# LA NOCIÓN DE RAZÓN EN LAS MATEMÁTICAS DE LA ESCUELA PRIMARIA
# UN ESTUDIO DIDÁCTICO

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad
en Investigaciones Educativas

P r e s e n t a

**David Francisco Block Sevilla**
Maestro en Ciencias

Dirección de tesis:

**DR. GUY BROUSSEAU**
**DRA. GUILLERMINA WALDEGG**

Diciembre, 2000

A mis hijos:

Mariana,

Alejandro y

Andrés,

justo a tiempo me dijeron: "psss, psss, voltea, mira....".

A G R A D E C I M I E N T O S

A Jesús Alarcón, el buen Papini, por su confianza y su interés en el largo periodo inicial, aun cuando sabíamos que la brújula estaba desquiciada.

A Guy Brousseau, quien dedicó esporádicos pero intensos momentos a estudiar conmigo esta cuestión. Sus ideas, comentarios y críticas fluían a borbotones en todas direcciones... (ay, cuántas cosas se me escaparon). A él debo la orientación que finalmente asumió este trabajo y, sobre todo, la posibilidad de una mirada más profunda y fecunda de los avatares de la enseñanza de las matemáticas.

A Guillermina Waldegg, quien aceptó subir al barco a media travesía. Perseverante, leyó una y otra vez largos y laberínticos textos, pidió lo necesario al mismo tiempo que mostró certeza en que podíamos llegar a puerto. A ella debo también que el texto de quinientas páginas no tuviera mil, es decir, que fuera mínimamente legible.

A Grecia Gálvez quien más de una vez aceptó andar, lado a lado conmigo, por las veredas intrincadas y, con la lucidez que la caracteriza, pudo ver lejos y decir llanamente, “éste es un buen camino”. Su apoyo fue vital para la terminación del trabajo.

A Sonia Ursini, a Eduardo Weiss y a Eduardo Mancera, por la lectura minuciosa que hicieron de mi trabajo y por sus valiosas observaciones.

A Patricia Martínez Falcón y a Ru, por su enorme apoyo en todos los flancos. Coordinaron la producción de los programas de cómputo y participaron en el trabajo experimental, de principio a fin. En casa, un manantial inagotable de estrellas.... Sobre todo, a ambas, gracias por su cercanía.

A Laura Reséndiz, por su ayuda en todo el proceso: las observaciones y los registros del trabajo experimental, los vaciados y las clasificaciones de datos, la búsqueda bibliográfica, las revisiones reiteradas y muchas tareas más. También, por su tranquilidad.

A las maestras Rocio Duran, Urania Cano, Rosario y a la directora, Marcela Valades de la escuela CEPP-STUNAM.
A la maestra Angelina Martínez y a la directora, Fany Verde, de la escuela Juan Escutia. por haberme dado todas la facilidades para llevar a cabo el trabajo experimental.

Al equipo de Cómputo para niños de la DGSCA UNAM, Gabriela González, Marina Kriscautzky, Pilar González, Patricia Martínez (otra vez) por su generosa ayuda en la realización de los programas de cómputo, en la observación y en el registro en dos de las secuencias didácticas experimentales y por sus valiosos comentarios.

A Diana Solares, a Margarita Ramírez, a Alicia Carvajal, colegas del Seminario de Didáctica, por su ayuda en el trabajo de campo.

A Laura González, a Rosa María Martínez, a Bulmaro Flores y a todo el personal administrativo del DIE por su apoyo logístico.

A mis colegas profesores del DIE por su comprensión y su apoyo.

A Pilar Jiménez por su ayuda contra el otro crítico insaciable.

A todos, muchas muchas gracias.

# ÍNDICE GENERAL

## CAPÍTULO 3: EXPERIENCIAS DE INGENIERÍA DIDÁCTICA

## INTRODUCCIÓN

El término “razón”, con el sentido de una relación entre cantidades con ciertas características, se utiliza todavía con frecuencia en la vida cotidiana en expresiones como “los aguacates se venden a *razón* de 10 pesos la docena”, o “la *razón de cambio* del peso con respecto al dólar no ha variado”. En las relaciones entre un todo con una de sus partes, el término “razón” frecuentemente se sustituye por el de “proporción”, con el mismo sentido: “la *proporción* de azúcar es de una cucharada por cada taza de agua”; “la proporción de hombres en la escuela normal es baja”, etc.

En cambio, es probable que la palabra “razón”, asociada al capítulo de “Razones y Proporciones” de los textos de aritmética, evoque a muchas personas tiempos pasados, y, para otras, ya no tenga una connotación escolar. En nuestro país, por lo menos desde la reforma de principios de los setenta, dicho capítulo desapareció de los programas de enseñanza.

Éste es el objeto del que se hablará en el presente trabajo, la razón, y más específicamente, “la razón geométrica” [1]. El estudio pretende mostrar que este saber anacrónico, caído en desuso en la disciplina, puede presentar un interés actual desde el punto de vista didáctico. La motivación tiene que ver, en última instancia, con la intención, compartida hoy en día por un gran número de personas que estudian o que practican la tarea de enseñar matemáticas, de organizar una enseñanza de esta disciplina, en los niveles en los que es una materia obligatoria, que posibilite aprendizajes más personales, más “naturales”, en el sentido de más parecidos a la formas en que uno aprende las cosas fuera de la escuela, o incluso a las formas en que los conocimientos matemáticos han sido creados a lo largo del tiempo (toda proporción guardada, pero de esto

[1] En lo sucesivo no se hará esta precisión debido a que no se hablará de otro tipo de razones (aritméticas, armónicas, etc.). Cabe agregar que, en el latín medieval, lo que hoy llamamos “razón” se llamaba “proportio” mientras que la “proporcionalidad” se llamaba “proportionalitas” (Chevallard, 1989: 129); en la teoría de las razones y las proporciones, del siglo XIX en adelante “proporción” se definió como la igualdad de dos razones.

hablaremos en otro lugar). Empieza a haber constancia suficiente de que estas formas de estudiar matemáticas, además de ser más gratas, pueden ser también más eficaces, al redundar en aprendizajes más duraderos y más utilizables.

Pero, ¿por qué las razones? ¿Acaso el capítulo de razones y proporciones de los viejos textos de aritmética, claramente estructurados con definiciones, ejemplos, teoremas, corolarios y decenas de problemas de aplicación, favorecían formas “más personales” de aprender matemáticas? Ciertamente no, no se trata en realidad de desenterrar aquél capítulo, sino de reconsiderar, desde una óptica más moderna de los procesos de enseñanza, el papel que puede jugar la idea de razón en los aprendizajes de las matemáticas elementales. Se trata de estudiar la hipótesis según la cual es posible que el objeto “razón” esté más cercano de las conceptualizaciones que los estudiantes realizan al resolver cierto tipo de problemas, que otras nociones que se enseñan directamente, como las fracciones.
A continuación explico las motivaciones más específicas que me llevaron a estudiar este objeto. Enseguida, precisaré el propósito general del estudio y el marco teórico en el que se realiza.

*Primera motivación: desde la perspectiva de la enseñanza de las fracciones*

Durante varios años estudié, junto con algunos colegas y alumnos, y al mismo tiempo que varios investigadores más, las condiciones didácticas que pueden favorecer procesos de aprendizaje de las fracciones y de los decimales. Nos centramos entonces en la parte inicial del proceso, en la construcción de las fracciones como expresiones de una cantidad, es decir, como medidas (Block, 1987, Balbuena, 1988; Dávila, 1991). Al iniciar el presente trabajo, mi propósito original era continuar dichos estudios, abarcando un segundo significado de las fracciones, como relaciones entre cantidades y como operadores multiplicativos, en el entendido, compartido por varios estudiosos del tema (e.g., Kieren, 1988, Freudenthal, 1973, Rouche, 1992), de que la construcción del concepto de número racional se realiza a lo largo de la educación básica, mediante la articulación de estas dos grandes acepciones de las fracciones, como medidas y como operadores (a su vez desglosadas en varias acepciones más).

Durante algo más de un año exploré situaciones didácticas que fueran características de la función de las fracciones como expresiones de relaciones entre cantidades y como operadores, por ejemplo, situaciones en las que fuera necesario comparar relaciones parte todo, o situaciones que se resuelven mediante la identificación y la aplicación de un operador multiplicativo constante, como la escala.

Sometí algunas de estas situaciones a experimentaciones puntuales en grupos escolares de 4º a 6º de primaria. Los resultados obtenidos no fueron, en general, los esperados. De manera muy resumida, puedo decir que las situaciones permitían poner en juego la noción de fracción como expresión de una relación multiplicativa entre cantidades sólo a los pocos alumnos que *ya disponían de esta noción* en cierto nivel, mientras que los otros alumnos, la mayoría, no mostraban avances importantes. Es decir, las situaciones parecían adecuadas para *aplicar* el conocimiento en cuestión, más no para adquirirlo.

El análisis de estos resultados, y, sobre todo, las discusiones de los mismos con Guy Brousseau y con Jesús Alarcón, fueron el punto de partida para enfocar las dificultades de una nueva manera: detrás de la noción a la que explícitamente yo apuntaba, las fracciones, subyace una noción más amplia, menos precisa, la idea misma de relación multiplicativa. Las fracciones en el papel de relaciones entre cantidades y de operadores multiplicativos podrían constituir una parte, tal vez la culminación, de un proceso en el desarrollo de la noción de relación multiplicativa entre cantidades. Ésta última puede manifestarse en el trabajo que realizan los alumnos, antes de expresarse mediante una fracción, y es posible que requiera de condiciones didácticas que ayuden a los alumnos a desarrollarla.

Un ejemplo simple, pero expresivo de las dificultades que se registran en el paso a las fracciones es el siguiente (extraído del estudio empírico que se desarrolla en el segundo capítulo de esta tesis): se planteó la tarea de comparar los resultados de dos repartos de pasteles, 3 pasteles entre 4 niños contra 4 pasteles entre 3 niños. Miguel, de 4º grado, realizó representaciones icónicas de los repartos y logró determinar con éxito las fracciones que expresan las cantidades de pastel por niño: ¾ y 4/3 respectivamente. Enseguida concluyó: “les toca lo mismo”, y argumentó: “(porque) son los mismos números”. En cuanto Miguel obtuvo las fracciones, operó en un nuevo universo, el de los números fraccionarios, pero este universo se rige por reglas que, para él, tienen poco que ver con la situación original. Otros alumnos, en cambio, no cuantificaron el tamaño de los pedazos con fracciones, se limitaron a señalar que en un caso hay más pasteles y menos niños que en el otro, por lo cual a los primeros les toca más pastel. Estos alumnos, trabajaron con las relaciones entre cantidades enteras, aún no cuantificadas con números fraccionarios. En varios problemas más, con otras características, se pudo observar un fenómeno parecido.

Estos objetos, las relaciones multiplicativas aun no cuantificadas mediante un solo número, pueden identificarse con el objeto matemático de “razón”. El problema a estudiar empezó a definirse entonces de manera distinta: el estudio de la noción de razón, como algo distinto de la fracción y del cociente, ¿puede facilitar la comprensión de las fracciones en el papel de relaciones multiplicativas? y en caso afirmativo, ¿mediante qué situaciones y mediante qué articulaciones con otras nociones?

Sin embargo, el objeto matemático en cuestión, la razón, desapareció desde hace más de un siglo en la cultura de los matemáticos, y, como se comentó anteriormente, ha tendido a desaparecer también del ámbito de la enseñanza. Fue entonces que se formuló la segunda pregunta “¿Es posible que una noción, rebasada desde el punto de vista del conocimiento actual, pueda tener una función en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas?. A continuación retomo el problema desde este punto de vista.

*2) Segunda motivación: desde la perspectiva de la organización de los saberes que son objeto de enseñanza.*

La noción de razón jugó un papel central en las matemáticas desde Euclides hasta finales del siglo XVIII, y, con la teoría de las razones y las proporciones, su función se perpetuó en la enseñanza por lo menos hasta las grandes reformas curriculares de mediados del siglo XX. Hoy en día ha desaparecido del vocabulario de las matemáticas y ha tendido a desaparecer de los programas de enseñanza. Cabe preguntarse acerca de las causas y las modalidades de estas tendencias y acerca de sus efectos en las prácticas didácticas, en los diferentes niveles.

Es muy probable que la tendencia de la noción de razón a desaparecer de los programas de enseñanza sea un efecto a mediano plazo de su desaparición en el ámbito de las matemáticas mismas, y del discurso matemático.

En el ámbito de las matemáticas, la desaparición de la noción de razón se origina probablemente con el abandono de los intentos por lograr una unificación de la disciplina mediante usos diversos de la noción de razón, intentos que llegaron a su apogeo a finales del siglo XVIII. El abandono de esta tendencia responde principalmente a los progresos de la formalización del álgebra y del análisis, los cuales extendieron su dominio hacia nuevos objetos y trivializaron los teoremas relativos a las razones y las proporciones.

Más precisamente, el desarrollo del análisis y de la teoría de la integración condujo a los matemáticos a ceder el estudio de las magnitudes a las ciencias interesadas. La topología y la teoría de la medida determinan las propiedades esenciales de las estructuras de los espacios que se quieren estudiar y también las de las funciones "medida" que se necesitan, sin preocuparse de qué tipo de magnitudes se trata.

De aquí en adelante, las estructuras numéricas necesarias se construyen de manera formal por sus propiedades algebraicas, sin relación alguna con su papel de conjunto final de una medida.

Por lo tanto, ya no es útil introducir el número como "razón" de dos "magnitudes", ya sea la razón de dos valores de un mismo tipo de magnitud, sin dimensión, llamada "escalar", o la razón entre valores correspondientes de dos magnitudes de naturaleza diferente, con dimensión llamada "concreta". Pero en ese caso, la proporcionalidad ya no tiene sentido: hay que estudiar únicamente las funciones lineales, y, de manera separada, el motivo "físico" de la linealidad de la función.

Las únicas magnitudes que permanecen en el campo de la las matemáticas de los matemáticos (de las cuales la mecánica racional ha sido prácticamente excluida hoy en día) son las magnitudes geométricas: longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. ¿Bastarán estas magnitudes para proporcionar a los jóvenes alumnos una práctica susceptible de extenderse a la enorme diversidad de magnitudes que se utilizan en la vida diaria?

La desaparición del uso de un concepto en la comunidad de los matemáticos se justifica por la actividad específica de esta comunidad y así fue como, a la luz de las relaciones, funciones y estructuras numéricas "cerradas" y "completas", las concepciones anteriores en torno a la razón se volvieron pesadas y, finalmente, obsoletas. Sin embargo, ¿se justifica por ello la desaparición de dicho uso en la cultura de las otras comunidades, las cuales deben enfrentar problemas matemáticos que son, en principio, distintos a los de los matemáticos? La respuesta sólo sería afirmativa en dos casos:

- si los acercamientos modernos a las preguntas que antes se resolvían recurriendo a la noción de razón, permiten resolver al menos "igual de bien" los viejos problemas que enfrentan dichas comunidades (C1);
- o bien, si los mismos problemas han desaparecido (C2).

