k = 2$ del algoritmo, (c) Iteración $k = 3$ del algoritmo, (d) Iteración $k = 4$ del algoritmo.

5.1.2. Ejemplo trivial en \mathbb{S}^2 .

Consideramos los puntos en \mathbb{S}^2 : $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 1)$.

En este ejemplo no es tan fácil deducir cuál será la media intrínseca de 3 puntos cualquiera. A pesar de eso, nuestra elección particular de los 3 puntos

y teniendo en cuenta la idea general de la geometría en \mathbb{S}^2 , nos hace deducir que el punto medio será: $P_M = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Es bien conocido que las geodésicas en una esfera \mathbb{S}^2 son los círculos máximos; es decir, la intersección de la esfera con planos que pasan por el centro de dicha esfera. Por tanto, en general, la expresión de estas geodésicas vendría dada por:

$$\gamma(t) = r \cos(at)\vec{u}_1 + r \sin(at)\vec{u}_2,$$

donde r es el radio de la esfera, $a > 0$, $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ y $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$.

En nuestro caso en particular esta expresión puede reducirse a:

$$\gamma(t) = \cos(t)P + \sin(t)\vec{v},$$

donde $P \in \mathbb{S}^2$ y $\|\vec{v}\| = 1$, ya que consideraremos el caso de la esfera de radio la unidad.

Con esta última definición, tenemos una geodésica que viene dada por un punto P y un vector dirección \vec{v} , la única diferencia es que dicho vector \vec{v} tiene que ser unitario para que la geodésica corresponda a un círculo máximo de la esfera. Así pues, esto nos conducirá al hecho de que al usar el algoritmo del gradiente descendente tengamos que dividir por la norma el vector suma obtenido y de esta manera la ecuación 3.4 quedaría de la siguiente forma:

$$y_{k+1} = \exp_{y_k}(\varepsilon \sum_i \vec{v}_{ki}) = \exp_{y_k}(\varepsilon \|\vec{v}_k\| \frac{\sum_i \vec{v}_{ki}}{\|\vec{v}_k\|}),$$

donde denotamos $\vec{v}_k = \sum_i \vec{v}_{ki}$.

Esto quiere decir que para poder usar la expresión de la geodésica descrita anteriormente y a la vez aplicar el algoritmo del gradiente descendente, tenemos que elegir $\varepsilon = \varepsilon \|\vec{v}_k\|$, es decir, dependiente de k .

Por tanto, una de las diferencias que presentará este algoritmo con respecto al anterior es que tendremos que ir variando el ε a medida que aumentamos las iteraciones.

Veamos a continuación, para este caso, el algoritmo propuesto, los detalles paso por paso y los resultados que se obtienen.

Algoritmo.

Algoritmo 2 MEDIA INTRÍNSECA EN LA ESFERA.

Entrada: Conjunto de puntos $\{P_1, \dots, P_n\}$ de la esfera, ε y *Error*.

Salida: Punto medio M .

1. $k \leftarrow 1$,
 2. $M_1 \leftarrow P_1$.
PASO 1 Calcular los elementos de la geodésica que une los puntos M_k y P_i , es decir, con punto inicial M_k y dirección \vec{v}_{ki} :
 $\gamma_{ki}(t) = \cos(t)M_k + \sin(t)\vec{v}_{ki}$, $t \in [0, t_{f_{ki}}]$.
 3. **para todo** $i = 1, \dots, n$ **hacer**
 4. **1.** Calcular \vec{v}_{ki} :
 5. Calcular plano π generado por los puntos M_k y P_i .
 6. Calcular vector \vec{v} contenido en π que es ortogonal al vector \vec{M}_k .
 7. $\vec{v}_{ki} \leftarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
 8. **2.** Calcular $t_{f_{ki}}$ tal que $\gamma_{ki}(t_{f_{ki}}) = P_i$.
 9. **fin para**
 10. **PASO 2** Calcular vector de la nueva dirección.
 11. $\vec{v} \leftarrow \sum_{i=1}^n \vec{v}_{ki}$.
 12. $\vec{v}_k \leftarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
 13. **PASO 3** Calcular nuevo candidato a media, M_{k+1} :
 14. Geodésica en la nueva dirección \vec{v}_k : $\gamma_k(t) = \cos(t)M_k + \sin(t)\vec{v}_k$.
 15. $M_{k+1} \leftarrow \gamma_k(\varepsilon)$.
 16. **PASO 4** Criterio de parada.
 17. **si** $d(M_k, M_{k+1}) = \cos^{-1} \left(\frac{M_k M_{k+1}}{\|M_k\| \|M_{k+1}\|} \right) < \textit{Error}$ **entonces**
 18. **devolver** $M \leftarrow M_{k+1}$.
 19. **si no**
 20. $k \leftarrow k + 1$,
 21. $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$,
 22. Volver al **PASO 1**.
 23. **fin si**
-

Método Algorítmico.

Consideraremos los siguientes parámetros del algoritmo: $\{P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (0, 0, 1)\}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ y $Error = 0.1$ (10 %). Además iniciaremos $k = 1$ y el primer candidato a media será $M_1 = P_1 = (1, 0, 0)$.

PASO 1: ($k = 1$) Calculamos los elementos de la geodésica con punto inicial M_1 y dirección \vec{v}_{1i} para cada $i = 1, 2, 3$:

$$\gamma_{1i}(t) = \cos(t)M_1 + \sin(t)\vec{v}_{1i}, \quad t \in [0, t_{f_{1i}}].$$

($i = 1$) : Geodésica: $\gamma_{11}(t) = \cos(t)M_1 + \sin(t)\vec{v}_{11}$, $t \in [0, t_{f_{11}}]$.

Como $M_1 = P_1$, la geodésica que une un punto con él mismo se reduce a ese punto: $\gamma_{11} = (1, 0, 0)$.

Por tanto: $\vec{v}_{11} = (0, 0, 0)$ y $t_{f_{11}} = 0$.

($i = 2$) : Geodésica: $\gamma_{12}(t) = \cos(t)M_1 + \sin(t)\vec{v}_{12}$, $t \in [0, t_{f_{12}}]$.

• Cálculo de \vec{v}_{12} :

◦ Calculamos el plano generado por los puntos M_1 y P_2 :

$$\pi \equiv \lambda M_1 + \mu P_2 = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) = (\lambda, \mu, 0).$$

◦ Calculamos el vector $\vec{v} \in \pi$ ortogonal al vector \vec{M}_1 :

$$\vec{v} \cdot \vec{M}_1 = (\lambda, \mu, 0)(1, 0, 0) = \lambda = 0.$$

Por tanto, $\vec{v} = (0, \mu, 0)$.

◦ Normalizar \vec{v} :

$$\vec{v}_{12} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, 1, 0).$$

• Cálculo de $t_{f_{12}}$ tal que $\gamma_{12}(t_{f_{12}}) = P_2$:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(t_{f_{12}}) &= \cos(t_{f_{12}})M_1 + \sin(t_{f_{12}})\vec{v}_{12} = \\ &= \cos(t_{f_{12}})(1, 0, 0) + \sin(t_{f_{12}})(0, 1, 0) = \\ &= (0, 1, 0) = P_2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow t_{f_{12}} = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, la expresión de la geodésica que une M_1 y P_2 es:

$$\gamma_{12}(t) = \cos(t)(1, 0, 0) + \sin(t)(0, 1, 0), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

($i = 3$) : Geodésica: $\gamma_{13}(t) = \cos(t)M_1 + \sin(t)\vec{v}_{13}$, $t \in [0, t_{f13}]$.

• Cálculo de \vec{v}_{13} :

◦ Calculamos el plano generado por los puntos M_1 y P_3 :

$$\pi \equiv \lambda M_1 + \mu P_3 = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1) = (\lambda, 0, \mu).$$

◦ Calculamos el vector $\vec{v} \in \pi$ ortogonal al vector \vec{M}_1 :

$$\vec{v} \cdot \vec{M}_1 = (\lambda, 0, \mu)(1, 0, 0) = \lambda = 0.$$

Por tanto, $\vec{v} = (0, 0, \mu)$.

◦ Normalizar \vec{v} :

$$\vec{v}_{13} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, 0, 1).$$

• Cálculo de t_{f13} tal que $\gamma_{13}(t_{f13}) = P_3$:

$$\begin{aligned} \gamma_{13}(t_{f13}) &= \cos(t_{f13})M_1 + \sin(t_{f13})\vec{v}_{13} = \\ &= \cos(t_{f13})(1, 0, 0) + \sin(t_{f13})(0, 0, 1) = \\ &= (0, 0, 1) = P_3 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(t) &= 0 \\ \sin(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{f13} = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, la expresión de la geodésica que une M_1 y P_3 es:

$$\gamma_{13}(t) = \cos(t)(1, 0, 0) + \sin(t)(0, 0, 1), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

PASO 2: ($k = 1$) Calculamos el vector $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \vec{v}_{1i}$ y lo normalizamos para obtener el nuevo vector dirección \vec{v}_1 :

$$\vec{v} = \vec{v}_{11} + \vec{v}_{12} + \vec{v}_{13} = (0, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (0, 1, 1),$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

PASO 3: ($k = 1$) Construimos la geodésica γ_1 , con punto inicial M_1 y en la nueva dirección \vec{v}_1 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_2 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \cos(t)M_1 + \sin(t)\vec{v}_1 = \cos(t)(1, 0, 0) + \sin(t)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \left(\cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right), \\ M_2 &= \gamma_1(\varepsilon) = \gamma_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 1$) Criterio de parada: $d(M_1, M_2) < Error$?

$$\begin{aligned}d(M_1, M_2) &= \cos^{-1}\left(\frac{M_1 M_2}{\|M_1\| \|M_2\|}\right) = \cos^{-1}\left((1, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 0.7854 < 0.1?\end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 2$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{8}$ y volvemos al **PASO 1**.

PASO 1: ($k = 2$) Calculamos los elementos de la geodésica con punto inicial M_2 y dirección \vec{v}_{2i} para cada $i = 1, 2, 3$:

$$\gamma_{2i}(t) = \cos(t)M_2 + \sin(t)\vec{v}_{2i}, \quad t \in [0, t_{f_{2i}}].$$

($i = 1$) : Geodésica: $\gamma_{21}(t) = \cos(t)M_2 + \sin(t)\vec{v}_{21}$, $t \in [0, t_{f_{21}}]$.

• Cálculo de \vec{v}_{21} :

◦ Calculamos el plano generado por los puntos M_2 y P_1 :

$$\pi \equiv \lambda M_2 + \mu P_1 = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mu(1, 0, 0) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \mu, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right).$$

◦ Calculamos el vector $\vec{v} \in \pi$ ortogonal al vector \vec{M}_2 :

$$\vec{v} \cdot \vec{M}_2 = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \mu, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} =$$

$$= \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\sqrt{2}\lambda.$$

Por tanto, $\vec{v} = (\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}) = (-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$.

o Normalizar \vec{v} :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{\lambda^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1,$$

$$\vec{v}_{21} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

• Cálculo de $t_{f_{21}}$ tal que $\gamma_{21}(t_{f_{21}}) = P_1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{21}(t_{f_{21}}) &= \cos(t_{f_{21}})M_2 + \text{sen}(t_{f_{21}})\vec{v}_{21} = \\ &= \cos(t_{f_{21}}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \text{sen}(t_{f_{21}}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \\ &= (1, 0, 0) = P_1 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t) &= 1 \\ \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad t_{f_{21}} = \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, la expresión de la geodésica que une M_2 y P_1 es:

$$\gamma_{21}(t) = \cos(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \sin(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

($i = 2$) : Geodésica: $\gamma_{22}(t) = \cos(t)M_2 + \sin(t)\vec{v}_{22}$, $t \in [0, t_{f_{22}}]$.

• Cálculo de \vec{v}_{22} :

o Calculamos el plano generado por los puntos M_2 y P_2 :

$$\pi \equiv \lambda M_2 + \mu P_2 = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mu (0, 1, 0) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2} + \mu, \frac{\lambda}{2} \right).$$

o Calculamos el vector $\vec{v} \in \pi$ ortogonal a \vec{M}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{M}_2 &= \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2} + \mu, \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4} = \\ &= \lambda + \frac{\mu}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -2\lambda. \end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{v} = (\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2} - 2\lambda, \frac{\lambda}{2}) = (\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, -\frac{3\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$.

◦ Normalizar \vec{v} :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + \frac{9\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{3\lambda^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{v}_{22} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right).$$

• Cálculo de $t_{f_{22}}$ tal que $\gamma_{22}(t_{f_{22}}) = P_2$:

$$\begin{aligned} \gamma_{22}(t_{f_{22}}) &= \cos(t_{f_{22}})M_2 + \sin(t_{f_{22}})\vec{v}_{22} = \\ &= \cos(t_{f_{22}}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \sin(t_{f_{22}}) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = (0, 1, 0) = P_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) &= 1 \\ \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{f_{22}} = \frac{\pi}{3}.$$

Por tanto, la expresión de la geodésica que une M_2 y P_2 es:

$$\gamma_{22}(t) = \cos(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \sin(t) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

($i = 3$): Geodésica: $\gamma_{23}(t) = \cos(t)M_2 + \sin(t)\vec{v}_{23}$, $t \in [0, t_{f_{23}}]$.

• Cálculo de \vec{v}_{23} :

◦ Calculamos el plano generado por los puntos M_2 y P_3 :

$$\pi \equiv \lambda M_2 + \mu P_3 = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mu (0, 0, 1) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + \mu \right).$$

◦ Calculamos el vector $\vec{v} \in \pi$ ortogonal al vector \vec{M}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{M}_2 &= \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} = \\ &= \lambda + \frac{\mu}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -2\lambda. \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } \vec{v} = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - 2\lambda \right) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{2}, -\frac{3\lambda}{2} \right).$$

◦ Normalizar \vec{v} :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9\lambda^2}{4}} = \sqrt{3\lambda^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{v}_{23} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

• Cálculo de $t_{f_{23}}$ tal que $\gamma_{23}(t_{f_{23}}) = P_3$:

$$\begin{aligned} \gamma_{23}(t_{f_{23}}) &= \cos(t_{f_{23}})M_2 + \text{sen}(t_{f_{23}})\vec{v}_{23} = \\ &= \cos(t_{f_{23}}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \text{sen}(t_{f_{23}}) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (0, 0, 1) = P_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{f_{23}} = \frac{\pi}{3}.$$

Por tanto, la expresión de la geodésica que une M_2 y P_3 es:

$$\gamma_{23}(t) = \cos(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \sin(t) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

PASO 2: ($k = 2$) Calculamos el vector $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \vec{v}_{2i}$ y lo normalizamos para obtener el nuevo vector dirección \vec{v}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22} + \vec{v}_{23} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{6}}, \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right), \\ \vec{v}_2 &= \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

PASO 3: ($k = 2$) Construimos la geodésica γ_2 , con punto inicial M_2 y en la nueva dirección \vec{v}_2 y obtenemos el nuevo candidato a media, M_3 , evaluando en $t = \varepsilon = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(t) &= \cos(t)M_2 + \sin(t)\vec{v}_2 = \cos(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \sin(t) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) - \sin(t)), \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)), \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)) \right), \\
 M_3 &= \gamma_2(\varepsilon) = \gamma_2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{8}) - \sin(\frac{\pi}{8})), \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{8})), \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{8})) \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0.923 - 0.382), \frac{1}{2}(0.923 + 0.382), \frac{1}{2}(0.923 + 0.382) \right) = \\
 &= \left(\frac{0.541}{\sqrt{2}}, \frac{1.306}{2}, \frac{1.306}{2} \right) = (0.382, 0.653, 0.653).
 \end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 2$) Criterio de parada: ¿ $d(M_2, M_3) < Error$?

$$\begin{aligned}
 d(M_2, M_3) &= \cos^{-1} \left(\frac{M_2 M_3}{\|M_2\| \|M_3\|} \right) = \\
 &= \cos^{-1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) (0.382, 0.653, 0.653) \right) = \cos^{-1}(0.923) = \\
 &= 0.392 < 0.1?
 \end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 3$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{16}$ y volvemos al **PASO 1**.

Para $k = 3$ y $k = 4$ vamos a hacerlo más resumido:

PASO 1: ($k = 3$) Los elementos de la geodésica con punto inicial M_3 y dirección \vec{v}_{3i} para cada $i = 1, 2, 3$ son los siguientes:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
\vec{v}_{3i}	(0.92, -0.27, -0.27)	(-0.33, 0.76, -0.56)	(-0.33, -0.56, 0.76)
$t_{f_{3i}}$	1.178	0.858	0.858

Cuadro 5.1: Elementos geodésicas γ_{3i} para $i = 1, 2, 3$.

PASO 2: ($k = 3$) El nuevo vector dirección \vec{v}_3 normalizado es:

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0.923, -0.270, -0.270).$$

PASO 3: ($k = 3$) La geodésica γ_3 viene dada por los elementos M_3 y \vec{v}_3 y el nuevo candidato a media, M_4 es:

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) &= \cos(t)M_3 + \sin(t)\vec{v}_3, \\ M_4 &= \gamma_3(\varepsilon) = \gamma_3\left(\frac{\pi}{16}\right) = (0.555, 0.587, 0.587). \end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 3$) Criterio de parada: ¿ $d(M_3, M_4) < Error$?

$$\begin{aligned} d(M_3, M_4) &= \cos^{-1}\left(\frac{M_3 M_4}{\|M_3\| \|M_4\|}\right) = \\ &= \cos^{-1}((0.382, 0.653, 0.653)(0.555, 0.587, 0.587)) = \\ &= 0.1964 < 0.1? \end{aligned}$$

NO, entonces $k = k + 1 = 4$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{32}$ y volvemos al **PASO 1**.

PASO 1: ($k = 4$) Los elementos de la geodésica con punto inicial M_4 y dirección \vec{v}_{4i} para cada $i = 1, 2, 3$ son los siguientes:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
\vec{v}_{4i}	(0.83, -0.39, -0.39)	(-0.40, 0.81, -0.43)	(-0.40, 0.43, 0.81)
$t_{f_{4i}}$	0.981	0.942	0.942

Cuadro 5.2: Elementos geodésicas γ_{4i} para $i = 1, 2, 3$.

PASO 2: ($k = 4$) El nuevo vector dirección \vec{v}_4 normalizado es:

$$\vec{v}_4 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0.831, -0.392, -0.392).$$

PASO 3: ($k = 4$) La geodésica γ_4 viene dada por los elementos M_4 y \vec{v}_4 y el nuevo candidato a media, M_5 es:

$$\begin{aligned}\gamma_4(t) &= \cos(t)M_4 + \sin(t)\vec{v}_4, \\ M_5 &= \gamma_4(\varepsilon) = \gamma_4\left(\frac{\pi}{32}\right) = (0.634, 0.546, 0.546).\end{aligned}$$

PASO 4: ($k = 4$) Criterio de parada: ¿ $d(M_4, M_5) < Error$?

$$\begin{aligned}d(M_4, M_5) &= \cos^{-1}\left(\frac{M_4 M_5}{\|M_4\| \|M_5\|}\right) = \\ &= \cos^{-1}((0.555, 0.587, 0.587)(0.634, 0.546, 0.546)) = \\ &= 0.0984 < 0.1?\end{aligned}$$

SI, el algoritmo se detiene y el punto medio resultante es:
 $M_5 = (0.634, 0.546, 0.546)$.

Resultados.

En la siguiente Figura 5.2 podemos observar los resultados obtenidos en cada una de las iteraciones del Algoritmo 2 para este ejemplo. En cada una de ellas podemos ver, en negro, las geodésicas que unen cada par de puntos y en magenta, la geodésica obtenida dado el punto medio del que partimos y la nueva dirección. Esta geodésica es la que nos hace obtener el siguiente candidato a media, que es el que podemos ver en rojo. El punto azul representa nuestro punto medio real.

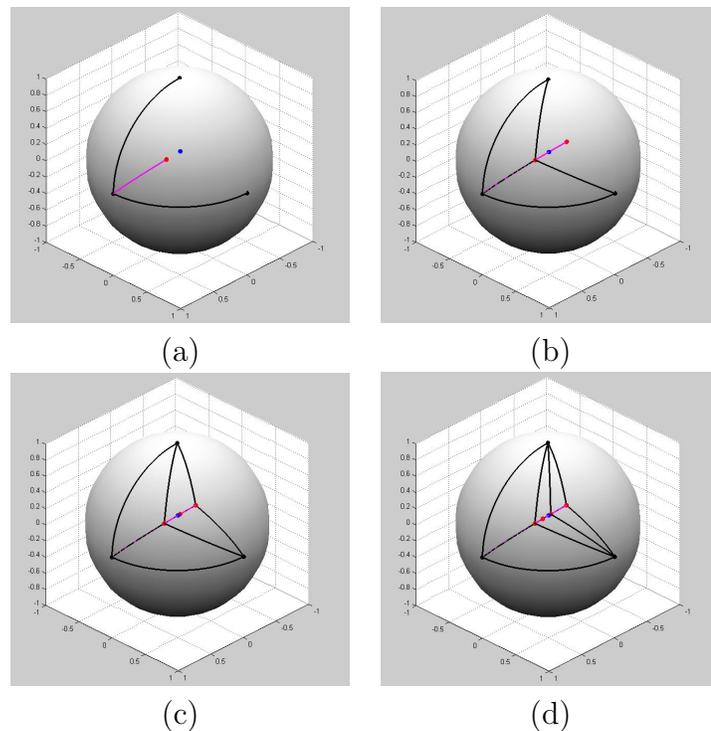


Figura 5.2: (a) Iteración $k = 1$ del algoritmo, (b) Iteración $k = 2$ del algoritmo, (c) Iteración $k = 3$ del algoritmo, (d) Iteración $k = 4$ del algoritmo.

5.2. Media en el espacio de formas.

En este apartado vamos a explicar el método que proponemos para obtener la media muestral intrínseca entre n formas (curvas planas) del espacio de formas, siguiendo el algoritmo de gradiente descendente, de manera similar a la que se ha aplicado en los dos casos sencillos de los apartados anteriores.