En el caso contrario, es decir:

- si existen familias de problemas que pueden resolverse más fácilmente recurriendo a la noción de “razón” que a nociones más modernas, especialmente por quienes no son matemáticos, y, en particular, por los niños,
- y si saber resolver dichos problemas constituye una necesidad para una parte suficientemente importante de la población, como para considerar esta capacidad dentro de los propósitos de la educación básica,

entonces, se vuelve necesario analizar la pertinencia de dicha noción en la enseñanza. En este caso, cualquier decisión se tomará en el marco del siguiente dilema: o bien se asume que la escuela debe difundir la mejor cultura matemática, los más pronto posible, o bien se considera también la necesidad de que la enseñanza se adapte a las necesidades actuales de sus destinatarios, y a las prácticas culturales.

Con respecto a la primera condición (C1), podemos anticipar desde ahora que no se verifica, ni siquiera para los matemáticos. Mariana Bosh (1994) logró mostrar en un estudio al que haremos referencia varias veces a lo largo de esta tesis, que, para resolver problemas típicos sobre razones y proporciones, tomados de libros de la época en que se enseñaba el tema, y que además no eran especialmente difíciles, los matemáticos que entrevistó tuvieron que hacer un esfuerzo considerable de traducción, no exento de rodeos, para poder aplicar su formalización lineal habitual.

¿Y qué ha sucedido con los problemas que se resolvían mediante las razones? ¿Han desaparecido (C2)? Ciertamente, el propósito modernizador que caracterizó a las reformas curriculares de los años 60 y 70, con las que se introdujeron “las matemáticas modernas”, llevó a hacer a un lado un gran número de estos “problemas concretos”, en aras de buscar un dominio precoz de recursos matemáticos “más poderosos”, como la función y el uso del formalismo algebraico. En algunos países, como Francia, este movimiento fue radical. Por razones todavía no del todo dilucidadas, los resultados no fueron los esperados y años después se empezó a registrar una “vuelta al pasado”, que tampoco fue siempre afortunada.

En México, la introducción de estas “matemáticas modernas” en los años setenta fue, al menos en la primaria, más tenue (lo cual debemos a la prudencia del grupo de matemáticos que en aquella época estuvo a cargo de la reforma en México), pero, no obstante, dejó sentir su influencia. Si bien no se aspiró a una formalización de la idea de función, en el tratamiento que se dio al tema de la proporcionalidad puede verse la intención de introducir cierta idea explícita de función, se empezó, por ejemplo, a hablar de “dependencias funcionales”. Al igual que en otras partes del mundo, el viejo capítulo de razones y proporciones fue eliminado como tal y, con ello, el número de problemas “prácticos” disminuyó drásticamente[2]. Desde entonces, se sigue haciendo mención esporádica de la razón, pero prácticamente como un significado más de las fracciones y con una función incierta en la organización actual de los saberes por enseñar.

Los textos y los programas elaborados en México en los años setenta, estuvieron vigentes durante poco más de veinte años, hasta la última reforma de principios de los noventa[3]. Sin embargo, es muy probable que en las prácticas de la enseñanza, los maestros, sobre todo aquellos que todavía recibieron en la secundaria una enseñanza sobre la teoría de razones y proporciones, hayan continuado abordando problemas “concretos” de proporcionalidad, mediante los instrumentos y conceptos de esta teoría: las razones, las proporciones, la regla de los productos cruzados (de los “extremos” y de los “medios”).

En la medida en que el tema dejó de ser enseñado de manera sistemática y formal (los maestros jóvenes ya no estudiaron el tema en la escuela), y ante la falta de una alternativa suficientemente clara que sustituyera a la teoría de las razones, es probable que haya subsistido un tratamiento que continuó incorporando elementos de aquella, pero de manera cada vez más difusa e imprecisa.

En un cuestionario que apliqué, en colaboración con Margarita Ramírez, a un grupo de 60 maestros de escuelas primarias del estado de México, pudimos constatar que 1) los problemas típicos de proporcionalidad siguen siendo considerados por los maestros como pertinentes en la enseñanza; 2) los maestros, sobre todo quienes han atendido los grupos de 5º y 6º grados durante algunos años, consideran la regla de los productos cruzados como una de las formas privilegiadas de resolverlos y 3) cerca del 70% de los 60 maestros muestran dificultad para definir cuándo dos conjuntos de cantidades son proporcionales. Por ejemplo, el 25 % considera que una constante aditiva caracteriza a una relación de proporcionalidad, y otro 43% dice no estar seguro.

---

[2] En (Block, 1999) y también en (Block y Solares s/f) analizamos algunas características de las reformas curriculares en México. En Zuñiga (1993) puede verse un análisis del impacto de las “matemáticas modernas” en América Latina.

[3] Puesto que en la reforma de los años 80 prácticamente no se alteraron los programas ni los libros de 4º a 6º.

Margarita Ramírez (s/f), por su parte, en su trabajo de tesis, realizó un seguimiento de doce clases sobre el tema de proporcionalidad impartidas por un maestro de 6º grado de la ciudad de México, con 18 años de experiencia docente, 10 en sexto grado y considerado como muy buen maestro por el personal de la escuela. Su estudio muestra de manera muy clara la incorporación de elementos de la vieja teoría de las razones y proporciones, para resolver un gran número de problemas "concretos". A su vez, el estudio pone en evidencia numerosas dificultades de distinta índole, algunas de las cuales se originan en errores conceptuales como el que ya señalamos, otras en una vinculación forzada, a veces también errónea, de las razones con las fracciones y con los decimales.

En los programas y libros elaborados en México a partir de los años 90, puede apreciarse un retorno de los problemas "concretos", problemas que plantean situaciones de medición, y, en general, de los que han sido llamados "de vida cotidiana" (problemas que, como ya dijimos, probablemente nunca fueron abandonados por los maestros). Este movimiento responde, por una parte, a una visión didáctica moderna que enfatiza, de una nueva manera, la importancia de la resolución de problemas para el desarrollo de nociones matemáticas. Por otra parte, probablemente responde también a una demanda sentida en la sociedad acerca de la utilidad de las matemáticas enseñadas en el nivel básico. Los problemas "concretos" parecen constituir un fondo cultural que la sociedad considera debe ser preservado por la escuela primaria. Esta tendencia se observa por igual en otros países, incluso en aquellos que, como Francia, fueron promotores de las grandes reformas de los años 60.

Así, hay elementos para suponer que la condición 2 enunciada anteriormente, no se cumple: los problemas "concretos" de proporcionalidad, ámbito de aplicación de la teoría de las razones y las proporciones, no desaparecieron y, nuevamente, forman oficialmente parte de la enseñanza. No obstante, el tratamiento que se ofrece a estos problemas permanece relativamente indefinido, tanto a nivel curricular, como, probablemente, a nivel de las prácticas de enseñanza[4].

*El propósito general del presente estudio.*

La búsqueda de un equilibrio entre las dos demandas que pesan sobre la escuela, formar mediante los conocimientos más avanzados de la comunidad, o atender a las

[4] A diferencia de la teoría de la razones y proporciones, otros conceptos y teorías que también fueron eliminados de la enseñanza en la época de las "matemáticas modernas", resurgieron después. Fue el caso, por ejemplo, de la geometría euclidiana.

necesidades de usuarios específicos, los alumnos, pasa por un análisis *didáctico* que aporte elementos para responder a las siguientes preguntas:

Si se acepta que enseñar a resolver un campo de problemas concretos sigue siendo una tarea importante de la educación básica, ¿en qué medida la noción de razón se revela necesaria como un “puente” para permitir a los alumnos establecer una primera relación con determinados objetos matemáticos elementales? ¿En qué medida estos conocimientos pueden constituir un apoyo para la introducción de conocimientos más elaborados? ¿Podrán los alumnos superar los obstáculos susceptibles de generarse mediante esta aproximación cuando, más adelante, se espere de ellos la adquisición de nociones más avanzadas? Y, por otra parte, ¿es posible identificar determinadas dificultades en la enseñanza, y en el aprendizaje, cuyo origen pueda atribuirse a la desaparición de la posibilidad de formular la noción de “razón”, o al desvanecimiento de su sentido?. El presente trabajo pretende contribuir al estudio de la problemática que se abre con estas preguntas.

*Marcos, límites y metodología de la investigación*

La perspectiva desde la cual abordaré esta problemática consiste en identificar y caracterizar las *condiciones* específicas que propician formas eventualmente diferentes de utilizar y de concebir la noción de razón, en el nivel de las matemáticas que se estudian en la escuela primaria.

El estudio se realiza en el marco de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) desarrollada por G. Brousseau, teoría que proporciona recursos para analizar los factores de las *situaciones* que pueden influir en los comportamientos y los aprendizajes. Los conceptos y la metodología de esta teoría han sido frecuentemente presentados y analizados mediante ejemplos relativamente “locales” (en el sentido de ser utilizados para el estudio de aspectos muy específicos de un proceso amplio de enseñanza de una noción), no obstante pareció interesante ponerlos a prueba para producir una *clasificación general* de las situaciones relativas a la noción de razón.

Se espera de esta clasificación que proporcione una jerarquía de los factores que influyen en la adquisición de los diferentes aspectos de esta noción. Cabe advertir, sin embargo, que con el presente trabajo no pretendo culminar esta clasificación, aspiro en cambio a contribuir significativamente a su elaboración.

Una vez identificados, en la primera parte del trabajo, ciertos factores que apuntalan la clasificación antes dicha, en una segunda parte, se confrontarán con los comportamientos efectivamente puestos en juego por los alumnos de primaria, mediante un estudio empírico.

*La revisión de otros acercamientos al objeto de estudio.*

Algunos aspectos específicos de esta problemática, o relacionados con ella, han sido abordados desde distintas perspectivas: epistemológica, en busca de explicaciones del papel que jugó la noción de razón en la evolución de los conceptos matemáticos de número y de función, y de los motivos de su desaparición; desde la perspectiva del desarrollo cognitivo, en particular del desarrollo del "pensamiento proporcional" en niños y adolescentes, principalmente como una capacidad ligada al desarrollo de las estructuras del pensamiento lógico; desde la perspectiva de la organización de los saberes en el currículum, en la cual se busca desentrañar la lógica interna de esta organización y de sus transformaciones, así como los vínculos que mantiene con los saberes en otras instituciones, en particular, con el saber de los matemáticos; (perspectiva de la transposición didáctica); y, finalmente, desde la perspectiva de la enseñanza escolar de nociones matemáticas específicas, en la cual se encuentran estudios diversos que hacen referencia a la noción de razón como parte de la constelación de significados que asumen otras nociones, en particular, las fracciones.

En distintos momentos a lo largo del presente trabajo haré referencia a algunos de los estudios que se han realizado desde estas perspectivas y, en las conclusiones del primer capítulo, haré una caracterización de las mismas. Esta forma de presentar una parte de lo que puede considerarse "los antecedentes" del presente estudio es poco ortodoxa, pero tiene la ventaja de permitirme hacer referencia a éstos en los momentos pertinentes, y, sobre todo, de permitirme dialogar con sus aportes a partir de la perspectiva que se asume en el presente trabajo, la del análisis de situaciones didácticas.

*Los capítulos.*

La tesis comprende tres capítulos. El primero, "Análisis de situaciones relativas a la noción de razón" inicia con la presentación de algunos conceptos de la TSD que se utilizan en el estudio. En seguida, se precisa el objeto de estudio de la tesis, en términos de un análisis del *medio* de la noción de razón, y, posteriormente, se desarrolla el análisis de un amplio conjunto de situaciones que dan lugar a la utilización de una razón. Se intenta, por una parte, organizar este conjunto mediante la identificación de ciertas *situaciones fundamentales* y de las *variables didácticas* que permiten generar otras situaciones a partir de las primeras. Al mismo tiempo, se identifican y se analizan los vínculos de la noción de razón con otras nociones matemáticas que son objeto de enseñanza en la escuela primaria: la medida, el número (entero y fraccionario), la multiplicación, la división y la función.

Este primer capítulo es largo y, en algunas partes, de difícil lectura. Esta característica obedece en parte a las numerosas e intrincadas vinculaciones que la noción de razón guarda con otras nociones que son objeto de enseñanza, aunque también refleja, lo admito, un proceso también largo y aún inconcluso de categorización. No obstante, a lo largo del capítulo he incluido sistemáticamente secciones de "comentarios" y "resúmenes" con la finalidad de ayudar a clarificar los elementos más importantes de lo visto hasta esos momentos. Estas secciones permiten también una lectura más rápida a quienes, por no ser éste su campo específico de estudio, puede no interesar el nivel de detalle del capítulo.

En el segundo y tercer capítulos se presentan los resultados del estudio empírico. En el segundo, se analizan los procedimientos de resolución de un grupo pequeño de niños de 4º a 6º de primaria, para un conjunto de problemas aplicados en la modalidad de entrevistas individuales semi estructuradas . Tanto la elección de los problemas como el análisis de las resoluciones se hacen con base en algunos de los criterios destacados en el capítulo anterior. El análisis busca identificar formas específicas de poner en juego la noción de razón, o bien, dificultades, o errores que pueden ser atribuidos a conocimiento insuficiente de esta noción.

En el tercer capítulo se presenta el diseño de algunas secuencias didácticas relativas a la noción de razón, dirigidas a alumnos de 3º a 5º grados de primaria. Esta modalidad del estudio empírico constituye un recurso metodológico característico de la TSD, llamado "ingeniería didáctica". En la introducción del capítulo se caracteriza brevemente este recurso. Posteriormente, se presentan las secuencias que fueron diseñadas y aplicadas en el salón de clase y, finalmente, el análisis de resultados de una de éstas.

Las secuencias de situaciones pretenden propiciar la puesta en juego de ciertos aspectos de la noción de razón por los alumnos, en un momento anterior al estudio explícito de las fracciones. Así mismo, buscan aportar evidencias empíricas de la conveniencia, y de la factibilidad, de propiciar este trabajo, de manera integrada al estudio de la multiplicación y la división de números enteros y, por lo tanto, sin tener que abrir un apartado especial para el estudio de las razones.

Las conclusiones del estudio se van presentando en cada uno de los tres capítulos. Al final, en el apartado de “conclusiones finales”, se retoman de manera somera aspectos destacados de cada parte y se plantean algunos de los problemas que podrían dar lugar a estudios posteriores.

## 1) Conceptos preliminares de didáctica

*El concepto de "situación didáctica":*

Una aportación de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar es la inclusión, en el clásico triángulo didáctico "maestro, alumno, saber", de un cuarto elemento: el *medio*. El medio se define como el objeto de la interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que él da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos transmite.

La situación didáctica se define entonces como un sistema de interacciones entre estos diversos subsistemas de la situación: los alumnos, el medio (y el maestro), el saber:

> *Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable* (Brousseau, 2000: 10)

*Saberes y conocimientos*

La conceptualización anterior de la situación didáctica cruza un referente cultural y un referente cognitivo. Por una parte, el saber " por enseñar", el que está señalado en los programas, es un producto cultural. Es un saber establecido, avalado socialmente y que guarda una relación compleja con saberes de otras esferas, en particular con el saber de los matemáticos[1].

Por otra parte, en los procesos de aprendizaje de los alumnos, en la interacción con otros alumnos, con un maestro y con un medio específico intervienen fenómenos cognitivos, o más precisamente, socio cognitivos.