Así pues, dadas n curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ del espacio de formas, empezaremos considerando una de ellas α_1 como candidata a curva media α_M^1 y calcularemos, siguiendo el procedimiento de la sección 4.3, cada una de las geodésicas que une α_M^1 con α_i , $i = 1, \dots, n$.

A continuación, tal y como se explica también en la sección 4.3, consideramos los vectores tangentes (v_{1i}^1, v_{2i}^1) a cada una de estas geodésicas en el punto inicial α_M^1 . Después calculamos el vector media de todos estos vectores, (g_1^1, g_2^1) y construimos la geodésica γ_1 que parte de α_M^1 en la dirección de este vector. Nos desplazamos una distancia ε a lo largo de esta geodésica y el punto (curva) obtenido será el nuevo candidato a media α_M^2 .

Calculamos la distancia de α_M^1 a α_M^2 y si esta distancia es menor que el error fijado, entonces α_M^2 será la curva media buscada.

En caso contrario calculamos las geodésicas desde α_M^2 a α_i , $i = 1, \dots, n$, y volvemos a calcular los vectores tangentes (v_{1i}^2, v_{2i}^2) a cada una de estas geodésicas en el punto inicial α_M^2 . Calculamos de nuevo el vector media de todos estos vectores, (g_1^2, g_2^2) , y construimos la geodésica γ_2 que parte de α_M^2 en la dirección de este vector. Volvemos a desplazarnos una distancia ε a lo largo de esta geodésica γ_2 y el punto (curva) obtenido será el nuevo candidato a media α_M^3 .

Calculamos la distancia de α_M^2 a α_M^3 y si esta distancia es menor que el error fijado, entonces α_M^3 será la curva media buscada. Y así sucesivamente hasta encontrar el candidato a curva media.

Cabe destacar que, como se ha mencionado en el Capítulo 4, cualquier implementación computacional requerirá de una discretización concreta. Como nuestra elección es considerar curvas digitales que corresponden a contornos de formas, todas las curvas consideradas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y cada candidato a curva

media $\alpha_M^1, \alpha_M^2, \dots$ se discretizan utilizando la misma cantidad de puntos. Además estos puntos serán equidistantes entre sí.

Para reflejar la idea de la obtención de una forma media dados un conjunto de formas en nuestro Espacio Forma, consideraremos el ejemplo de calcular la media entre una circunferencia y una elipse. Para este ejemplo sencillo es fácil intuir que forma será la resultante de aplicar el algoritmo, ya que solo tenemos dos formas iniciales.

El primer parámetro a tener en cuenta para aplicar el algoritmo que sigue será la cantidad de puntos igualmente espaciados para cada forma. En este ejemplo consideraremos $num\ points = 50$. La discretización obtenida para este ejemplo la podemos ver en la siguiente figura:

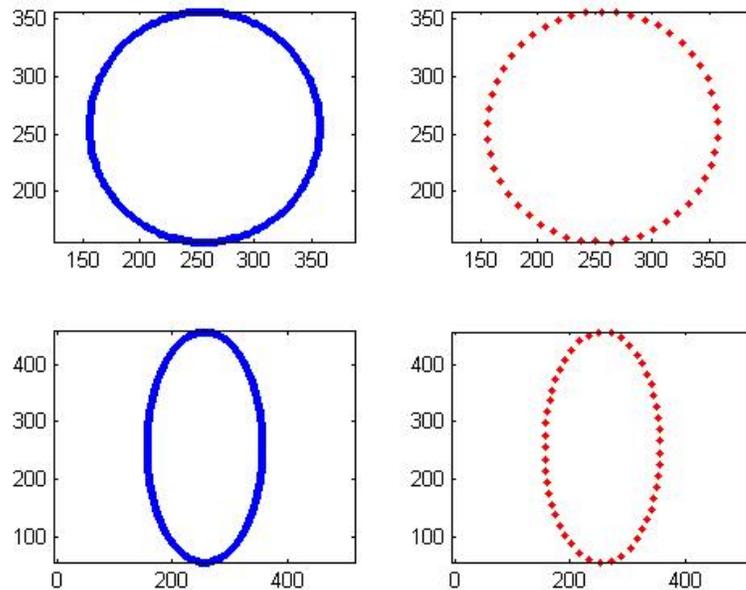


Figura 5.3: A la izquierda se muestran las formas y a la derecha la discretización elegida, es decir, los 50 puntos igualmente espaciados de las dos formas.

Veamos a continuación el algoritmo:

5.2.1. Algoritmo.

Algoritmo 3 MEDIA INTRÍNSECA EN EL ESPACIO DE FORMAS.

Entrada: Conjunto de formas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, *numpunts*, ε y *Error*.

Salida: Forma media $M = \alpha_M = (e_M, f_M)$.

1. *numgeointer* $\leftarrow 5$, *numparam* $\leftarrow 10$.

PASO 1: Calcular representaciones de las formas.

2. **para todo** $i = 1, \dots, n$ **hacer**

3. Calcular $\theta_{\alpha_i}(t)$,

4. Calcular $(e_i, f_i) = \left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta_{\alpha_i}(t)}{2}\right), \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta_{\alpha_i}(t)}{2}\right) \right)$.

5. **fin para**

6. $k \leftarrow 1$,

7. $M_1 = \alpha_M^1 = (e_M^1, f_M^1) \leftarrow (e_1, f_1) = \alpha_1$.

PASO 2: Calcular elementos de las geodésicas: distancias y vectores tangentes.

8. **para todo** $i = 1, \dots, n$ **hacer**

9. **1.** Calcular distancia entre la forma media $\alpha_M^k = (e_M^k, f_M^k)$ y cada una de las formas iniciales $\alpha_i = (e_i, f_i)$:

10. **para todo** $j = 1, \dots, \text{numparam}$ **hacer**

11. $A_{ij}^k \leftarrow [\langle e_M^k, e_i \rangle, \langle e_M^k, f_i \rangle; \langle f_M^k, e_i \rangle, \langle f_M^k, f_i \rangle]$,

12. Calcular valores singulares λ_{1ij}^k y λ_{2ij}^k de A_{ij}^k ,

13. $\psi_{1ij}^k \leftarrow \cos^{-1}(\lambda_{1ij}^k)$, $\psi_{2ij}^k \leftarrow \cos^{-1}(\lambda_{2ij}^k)$,

14. $dm_{ij}^k \leftarrow \sqrt{\psi_{1ij}^k{}^2 + \psi_{2ij}^k{}^2}$,

15. Calcular $(\hat{e}_{M_{ij}}^k, \hat{f}_{M_{ij}}^k)$ y $(\hat{e}_{ij}^k, \hat{f}_{ij}^k)$.

16. **fin para**

17. $dm_i^k \leftarrow \min_j d_{ij}^k$, $p_i^k \leftarrow \{j \mid dm_i^k = d_{ij}^k\}$,

18. $(\hat{e}_{M_i}^k, \hat{f}_{M_i}^k) \leftarrow (\hat{e}_{M_{ip_i^k}}^k, \hat{f}_{M_{ip_i^k}}^k)$, $(\hat{e}_i^k, \hat{f}_i^k) \leftarrow (\hat{e}_{ip_i^k}^k, \hat{f}_{ip_i^k}^k)$,

19. $\psi_{1i}^k \leftarrow \psi_{1ip_i^k}^k$, $\psi_{2i}^k \leftarrow \psi_{2ip_i^k}^k$.

20. **2.** Calcular vector tangente $v_i^k = (v_{1i}^k, v_{2i}^k)$ entre $(\hat{e}_{M_i}^k, \hat{f}_{M_i}^k)$ y $(\hat{e}_i^k, \hat{f}_i^k)$:

21. $v_{1i}^k \leftarrow \frac{\psi_{1i}^k}{\sin(\psi_{1i}^k)} (\hat{e}_i^k - \cos(\psi_{1i}^k) \hat{e}_{M_i}^k)$,

22. $v_{2i}^k \leftarrow \frac{\psi_{2i}^k}{\sin(\psi_{2i}^k)} (\hat{f}_i^k - \cos(\psi_{2i}^k) \hat{f}_{M_i}^k)$.

23. **fin para**

Algoritmo 3 MEDIA INTRÍNSECA EN EL ESPACIO DE FORMAS.**Entrada:** Conjunto de formas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $numpunts$, ε y $Error$.**Salida:** Forma media $M = \alpha_M = (e_M, f_M)$.**PASO 3:** Calcular el vector media.

24. $g_1^k \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{1i}^k$.

25. $g_2^k \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{2i}^k$.

PASO 4: Construir geodésica en la nueva dirección:

$$\gamma_k(t) = (e_M^{k+1}(t), f_M^{k+1}(t)).$$

26. $A \leftarrow \frac{1}{numpunts} (e_M^k, f_M^k)^T (g_1^k, g_2^k)$,

27. $S \leftarrow \frac{1}{numpunts} (g_1^k, g_2^k)^T (g_1^k, g_2^k)$,

28. $(e_M^{k+1}, f_M^{k+1}) \leftarrow \gamma_k(\varepsilon) = (e_M^k, f_M^k, g_1^k, g_2^k) \exp^{\varepsilon[A, -S; Id_2, A]} Id_{4 \times 2} \exp^{-A\varepsilon}$,

29. $M_{k+1} = \alpha_M^{k+1} \leftarrow (e_M^{k+1}, f_M^{k+1})$.

PASO 5: Criterio de parada.30. **si** $d(\alpha_M^k, \alpha_M^{k+1}) < Error$ **entonces**31. **devolver** $M = \alpha_M \leftarrow M_{k+1} = \alpha_M^{k+1}$.32. **si no**33. $k \leftarrow k + 1$,34. Volver al **PASO 2**.35. **fin si****5.2.2. Método Algorítmico.**

En este caso, dado que se trabaja con funciones discretizadas según el número de puntos elegido, no podemos dar un seguimiento detallado de cada uno de los cálculos del algoritmo. A pesar de esto vamos a dar algunos de los resultados obtenidos al aplicar el Algoritmo 3 considerando los siguientes parámetros: $\{\alpha_1 = Circunferencia, \alpha_2 = Elipse\}$, $numpunts = 50$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $Error = 0.01$ (1%). Además iniciaremos $numgeointer = 5$, $numparam = 10$, $k = 1$ y el primer candidato a media será $M_1 = \alpha_M^1 = \alpha_1$.

PASO 2: ($k = 1$) Calcular distancias, geodésicas y vectores tangentes:

($i = 1$): • Distancia entre $\alpha_M^1 = \alpha_1$ y α_1 :

$$dm_{1j}^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$dm_1^1 = \min_j d_{1j}^1 = 0,$$

$$p_1^1 = 1,$$

$$\psi_{11}^1 = 0,$$

$$\psi_{21}^1 = 0.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_1^1\| = 0$.

($i = 2$): • Distancia entre $\alpha_M^1 = \alpha_1$ y α_2 :

$$dm_{2j}^1 = (0.24, 0.26, 0.27, 0.27, 0.26, 0.26, 0.26, 0.27, 0.27, 0.26),$$

$$dm_2^1 = \min_j d_{2j}^1 = 0.243,$$

$$p_2^1 = 1,$$

$$\psi_{12}^1 = 0.172,$$

$$\psi_{22}^1 = 0.171.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_2^1\| = 0.242$.