Desde una perspectiva constructivista de los procesos de aprendizaje, que es la que se ha asumido en la TSD, el papel de las interacciones de los alumnos con el medio es

[1] En otro lugar haremos referencia al concepto de "transposición didáctica", el cual refiere a las transformaciones del saber en las distintas instituciones.

fundamental. El proceso de aprendizaje es concebido fundamentalmente como una adaptación del sujeto a un medio que ofrece resistencias: los alumnos construyen entonces determinados *conocimientos* en tanto herramientas que les permiten resolver determinados problemas. Los conocimientos se manifiestan por lo tanto en la acción del alumno en situación de resolución de problemas, y, a diferencia de los saberes, pueden no ser identificados por el sujeto que los utiliza[2] .

> *Desde esta perspectiva, la enseñanza se convierte en una actividad que no puede sino conciliar dos procesos, uno de enculturación y el otro de adaptación independiente (Brousseau, 2000: 8).*

Así, una situación didáctica concreta realizada en una clase de matemáticas da cuenta por un lado de una caracterización particular del saber cultural en juego, y así mismo, de una organización particular de las relaciones entre los subsistemas de la situación, en aras de favorecer los aprendizajes.

El análisis didáctico de las situaciones se realiza en primer lugar a partir de un análisis del *saber* en juego. La situaciones que resultan están destinadas a propiciar la construcción de *conocimientos*, pero el proceso no termina aquí, desde el momento en que la institución escolar tiene el compromiso de que los alumnos se apropien de determinados *saberes,* es necesario todavía organizar la apropiación de esos *saberes* específicos a partir de los conocimientos construidos:

> *Dado que todo conocimiento se presenta en situación, se comprende que únicamente se pueda actuar indirectamente sobre el conocimiento (y el saber) de alguien mediante la organización de situaciones, es decir, mediante un trabajo sobre el saber. De hecho, para enseñar no puede hacerse otra cosa que trabajar con esas situaciones de referencia y con el saber mismo.*
>
> *Enseñar es trabajar con el saber para inducir, en un cuadro situacional elegido, un proceso cognitivo que dé lugar al aprendizaje cuyo producto será, nuevamente, un saber (Conne, 1992:249).*

Así, es fundamentalmente de la relación saberes- situación de la que se ocupa la didáctica. El saber es considerado como el único medio de gestión social y cultural de los

[2] Para F Conne, de hecho, todo conocimiento que es reconocido como tal por un sujeto, es para él un saber:" (Conne, 1992: 225). Entre los autores de habla hispana, los significados que asignamos a los términos "saber" y "conocimiento" son frecuentemente inversos de los que aquí presentamos: Se habla de los "saberes" en tanto conocimientos no formales, o no sistematizados.

conocimientos (Briand, 1993: 13). Más aún, no sólo el análisis (o el diseño) de la situación didáctica se realiza con referencia al saber, también los conocimientos de los alumnos son inferidos por el investigador, como por el maestro, a partir de la relación que ellos mismos guardan con el saber.

*Situación adidáctica e institucionalización*

La distinción entre saber y conocimiento lleva a distinguir, en el concepto de situación didáctica, las nociones de “situación adidáctica”, el momento de la situación didáctica en la que podrían suceder aprendizajes por adaptación a un medio, y la noción de institucionalización, que describe el proceso en el que el maestro, en tanto portador de un saber cultural, interviene en la situación para ayudar a tender un puente entre los conocimientos, siempre fuertemente contextualizados, y los saberes institucionales, que son objeto de enseñanza[3].

Una situación funciona de manera “adidáctica” cuando el alumno y el maestro logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y entre en un proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el maestro espera:

> *Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir como el que propone los conocimientos que quiere propiciar. El alumno sabe bien que el problema fue escogido para ayudarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que ese conocimiento está completamente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No solamente puede, sino debe, ya que no habrá adquirido verdaderamente ese conocimiento sino hasta que sea capaz de utilizarlo por sí mismo en las situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza (Brousseau, 1998: 59)*

La realización de una relación semejante con el problema requiere lo que Brousseau ha llamado un proceso de *devolución* al alumno de la responsabilidad matemática sobre la situación. Se trata bien de un proceso, y no de un acto instantáneo, habida cuenta de que la relación que prevalece normalmente entre los alumnos y el maestro no es de este tipo.

---

[3] La situación “adidáctica” es siempre un momento o una fase de una situación didáctica. La diferencia con una situación “no didáctica” es que esta última no ocurre en un contexto de enseñanza.

Se requiere romper, o alterar un *contrato didáctico*[4] implícito que tiende a regular las relaciones entre ambos y según el cual el alumno espera que el maestro le enseñe, o, cuando se le plantea un problema, sabe que el maestro espera de él la aplicación de determinados saberes enseñados, y el maestro tiene efectivamente esa expectativa.

Por otra parte, una situación adidáctica es siempre específica de un conocimiento. Para dar lugar a un funcionamiento adidáctico, es necesario que el problema sea adecuado y esto significa, en primer lugar que implique dicho conocimiento como recurso óptimo de resolución. Además, el problema debe poderse abordar sin disponer aún de este conocimiento, puesto que de lo contrario no se trataría de una situación de aprendizaje, sino de evaluación, o de aplicación. Debe poderse abordar sin el conocimiento en el sentido de poder realizar aproximaciones a la solución, pero no de resolver el problema de manera óptima puesto que esto requeriría *ya saber*. O bien, puede resolverse una variante simple del problema a partir de conocimientos previos, pero, mediante el manejo de ciertas variables de la situación, se deben poder generar variantes para las cuales los conocimientos previos resultan insuficientes (Douady, 1980; Brousseau, 2000).

Finalmente, la situación adidáctica debe ofrecer al alumno una forma de control sobre el grado de éxito, o de error, de sus tentativas de resolución, es decir, una forma de validar por sí mismo, sin necesidad de la intervención del juicio de un tercero. Esta condición es fundamental para dar lugar a un diálogo entre el alumno y el problema, que permita, al alumno hacer evidentes los errores, un proceso de corrección o de reelaboración de recursos[5].

Una situación adidáctica normalmente está destinada a aplicarse varias veces, con el mismo grado de dificultad, o con uno mayor. Las repeticiones son una condición para permitir a los alumnos desarrollar nuevos recursos y cesan cuando los alumnos disponen ya de una estrategia que permite resolverla de manera sistemática. A esta estrategia subyace, en principio, un nuevo conocimiento.

Hablemos ahora del proceso de institucionalización. En un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los alumnos logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a éste no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. Los alumnos no

---

[4] Sobre la noción de contrato didáctico, ver, por ejemplo, Brousseau, 1998

[5] Brousseau distingue tres formas de validación: pragmática, semántica y sintáctica (Brousseau, 1972). Ver también (Block, 1991)

tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural. Esto requiere de un proceso de institucionalización que, esta vez, corre a cargo del maestro.

> *Escoger ciertas preguntas entre las que ya se saben resolver, ubicarlas en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas un estatuto de saber más o menos importante, vincularlas a otras preguntas, a otros saberes, constituye a final de cuentas lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente del que podría dejarse a cargo del alumno, le corresponde al maestro, no es el resultado de una adaptación del alumno (Brousseau, 1998: 77).*

Así, finalmente, "los dos tipos principales de juego del maestro son la devolución y la institucionalización. Mediante la devolución el maestro pone al alumno en situación adidáctica. Mediante la institucionalización define las relaciones que puede haber entre las producciones "libres" del alumno con un saber cultural o científico, y con el proyecto didáctico: da lectura a esas actividades y les da un estatuto" (Brousseau, 1998: 92).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje en situación escolar se favorece mediante la alternancia sutil de momentos adidácticos y momentos propiamente didácticos, de institucionalización. Esta característica, que pone en primer plano la recuperación de los *saberes* por enseñar, distingue este acercamiento de enfoques constructivistas ortodoxos, también llamados radicales, en los que los saberes objeto de la enseñanza se desdibujan por un supuesto de no intervención del maestro más que como "organizador de situaciones".

*Situaciones de acción, de formulación y de validación*

En la TSD se distinguen, en relación a un saber, diferentes funciones o estatutos del conocimiento en la situación: como medio de acción, como medio de comunicación o como medio de prueba. Las situaciones adidácticas que dan lugar a estas funciones presentan características distintas.

El conocimiento de un sujeto, antes de asumir la forma de saber (explícito), puede manifestarse, a los ojos del observador, como un recurso implícito de resolución. Es posible inferir de las decisiones y de las acciones de un sujeto en situación de resolución de un problema, la presencia de un conocimiento, sin que él necesariamente sepa que lo ha puesto en juego, y por lo tanto sin que necesariamente sea capaz de hacerlo explícito. El conocimiento funciona como recurso, eventualmente implícito, en la acción. Este conocimiento puede ser comprendido por el observador, maestro o investigador, desde el saber que subyace.

Por otra parte, ciertas situaciones con características específicas pueden exigir la *comunicación* de algo acerca de ese conocimiento. La función del conocimiento es ahora también la de comunicar algo a alguien para resolver el problema. Puede tratarse de una comunicación que se hace al alumno a través de la consigna para que él realice una tarea, o bien de una comunicación que el alumno mismo hace.

En este último caso, la comunicación puede ser espontánea, por ejemplo, entre pares, en el seno de un trabajo en equipo, puede provenir también de una demanda expresa del maestro (explica lo que hiciste...), o bien puede formar parte de la situación problema misma: la situación se organiza de tal manera que resolver el problema pasa por solicitar a alguien una información que no se puede obtener por uno mismo. Estas situaciones propician un proceso en el que se hacen explícitos aspectos relativos al conocimiento implícito, y en el que se crea un lenguaje, informal al principio, para dar cuenta de ellos.

Otras situaciones consisten en *probar* una declaración acerca del conocimiento, un resultado, una propiedad, una regla. No se trata ya de una prueba pragmática, sino de una prueba semántica, o sintáctica: se prueba a partir de conocimientos que ya se han establecido. La exigencia de hacer explícito es aún mayor, ahora se ponen de manifiesto vínculos con otras nociones, el conocimiento tiende a devenir un objeto explícito de estudio, reconocido, nombrado y definido. Finalmente, en el momento de institucionalización se otorga a este conocimiento un estatuto especial[6].

Estas funciones describen un proceso de matematización, es decir, de apropiación de un conocimiento matemático en distintos niveles, desde como herramienta implícita, hasta como saber[7]. El proceso es cíclico: un saber puede devenir objeto de una nueva problematización en la que esta vez será un conocimiento sobre ese saber el que transitará de recurso implícito a nuevo saber explícito, más general. Así, por ejemplo, los

---

[6] Las categorías de saber y conocimiento que vimos antes, asumen aquí una expresión más clara: mediante situaciones de formulación y validación un conocimiento tiende a hacerse explícito. En los procesos de institucionalización estos conocimientos explícitos se vinculan con los saberes culturales.

[7] Frecuentemente el término “matematización” refiere a la aplicación a de un modelo matemático a un fenómeno natural, social, etc. Aquí el sentido es inverso: se trata de la elaboración de herramientas matemáticas a partir de la resolución de un problema.

números nacen como herramientas implícitas para trabajar con cantidades de magnitud y devienen saberes: las medidas, los cardinales, en general, los “números concretos”. Estos saberes a su vez constituyen el objeto de problemas de distinta índole, de donde surgen otros saberes sobre los números, los números como relaciones escalares entre medidas, como aplicaciones. En el extremo de esta sucesión de problematizaciones está la noción de estructura numérica.

*Situaciones fundamentales*

A cada conocimiento de matemáticas está asociado un conjunto de problemas o, podríamos decir, de situaciones adidácticas, en las que dicho conocimiento constituye una herramienta de resolución. Como ya vimos, la identificación de los problemas que pueden abordarse antes de disponer del conocimiento en cuestión, permite crear un medio de interacción para los alumnos en el cual ellos podrían desarrollar dichos conocimientos. Entre estas situaciones, se llama “situaciones fundamentales” a aquellas que permiten generar a las demás mediante determinadas variables:

> *Por razones heurísticas, suponemos que cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.*
>
> *Además, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cotas sobre estas variables. (Brousseau, 2000: 13).*

Dado un conocimiento, es posible, en principio, identificar situaciones fundamentales de acción, de comunicación y de validación, aunque puede suceder que una misma situación presente elementos de dos tipos, sobre todo acción y formulación, eventualmente con uno dominante (es el caso de la situación fundamental del número que veremos más adelante).

La tarea de identificar las filiaciones entre diversas situaciones constituye una ayuda importante para organizar y analizar el conjunto de situaciones relativas a un conocimiento.

*Situaciones y concepciones (o significados)*

El análisis de un saber desde el punto de vista de las situaciones en las que funciona como herramienta de resolución, permite identificar formas contextualizadas de ese saber en las que se manifiestan *características parciales del mismo, distintas entre sí*. Los números naturales, por ejemplo, pueden funcionar como cardinales, como ordinales, como expresiones de relaciones aditivas o multiplicativas antes de ser explícitamente, para los alumnos, un conjunto estructurado de números abstractos.

De esta manera, en relación a una noción matemática, es posible identificar distintas familias de situaciones que la hacen funcionar de maneras distintas, en el sentido de que ponen en relieve aspectos de esta noción que, aunque están vinculados, se ponen en juego de maneras distintas. A estas formas particulares de la noción se les llama, en la TSD, *concepciones*.

El término presenta una ambivalencia: desde el punto de vista de los objetos matemáticos estudiados, las concepciones constituyen especies de definiciones parciales del objeto, definiciones que destacan, cada una, una propiedad distinta. Por ejemplo, en un estudio sobre las concepciones del círculo realizado por Artigue y Robinet (1982), las autoras identifican *a priori* varias concepciones posibles, esto es, las identifican antes de estudiar su existencia en el conocimiento de los alumnos (entre otras, como una curva con ciertas características, como un conjunto de puntos equidistantes de un punto). Dicen las autoras:

> *Esas definiciones son todas equivalentes desde el punto de vista lógico y definen por lo tanto al mismo objeto matemático. Sin embargo, corresponden a maneras diferentes de percibir el círculo, de utlizar sus propiedades, y ponen el acento en diferentes elementos geométricos, y en diferentes relaciones entre esos elementos. Es por esto que les asociamos concepciones distintas del círculo (Artigue y Robinet, 1982)*

Por otra parte, la noción de "concepción" hace referencia al conocimiento del alumno, a los puntos de vista que él asume, correctos, parcialmente correctos, o falsos, en relación a una noción, en una situación.

Por supuesto, estos dos puntos de vista están ligados, como lo expresa la siguiente definición:

> *En el desarrollo del proceso de adquisición, por causas diversas (...) ciertas situaciones se privilegian en detrimento de otras lo que provoca la aparición de conocimientos locales, que operan sobre sub campos de un campo conceptual, y para ciertos valores de las variables concernidas, es este saber local que llamaremos concepción (A Duroux 1982, citado por Artigue, 1989: 17).*

El análisis de las situaciones didácticas relativas a un saber tiene, por lo tanto, como una de sus finalidades primordiales, el identificar a priori posibles concepciones distintas entre sí, y el confrontar, con los alumnos, si estas operan realmente como tales.

El análisis de las concepciones relativas a un objeto matemático, tiene además la virtud de "ayudar a la didáctica a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica vehiculizada por modelos empíricos del aprendizaje, permitiéndole diferenciar el saber que la enseñanza quiere transmitir de los conocimientos efectivamente construidos por el alumno" (Artigue, 1989: 14).