PASO 3: ($k = 1$) Cálculo vector media: (g_1^1, g_2^1) .

PASO 4: ($k = 1$)

- Construir geodésica que parte de α_M^1 en dirección (g_1^1, g_2^1) .
- Cálculo siguiente candidato a media: $\gamma_1(\varepsilon) = \alpha_M^2$.

PASO 5: ($k = 1$) Criterio de parada: $d(\alpha_M^1, \alpha_M^2) < Error?$

$$d(\alpha_M^1, \alpha_M^2) = 0.060 < 0.01?$$

NO, entonces $k = k + 1 = 2$ y volvemos al **PASO 2**.

PASO 2: ($k = 2$) Calcular distancias, geodésicas y vectores tangentes:

($i = 1$) : • Distancia entre α_M^2 y α_1 :

$$dm_{1j}^2 = (0.06, 0.08, 0.09, 0.10, 0.09, 0.09, 0.08, 0.09, 0.10, 0.09),$$

$$dm_1^2 = \min_j d_{1j}^2 = 0.060,$$

$$p_1^2 = 1,$$

$$\psi_{11}^2 = 0.043,$$

$$\psi_{21}^2 = 0.042.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_1^2\| = 0.060$.

($i = 2$) : • Distancia entre α_M^2 y α_2 :

$$dm_{2j}^2 = (0.19, 0.27, 0.31, 0.30, 0.25, 0.22, 0.27, 0.32, 0.30, 0.25),$$

$$dm_2^2 = \min_j d_{2j}^2 = 0.191,$$

$$p_2^2 = 1,$$

$$\psi_{12}^2 = 0.135,$$

$$\psi_{22}^2 = 0.134.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_2^2\| = 0.190$.

PASO 3: ($k = 2$) Cálculo vector media: (g_1^2, g_2^2) .

PASO 4: ($k = 2$)

- Construir geodésica que parte de α_M^2 en dirección (g_1^2, g_2^2) .
- Cálculo siguiente candidato a media: $\gamma_2(\varepsilon) = \alpha_M^3$.

PASO 5: ($k = 2$) Criterio de parada: $d(\alpha_M^2, \alpha_M^3) < Error?$

$$d(\alpha_M^2, \alpha_M^3) = 0.033 < 0.01?$$

NO, entonces $k = k + 1 = 3$ y volvemos al **PASO 2**.

PASO 2: ($k = 3$) Calcular distancias, geodésicas y vectores tangentes:

($i = 1$): • Distancia entre α_M^3 y α_1 :

$$dm_{1j}^3 = (0.09, 0.11, 0.12, 0.13, 0.12, 0.11, 0.11, 0.12, 0.13, 0.12),$$

$$dm_1^3 = \min_j d_{1j}^3 = 0.094,$$

$$p_1^3 = 1,$$

$$\psi_{11}^3 = 0.067,$$

$$\psi_{21}^3 = 0.066.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_1^3\| = 0.094$.

($i = 2$): • Distancia entre α_M^3 y α_2 :

$$dm_{2j}^3 = (0.16, 0.28, 0.34, 0.33, 0.25, 0.19, 0.28, 0.34, 0.33, 0.25),$$

$$dm_2^3 = \min_j d_{2j}^3 = 0.161,$$

$$p_2^3 = 1,$$

$$\psi_{12}^3 = 0.114,$$

$$\psi_{22}^3 = 0.114.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_2^3\| = 0.161$.

PASO 3: ($k = 3$) Cálculo vector media: (g_1^3, g_2^3) .

PASO 4: ($k = 3$)

- Construir geodésica que parte de α_M^3 en dirección (g_1^3, g_2^3) .
- Cálculo siguiente candidato a media: $\gamma_3(\varepsilon) = \alpha_M^4$.

PASO 5: ($k = 3$) Criterio de parada: $\iota d(\alpha_M^3, \alpha_M^4) < Error?$

$$d(\alpha_M^3, \alpha_M^4) = 0.018 < 0.01?$$

NO, entonces $k = k + 1 = 4$ y volvemos al **PASO 2**.

PASO 2: ($k = 4$) Calcular distancias, geodésicas y vectores tangentes:

($i = 1$) : • Distancia entre α_M^4 y α_1 :

$$dm_{1j}^4 = (0.11, 0.12, 0.14, 0.15, 0.14, 0.13, 0.13, 0.14, 0.15, 0.14),$$

$$dm_1^4 = \min_j d_{1j}^4 = 0.112,$$

$$p_1^4 = 1,$$

$$\psi_{11}^4 = 0.080,$$

$$\psi_{21}^4 = 0.079.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_1^4\| = 0.112$.

($i = 2$) : • Distancia entre α_M^4 y α_2 :

$$dm_{2j}^4 = (0.15, 0.28, 0.36, 0.34, 0.25, 0.18, 0.28, 0.36, 0.34, 0.25),$$

$$dm_2^4 = \min_j d_{2j}^4 = 0.146,$$

$$p_2^4 = 1,$$

$$\psi_{12}^4 = 0.103,$$

$$\psi_{22}^4 = 0.103.$$

• Norma del vector tangente: $\|v_2^4\| = 0.146$.

PASO 3: ($k = 4$) Cálculo vector media: (g_1^4, g_2^4) .

PASO 4: ($k = 4$)

- Construir geodésica que parte de α_M^4 en dirección (g_1^4, g_2^4) .
- Cálculo siguiente candidato a media: $\gamma_4(\varepsilon) = \alpha_M^5$.

PASO 5: ($k = 4$) Criterio de parada: $d(\alpha_M^4, \alpha_M^5) < Error?$

$$d(\alpha_M^4, \alpha_M^5) = 0.009 < 0.01?$$

SI, el algoritmo se detiene y la forma media obtenida es: $M = \alpha_M = \alpha_M^5$.

5.2.3. Resultados.

En la siguiente Figura 5.4 podemos observar, en rojo, las formas medias obtenidas en cada una de las iteraciones del Algoritmo 2. Las formas en azul son las curvas iniciales de las que queríamos obtener la media y la forma media obtenida está resaltada en negro.

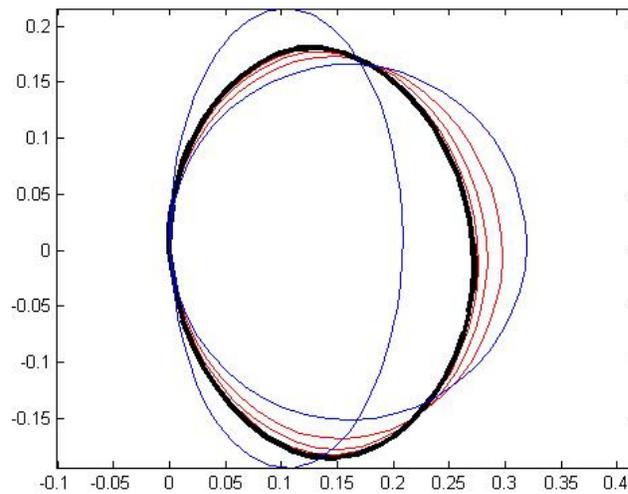


Figura 5.4: Forma media entre una circunferencia y una elipse, considerando, $num\ puncts = 50$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $Error = 0.01$.

5.2.4. Otros resultados.

Si aplicáramos el Algoritmo 3 de la misma manera que en el caso anterior pero considerando $Error = 0.001$, obtenemos los siguientes resultados:

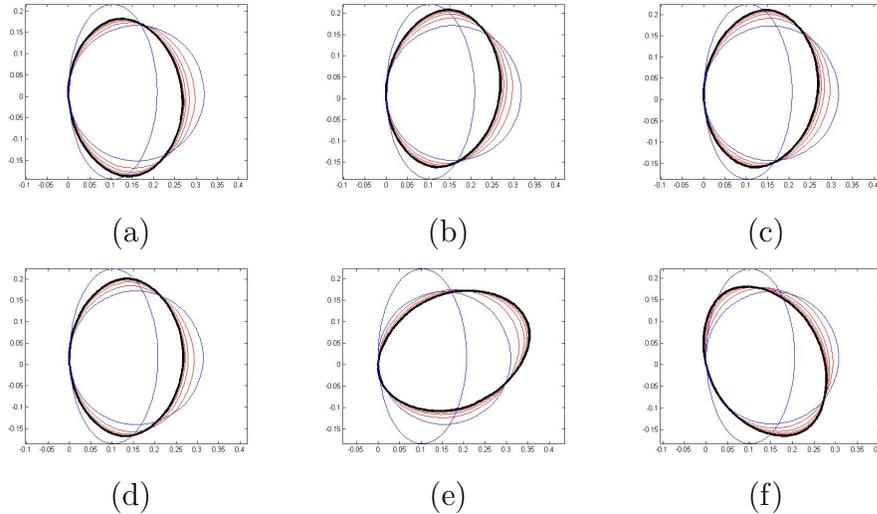


Figura 5.5: Formas medias considerando diferentes cantidades de puntos. En (a) 50, en (b) 100, en (c) 200, en (d) 300, en (e) 400 y en (f) 500.

Algunos de los resultados numéricos obtenidos son:

<i>Iteración</i>	dm_1^k	dm_2^k	$\ v_1^k\ $	$\ v_2^k\ $
$k = 1$	0	0.2764	0	0.2756
$k = 2$	0.0689	0.2105	0.0687	0.2101
$k = 3$	0.1071	0.1702	0.1067	0.1698
$k = 4$	0.1246	0.1519	0.1243	0.1515
$k = 5$	0.1323	0.1441	0.1319	0.1437
$k = 6$	0.1356	0.1408	0.1352	0.1404
$k = 7$	0.1371	0.1393	0.1367	0.1389

Cuadro 5.3: Algunos resultados numéricos obtenidos para $numpnts = 300$, correspondientes a la Figura 5.5 (d).

Ahora, veamos los resultados para tres formas diferentes. Para ello añadiremos un cuadrado al caso anterior, es decir, aplicaremos el Algoritmo 3 considerando los siguientes parámetros: $\{\alpha_1 = \text{Circunferencia}, \alpha_2 = \text{Elipse}, \alpha_3 = \text{Cuadrado}\}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $\text{Error} = 0.001$, obtenemos los siguientes resultados para las diferentes cantidades de puntos igualmente espaciados.

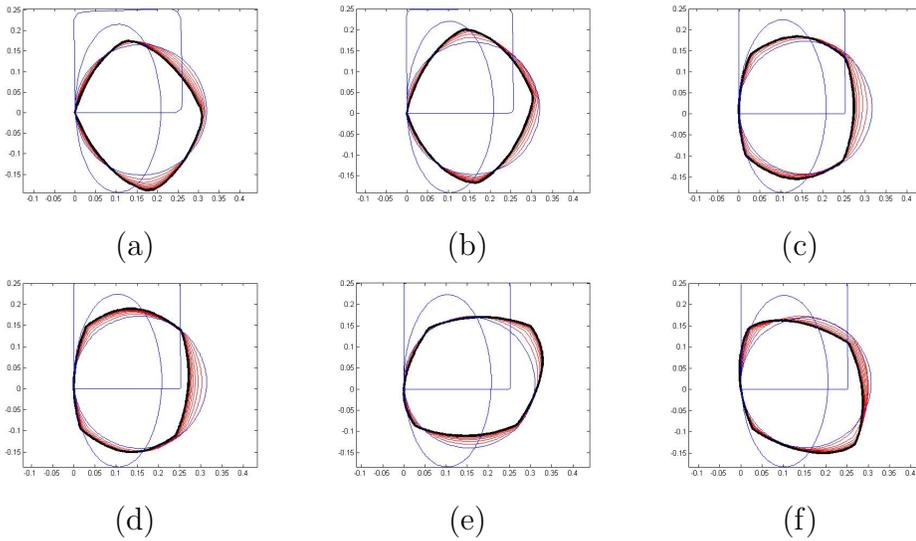


Figura 5.6: Formas medias considerando diferentes cantidades de puntos. En (a) 50, en (b) 100, en (c) 200, en (d) 300, en (e) 400 y en (f) 500.

Algunos de los resultados numéricos obtenidos pueden verse en la siguiente tabla:

<i>Iteración</i>	dm_1^k	dm_2^k	dm_3^k	$\ v_1^k\ $	$\ v_2^k\ $	$\ v_3^k\ $
$k = 1$	0	0.3160	0.3635	0	0.3160	0.3629
$k = 2$	0.0633	0.2843	0.3249	0.0635	0.2844	0.3235
$k = 3$	0.0929	0.2559	0.2904	0.0927	0.2574	0.2894
$k = 4$	0.1218	0.2370	0.2684	0.1212	0.2391	0.2679
$k = 5$	0.1431	0.2231	0.2532	0.1424	0.2253	0.2532
$k = 6$	0.1578	0.2127	0.2431	0.1571	0.2151	0.2434
$k = 7$	0.1680	0.2053	0.2365	0.1673	0.2077	0.2370
$k = 8$	0.1752	0.2004	0.2321	0.1745	0.2027	0.2326
$k = 9$	0.1804	0.1973	0.2288	0.1797	0.1996	0.2295
$k = 10$	0.1841	0.1954	0.2264	0.1833	0.1978	0.2271
$k = 11$	0.1867	0.1944	0.2246	0.1859	0.1967	0.2253
$k = 12$	0.1884	0.1939	0.2232	0.1877	0.1962	0.2239
$k = 13$	0.1896	0.1937	0.2222	0.1889	0.1960	0.2229
$k = 14$	0.1904	0.1937	0.2215	0.1897	0.1960	0.2222

Cuadro 5.4: Algunos resultados numéricos obtenidos para $numpnts = 500$, correspondientes a la Figura 5.6 (f).

Dado que una posible aplicación futura de este algoritmo es aplicarlo a contornos de formas obtenidas a partir de imágenes, vamos a aplicar el Algoritmo 3 para las imágenes de la Figura 5.7, que pertenecen a la base de datos de imágenes MPEG-7 CE-Shape-1.

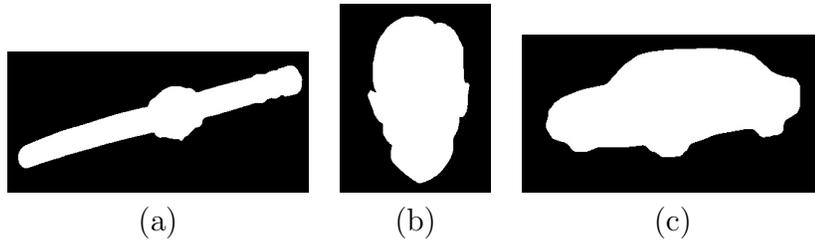


Figura 5.7: Imágenes de la base de datos MPEG-7 CE-Shape-1, en (a) watch8, en (b) face9 y en (c) personalcar7.

Considerando $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $Error = 0.001$, obtenemos los siguientes resultados:

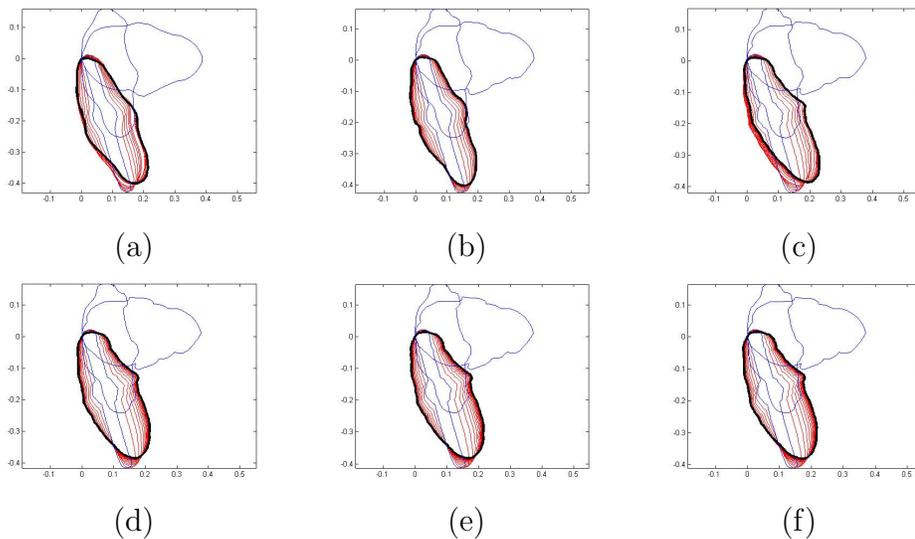


Figura 5.8: Formas medias considerando diferentes cantidades de puntos. En (a) 50, en (b) 100, en (c) 200, en (d) 300, en (e) 400 y en (f) 500.

Algunos de los resultados numéricos obtenidos pueden verse en la siguiente tabla:

<i>Iteración</i>	dm_1^k	dm_2^k	dm_3^k	$\ v_1^k\ $	$\ v_2^k\ $	$\ v_3^k\ $
$k = 1$	0	0.5004	0.4294	0	0.5540	0.4378
$k = 2$	0.0932	0.4303	0.3621	0.0967	0.4824	0.3690
$k = 3$	0.1603	0.3801	0.3163	0.1642	0.4275	0.3217
$k = 4$	0.2089	0.3455	0.2875	0.2120	0.3878	0.2922
$k = 5$	0.2444	0.3218	0.2705	0.2464	0.3596	0.2752
$k = 6$	0.2706	0.3054	0.2606	0.2712	0.3396	0.2658
$k = 7$	0.2898	0.2940	0.2548	0.2904	0.3254	0.2607
$k = 8$	0.3066	0.2611	0.2259	0.3185	0.2963	0.2368
$k = 9$	0.3113	0.2487	0.2110	0.3279	0.2856	0.2236
$k = 10$	0.3097	0.2469	0.2048	0.3277	0.2844	0.2172
$k = 11$	0.3055	0.2492	0.2033	0.3238	0.2870	0.2151
$k = 12$	0.3006	0.2524	0.2043	0.3190	0.2905	0.2154
$k = 13$	0.2961	0.2553	0.2062	0.3143	0.2937	0.2168
$k = 14$	0.2923	0.2575	0.2084	0.3104	0.2961	0.2186
$k = 15$	0.2893	0.2591	0.2104	0.3073	0.2979	0.2204
$k = 16$	0.2871	0.2602	0.2120	0.3050	0.2990	0.2218
$k = 17$	0.2855	0.2609	0.2133	0.3034	0.2997	0.2230
$k = 18$	0.2844	0.2613	0.2141	0.3023	0.3002	0.2238

Cuadro 5.5: Algunos resultados numéricos obtenidos para $numpunts = 200$, correspondientes a la Figura 5.8 (e).

Todos los ejemplos anteriores han sido simplemente ilustrados con el objetivo de dar una idea. En realidad, en las aplicaciones prácticas el interés de obtener la media es del mismo tipo, pero siempre aplicado a formas semejantes entre sí. Por tanto, en el último ejemplo, vamos a aplicarlo a imágenes de contornos faciales. En la siguiente figura podemos ver cuatro caras diferentes elegidas también de la base de datos de imágenes MPEG-7 CE-Shape-1.

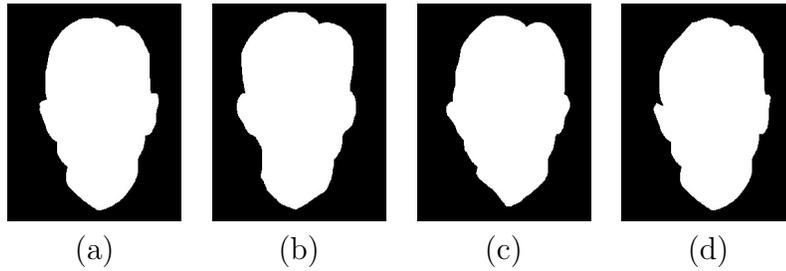


Figura 5.9: Imágenes de cuatro caras diferentes de la base de datos MPEG-7 CE-Shape-1.

Los resultados de aplicar el Algoritmo 3 considerando $\varepsilon = \frac{1}{4}$ y $Error = 0.001$ a estas cuatro caras diferentes son los siguientes:

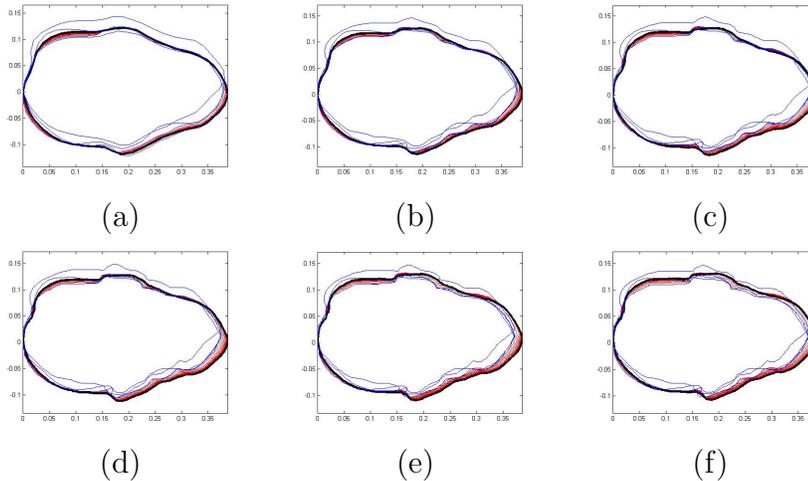


Figura 5.10: Formas medias considerando diferentes cantidades de puntos. En (a) 50, en (b) 100, en (c) 200, en (d) 300, en (e) 400 y en (f) 500.