En la literatura en didáctica se encuentran otros términos cuyo significado es muy cercano, a veces el mismo, al que hemos visto aquí para el término de concepción: modelo implícito, subconstructo, definición, interpretación, significado. No discutiremos aquí la diversidad de connotaciones asociadas a estos términos[8], en cambio, nos interesaremos por otro concepto, un poco más amplio que el de concepción: el de *sentido* de un conocimiento.

*El sentido de un conocimiento*

Brousseau da la siguiente aproximación al *sentido* de un conocimiento:

> *La definición del sentido de una noción es, lo hemos dicho, uno de los problemas centrales de la didáctica. Lo anterior nos permite ahora entrever como nos proponemos resolverlo: se tratará de hacer el censo y de clasificar todas las situaciones en las que dicha noción está implicada, ya sea como solución, necesaria o no, óptima o no, ya sea en el enunciado, ya sea en los comportamientos de los protagonistas del juego didáctico. De esta manera, la noción se manifiesta en su funcionamiento y en sus relaciones con otros sectores de las matemáticas. Es posible identificar entonces concepciones particulares que*

[8] En Godino y Batanero (1994) puede encontrarse una discusión acerca de los conceptos de significado y concepción.

> *permiten resolver ciertas clases de situaciones, mientras que propician respuestas erróneas en otras, y cuya reunión constituye el concepto. (Brousseau, 1981:110)*

Entonces, el sentido de un conocimiento se encuentra en el conjunto de situaciones que lo implican de alguna manera, y en las relaciones que mantiene con otros conocimientos. El sentido aparece aquí compuesto por concepciones; tiene por lo tanto una connotación más general. Esta caracterización aporta además una forma de volver operativa la noción de concepción (y de sentido), que también encontramos en la cita anterior de Duroux: una forma de dar cuenta de la existencia de concepciones distintas consiste en mostrar que un sujeto tiene éxito frente a un subconjunto de situaciones con ciertas características previamente identificadas mientras que no lo tiene en otro subconjunto. El "punto de vista" sobre el objeto matemático en cuestión que el segundo subconjunto demanda, sería distinto al del primero, implicaría la puesta en relieve de otras relaciones.

Veamos rápidamente otras dos caracterizaciones de la noción de sentido, también de Brousseau. En el texto "Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement" (Brousseau, 1983, citado por Charnay, 1994: 52) afirma:

> *El sentido de un conocimiento se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática, no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.*

En esta caracterización, Brousseau recupera un componente fundamental del proceso de adquisición de un conocimiento: este se adquiere a partir de un conocimiento anterior que se revela ineficaz, o incluso a veces, en contra de un conocimiento anterior. Nuevamente, la idea de sentido parece ser más amplia que la de concepción.

Finalmente, en otro texto (Brousseau, 1994: 72) afirma:

> *El sentido de un conocimiento se compone de:*
>
> - *el tejido de los razonamientos y pruebas en los cuales está implicado;*
> - *el tejido de las reformulaciones y formalizaciones con ayuda de las cuales el alumno puede manejarlo;*
> - *los modelos implícitos asociados a éste y las huellas de las situaciones de acción que los hacen funcionar o simplemente los contextualizan;*
> - *las relaciones más o menos asumidas entre estos diferentes componentes, relaciones esencialmente dialécticas*

En esta última aproximación Brousseau introduce otro elemento en la caracterización del sentido: la existencia de tipos de situaciones que pueden inducir formas distintas de funcionar de los conocimientos: como recurso de acción, eventualmente implícito, para resolver el problema, como recurso de comunicación, con otros o con uno mismo, de ciertos aspectos vinculados a la resolución, como recurso de prueba, de argumentación de aserciones hechas sobre el mismo.

*La transposición didáctica*

Volvamos a la esfera del saber. Hasta este punto de nuestra exposición puede inferirse que, en la TSD, el estudio del saber se realiza principalmente desde una perspectiva epistemológica, se estudian las condiciones de una posible génesis del saber en relación a determinadas familias de problemas. Sin embargo, nos falta considerar un componente fundamental en la caracterización del saber: las instituciones de enseñanza.

Los saberes señalados como objetos de enseñanza en una institución particular, presentan características propias, que los distinguen de los mismos saberes en otras instituciones. Chevallard (1992-a) acuñó el término de "transposición didáctica" para dar cuenta de los procesos de transposición del saber, de la institución de los matemáticos a las instituciones de la enseñanza, planes de estudio, programas, manuales, y, finalmente, clases impartidas. En cada una de estas instituciones, el saber obedece a motivaciones y sujeciones de muy distinta índole y, en el paso de una institución a la otra, sufre transformaciones, incluso a nivel de su sentido, transformaciones inevitables, necesarias, pero que es indispensable estudiar y, a la postre, controlar.

Los estudios sobre la transposición didáctica dieron lugar, en unos pocos años, a una perspectiva particular en la investigación en didáctica de las matemáticas, perspectiva que Chevallard ha llamado *antropología didáctica* (Chevallard, 1992-b)

Una característica distintiva de este acercamiento es la consideración de que el saber siempre es *relativo* a una institución específica. En cada institución el saber encuentra una forma de organización y un *sentido* particulares. Los conocimientos de los sujetos se miran (se identifican, se evalúan, se propician) en el marco de una relación institucional, con respecto al conocimiento de la institución.

La organización específica del saber en una institución (los contenidos considerados, los vínculos con otras nociones, los recortes, las progresiones, los tiempos asignados etc.), no es neutral con respecto a las formas de enseñanza, constituye, por el contrario, efecto y causa a la vez de éstas. Se busca entonces conocer las *condiciones* que determinan que unos saberes existan en una institución de enseñanza, mientras otros no, que unos desaparezcan en ciertos momentos, mientras aparecen otros, así como las condiciones que imprimen una forma particular a su organización (*ecología* de los saberes). En síntesis, se estudian las condiciones que hacen *posible* (antes que idónea) la enseñanza de determinado objeto matemático.

Esta perspectiva pone en primer plano el componente cultural que subyace a la noción de situación didáctica, que comentamos al inicio de esta presentación de conceptos básicos. Como dijimos en la introducción general, la noción que nos ocupa, la razón, constituye un caso particularmente interesante desde esta perspectiva debido a que ocupó un lugar central en el currículum de la enseñanza básica y media durante más de un siglo y, a partir de la reforma de los años sesenta, ha tendido a perder ese lugar. Nuestro análisis del papel que juega esta noción en las matemáticas que se enseñan hoy en día en la primaria, deberá dialogar con las explicaciones que se han aportado desde esta perspectiva.

Más adelante abordaremos otros conceptos de la TSD. Por ahora, los conceptos anteriores nos permiten introducirnos en la problemática del conocimiento que nos ocupa: la noción de razón.

## 2) El *medio* de la noción de razón

Parafraseando una cita anterior de Brousseau (1981:110), nos proponemos hacer el censo y la clasificación de la mayor parte de las situaciones en las que la noción de razón interviene. Esta organización deberá permitirnos distinguir características de las situaciones que dan lugar a formas diferentes de intervención de la noción de razón, formas a las que corresponden vínculos diferentes con otras nociones.

Abordaremos en primer lugar la cuestión fundamental del carácter implícito o explícito de la noción de razón, para después entrar en el análisis del universo, amplio y heterogéneo, de problemas en los que funciona esta noción, es decir, el análisis del *medio* de la razón[1].

### *2.1) Definición explícita de la razón y la razón como recurso implícito.*

En un proceso de matematización, una noción puede intervenir en una situación como un recurso *implícito* de resolución, antes de ser definida explícitamente. Es mediante esta consideración fundamental sobre el desarrollo de las nociones matemáticas que identificaremos el papel que la noción de razón puede jugar en el aprendizaje. Este es también el papel que dicha noción jugó en la historia.

*En la historia de las matemáticas y de su enseñanza.*

La noción de razón, en la enseñanza, tiene el sentido de una relación multiplicativa entre cantidades, más precisamente, un cociente, o una fracción (a su vez definida como un cociente)[2]. Esta es la forma en que esta noción fue definida en la teoría de las razones y las proporciones desarrollada en el siglo XVIII y vigente hasta mediados del siglo XX. Es la forma en que todavía se define en los textos escolares en los que aún constituye un objeto de estudio, casi siempre fugaz, y, podemos agregar, es la única definición precisa posible.

> *Se llama razón ó relación de dos números, el cociente del primero por el segundo (Leysenne, 1913:307).*
>
> *Se llama razón geométrica de dos cantidades de la misma especie al cociente de los números que las miden (Hernández, 1954:299).*

---

[1] La forma en que utilizo aquí el término “medio” difiere un poco de la definición que di antes, en la cual el medio forma parte de la situación didáctica. Aquí, ampliamos el sentido para que abarque el conjunto de “medios” específicos que implican a la razón.

[2] Recordemos que nos referimos a la “razón geométrica”: Junto a esta, otras razones (aritméticas, armónicas) han sido objeto de estudio en matemáticas.

Pero entonces surge una pregunta, la misma que viene a la mente una y otra vez al leer el apartado sobre razones con el que se iniciaban todos los capítulos sobre “razones y proporciones” de los textos clásicos de aritmética: ¿para qué un nombre nuevo, “razón”, cuando ya se dispone de otros nombres, “cociente”, o “fracción”?.

En los textos clásicos la respuesta se halla, como lo muestra claramente Bosch en su tesis doctoral (Bosch, 1994)[3], en el apartado que viene después de dicha definición, cuando se introduce la relación de congruencia entre razones, la proporción, es decir, cuando se aborda el *medio* en el que las razones “viven”.

La razón de ser de la razón en estos desarrollos se encontraba entonces en el seno de la teoría de las proporciones cuya función era la de ofrecer un conjunto de técnicas para la resolución de una gran variedad de problemas de proporcionalidad, directa, inversa, simple y compuesta. Es en esta tecnología en donde las razones asumían una forma distinta a las fracciones. Para empezar, la proporción, pieza clave en esta tecnología, se definía como la igualdad de dos razones, pero no se denotaba “a/b = c/d”, sino “a es a b como c es a d”, o bien “a:b :: c:d”. La propiedad fundamental de las razones no se exponía a partir de la equivalencia de fracciones, a/b = na/nb, sino como propiedad de las razones: ”*a* es a *b* como *na* es a *nb”*. Finalmente, en la propiedad fundamental de las proporciones, la regla de tres, en la que se registra el paso de la igualdad de razones a una igualdad de productos de números, la fracción tampoco aparece: si *a* es a *b* como *c* es a *d* , entonces *ad* = *bc*

M. Bosch (1994:165) señala que uno de los factores de éxito y perennidad de la organización clásica es el hecho de proporcionar los medios para formular y estudiar dependencias funcionales mucho más variadas que las que entendemos hoy en día al hablar de proporcionalidad, éstas abarcan todo el ámbito de las funciones homogéneas de varias variables, esenciales para la física elemental. En la enseñanza, dice la autora, “la potencia adquirida por la teoría de las proporciones y la destreza que se adquiría con su manejo permitían que esta herramienta rivalizara con el álgebra elemental”[4].

[3] En su trabajo de tesis doctoral, esta investigadora analiza la forma en que se construye y vive la proporcionalidad en los textos que ella llama “clásicos” y que abarcan del último tercio del siglo XIX a la mitad del siglo XX. Su estudio se ubica en la perspectiva de la antropología didáctica.

[4] Chevallard y Jullien (1989) esgrimen otro motivo por el cual las razones sobrevivieron en la esfera de la enseñanza durante esta época: fueron el vehículo para dar cuenta de los números reales, cuya enseñanza en las escuelas sucede hasta mediados del presente siglo. Las razones se presentaban en los textos clásicos como “fracciones generalizadas”, es decir, fracciones cuyos términos podían ser también fracciones, o radicales.

La teoría de las razones y proporciones, y en particular, la regla de tres, llegó a constituir la herramienta aritmética por excelencia: se enseñaba, además de en la escuela básica, en las especialidades técnicas como administración o contabilidad. La regla de tres formó parte del bagaje cultural de todo ciudadano educado[5].

En virtud de que la resolución de los problemas de proporcionalidad implican el uso de una proporción y que ésta a su vez se forma a partir de dos razones, el orden de presentación que se estableció fue: primero la noción de razón, después la noción de proporción y finalmente la resolución de problemas de proporcionalidad. Orden característico de la desagregación didáctica, que, como muchas veces ocurre, dificulta, al menos al principio de la cadena, comprender el sentido de las nociones introducidas[6].

Por otra parte, dado que las razones se presentaban después de las fracciones y se definían como tales, su función no fue, en cambio, la que tuvieron en la historia de las matemáticas, a saber, la de extender el conjunto numérico de los naturales para abarcar relaciones racionales e irracionales cuando dichas relaciones no eran reconocidas como números.

Los matemáticos griegos, para quienes sólo los naturales tenían el estatuto de números, desarrollaron una sólida teoría de las razones y proporciones. Esta contemplaba razones de números enteros, que corresponden a nuestros racionales positivos, y que de hecho eran estudiadas "como si fueran números" (prop. 5, Libro X de los Elementos), y razones de magnitudes geométricas inconmensurables que ahora identificamos con los números irracionales. La razón no era por lo tanto un número, de hecho, lo que fue objeto de definición precisa y de teorización fueron la equivalencia y el orden de las razones, no la

---

[5] En las enciclopedias de conocimientos generales de la época se encuentra invariablemente un amplio apartado sobre las razones y proporciones, con la principales propiedades de las proporciones y las variantes de la regla de tres. Ver, por ejemplo "proporción" en el Diccionario Enciclopédico UTEHA de 1952.

[6] No obstante, Bosch logra demostrar que en los textos clásicos, si bien la funcionalidad de la noción de razón se manifiesta después de su definición como fracción, es posible identificar un uso implícito de la razón en el desarrollo de diversos temas de aritmética que preceden al capítulo sobre razones y proporciones. Uno de los ejemplos más ilustrativos es una definición de multiplicación de un texto de 1938: *"La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números, hallar un tercero que sea respecto a uno de ellos lo que el otro es respecto de la unidad"*

razón misma[7]. Esta última constituía una especie de elemento primitivo de la teoría, como puede apreciarse en la definición 3 del Libro V de los Elementos:

> *"La razón es una especie de relación en el tamaño de dos magnitudes de misma especie"*

La teoría erudita de las razones, junto con un conocimiento menos sofisticado de las mismas, una "doctrina semi sabia", clasificatoria de las razones (en la edad media se multiplicaron los nombres propios para razones particulares, por ejemplo, superparitens quars, para 7, 4), convivirá hasta el siglo XVII con una teoría de las fracciones que se abre paso con gran dificultad, y será absorbida poco a poco por ésta última. Las fracciones se revelan como el medio eficaz para operar con razones (Chevallard y Jullien, 1989)

En la esfera de las matemáticas, a partir del siglo XVIII, la noción de razón de números perderá interés y será abandonada. Los autores citados señalan dos protagonistas de este cambio: los practicantes del cálculo de la Italia de los siglos XV y XVI y el trabajo de teorización que requerían dichas prácticas, el cual permitió que el álgebra de los árabes se introdujera lentamente en la matemática europea (esto no ocurrió con la razón entre magnitudes, la cual permitiría dar cuenta de los irracionales hasta finales del siglo XIX). Por otra parte, como ya vimos, en la esfera de la enseñanza no sucedió lo mismo.