Algunos de los resultados numéricos obtenidos pueden verse en la siguiente tabla:

<i>Iteración</i>	dm_1^k	dm_2^k	dm_3^k	dm_4^k	$\ v_1^k\ $	$\ v_2^k\ $	$\ v_3^k\ $	$\ v_4^k\ $
$k = 1$	0	0.3169	0.3728	0.2586	0	0.2891	0.3705	0.2628
$k = 2$	0.0454	0.2875	0.3430	0.2360	0.0426	0.2567	0.3402	0.2377
$k = 3$	0.0807	0.2651	0.3199	0.2225	0.0756	0.2353	0.3184	0.2207
$k = 4$	0.1079	0.2487	0.3029	0.2152	0.1012	0.2216	0.3021	0.2099
$k = 5$	0.1176	0.2346	0.2900	0.2073	0.1126	0.2092	0.2855	0.1931
$k = 6$	0.1314	0.2244	0.2778	0.2042	0.1278	0.2016	0.2732	0.1837
$k = 7$	0.1448	0.2170	0.2671	0.2038	0.1417	0.1965	0.2637	0.1792
$k = 8$	0.1562	0.2118	0.2584	0.2047	0.1530	0.1932	0.2564	0.1775
$k = 9$	0.1654	0.2081	0.2517	0.2060	0.1618	0.1913	0.2507	0.1773
$k = 10$	0.1727	0.2055	0.2467	0.2073	0.1687	0.1903	0.2463	0.1777
$k = 11$	0.1782	0.2036	0.2431	0.2086	0.1739	0.1898	0.2431	0.1784
$k = 12$	0.1824	0.2022	0.2405	0.2096	0.1780	0.1896	0.2407	0.1791
$k = 13$	0.1856	0.2012	0.2386	0.2104	0.1810	0.1895	0.2390	0.1798
$k = 14$	0.1880	0.2004	0.2373	0.2110	0.1834	0.1894	0.2378	0.1803
$k = 15$	0.1898	0.1998	0.2365	0.2114	0.1852	0.1893	0.2370	0.1807
$k = 16$	0.1912	0.1993	0.2359	0.2118	0.1865	0.1893	0.2365	0.1809
$k = 17$	0.1922	0.1990	0.2355	0.2120	0.1875	0.1892	0.2361	0.1812
$k = 18$	0.1929	0.1987	0.2353	0.2122	0.1883	0.1891	0.2359	0.1813

Cuadro 5.6: Algunos resultados numéricos obtenidos para $numpunts = 400$, correspondientes a la Figura 5.10 (e).

Cabe destacar que en todas y cada una de las tablas que contienen los resultados numéricos, podemos observar que efectivamente se cumple el resultado de la Proposición 4.3.1, es decir, que la distancia entre dos formas coincide con la norma del vector tangente que las une. Además, en todas las figuras, también podemos ver que los resultados dependen ligeramente de la elección de la variable $numpunts$.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En los métodos de investigación científicos donde se trabaja con datos que se recogen a través de distintas técnicas, resulta fundamental el análisis de estos datos aplicando procedimientos estadísticos. Para ello es de suma importancia la obtención de una media de estos datos.

Si los datos provienen de una variedad Riemanniana \mathcal{M} , la media muestral intrínseca se define como el punto de la variedad que minimiza el valor medio del cuadrado de la distancia a cada uno de los datos. Esta distancia depende de la métrica considerada en la variedad y una forma de obtenerla es a través del algoritmo de gradiente descendente.

En trabajos recientes se ha identificado, vía isometría, el espacio de formas planas con una determinada métrica (curvas de Jordan en el plano, modulo traslaciones, rotaciones y cambios de escala), con la variedad de Grassmann de 2-planos y de dimensión infinita. A partir de esta identificación se han obtenido en el espacio de formas planas todos los elementos geométricos característicos de una variedad: geodésicas, distancias, curvaturas...

La aportación principal de esta memoria es la obtención de la media muestral intrínseca de una cantidad de datos (formas planas), a partir de la identificación anterior, utilizando el algoritmo de gradiente descendente. Para llegar a esta aportación se han repasado previamente conceptos clásicos de geometría Riemanniana y estadística en variedades, y se han particularizado estos resultados para el caso de variedades de Grassman de dimensión infinita. También hemos explicado mediante unos ejemplos sencillos como

funciona el algoritmo de gradiente descendente y en la parte final de la memoria adjuntamos los códigos Matlab que se han programado para realizar los cálculos.

Como trabajo de futuro nos proponemos aplicar estos resultados para la obtención de la media intrínseca muestral de datos obtenidos mediante técnicas de neuroimagen. Sin embargo, como estos datos, que se utilizan en la investigación del cerebro, se corresponden con imágenes 3D; es decir, superficies en \mathbb{R}^3 , necesitaremos previamente desarrollar los conceptos geométricos y estadísticos necesarios en el espacio de formas espaciales.

Capítulo 7

Apéndice: Códigos Matlab

7.1. Función `PrincipalMitjaEntreFormesInter`

ENTRADAS:

- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **numiteracions:** Número máximo de iteraciones que realizará nuestro algoritmo si no se cumple el criterio de parada.
- **epsilon:** Cantidad que nos moveremos a lo largo de la geodésica.
- **Error:** Error que se utiliza en el criterio de parada.

SALIDAS:

- **MatriuDistancies:** Matriz de dimensión $(k \times 3 \cdot \text{NumFormes} + 2)$ donde, las columnas 1 y $\text{NumFormes} + 2$ indicaran la iteración en la que se han obtenido los datos de esa fila. De la columna 2 a la $\text{NumFormes} + 1$ tendremos las distancias de la forma media a cada una de las formas iniciales (columna) para cada iteración k (fila). De la columna $\text{NumFormes} + 3$ a la $2 \cdot \text{NumFormes} + 2$ tendremos las normas de los vectores tangentes de cada una de las formas (columnas) para cada iteración k (fila). Estas normas serán aproximadamente iguales a las distancias correspondientes debido a la Proposición 4.3.1. Y de la columna $2 \cdot \text{NumFormes} + 3$ a la $3 \cdot \text{NumFormes} + 2$ tendremos las diferencias entre las distancias y las normas.

FUNCIÓN:

```
function MatriuDistancies=PrincipalMitjaEntreFormesInter(numpunts,
numiteracions,epsilon,Error)

%Declaración de variables:
numgeointer=5;
numparam=10;

%Función para introducir la cantidad y los nombres de los ficheros
%que contienen las imágenes de las que cogemos las formas:
[NomsFitxers,numformes]=IntroduirImatges();

figure();
for i=1:numformes
    %Función que calcula los puntos IE de cada imagen:
    ParImatge(:,2*i-1:2*i)= CalculPuntsIEImatgeInter(numpunts,
    NomsFitxers(i,:),i,numformes);
    [fil(i),col(i)]=size(ParImatge(:,2*i-1:2*i));
end
%Condición para comprobar que el número de puntos que tenemos es el
% mismo para todas las formas. Utilizamos la función find, que
% encuentra las componentes del vector que cumplen la condición.
if length(find(fil==numpunts))==numformes
    for i=1:numformes
        %Dadas las coordenadas enteras que corresponden a los píxeles
        %de las imágenes, calculamos los elementos e y f
        %representativos de cada una de las formas:
        [e(i,:),f(i,:)]=CalculFuncionsE1F1(ParImatge(:,2*i-1),
        ParImatge(:,2*i),numpunts);
    end
    %Cálculo de la media de todas las formas:
    MatriuDistancies=Mitja(numformes,numpunts,numparam,numgeointer,
    numiteracions,epsilon,Error,e,f);
else
    display('El nombre de punts de les corbes no coincideixen')
end
return;
```

7.2. Función `CalculFuncionesE1F1`

ENTRADAS:

- **datx:** Vector de dimensión (`numpunts x 1`) que corresponde a las coordenadas enteras (píxeles) del eje x , es decir, a las filas de la matriz que representa la forma.
- **daty:** Vector de dimensión (`numpunts x 1`) que corresponde a las coordenadas enteras (píxeles) del eje y , es decir, a las columnas de la matriz que representa la forma.
- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.

SALIDAS:

- **e1** Vector de dimensión (`1 x numpunts`) que corresponde a una representación discreta de la primera de las dos funciones que representan una forma en nuestro espacio cociente. En este caso es el primero de los dos elementos del Grassmanniano de dimensión 2. Es una de las muchas representaciones que puede tener.
- **f1** Vector de dimensión (`1 x numpunts`) que corresponde a una representación discreta de la segunda de las dos funciones que representan una forma en nuestro espacio cociente. En este caso es el segundo de los dos elementos del Grassmanniano de dimensión 2. Es una de las muchas representaciones que puede tener.

FUNCIÓN:

```
function [e1,f1]=CalculFuncionesE1F1(datx,daty,numpunts)

%Variables necesarias para la definición de los elementos e1 y f1.
%Calculamos los ángulos que forman el vector tangente en cada uno de
%los puntos de la forma y el eje positivo de las abcisas:
AnglesCorba=CalculAngles(datx,daty,numpunts);

%Expresiones de los elementos e1 y f1 de la Proposición 4.2.2.
e1=sqrt(2)*cos(AnglesCorba/2);
f1=sqrt(2)*sin(AnglesCorba/2);

%Normalizamos y hacemos que el producto sea nulo, para evitar al
%máximo los errores numéricos:
[e1,f1]=NormalitzaIProducte0(e1,f1);

return;
```

7.3. Función Mitja

ENTRADAS:

- **NumFormes:** Cantidad de formas iniciales de las cuales queremos obtener la media.
- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **numparam:** Número de parametrizaciones diferentes que consideraremos entre dos formas, para calcular la geodésica de mínima distancia.
- **numgeointer:** Número de curvas geodésicas intermedias que calculamos para obtener la geodésica de una forma a otra.
- **numiteracions:** Número máximo de iteraciones que realizará nuestro algoritmo si no se cumple el criterio de parada.
- **epsilon:** Cantidad que nos moveremos a lo largo de la geodésica.
- **e:** Matriz de dimensión (NumFormes x numpunts) cada fila de la cual corresponde al primero de los dos vectores que generan cada una de las formas.
- **f:** Matriz de dimensión (NumFormes x numpunts) cada fila de la cual corresponde al segundo de los dos vectores que generan cada una de las formas.
- **Error:** Error que se utiliza en el criterio de parada.

SALIDAS:

- **MatriuDistancies:** Matriz de dimensión ($k \times 3 \cdot \text{NumFormes} + 2$) donde, las columnas 1 y $\text{NumFormes} + 2$ indicaran la iteración en la que se han obtenido los datos de esa fila. De la columna 2 a la $\text{NumFormes} + 1$ tendremos las distancias de la forma media a cada una de las formas iniciales (columna) para cada iteración k (fila). De la columna $\text{NumFormes} + 3$ a la $2 \cdot \text{NumFormes} + 2$ tendremos las normas de los vectores tangentes de cada una de las formas (columnas) para cada iteración k (fila). Estas normas serán aproximadamente iguales a las distancias correspondientes debido a la Proposición 4.3.1. Y de la columna $2 \cdot \text{NumFormes} + 3$ a la $3 \cdot \text{NumFormes} + 2$ tendremos las diferencias entre las distancias y las normas.

FUNCIÓN:

```

function MatriuDistancies=Mitja(NumFormes,numpunts,numparam,numgeointer,
numiteracions,epsilon>Error,e,f)

for i=1:NumFormes
    ParCorba(:,2*i-1:2*i)=CalculaCorbaLong1(numpunts,e(i,:),f(i,:));
end
%Definimos la candidata a media inicial como la primera de las formas:
em(1,:)=e(1,:);
fm(1,:)=f(1,:);
for k=1:numiteracions
    for i=1:NumFormes
        %Calculamos los elementos necesarios de la geodésica que une
        %la forma media de la iteración k, con la forma i:
        [Distancia,Fi1Fi2,e1t,f1t,e2t,f2t]=DistanciaEntreFormes(
        numpunts,numparam,numgeointer,em(k,:),fm(k,:),e(i,:),f(i,:),
        ParCorba(:,2*i-1:2*i));
        DistanciaAFormai(k,i)=Distancia;
        %Calculamos el vector tangente de la forma media en dirección
        %a la forma i mediante la geodésica que las une y que nos
        %proporciona la distancia mínima. La norma de este vector es
        %exactamente esa distancia:
        VectorTangent(i,:)=CalculaVectorTangent(numpunts,Fi1Fi2,
        e1t,f1t,e2t,f2t);
        %Calculamos la norma de los vectores tangentes:
        NormesVectorsTangents(k,i)=NormaVectorTangent(
        VectorTangent(i,:),numpunts);
    end
    %Utilizando el algoritmo del gradiente descendiente, calculamos
    %el vector tangente que nos proporciona la dirección en la que
    %nos moveremos, a lo largo de la geodésica, una cantidad epsilon:
    g=sum(VectorTangent)/NumFormes;
    %Calculamos la geodésica que tiene como punto inicial la forma
    %media de la iteración y dirección g, y evaluando en epsilon
    %obtenemos la siguiente forma media:
    [em(k+1,:),fm(k+1,:)] = CalculGeodesicaDonatPuntIVectorTangent(
    em(k,:),fm(k,:),g,epsilon);
end

```

```

%CRITERIO DE PARADA del algoritmo:
ParCorbaM=CalculaCorbaLong1(numpunts,em(k+1,:),fm(k+1,:));
[Distancia,A,B,C,D,E]=DistanciaEntreFormes(numpunts,numparam,
numgeointer,em(k,:),fm(k,:),em(k+1,:),fm(k+1,:),ParCorbaM);
if Distancia<Error
    numiteracions=k;
    break;
end;
end

MatriuDistancies=[(1:numiteracions)',DistanciaAFormai,
(1:numiteracions)',NormesVectorsTangents];
MatriuDistancies=[MatriuDistancies,abs(MatriuDistancies(:,2:NumFormes
+1)-MatriuDistancies(:,NumFormes+3:2*NumFormes+2))];

%DIBUJAMOS LOS RESULTADOS:
%En rojo las formas medias obtenidas en cada una de las iteraciones
%dados los elementos e y f que caracterizan a cada una de ellas:
figure();
for k=2:numiteracions
    CoordCorbaLong1=CalculaCorbaLong1(numpunts,em(k,:),fm(k,:));
    plot(CoordCorbaLong1(:,1),CoordCorbaLong1(:,2),'red')
    hold on
end
%En negro a la forma media obtenida:
CoordCorbaLong1=CalculaCorbaLong1(numpunts,em(numiteracions+1,:),
fm(numiteracions+1,:));
plot(CoordCorbaLong1(:,1),CoordCorbaLong1(:,2),'Color','black',
'LineWidth',3)
hold on
%En azul todas las formas iniciales:
for i=1:NumFormes
    DibuixaCorbaLongitud1(numpunts,e(i,:),f(i,:))
    hold on
end
hold off

return;

```

7.4. Función `CalculaCorbaLong1`

ENTRADAS:

- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **e:** Vector de dimensión $(1 \times \text{numpunts})$ que corresponde a una representación discreta de la primera de las dos funciones que respresentan una forma en nuestro espacio cociente.
- **f:** Vector de dimensión $(1 \times \text{numpunts})$ que corresponde a una representación discreta de la segunda de las dos funciones que respresentan una forma en nuestro espacio cociente.

SALIDAS:

- **CoordCorbaLong1:** Matriz de dimensión $(\text{numpunts} \times 2)$ que corresponde a las coordenadas (x,y) de la forma definida por los elementos e y f . Las calcularemos usando la Definición 4.2.1, y que, como es una integral, discretizaremos haciendo sumatorios y utilizando la regla del trapecio.

FUNCIÓN:

```
function CoordCorbaLong1=CalculaCorbaLong1(num_puntos,e,f)

%Definimos las dos primeras coordenadas:
h=1/num_puntos;
x(1)=0;
y(1)=0;
x(2)=(1/2)*((h*(1/2))*(e(1).^2-f(1).^2+e(2).^2-f(2).^2));
y(2)=(h*(1/2))*(e(1).*f(1)+e(2).*f(2));

for i=3:num_puntos
    %Coordenadas x, correspondientes a las filas:
    x(i)=(1/2)*((h*(1/2))*(e(1).^2-f(1).^2+e(i).^2-f(i).^2+
    2*sum(e(2:i-1).^2-f(2:i-1).^2)));
    %Coordenadas y, correspondientes a las columnas:
    y(i)=(h*(1/2))*(e(1).*f(1)+e(i).*f(i)+2*sum(e(2:i-1).*f(2:i-1)));
end

%Juntamos las coordenadas de la forma:
CoordCorbaLong1=[x',y'];

return;
```

7.5. Función DistanciaEntreFormes

ENTRADAS:

- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **numparam:** Número de parametrizaciones diferentes que consideraremos entre dos formas, para calcular la geodésica de mínima distancia.
- **numgeointer:** Número de curvas geodésicas intermedias que calculamos para obtener la geodésica de una forma a otra.
- **e1:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del primer elemento de la primera forma en nuestro espacio cociente.
- **f1:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del segundo elemento de la primera forma en nuestro espacio cociente.
- **e2:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del primer elemento de la segunda forma en nuestro espacio cociente.
- **f2:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del segundo elemento de la segunda forma en nuestro espacio cociente.
- **ParCorba:** Matriz de dimensión (numpunts x 2) que corresponde a las coordenadas (x,y) de la segunda forma ya convertida en una curva de longitud 1. Es necesaria para realizar las diferentes parametrizaciones.

SALIDAS:

- **Distancia:** Distancia entre las dos formas.
- **Fi1Fi2:** Ángulos de Jordan de la matriz A formada por los productos interiores.

- **e1t**: Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento e1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **f1t**: Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento f1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **e2t**: Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento e2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.
- **f2t**: Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento f2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.

FUNCIÓN:

```
function [Distancia,Fi1Fi2,e1t,f1t,e2t,f2t]=DistanciaEntreFormes(
numpunts,numparam,numgeointer,e1,f1,e2,f2,ParCorba)

%Condición para no hacer todos los cálculos si estamos considerando
%dos formas prácticamente iguales:
if (max(abs(e1-e2))<0.00001) & (max(abs(f1-f2))<0.00001)
    Distancia=0;
    Fi1Fi2=[0;0];
    e1t=e1;
    f1t=f1;
    e2t=e2;
    f2t=f2;
else
    %Variables necesarias para hacer el cambio de parametrizaciones:
    incpunts=fix(numpunts/numparam);
    ParCorbaParamj=ParCorba;
    %Variable necesaria para encontrar la distancia mínima de cada
    %parametrización:
    Distanciaj=1000*ones(1,numparam);
```

```

%Cálculos para cada una de las parametrizaciones:
for j=1:numparam

    %FUNCIÓN que calcula los productos interiores de manera
    %discreta:
    [e1e2,e1f2,f1e2,f1f2]=CalculProductesInteriors(num punts,
    e1,f1,e2,f2);
    A=[e1e2,e1f2;f1e2,f1f2]; %Cálculo matriz A (Ecuación 4.5).
    ValorsSingulars=sqrt(eig(A'*A)); %Cálculo valores singulares
    %de A.

    %Condición necesaria para evitar que debido a errores de
    %precisión los valores singulares sean menores que -1 o
    %mayores que 1.
    if ValorsSingulars(1)>1
        ValorsSingulars(1)=1;
    end
    if ValorsSingulars(2)>1
        ValorsSingulars(2)=1;
    end
    if ValorsSingulars(1)<-1
        ValorsSingulars(1)=-1;
    end
    if ValorsSingulars(2)<-1
        ValorsSingulars(2)=-1;
    end

    Fi1Fi2(:,j)=acos(ValorsSingulars); %Cálculo Ángulos de
    %Jordan.

    %Calculamos la distancia mediante la Ecuación 4.8:
    Distanciaj(j)=sqrt(Fi1Fi2(1,j)^2+Fi1Fi2(2,j)^2);
    %Resolución del sistema de los ángulos constantes
    %correspondiente a las Ecuaciones de 4.6:
    TectaAlfaYBeta=[1,1;1,-1]\[2*atan((e1f2+f1e2)/(e1e2-f1f2));
    2*atan((e1f2-f1e2)/(e1e2+f1f2))];
    %Cálculo de los representantes e1t, f1t, e2t y f2t que
    %corresponden a hacer las formas invariantes por rotaciones
    %y hacen que la matriz A sea diagonal:
    [e1t(j,:),f1t(j,:),e2t(j,:),f2t(j,:)]=
    CalculaFuncionsE1tF1tiE2tiF2t(TectaAlfaYBeta,e1,f1,e2,f2);

```

```
%Función que calcula la geodésica entre dos formas, fijada
%una parametrización. La usamos en el caso de querer ver la
%figura en cada una de las parametrizaciones:
%CalculaIDibuixaGeodesicaEntreDuesFormes(numunts,numgeointer,
Fi1Fi2,e1t(j,:),f1t(j,:),e2t(j,:),f2t(j,:));

%Cambiamos de parametrización:
CanviFiles=ParCorbaParamj(1:incpunts,:);
ParCorbaParamj=[ParCorbaParamj([incpunts+1:numunts],:);
CanviFiles];
%Recalculamos los elementos e2 y f2 para la nueva
%parametrización:
[e2,f2]=CalculFuncionsE1F1(ParCorbaParamj(:,1),
ParCorbaParamj(:,2),numunts);
end

%Cálculo de la posición donde se alcanza el mínimo:
[Distancia,pos]=min(Distanciaj);
%Elección de los elementos que corresponden a la parametrización
%donde se alcanza el mínimo:
e1t=e1t(pos,:);
f1t=f1t(pos,:);
e2t=e2t(pos,:);
f2t=f2t(pos,:);
Fi1Fi2=Fi1Fi2(:,pos);
end
return;
```

7.6. Función `CalculaFuncionesE1tF1tiE2tiF2t`

ENTRADAS:

- **TectaAlfaYBeta:** Vector de dimensión (2x1) que corresponden a los dos ángulos constantes de las Ecuaciones 4.6 necesarios para obtener los elementos `e1t`, `f1t`, `e2t` y `f2t` que nos proporcionarán la diagonalización de la matriz A .
- **e1:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del primer elemento de la primera forma en nuestro espacio cociente.
- **f1:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del segundo elemento de la primera forma en nuestro espacio cociente.
- **e2:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del primer elemento de la segunda forma en nuestro espacio cociente.
- **f2:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma. Es una de las muchas representaciones del segundo elemento de la segunda forma en nuestro espacio cociente.

SALIDAS:

- **e1t:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento `e1` y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **f1t:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento `f1` y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **e2t:** Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento `e2` y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.

- **f2t**: Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento f2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.