En los textos para la enseñanza de la aritmética de Europa occidental dirigidos al nivel medio (posterior a la primaria) se conforma una estructura curricular estable desde mediados del siglo XIX en la que la función de extender el campo de lo numérico corre ahora a cargo de las fracciones. El orden de presentación de los contenidos, con algunas variantes poco relevantes, es el siguiente:

1) Los números enteros y las 4 operaciones fundamentales
2) Divisibilidad (MCM, MCD, números primos)
3) Las fracciones simples
4) Fracciones y decimales
5) Magnitudes y medición (en México y en otros países, los sistemas decimales de medición)
6) Números complejos (denominados), potencias, raíces
7) Razones y proporciones
8) Problemas

[7] Puede aplicarse a la noción de razón la misma caracterización que Waldegg destaca de los objetos "número" y "cantidad" de las matemáticas de los griegos "...son las acciones que se realizan sobre las cantidades las que dan sustento a las operaciones aritméticas y éstas, a su vez, las que constituyen la esencia del número; de la misma manera que las acciones de medir, comparar, partir, transformar, etc. son las que dan sentido a la cantidad" (Waldegg, 1996:13)

Así, en la historia de las matemáticas, la noción de razón está en el origen de las nociones de número racional, nombre que conserva la huella de su origen, y de número irracional[8]. Entre ese momento y aquél en el que la razón de números enteros aparece llanamente definida como una fracción, hay una historia de varios siglos a lo largo de la cual las fracciones pasan a ser objetos matemáticos "con pleno derecho". En esta historia, el orden genético en el que las razones preceden a las fracciones resultará invertido: en la enseñanza, las razones se estudian una vez que ya se cuenta con las fracciones.

*En el aprendizaje: proceso de matematización*

Podemos precisar ahora la hipótesis que estudiaremos en este trabajo[9]: en un proceso de matematización, antes de disponer de las fracciones, es posible identificar un trabajo en el nivel de razones en tanto parejas de cantidades que se expresan con números enteros. Desde esta perspectiva, las razones de números enteros funcionarían como la forma implícita, germinal, de las fracciones. Su estatuto no es necesariamente el de objetos explícitamente definidos, o reconocidos por quien las utiliza, sino el de relaciones que pueden permanecer implícitas. La lectura en términos de razones constituye, al menos durante un tiempo, un acto de un observador que posee un conocimiento explícito sobre este objeto.

Debido a que la noción de razón puede no ser nombrada de manera explícita (lo es cuando se dice, por ejemplo, razón de *n* a *m*, o "*n* es a *m*"), diremos que está **implícita** en las acciones de un sujeto siempre y cuando se manifieste a través de la puesta en relación con otras razones: por la posibilidad de comparar razones y de identificar razones equivalentes.

El proceso en el que las razones devienen objetos **explícitos** de estudio desembocaría entonces en la construcción de los números (enteros y fraccionarios) como expresión de razones. Desde este punto de vista, las fracciones se manifiestan como la forma explícita de las razones.

Lo anterior significa que la noción de razón podría jugar en el aprendizaje, durante un período de tiempo, un papel comparable al que jugaron en la historia de las matemáticas:

[8] Euclides, en la Definición 1 del Libro X de Los Elementos, llama "racionales" a las magnitudes (segmentos, cuadrados) conmensurables con una magnitud dada, e "irracionales" a las que son inconmensurables.
[9] Esta hipótesis subyace a las preguntas con las que abrimos la problemática en la introducción general.

el de extender un conjunto numérico conocido, los naturales, para dar cuenta de relaciones que salen de dicho conjunto, en este caso, los racionales. Precisemos esto con un ejemplo:

Se tiene en casa un paquete de hojas. Se quiere comprar en la tienda un paquete de hojas del mismo espesor. ¿Cómo determinar el espesor, siendo que éste es demasiado pequeño para ser medido con una regla?. Una solución posible es proporcionar el espesor de un paquete de hojas, por ejemplo, 100 hojas, 8 mm. Se ha establecido una relación de conmensuración entre dos magnitudes, el espesor de la hoja y el milímetro. Esta relación permite determinar el espesor de una hoja sin expresar su medida fraccionaria (8/100 de mm). Una razón entre cantidades permite expresar una medida fraccionaria sin hacerla explícita con un número.

Nos proponemos identificar las situaciones de acción en las que la noción de razón puede funcionar como recurso implícito, previo al uso de los números en su función de razones, y, también, estudiar los procesos de "cuantificación" de las razones en los que se registra el paso de lo implícito a lo explícito, de la razón al número.

Esta perspectiva implica en cierta forma volver a invertir el orden didáctico de presentación de las nociones: la razón no nos interesa aquí como una noción que se define a partir de la fracción y del cociente, sino como una noción implícita que precede a la fracción. Nos interesa en tanto elemento precursor de la construcción de las nociones de número y de aplicación.

Destacar este papel de la razón mediante un análisis didáctico de situaciones constituye el propósito del estudio que realizaremos en este capítulo.

Precisiones:

En general, para referirnos a la relación multiplicativa entre dos cantidades aun no expresada mediante un solo número hablaremos de razones. Para referirnos a dicho número, hablaremos del *valor de la razón*, o del *operador*. Otros términos utilizados en algunos textos clásicos que todavía distinguían a la razón de su valor, son "división indicada" y "exponente de la razón" (Bosch, 1994:174-179)[10].

[10] En algunos textos franceses del siglo XIX se usaba la palabra "rapport" para referirse a la razón, y la palabra "raison" para referirse al valor de la razón "Chevallard y Jullien (1989:127)

Para diferenciar las razones cuyo valor es un número entero de aquellas cuyo valor no es entero (es decir, razones cuyo antecedente es múltiplo o no de su antecedente) diremos simplemente, para abreviar, “razones naturales” (o “enteras”) y “razones racionales” (o “no enteras”).

*El estatuto de la noción de la razón: un descriptor lingüístico*

La exigencia de una definición precisa de la razón conduce a hacer explícito el número que expresa la razón, o bien a caracterizar la relación de congruencia entre razones, lo cual estaría a un paso de constituir la definición misma de los racionales. Nos interesamos aquí por el momento previo a esta definición, cuando la razón puede funcionar para dar cuenta de aquello que no se ha definido explícitamente. En este momento, la razón se manifiesta en las relaciones que se establecen entre las razones (comparación, equivalencia), y mediante expresiones de lenguaje, no formalizadas, en las que lo que se hace explícito son los objetos que se ponen en relación. Estas expresiones pueden ser muy diversas, desde las convencionales como “la razón de A a B”, hasta las más implícitas como señalar, en una igualdad de razones “aquí y aquí es lo mismo”, o como aproximar una razón racional con números enteros, por ejemplo, “es más del doble pero menos del triple” Llamaremos a este conjunto de expresiones “descriptor lingüístico”.

La función del descriptor lingüístico es, por lo tanto, la de extender el uso del conjunto de números del que un sujeto dispone en un momento dado, al que llamaremos estructura explicitable, los naturales por ejemplo, para dar cuenta del conjunto de números al que pertenece la relación en juego y que el sujeto puede no conocer. Llamaremos a este último “estructura congruente”.

La estructura congruente es entonces el conocimiento que subyace a la situación, el modelo matemático de la situación, que puede estar implícito en las acciones del sujeto. Podríamos decir que esta estructura abarca los conocimientos actuales del sujeto, y los potenciales.

La estructura explicitable del alumno es su repertorio personal de saberes y de ciertos conocimientos en un momento dado. Entonces, es justamente cuando hay divergencia entre estas dos estructuras que la noción de razón, como relación entre cantidades no definida como número, recupera la función de extender la estructura explicitable para dar cuenta de números que aún no se conocen. Las expresiones específicas que se utilizan para ello constituyen un descriptor lingüístico.

Las razones de magnitudes inconmensurables de los griegos, vistas desde nuestro conocimiento actual, fueron un descriptor de los números irracionales.

Nos interesa estudiar las razones de números enteros, como descriptores de los racionales, como tránsito entre los naturales y éstos, en su función de expresar medidas y en su función de expresar un tipo particular de relaciones entre medidas, las aplicaciones lineales.

Precisiones.

Cuando hablamos del conjunto numérico disponible para un sujeto en un momento dado (estructura explicitable), los naturales o los racionales, deberemos distinguir en qué nivel dicho conjunto está realmente disponible. El hecho de que los alumnos conozcan el conjunto de números naturales en tanto expresiones de una cantidad, cardinales, o medidas, no implica que dispongan de este mismo conjunto de números en tanto expresiones de razones entre cardinales o medidas: es posible que, respecto a una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades enteras, los alumnos sean capaces de generar pares de cantidades que guardan la misma razón, sin llegar a expresar dicha razón (constante) con un factor.

Una consecuencia de esta observación es que, en el estudio de la noción de razón como lo implícito de los números, deberemos prestar atención, en primer lugar, al proceso de cuantificación de razones naturales. Por supuesto, esto mismo puede ocurrir con respecto al conjunto de fracciones: éstas pueden estar disponibles en un momento dado en calidad de medidas, pero no necesariamente en tanto razones entre medidas.

Por otra parte, la expresión de una razón mediante una pareja de cantidades y no mediante un solo número (entero o fracción), puede obedecer, en ciertas circunstancias, a un motivo distinto al de no disponer del conjunto al que pertenece esa razón. Uno de estos motivos puede ser simplemente la mayor claridad o expresividad que proporciona la expresión mediante dos números. Por ejemplo, en las descripciones estadísticas, suelen ser más claras las expresiones del tipo “dos de cada tres”, que “0.66”. Por otra parte, también en este ámbito, puede no tener el mismo significado afirmar que dos elementos de tres tienen determinada característica que afirmar que 2 mil elementos de tres mil la tienen. En ciertos casos no interesa sólo la razón, interesan también las cantidades.

### *2.2) Los principales componentes del medio de la noción de razón*

El conjunto de situaciones en las que puede estar en juego una razón es extremadamente vasto. Para estructurar este conjunto, o por lo menos parte importante del mismo, procederemos de la siguiente manera: primero, nos preguntaremos acerca de la naturaleza de los objetos susceptibles de entrar en una relación de razón: esto nos llevará a distinguir los universos de los objetos físicos, de las magnitudes, de las medidas concretas y de los números abstractos.

Enseguida, determinaremos un conjunto pequeño de *situaciones fundamentales de la noción de razón*, es decir, de situaciones que implican esta noción de manera característica, y que son susceptibles de generar, en los distintos ámbitos, mediante determinadas variables, a la mayoría de las situaciones en donde ésta funciona. Estos dos elementos, la naturaleza de los objetos que se ponen en relación y las situaciones fundamentales, nos permitirán inferir los principales roles que juega una razón en situaciones específicas, así como un mapa general de las principales familias de situaciones. Podremos entonces, en la segunda parte de este capítulo, darnos a la tarea de estudiar el comportamiento de variables más finas en cada una de estas familias.

*La naturaleza de los objetos que se ponen en relación*

La génesis de las nociones de aritmética que son objeto de enseñanza en la escuela primaria está ligada a la cuantificación de magnitudes discretas y continuas. Si bien hoy en día la huella de este origen tiende a borrarse y las nociones de aritmética se presentan como saberes culturales generales, en la ámbito de la enseñanza, en aras de dar cierto sentido a los conocimientos, ha sido necesario “desandar el camino”, recuperando los contextos fundamentales en los que éstos constituyen herramientas de solución, y esto independientemente del enfoque didáctico: el trabajo con magnitudes está presente en la enseñanza como espacio de aplicación de conocimientos adquiridos, en el enfoque clásico, y como fuente de problemas que propician la adquisición de conocimientos, en enfoques más modernos.

No obstante, la presencia del trabajo con magnitudes y con la medición en la enseñanza, es conflictivo: De alguna manera se encuentra en el cruce de dos tensiones contradictorias: mientras que su presencia obedece a la necesidad didáctica de “dar sentido” a las nociones que se enseñan, se registra todavía con frecuencia una tendencia a apresurar la presentación de saberes descontextualizados, en su forma más general.

Así mismo, se ha prestado probablemente poca atención al control teórico del trabajo con magnitudes y con medidas de magnitud que se realiza en el nivel básico[11].

Una gran parte del trabajo que se realiza hoy en día en didáctica puede describirse como el esfuerzo por estudiar la necesaria recontextualización de los saberes, así como los procesos sucesivos de descontextualización.

La noción que nos ocupa, la razón, no es la excepción, por el contrario, las magnitudes y las medidas constituyen los "espacios vitales" de la noción de razón. Es en ellos que se establecen las situaciones fundamentales que identificaremos y es en ellos también en donde deberemos identificar las variables de complejidad de dichas situaciones. A continuación vamos a especificar estos distintos espacios. Partiremos de una caracterización realizada por Brousseau del medio de la medida.

Brousseau (1992 y 1999) distingue en el entorno de la medición los siguientes ocho "universos"[12]:

1) Los objetos portadores de la magnitud (O)
2) La magnitud, objeto de comparación, de orden, o de medición (longitud, superficie, peso, tiempo, velocidad, etc.) (M)
3) El valor particular de magnitud, o "cantidad de magnitud", independientemente de la medida. La noción de "cantidad" se define como una clase de equivalencia formada por cantidades equivalentes. Además de la relación de equivalencia, deben poderse definir ciertas relaciones y operaciones sobre las cantidades: un orden, la unión, la intersección, el complemento. Los conjuntos formados por esas "cantidades de magnitud" constituyen estructuras matemáticas (clanes, tribus, espacios métricos) (S)[13].

---

[11] Freudenthal se sorprende, por ejemplo, de la dificultad de los matemáticos para explicar a los maestros cual es el estatuto de las unidades en las escrituras aritméticas, por ejemplo, en 2cm X 2cm = 4cm$^2$, ¿los centímetros se comportan como las literales en álgebra?. Entre las unidades que se manipulan en la aritmética y las que desarrolla la física, existe una *tierra desierta* que nadie ha explorado ni intentado "viabilizar" de manera sistemática (Freudenthal, 1973, citado por Bosch, 1994: 390)

[12] El autor aclara que el término "universo" debe comprenderse como una metáfora que precede al concepto más preciso de "medio".

[13] En español (y también en francés) suele utilizarse la palabra "magnitud" para referirse tanto a un tipo genérico de magnitud ("la longitud", "la superficie", etc.) como para referirse a un valor particular de una magnitud (por ejemplo, la magnitud de este terreno). Mientras no haya lugar a confusión, mantendremos esta ambigüedad. En caso contrario, para referirnos a la segunda connotación, diremos "cantidad".

4) La medida- función: aplicación aditiva de un espacio métrico en los reales. Esta función asigna a cada clase de equivalencia un número único mediante un procedimiento que debe ser precisado, su medida. Para que la función sea una medida, tiene que ser además aditiva, es decir, a la unión de dos magnitudes debe corresponderle la suma de las medidas de cada una (F).