FUNCIÓN:

```
function [e1t,f1t,e2t,f2t]=CalculaFuncionsE1tF1tiE2tiF2t(
TectaAlfaYBeta,e1,f1,e2,f2)

%Expresiones de los elementos e1t, f1t, e2t y f2t expresados en las
%Ecuaciones 4.7:
e1t=cos(TectaAlfaYBeta(1)/2)*e1-sin(TectaAlfaYBeta(1)/2)*f1;
f1t=cos(TectaAlfaYBeta(1)/2)*f1+sin(TectaAlfaYBeta(1)/2)*e1;
e2t=cos(TectaAlfaYBeta(2)/2)*e2-sin(TectaAlfaYBeta(2)/2)*f2;
f2t=cos(TectaAlfaYBeta(2)/2)*f2+sin(TectaAlfaYBeta(2)/2)*e2;

%Normalizamos y hacemos que el producto sea nulo, para evitar al
%máximo los errores numéricos:
[e1t,f1t]=NormalitzaIProducte0(e1t,f1t);
[e2t,f2t]=NormalitzaIProducte0(e2t,f2t);

return;
```

7.7. Función `CalculaVectorTangent`

ENTRADAS:

- **`numpunts`**: Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **`Fi1Fi2`**: Ángulos de Jordan de la matriz A formada por los productos interiores.
- **`e1t`**: Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento e1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones. En este caso es el elemento calculado en la parametrización que obtenemos la distancia mínima.
- **`f1t`**: Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento f1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones. En este caso es el elemento calculado en la parametrización que obtenemos la distancia mínima.
- **`e2t`**: Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento e2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones. En este caso es el elemento calculado en la parametrización que obtenemos la distancia mínima.
- **`f2t`**: Vector de dimensión (1 x `numpunts`) que corresponde a otro representante del elemento f2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones. En este caso es el elemento calculado en la parametrización que obtenemos la distancia mínima.

SALIDAS:

- **`VectorTangent`**: Vector de dimensión (1 x 2*`numpunts`) que es el vector tangente de la primer forma, representada por `e1t` y `f1t`, a la segunda forma, respresentada por `e2t` y `f2t`, mediante la geodésica que las une y que nos proporciona la distancia mínima. La norma de este vector es exactamente esa distancia.

FUNCIÓN:

```
function VectorTangent=CalculaVectorTangent(num_puntos,Fi1Fi2,e1t,f1t,
e2t,f2t)

%Condición para no hacer todos los cálculos si estamos considerando
%dos formas prácticamente iguales:
if max(abs(e1t-e2t))<0.0001 & max(abs(f1t-f2t))<0.0001
    VectorTangent=zeros(1,2*num_puntos);
else
    %Expresión de los vectores tangentes, que vienen dados por las
    %Ecuaciones 4.11. Corresponden a derivar las Ecuaciones 4.10
    %respecto del parametro u y evaluar en u=0:
    if Fi1Fi2(1)==0
        dedu0=zeros(1,num_puntos);
    else
        dedu0=(Fi1Fi2(1)/sin(Fi1Fi2(1)))*(e2t-cos(Fi1Fi2(1))*e1t);
    end
    if Fi1Fi2(2)==0
        dfdu0=zeros(1,num_puntos);
    else
        dfdu0=(Fi1Fi2(2)/sin(Fi1Fi2(2)))*(f2t-cos(Fi1Fi2(2))*f1t);
    end
    %Ponemos los dos vectores uno detrás del otro:
    VectorTangent=[dedu0,dfdu0];
end
return;
```

7.8. Función `CalculGeodesicaDonatPuntIVectorTangent`

ENTRADAS:

- **e1:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma, en este caso de la candidata a media de la iteración en la que estamos aplicando la función.
- **f1:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma, en este caso de la candidata a media de la iteración en la que estamos aplicando la función.
- **g:** Vector de dimensión (1 x 2*numpunts) que corresponde al vector que nos proporciona la dirección de gradiente descendiente teniendo en cuenta todas las formas que estamos considerando.
- **epsilon:** Cantidad que nos moveremos a lo largo de la geodésica.

SALIDAS:

- **e:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al primero de los dos vectores que generan una forma, en este caso de la nueva candidata a media.
- **f:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde al segundo de los dos vectores que generan una forma, en este caso de la nueva candidata a media.

FUNCIÓN:

```

function [e,f]=CalculGeodesicaDonatPuntIVectorTangent(e1,f1,g,epsilon)

%Dividimos el vector tangente en sus dos componentes:
v1=g(1:length(g)/2);
v2=g((length(g)/2)+1:length(g));
numpunts=length(g)/2;

%Definición de las matrices necesarias para aplicar la Proposición
%2.4.3 que nos proporciona la expresión de la geodésica dados un punto
%y la dirección:
A=(1/numpunts)*[e1,f1]'*[v1,v2];
S=(1/numpunts)*[v1,v2]'*[v1,v2];
ID2x2=eye(length(g));
B=[A,-S;ID2x2,A];
ID4x2=eye(2*length(g),length(g));

%Expresión de dicha geodésica evaluada en el epsilon elegido:
GeodesicaOnParem=[e1,f1,v1,v2]*expm(epsilon*B)*ID4x2*expm(-A*epsilon);

%Dividimos el resultado obtenido, en las dos componentes que
%caracterizarán esta nueva forma candidata a media:
e=GeodesicaOnParem(1:length(g)/2);
f=GeodesicaOnParem((length(g)/2)+1:length(g));

%Normalizamos y hacemos que el producto sea nulo, para evitar al máximo
%los errores numéricos:
[e,f]=NormalitzaIProducte0(e,f);

return;

```

7.9. Función `CalculaDibuixaGeodesicaEntreDuesFormes`

ENTRADAS:

- **numpunts:** Número de puntos que tendrán cada una de las formas.
- **numgeointer:** Número de curvas geodésicas intermedias que calculamos para obtener la geodésica de una forma a otra.
- **Fi1Fi2:** Ángulos de Jordan de la matriz A formada por los productos interiores.
- **e1t:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento e1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **f1t:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento f1 y que hace que la primera forma nos quede invariante por rotaciones.
- **e2t:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento e2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.
- **f2t:** Vector de dimensión (1 x numpunts) que corresponde a otro representante del elemento f2 y que hace que la segunda forma nos quede invariante por rotaciones.

SALIDAS:

- No hay salidas, aunque en caso de utilizar esta función, la salida sería ver una gráfica de la geodésica que va de una forma a otra.

FUNCIÓN:

```

function CalculaIDibuixaGeodesicaEntreDuesFormes(numpunts,numgeointer,
Fi1Fi2,e1t,f1t,e2t,f2t)

figure();
%Discretizamos el parámetro u, dando valores del 0 al 1. Las funciones
%e y f para u=0, serán exactamente los elementos e1t y f1t
%respectivamente y para u=1, serán exactamente los elementos e2t y
%f2t respectivamente.
u=linspace(0,1,numgeointer);
for i=1:numgeointer
    %Expresión de las funciones e y f dadas por las Ecuaciones 4.10,
    %para cada uno de los parámetros u:
    if Fi1Fi2(1)==0
        e(i,:)=e1t;
    else
        e(i,:)=(sin((1-u(i))*Fi1Fi2(1))*e1t+sin(u(i)*Fi1Fi2(1))*e2t)/
        (sin(Fi1Fi2(1)));
    end
    if Fi1Fi2(2)==0
        f(i,:)=f1t;
    else
        f(i,:)=(sin((1-u(i))*Fi1Fi2(2))*f1t+sin(u(i)*Fi1Fi2(2))*f2t)/
        (sin(Fi1Fi2(2)));
    end
    %Calculamos las coordenadas de cada forma, que corresponderan a
    %una de las formas intermedias de la geodésica que une la primera
    %forma con la segunda (Definición 4.2.1):
    Geodesica(:,2*i-1:2*i)=CalculaCorbaLong1(numpunts,e(i,:),f(i,:));
    %Dibujamos todas las geodésicas intermedias:
    plot(Geodesica(:,2*i-1),Geodesica(:,2*i),'magenta')
    hold on
end
%Dibujamos en azul las formas iniciales:
DibuixaCorbaLongitud1(numpunts,e1t,f1t)
DibuixaCorbaLongitud1(numpunts,e2t,f2t)
return;

```


Bibliografía

- [1] O. Faugeras, G. Adde, G. Charpiat, C. Chefd'Hotel, M. Clerc, T. Denoux, R. Deriche, G. Hermosillo, R. Keriven, P. Kornprobst, J. Kybic, C. Lenglet, L. Lopez-Perez, T. Papadopoulos, J.-P. Pons, F. Ségonne, B. Thirion, D. Tschumperlé, T. Viéville, and N. Wotawa. Variational, geometric, and statistical methods for modeling brain anatomy and function. *NeuroImage*, 23S1:S46–S55, 2004. Special issue: Mathematics in Brain Imaging - Edited by P.M. Thompson, M.I. Miller, T. Ratnanather, R.A. Poldrack and T.E. Nichols.
- [2] J. Domingo, A. Simó, M. V. Ibáñez, E. Durá, G. Ayala, and S. Alemany. Means and confidence region of 3d random compact sets with application to apparel design. *Sometido a Journal of the Royal Statistical Society*.
- [3] Joshua Cates, P. Thomas Fletcher, Zachary Warnock, and Ross T. Whitaker. A shape analysis framework for small animal phenotyping with application to mice with a targeted disruption of *hoxd11*. In *ISBI*, pages 512–515. IEEE, 2008.
- [4] X. Gual-Arnau, M. V. Ibáñez, and A. Simó. A new extrinsic sample mean in the shape space with applications to the boundaries of anatomical structures. *Sometido a Biometrical Journal*.
- [5] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [6] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992.
- [7] P. Harms and A.C.G. Menzucchi. Geodesics in infinite dimensional stiefel and grassmann manifolds. *Comptes Rendus Mathématique*, 2012.

-
- [8] L. Younes, P. W. Michor, J. Shah, and D. Mumford. A metric on shape space with explicit geodesics. *Rend. Lincei Mat. Appl.*, 2008.
 - [9] Y. A. Neretin. On jordan angles and the triangle inequality in grassmann manifolds. *Geometriae Dedicata*, 2001.
 - [10] X. Pennec. Intrinsic statistics on riemannian manifolds: Basic tools for geometric measurements. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2006.
 - [11] X. Pennec. Probabilities and statistics on riemannian manifolds: Basic tools for geometric measurements. In *Proc. of Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP'99)*.
 - [12] Y. Chikuse. *Statistics on Special Manifolds*. Springer New York, 2003.
 - [13] M. Fréchet. Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 10(4):215–310, 1948.
 - [14] X. Pennec. Probabilities and statistics on riemannian manifolds: A geometric approach. Technical report, INRIA, 2004.
 - [15] X. Gual-Arnau, S. Herold García, and A. Simó. Geometric analysis of planar shapes with applications to cell deformations. *Enviado a Image Analysis and Stereology*.
 - [16] E. Klassen, A. Srivastava, W. Mio, and S. Joshi. Analysis of planar shapes using geodesic paths on shape spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004.
 - [17] D. Zhang and G. Lu. Review of shape representation and description techniques. *Pattern recognition*, 2004.