5) La medida- imagen, es decir, el valor numérico, natural, decimal, racional o real asignado a una magnitud por la función medida (C), así como el conjunto de todas la imágenes posibles: naturales, racionales positivos, reales positivos, el intervalo (0, 1) de los reales etc. (se pueden considerar también, aunque en un sentido ligeramente diferente, otras estructuras como imágenes de magnitudes: reales (positivas y negativas), complejas, vectoriales, tensoriales, etc.)

6) La medida "concreta", formada por el par (medida, unidad). Hasta hace no mucho tiempo, a esta medida se le llamaba en la enseñanza, "número concreto", por oposición al número sin unidad, que era llamado "número abstracto". Si bien estos nombres han dejado de utilizarse, la distinción sigue siendo totalmente pertinente.

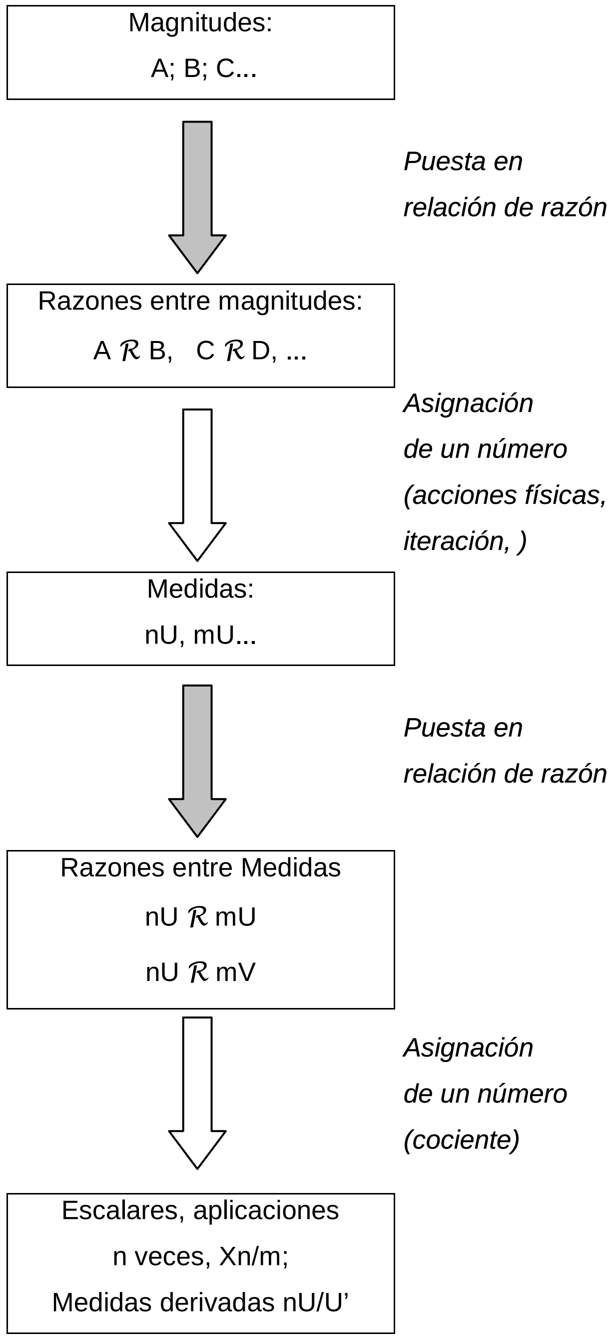
7) La medición: la operación material, aplicada a las magnitudes que permite determinar prácticamente la medida de un objeto. En la medición efectiva de un objeto, la determinación de una medida implica también un intervalo de incertidumbre (por ejemplo, la longitud de la mesa mide 1.35 m +/- 0.002m). La metrología es la ciencia de la medición, estudia los métodos para determinar una medida, así como el cálculo de errores.

8) La evaluación de las medidas, refiere a una especie de juicio sobre la medida. Da cuenta del tamaño relativo de una medida, de su frecuencia o su rareza, de su calidad, de su precisión. Así mismo, sirve como medio de control en las actividades de medición y en los cálculos con medidas.

Esta caracterización del medio de la medida constituye un punto de partida para caracterizar el medio de la razón. En primer lugar la noción de razón constituye al procedimiento mismo de medición: la comparación de la unidad con la cantidad de magnitud que se mide. No obstante, antes de la medida, podemos tener razones entre magnitudes sin ninguna asignación de un número y, después de la medida, podemos tener una razón entre medidas, en cuyo caso puede decirse que las medidas pasan de ser razones (entre magnitudes) a ser ellas mismas objetos de una razón.

Podemos identificar dos acciones, 1) poner en relación de razón y 2 ) asignar un número a dicha razón, las cuales, aplicadas de manera sucesiva y recurrente, describen el paso del conjunto de magnitudes, al conjunto de medidas concretas y de éste, al conjunto de relaciones entre medidas concretas, entre las cuales se encuentra las aplicaciones. Las razones aparecen, cada vez, como precursoras de las medidas, y, al término de la cadena, como precursoras de las relaciones escalares y de las aplicaciones. Las medidas, por su parte, aparecen como la cuantificación con un número de las razones (ver esquema de la siguiente página).

**Naturaleza de los objetos que se ponen en relación**




La asignación de un número para expresar la razón remite a lo que hemos llamado la estructura congruente (conceptos actuales más potenciales). Esta asignación, que se realiza de maneras muy diferentes según el nivel en el que nos situemos (magnitudes, medidas concretas, números), describe, como ya dijimos, el paso de la razón como lo implícito del número, al número en la función de razón.

Por lo tanto, en cada nivel puede registrarse una divergencia entre la estructura congruente que subyace a la situación y la estructura explicitable del sujeto. En cada nivel puede distinguirse un trabajo con razones como lo implícito de los números, de un trabajo con números que cuantifican una razón. Finalmente, en cada nivel las razones, los descriptores lingüísticos y los números que cuantifican a las razones asumen funciones y características específicas.

Este tránsito de un nivel a otro describe bien un proceso de matematización, en el que las herramientas implícitas que se desarrollan en un primer momento devienen objetos de saber y éstos, en un segundo momento, devienen a su vez los objetos de una nueva problemática de la que surgirán nuevas herramientas y nuevos saberes.

A continuación veremos nuestros candidatos a situaciones fundamentales. Con ello, podremos darnos a la tarea, en la segunda parte de este capítulo, de analizar la influencia de las distintas variables en estas situaciones.

*Situaciones fundamentales*

Cada vez que se pregunta por el factor que vincula a dos cantidades (¿cuántas veces A es B? ¿qué fracción de A es B?, ¿qué porcentaje de A es B? ¿cuál es el factor de escala?) entra en juego la cuantificación de una razón con un número. En otras situaciones, el factor está dado explícitamente, y la tarea consiste en aplicarlo a una cantidad, o a varias. En ambos casos, el factor, es decir, el número que cuantifica la razón, es explícito, con lo que se evita la tarea de identificar la pertinencia de una razón, la dificultad puede ser únicamente técnica.

Nos interesaremos aquí por las situaciones en las que la razón funciona como un medio implícito de acción. Por lo tanto, el número o factor que cuantifica la razón no se da, ni se pregunta por él explícitamente.

*Esquema general de la Situación Fundamental de Reproducción de una razón” (SFR)*

En un medio determinado, se establece una relación entre dos conjuntos de magnitudes, de medidas concretas, o de números. Los valores de un conjunto varían en función de los valores del otro. La relación se caracteriza por el hecho de que la razón entre dos valores cualesquiera de uno de los conjuntos es siempre igual a la que guardan los valores correspondientes del otro. Llamaremos a estas razones *internas* a cada conjunto. O bien, la razón que hay entre un valor de un conjunto y la que le corresponde en el otro es invariante (razones externas).

| | |
|---|---|
| Conjunto 1 Conjunto 2<br>A A’<br>B x<br>C y | **Razones externas:**<br>A/A’ = B/x = C/y<br>**Razones internas:**<br>A/B = A’/x;<br>B/C= x/y;<br>A/C = A’/y |

Podemos describir el funcionamiento del medio en esta situación como un autómata que, para cada valor del conjunto 1, genera un valor en el conjunto 2, y que se caracteriza por el hecho de que la razón entre cada uno de estos pares de valores es constante, aunque esto no está explícito en la situación. Dados los valores del conjunto 1, el problema consiste entonces en *anticipar* los valores correspondientes del conjunto 2, a partir de conocer por lo menos uno de los valores de este último. Identificar una razón (interna o externa) y reproducirla constituye entonces el procedimiento de resolución. Esta situación incluye a la situación típica de anticipar el cuarto valor faltante en una proporción (problemas de cuarta proporcional).

La consigna deberá entonces proporcionar por lo menos tres valores y preguntar por un cuarto valor. La razón no aparece explícitamente en la consigna, ni como dato, ni como aquello que se busca. Aparecerá como medio de resolución. A continuación, daremos cuerpo a este esquema general, al considerar la naturaleza de los objetos que se ponen en relación.

*La variable “naturaleza de los objetos que se ponen en relación de razón”*

La consideración de esta variable lleva a distinguir tres niveles en los que la SFR puede funcionar:

SFR-0: Los objetos en relación son magnitudes, no hay intervención de medidas. Este es el ámbito por excelencia de la Geometría Euclidiana (A:B::A’:B’)

SFR-1: Los objetos de un conjunto son magnitudes, los del otro conjunto son sus medidas. La razón entre una cantidad de magnitud L y otra cantidad U de la misma naturaleza que funciona como unidad, se expresa mediante una razón numérica (m, n) de la cual se desprende la medida, *m/n*, de L. En este nivel, la situación fundamental da lugar a los números en su función de medidas, es la situación fundamental de la medida (L:U::m:n)

SFR-2: Los objetos de ambos conjuntos son medidas. Las razones internas entre medidas dan lugar a los números en la función de escalares (operadores internos) y las razones externas dan lugar a los números en la función de operadores externos constantes, de aplicaciones lineales. Estamos en el ámbito de los problemas clásicos de aritmética, por ejemplo, "si 2 metros de alambre pesan 2.7 kilogramos, cuánto pesan 5 metros de alambre?" (nU; mU::n'U':m'U').

En cada uno de los tres niveles, el esquema general de la situación fundamental dará lugar a situaciones con características específicas. Por ello, consideraremos en cada nivel una situación fundamental específica, y sus variantes. Cabe señalar también que las variantes que se obtienen en cada nivel pueden presentar distintos grados de dificultad, por lo cual los tres niveles no son niveles de dificultad.

Por otra parte, las situaciones, para funcionar plenamente como situaciones adidácticas, deberán ofrecer la posibilidad de validar la adecuación del valor encontrado. En un primer momento, antes de que las propiedades que caracterizan la relación lineal sean conocidas explícitamente, la verificación puede ser empírica: consistiría en que, una vez anticipado el valor, éste pueda encontrarse también directamente en el *medio*. Por ejemplo, si la relación en juego es entre los pesos de distintos objetos y los alargamientos que éstos imprimen al resorte de un dinamómetro, la medida anticipada de un alargamiento puede verificarse directamente poniendo el peso correspondiente en el dispositivo y midiendo. De esta manera, los alumnos tienen la oportunidad de constatar relaciones que no son adecuadas.

*Los principales papeles de la razón*

Hemos dicho que la función general de la noción de razón en un proceso de aprendizaje puede ser el dar cuenta de una relación multiplicativa cuando aún no se dispone del número que expresa a esta razón, es decir, extender la estructura explicitable. Una vez que se dispone de dicho número, hablaríamos del número en la función de expresar una razón. Sin embargo, tanto la razón como el número que la expresa juegan, en las situaciones que hemos revisado, papeles más específicos que pueden distinguirse:

- Expresar una *medida*, por ejemplo en L = 5cms, o A = 5 manzanas.

Y, en el marco de una relación lineal entre dos conjuntos:

- Expresar la relación *escalar* entre dos valores de un conjunto, que se debe conservar entre los valores correspondientes del otro conjunto. Podríamos decir que se “mide” un valor con el otro. Por ejemplo, si tres lápices cuestan cinco pesos, para averiguar el precio de 6 lápices consideramos que esta cantidad es el doble de la anterior, y por lo tanto debe costar el doble. “El doble” es la relación escalar entre las dos cantidades de lápices, es la medida de seis lápices, con 3 lápices como unidad.
  No obstante, debemos distinguir los papeles de la razón como medida y como escalar por el hecho de que se desempeñan en situaciones distintas y tienen por lo tanto propósitos distintos: expresar una medida para reproducir una cantidad, o expresar una relación escalar para conservarla en otro conjunto.
- Expresar la razón contante entre dos conjuntos de cantidades. En este caso, el número que expresa a la razón juega como el coeficiente de una *aplicación lineal.*

A título de ejemplo, veamos cómo el número 5, en $L_1 = 5\ L_2$, valor numérico de la razón entre $L_1$ y $L_2$, puede jugar los tres papeles que hemos destacado:

- El número cinco expresa la **medida** de $L_1$ con $L_2$ como unidad.
- $L_1$ y $L_2$ son dos lados de una figura que va a ser reproducida mediante una homotecia. El número cinco expresa la **relación escalar** que éstos guardan y que debe conservarse en la reproducción.
- Nuevamente en una homotecia, $L_1$ es un lado de la figura original y $L_2$ su lado homólogo en la reproducción. El número cinco expresa la **razón constante** que deben guardar todos los demás pares de lados homólogos: juega como coeficiente de una **función lineal**.

Dado el vínculo estrecho entre las nociones de razón, de cociente y de fracción (estos dos últimos constituyen el valor de la razón), los tres papeles que hemos identificado son también tres papeles de la división y de las fracciones. El cociente de una división puede expresar una medida (cuando una medida concreta es objeto de una partición), puede expresar una relación escalar entre dos medidas (cuando se busca el número de veces que una cantidad es otra cantidad), y puede expresar, finalmente, el coeficiente constante de una función lineal. Lo mismo puede decirse de las fracciones, las cuales son a fin de cuentas, una forma de expresión numérica del cociente.

Si bien puede preverse, nuevamente, una dificultad creciente en el uso de la razón como expresión de una medida, como expresión de una relación escalar entre dos medidas y finalmente como función, cada uno de estos papeles puede estar afectado por variables de la situación que los vuelven más o menos difíciles.

*Otras situaciones derivadas de las relaciones y operaciones con razones*

Al considerar otras relaciones y operaciones entre las razones, surgen nuevos problemas que corresponden a nuevas situaciones. Vemos algunas de las relaciones más importantes:

- la comparación aditiva de razones : se trata de determinar cual de dos razones es mayor.
- la composición: dada una razón entre los elementos de dos conjuntos A y B, y una razón entre los elementos de los conjuntos B y C, determinar la razón entre los elementos de los conjuntos A y C. A nivel de los números que expresan a las razones, tenemos aquí una multiplicación de operadores.
- la comparación multiplicativa (razón de razones): los objetos que se ponen en relación de razón son ahora razones. Por ejemplo, en el contexto de la homotecia, dados dos “agrandamientos”, puede establecerse cuántas veces más agranda uno que el otro. A nivel de los números, tenemos un cociente de operadores.
- La suma de razones: no es fácil encontrar situaciones que den lugar a una suma de razones, desde el momento en que las razones no son cantidades “extensivas” (más adelante nos detendremos en este punto). Uno de los casos en donde se puede identificar fácilmente una suma de razones es cuando éstas se expresan como porcentajes, por ejemplo: el 20% de la mezcla es pintura roja, el 30% es pintura blanca, lo demás es agua. Por lo tanto, la parte de la mezcla que es pintura es 20%+30% = 50%.

Al considerar estas relaciones y operaciones con razones, pasamos de un nivel en el que éstas funcionan como relaciones entre *cantidades,* en una situación en la que se pide determinar una cantidad, a un nivel en el que las razones mismas devienen los objetos de las relaciones. A la larga, las relaciones y operaciones entre razones van a requerir que las razones se hagan explícitas y se cuantifiquen con un número. Una vez que esto se ha logrado, podemos decir que la función de las razones, como parejas de cantidades en relación que permiten dar cuenta de relaciones que aún no se expresan como números, termina.

Sin embargo, por lo menos en el caso de las dos primeras relaciones, la comparación aditiva y la composición de razones, la objetivación de la razón como un número no es un requisito para poder abordarlas. Estas situaciones comparten con la primera (reproducción de la razón) la característica de poderse plantear en los distintos ámbitos, entre cantidades de magnitud, o entre medidas.

Así, las situaciones de comparación y de composición de razones pueden funcionar, junto con la situación de reproducción de una razón, como situaciones adidácticas de la noción de razón. Las consideraremos por ello como otras dos situaciones fundamentales de la noción de razón, aunque de estas dos sólo estudiaremos con detenimiento la de comparación de razones (Situación Fundamental de Comparación de razones, SFC). La situación de composición será objeto de comentarios como una variante más de la situación central, la de reproducción de una razón.

### *2.3) Hacia un análisis más detallado del medio*

Hemos precisado la hipótesis central de este trabajo: destacar el papel de la noción de razón en la construcción de los números como expresiones de una cantidad y como expresiones de relaciones entre cantidades.

Hemos especificado los principales componentes del *medio* de la razón:

- Los conjuntos específicos en los que se establece una relación de razón: magnitudes, medidas concretas y números;
- Los procesos de cuantificación de las razones que corresponden a la construcción explícita de los números en su función de razones y que se realiza de manera cualitativamente diferente dependiendo de la naturaleza de los objetos entre los que se establecen las razones.
- los conjuntos de números que expresan explícitamente dichas razones (la estructura congruente): los naturales, los racionales o los reales (positivos).
- El conjunto de números disponible por un sujeto en un momento dado, su estructura explicitable, cuya divergencia con la estructura congruente puede dar lugar a la utilización de razones como formas previas, implícitas de los números.

- El descriptor lingüístico, conjunto de expresiones mediante las cuales se puede hacer referencia a la razón.

La especificación de estos componentes y de las situaciones fundamentales en las que interviene una razón así como la diferenciación de los principales papeles que esta noción juega, proporcionan una primera estructuración del medio de la razón. En estos universos deberemos identificar las variables que generan las principales situaciones con distinto grado de dificultad. Esto es lo que haremos a continuación.

Organizaremos la continuación de este análisis en los siguientes subcapítulos.

3. SFR-0 y SFC-0: reproducción de una razón y comparación de razones en el nivel de magnitudes, sin intervención de medidas
4. SFR-1: reproducción de una razón, de un conjunto formado por magnitudes, a un conjunto formado por sus medidas (situación fundamental de la medida)
5. SFR- 2: reproducción de una razón entre conjuntos de medidas: hacia la noción de aplicación lineal
6. SFC-2: comparación de razones entre medidas

Centraremos el estudio en los ámbitos en los que intervienen medidas (subcapítulos 4, 5 y 6), y haremos sólo un comentario breve acerca del ámbito de las razones entre magnitudes, sin intervención de medidas (subcapítulo 4), para mostrar, mediante algunos ejemplos, la posibilidad de un funcionamiento muy precoz, cualitativo e intuitivo, de la noción de razón en este nivel. El análisis más fino de las situaciones de este ámbito, y sobre todo, de los procesos a que pueden dar lugar rebasa el propósito de este trabajo, en el que nos interesamos directamente por las relaciones aritméticas.

## 3) La reproducción y comparación de razones entre magnitudes (SFR-0 y SFC-0)

La semejanza geométrica constituye posiblemente el primer ámbito en el que los niños identifican, de manera cualitativa e inconsciente, la conservación de razones. Al respecto, Freudenthal (1983) llama la atención sobre una gran variedad de acciones o consideraciones de los niños que reflejan un manejo operativo de la semejanza, por ejemplo, el reconocer un objeto a diferentes distancias, el saber que los dibujos que miran (animales, muebles, coches, etc.) representan objetos reales, el poder reconocer casos en los que la semejanza no se respeta (una cabeza demasiado grande para el tronco, algo demasiado ancho comparado con su longitud, etc).

En el ámbito de la comparación cualitativa de cantidades o de la apreciación del tamaño de una cantidad, ocurre también una utilización implícita de la noción de razón, por ejemplo, afirmaciones como “esa persona es alta”, o “ese jardín es pequeño”, conllevan, de manera implícita, una comparación con un conjunto de elementos similares: una persona es alta en comparación con el rango en el que se ubican las alturas de la mayoría de las personas que conocemos. Cuando se comparan explícitamente dos cantidades de una misma magnitud, por ejemplo la altura de dos personas, mediante expresiones como “un poco más grande o mucho más grande” se considera, de manera implícita y cualitativa, la razón que guarda la diferencia entre las cantidades con una de éstas: con cinco centímetros de diferencia un alfiler es mucho más largo que otro, mientras un poste será apenas un poco más alto que otro.

En la última década, se han realizado estudios de lo que se ha llamado la “proto razón” cuyo propósito es explorar, y eventualmente contribuir a desarrollar esta capacidad precoz para considerar, en ciertas tareas y de manera cualitativa, aspectos de la noción de razón (Resnick y Singer, 1993).

En este nivel de relaciones cualitativas es posible ya concebir algunas variantes de la situación fundamental 2 (reproducción de una razón), veamos algunos ejemplos.

*Identificación de una razón que no se conserva.*

En la SFR se plantea una relación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Consideremos el caso de una homotecia, y en particular la variante en la que todos los valores están dados y de lo que se trata es de identificar una cantidad que rompe la estructura lineal, es decir, una cantidad cuya razón con otra del mismo conjunto no se conserva en el otro conjunto, o cuya razón con su homóloga no es la misma que la de los demás pares de cantidades.

Nos interesa aquí el caso más simple, en el que dicha cantidad puede ser identificada a simple vista, es decir, la diferencia entre la razón “errónea” que se considere y aquella contra la cual se compara, debe ser notoria.

Pueden considerarse dos casos: en el extremo, una de las razones es mayor que uno mientras que la otra es menor o igual que uno. Esto implica romper la conservación del orden de un conjunto al otro. Con el lenguaje de las funciones diríamos $A<B$ mientras que $f(A) > f(B)$, es decir, la relación no conserva el orden. Considerando que la primera propiedad de la linealidad que los niños se apropian es la de la conservación del orden (Piaget et. al., 1968; Ricco, 1982; Resnick y Singer, 1993), este puede ser el caso en donde identificar el error es más fácil. En el caso menos extremo en que el orden se respete, entonces la diferencia en el tamaño de las razones errónea y correcta debe ser suficientemente grande.

El propósito didáctico de una situación con estas características puede ser el de propiciar, a nivel implícito y cualitativo, la comparación de razones así como el desarrollo de un lenguaje informal, (un conjunto de descriptores lingüísticos), que de cuenta del carácter relativo de los tamaños como “es muy grande en comparación con...”.

*Clasificación de objetos de configuraciones a escala.*

Todavía en un nivel cualitativo, sin intervención de razones entre números, es posible considerar variantes de la SFR, en las que se trata de formar conjuntos de cantidades en los cuales se conservan determinadas razones entre las cantidades. Veamos un ejemplo:

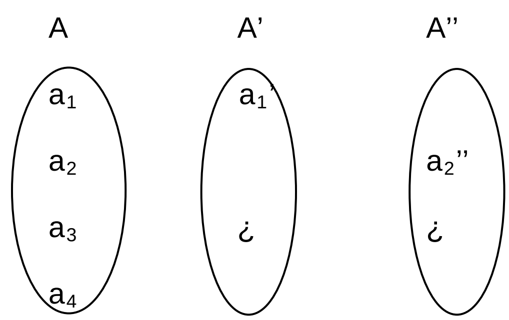
Los objetos de dos o tres configuraciones, realizadas en escalas distintas, se revuelven. Se trata de clasificar los objetos “poniendo juntos los que pueden ir juntos”, o más precisamente, se aclara que se trata de tres “mundos”, uno donde las cosas son muy pequeñas, otro donde son medianas y otro donde son grandes, se trata entonces de poner juntos los objetos de cada “mundo”. Las configuraciones pueden tener algunos objetos en común, los cuales podrán clasificarse entonces por “chico mediano y grande” (relaciones de orden entre configuraciones), y algunos objetos no compartidos, para los cuales será necesario considerar relaciones internas, por ejemplo, si se trata de animales y hay un solo tigre, ¿cómo saber en qué zoológico va?. No puede ser del mismo tamaño que el ratón, tampoco puede ser más grande que el elefante...

*Situaciones más complejas.*

En este nivel de la comparación cualitativa, puede haber situaciones con un grado de dificultad mucho mayor, por ejemplo, cuando la comparación solicitada porta sobre el tamaño de los "agrandamientos" mismos, o sobre objetos que no están visibles y cuyo tamaño debe inferirse de los que están visibles.

Por ejemplo, se tienen dos reproducciones A' y A'' de una configuración A. A' es un poco mayor que A, A'' es mucho mayor. Los alumnos tienen a la vista los objetos de la configuración original (a, $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc) y las reproducciones de dos objetos diferentes, uno de A' ($a'_1$) y el otro de A'', ($a''_2$).

Deben anticipar en cuál de las dos reproducciones es más grande un tercer objeto $a_3$  Por ejemplo, si se trata nuevamente de un zoológico, pueden ver todos los animales de A, el elefante de A' y el ratón de A''. Deben anticipar en cuál de las reproducciones, A' o A'', el gato es más grande.




La situación puede llevar a comparar el tamaño de los dos agrandamientos (SFC), es decir, $a_1\mathcal{R}a_1'$ versus $a_2\mathcal{R}a_2''$, o bien, a imaginar, o a dibujar el objeto de la comparación en cada conjunto, considerando las razones internas: $a_1'\mathcal{R}a_3'$ y $a_2''\mathcal{R}a_3''$ (dibujar un gato en A', considerando el tamaño del ratón, y gato en A'', considerando el tamaño del elefante).

*Limitaciones de las situaciones anteriores.*

En este nivel de las comparaciones cualitativas, las variantes de situaciones que hemos esbozado en general no ofrecen una forma de verificar el acierto o el error de las decisiones. Los errores no identificados, o mal identificados, así como los desacuerdos quedan por ahora sin la posibilidad de ser confrontados con el medio. No obstante, las divergencias en las opiniones o en las decisiones de los niños de un grupo pueden dar lugar a formulaciones que den cuenta de cierto nivel de explicitación de los criterios, por ejemplo: este ratón va aquí porque es el más chico (orden entre configuraciones), el gato va aquí porque es más grande que el ratón (orden al interior de una configuración), o, en la primera variante “esta taza es muy grande en comparación con la mesa”.

*La determinación de un valor desconocido.*

Resulta más difícil plantear en este nivel en el que no intervienen aún las medidas, la situación fundamental de reproducción de una razón (SFR) en la que se trata de encontrar un valor faltante en una proporción. Veamos, a título de ejemplo, el caso en el que se trata sólo de determinar un valor aproximado:

En la situación de clasificación que vimos antes, una vez clasificados los conjuntos por su tamaño, podría añadirse una tarea como la siguiente: “en los zoológicos mediano y grande no hay tigre. Dibujen los tigres de un tamaño que consideren correcto”. Una vez más, el valor didáctico de la situación está en la discusión que puede suscitar la comparación de los distintos tigres realizados por los niños. En ella se pueden hacer explícitos juicios como “demasiado grande en comparación con...” que apelan a razones internas a cada conjunto, o “el tigre del zoológico mediano no puede ser más chico que el tigre del zoológico chico”, que apela a relaciones entre elementos homólogos de distintos conjuntos.

En esta situación no hay en realidad una “igualdad de las razones” sino razones cercanas, dentro de un rango amplio. Más precisamente, podríamos decir que lo que se exige es que se respeten las relaciones de orden: Si A>B>C, entonces f(A’)>f(B’)>f(C’)

El caso en el que se trata de determinar una cantidad precisa, sin recurso a las medidas, es drásticamente más complejo debido a que exige la utilización de técnicas relativamente sofisticadas. Por ejemplo, en una situación de escala, dados tres segmentos, es posible determinar un cuarto segmento tal que la razón que guardan los dos primeros sea igual a la razón del tercero con el cuarto, utilizando el teorema de Tales.

Es posible también hacer la reproducción considerando los valores numéricos de las razones entre cada par de segmentos (se “mide” un segmento con otro), sin todavía utilizar las medidas de los segmentos (se miden todos los segmentos con una misma unidad). Si se dispone de la figura original y de un segmento L’1 de la figura ampliada, para encontrar el homólogo de un segundo segmento, L2, es necesario establecer la razón que éste guarda L2 con L1 (razón interna), o bien L1 con L’1 (razón externa constante). Pero, ¿cómo determinar estas razones sin disponer de las medidas? Excepto si son muy simples (doble, triple), el problema se vuelve demasiado complejo.

*Comentario.*

En este nivel del trabajo con magnitudes sin intervención de las medidas, las situaciones que pueden ser explotadas didácticamente son, sobre todo, la comparación cualitativa de razones. Estas pueden ser adecuadas para niños pequeños, de los primeros años de la escolaridad, pero, como ya vimos, su propósito sólo puede ser el de llevar un poco más lejos el trabajo que se realiza con la comparación cualitativa de cantidades, propiciando cierta explicitación del carácter relativo de las categorías “grande” y “pequeño”.

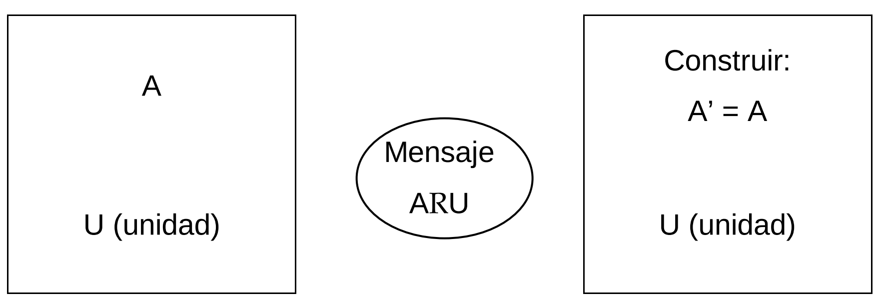
## 4) De la razón entre magnitudes a la medida (SFR-1)

Pasamos ahora al ámbito de los números en su función de expresar medidas. Analizaremos aquí las variantes de la SFR-1, en la que se registra este tránsito.

Dada una magnitud L, y una unidad U, se trata de determinar la medida de L con U, lo cual implica establecer las razones que guardan L y U ($L \; R \; U = x \; R \; 1$; la medida de L es x). Podemos esquematizar la situación de la siguiente manera:

| Conjunto de cantidades | → | Conjunto de medidas |
|---|---|---|
| U | → | 1 |
| L | → | x |

Para que la obtención de la *medida* constituya una necesidad, es decir, para que sea el recurso que permite resolver un problema, se requiere de una situación específica, que es, a final de cuentas, *la situación fundamental de la medida*. Brousseau diseñó hace ya varios años su estructura: se trata de una situación de comunicación en la que un alumno dispone de una cantidad y debe lograr que otro, el receptor de la comunicación, produzca una cantidad igual. Para ello, puede enviarle información mediante un mensaje. El recurso óptimo para resolver el problema consiste en establecer y comunicar la razón que guarda la cantidad en cuestión con una unidad.




La forma general de la consigna es muy simple: el receptor debe enviar al emisor una cantidad A' que coincida con A (que haya uno para cada uno y no sobre; que al superponerse coincidan, etc.). No es necesario por lo tanto enunciar en la consigna el conocimiento que está en juego: "mismo número", "misma medida", menos aún "misma razón"

La verificación de la comunicación está asegurada por la posibilidad de comparar directamente las dos cantidades. La forma de comparación depende de la naturaleza de las mismas.

La situación puede plantearse con cantidades discretas (colecciones), o continuas, como longitudes, superficies, masas. Así, en el marco de esta situación fundamental podemos analizar el papel de la razón en la construcción de los números, naturales y racionales, en su papel de expresar medidas y cardinales.

La meta, en la situación, es la reproducción de una cantidad. El recurso para lograrlo es establecer la razón que guarda dicha cantidad con otra de la misma naturaleza, que funcionará como unidad de medida, y que deberá ser compartida por el receptor del mensaje. Por supuesto, esta no es la primera forma de reproducción de una cantidad que los niños enfrentan: si se trata de dos colecciones y si es posible acercarlas físicamente, puede ponerse un objeto de una colección por cada objeto de la otra; si se trata de longitudes, puede construirse por superposición un objeto con la misma longitud que otro, etc. En estos casos, se establecen congruencias directamente entre magnitudes.

Para que la medición con una unidad sea necesaria, la situación debe volver imposible esta primera forma de comparación. Entonces, propiciará la puesta en juego de los números en su función primordial de expresar cantidades. Nos interesa analizar y destacar el papel que juega la noción de razón en este proceso.

Consideraremos dos tipos de variables: 1) el tamaño relativo de la unidad con respecto a la cantidad a medir, el cual determina si la razón es natural o no lo es y 2) la naturaleza de las magnitudes: continuas o discretas. La primera variable determina claramente diferentes niveles de dificultad, mientras que la segunda determina *medios objetivos* diferentes en los que se realiza el trabajo, pero no siempre, o no necesariamente, determinará por sí misma diferentes niveles de dificultad. Esto significa que la segunda variable actúa como una variable fenomenológica, y sólo eventualmente como una variable de complejidad (variable didáctica).

Consideraremos entonces el efecto de la primera variable, razón entera o no entera, en los dos grandes contextos que surgen de la segunda: magnitudes continuas y discretas.

## *Condición 1: La razón es entera*

### Condición 1.1: cantidades discretas: la razón en los conteos.

*La razón como número de objetos*

Si la cantidad que es objeto de reproducción es discreta, tenemos entonces la situación fundamental del número: por ejemplo, el emisor tiene un conjunto de vasos y el receptor tiene un conjunto de pinceles. Se trata de que el emisor reciba del receptor un conjunto de pinceles tal que pueda poner uno en cada vaso, sin que le sobren ni le falten. Expresar la cantidad de alguna manera, mediante una colección equipotente (de dedos, de rayitas, etc.), mediante una suma de números pequeños, o mediante un número, constituye el recurso de solución.

El hecho de que la expresión de la cantidad, el cardinal del conjunto, constituya una razón entre dicho conjunto y el conjunto unidad formado por un objeto (5 pinceles es 5 veces un pincel), es algo que permanece implícito. Tenderá a hacerse explícito cuando el conjunto que funciona como unidad de medida esté formado por más de un objeto.

*La razón como número de grupos*

Una vez que los niños ya manejan números pequeños para comunicar cantidades, la utilización de un conjunto unidad con más de un objeto, es decir, de un grupo de objetos como unidad para comunicar el cardinal de una colección, puede propiciarse de diversas maneras. La más directa consiste en organizar previamente la colección del receptor en grupos, por ejemplo, los pinceles vienen en paquetes de dos. Si la colección de botes del emisor también está agrupada en paquetes de dos, el problema no cambia sustancialmente: se trata de contar paquetes en lugar de contar objetos. No se plantea la necesidad de relacionar grupos con objetos. Pero si la colección del emisor está formada por objetos no agrupados, y si el pedido debe hacerse en términos de paquetes, el emisor deberá determinar el número de paquetes que necesita, para lo cual deberá agrupar su colección y contar el número de grupos.

Supongamos además que el receptor tiene varios paquetes de distintos tamaños, por ejemplo, de 2, de 3, de 5 y de 10. Esta variante introduce una dificultad adicional: ahora no es suficiente que el emisor solicite determinada cantidad de paquetes, debe además especificar qué tipo de paquetes necesita. En su comunicación, deberá utilizar, por cada tipo de paquete, dos números, cada uno con una función diferente: el cardinal del paquete y el número de paquetes, que es el cardinal de la colección, o de una parte de ésta, con la unidad “paquete”, por ejemplo, “3 paquetes de 2”.

El recurso a un conjunto unidad con más de un objeto puede propiciarse sin introducir los grupos ex profeso, mediante una cantidad de objetos por comunicar relativamente grande. Esta situación ha sido utilizada con éxito para introducir el principio de agrupamientos sistemáticos que subyace a nuestro sistema de numeración. Los niños tienden a formar grupos desiguales, por ejemplo, para una colección de 20 elementos, 5+8+2+5. Después se propicia la utilización de grupos equipotentes como una forma de facilitar la comparación de los cardinales de dos conjuntos a partir de las escrituras aditivas. Finalmente, pasan de escrituras del tipo 5+5+5+2 a escrituras del tipo 3 paquetes de 5 y 2 (Brousseau, 1972: 428; El Bouazzaoui, 1982: 151).

Contar los elementos de una colección puede seguir constituyendo un problema aun cuando los niños ya aprendieron a contar y se apropiaron del sistema decimal de numeración para representar cantidades. El tamaño de la colección es aquí nuevamente la variable decisiva: ¿cómo contar, por ejemplo, el número de lugares en un estadio?.El conteo uno por uno deja de ser un recurso eficaz, las situaciones propician nuevamente la organización de la colección grande en subcolecciones susceptibles de ser repetidas. Un ejemplo de esto último que ha sido estudiado experimentalmente es la situación ¿cuántos frijoles hay en un kilo?. Los alumnos deben averiguarlo, por supuesto, de manera aproximada. Disponen para ello de un kilo de frijoles, de recipientes y de una báscula. Un procedimiento frecuente consiste en contar los frijoles que caben en un recipiente, y después ver cuántos recipientes se llenan con la cantidad total de frijoles (Fregona, 1989). El número de recipientes es la razón que guarda la cantidad total de frijoles con la cantidad que cabe en un recipiente[1].

Finalmente, otra forma de favorecer la determinación del cardinal de una colección mediante un número de conjuntos equipotentes y la especificación del cardinal de estos grupos, es la utilización de arreglos rectangulares, por ejemplo:

[1] Esta situación difiere la situación fundamental (SFR-1), puesto que no se trata ya de comunicar una cantidad a un receptor. Se pregunta, directamente, por el cardinal de un conjunto. Se trata de una situación parcial, contenida en la situación fundamental

X X X X X
X X X X X
X X X X X
X X X X X

Estas configuraciones han sido utilizadas para introducir la noción de multiplicación como una forma de cuantificar una colección a partir del número de objetos de un renglón (o de una columna) por el número de renglones (o de columnas) (Painchault, 1975).

Veamos un poco más de cerca la forma en que la noción de razón entre cantidades subyace al uso de los números para expresar cantidades de grupos. La expresión del cardinal de una colección mediante un número de grupos supone en primer lugar concebir la colección como formada por subcolecciones. La formación de subcolecciones, sobre todo si son equipotentes, constituye una forma eficiente de enumerar la colección, es decir, de saber que se considera a todos y a cada uno de sus elementos[2].

Por otra parte, el paso de una expresión como 5 y 5 y 5 a la expresión 3 de 5 (o 3 grupos de 5, o aún 3 veces 5) requiere que la cantidad 5 sea concebida como una nueva unidad, objeto de repetición y susceptible de ser contada (Steffe, 1988)[3]. En ese momento vemos aparecer por primera vez, considerando el uso inicial que los niños dan a los números, números referidos a dos tipos de unidad: uno remite a *objetos*, el otro a *grupos* de objetos.

Al contar la cantidad de grupos de cinco objetos que se forma a partir de cierta cantidad, se pone en obra la relación “cinco *es uno*” que se traduce en un doble conteo, por ejemplo cuando se dice 1, 2, 3, 4, 5, uno, 1, 2, 3, 4, 5, dos, etc.

Podemos identificar aquí dos formas en que subyace la noción de razón: por una parte, en el doble conteo, al aplicar una razón constante (“5 es uno”) en tanto regla de correspondencia entre cantidades de objetos y de grupos. Por otra parte, en el resultado, en el número de grupos, por ejemplo, con 15 objetos se forman *3 grupos* de 5 objetos: 3 grupos, medida del conjunto de 15 objetos con la unidad compuesta “5 objetos”, es, a la vez, la razón que guarda la cantidad total (15) con la unidad (5).

Notemos sin embargo que el número de grupos emerge como razón entre las cantidades físicas y no todavía entre los números. Si la colección es igual a tres grupos, el número “3”

[2] Enumerar en el sentido de “enlistar”, no de contar. Sobre el proceso de enumerar puede verse la tesis doctoral de J. Briand (1993)
[3] Este proceso, llamado “reunitising”, por Steffe, ha sido retomado por otros investigadores como base para una alternativa de construcción de la noción de número racional (Behr et.al. 1990)

es la razón entre la colección y el grupo, pero no entre 15 y 5, puesto que la cantidad total (15 objetos) pudo no ser identificada: volviendo a la SFR-1, el emisor de un mensaje no necesita contar la cantidad de objetos para determinar el número de grupos de ***n*** objetos que la componen y el receptor, por su parte, para proporcionar esa cantidad de grupos, tampoco necesita conocer el número que expresa a la cantidad total.

Es en la SFR-2, en la que las relaciones se establecen a nivel de las medidas, cuando aparecerá una razón entre números, por ejemplo, en la situación "cada grupo tiene 5 objetos, ¿cuántos objetos hay en 3 grupos?" o bien "¿Cuántos grupos de 5 objetos se pueden formar con 15 objetos? Estas situaciones corresponden ya al estudio de las operaciones de multiplicación y división. También corresponde a este nivel, el de las relaciones entre medidas, el estudio de las distintas medidas que pueden corresponder a una misma cantidad cuando se cambia el tamaño de la unidad, por ejemplo, si se utiliza un grupo mayor que otro para cuantificar una colección, ¿habrá más o menos grupos?

*La razón en el sistema decimal de numeración.*

La noción de razón está implicada en el sistema decimal de numeración de maneras más complejas que las que hemos visto hasta ahora: para expresar una cantidad en el sistema de numeración decimal, se puede partir de ver efectivamente cuántos grupos de 10, o decenas se forman. Pero la acción de agrupar es recurrente: la colección de decenas será a su vez reagrupada en grupos de 10 decenas, es decir. centenas. La razón entre dos grupos de orden sucesivo es siempre "10 veces". La razón entre grupos no sucesivos implica una *composición de razones*: C es 10 veces D, D es 10 veces U, luego, C es 10X10 veces U. Comprender que el número que expresa la composición de dos razones es el producto de los números que expresan cada razón no es sencillo. Por supuesto, no es necesario que los niños comprendan esto desde el principio para apropiarse del sistema de manera funcional.

*Comentario.*

Podemos decir que a la determinación de un cardinal subyace una primera manifestación de la noción de razón como relación entre dos cantidades, más clara cuando el conjunto unidad está formado por más de una unidad, aunque dicha razón se confunde inmediatamente con la medida, ya sea ésta el número de objetos o de grupos. La medida, en un proceso de constitución pone en juego una razón entre cantidades, es una relación, pero, en su expresión final, es un número.

**Condición 1.2: magnitudes continuas; la razón en la medida**

Consideremos, a título de ejemplo, el caso de la magnitud longitud: el emisor tiene una tira cuya longitud será objeto de reproducción. El receptor dispone de una tira larga para recortar. En la consigna se plantea que el receptor debe recortar una tira del mismo tamaño que la del emisor. Ganan los dos si las tiras coinciden, pierden los dos si no coinciden.

Una primera forma de resolver este problema es utilizando un objeto intermediario, por ejemplo, un pedazo de hilo. Pero, si más adelante se plantea la restricción de enviar la información en un pedazo pequeño de papel (en el que no puede dibujarse la tira con su tamaño real), la medida de la tira con una unidad se vuelve entonces el recurso óptimo para lograr la meta. La medida es el número de veces que hay que iterar la unidad sobre la tira. Es la razón que guarda la tira con la unidad (consideramos por ahora el caso en que la razón entre la cantidad que se mide y la unidad es entera, o se aproxima bien mediante números enteros).

La construcción de la noción de unidad de medida se realiza por la función a la que está destinada: conservar la razón entre la cantidad y la unidad con el fin de reproducir la cantidad. Así, la noción de razón es inherente a la de unidad de medida.

Veamos un segundo ejemplo variando el tipo de magnitud: consideremos ahora cantidades de arena. Un equipo de niños, los emisores del mensaje, tienen una cantidad de arena en un recipiente transparente y pequeños recipientes, tazas por ejemplo. Los receptores tienen un recipiente transparente igual al de los emisores y disponen del mismo juego de pequeños recipientes. Además, disponen de un pequeño costal del que pueden tomar la arena que necesiten. Emisores y receptores deben lograr que estos últimos formen una cantidad de arena igual a la que tienen los emisores. Puede ponerse también a disposición del grupo una balanza, con platillos en los que pueda verterse la arena.

La SFR-1 enfrenta a la necesidad de proporcionar la información necesaria en un mensaje escrito para producir una cantidad igual. La comparación directa únicamente funciona como medio de verificación. La comunicación requiere entonces medir la cantidad con alguna unidad. Una vez acordado que el número de tazas puede servir, será necesario acordar también la utilización de tazas del mismo tamaño.

Para que la situación tenga posibilidades de funcionar, algunas cuestiones no triviales tendrían ya que poderse resolver, en primer lugar, la de cómo comparar, en el momento de la verificación, las cantidades de arena. La comparación es considerablemente más compleja que la de dos longitudes, implica, por ejemplo verter las dos cantidades en los recipientes transparentes (e iguales entre sí) y comparar los niveles; o poner las cantidades en la balanza y verificar si hay equilibrio, en cuyo caso se hace intervenir otra noción, la del peso. La verificación, en cambio, no puede consistir en contar el número de tazas de cierto tamaño que se llenan con dichas cantidades, puesto que éste fue el recurso que se utilizó para resolver.

*La variable "magnitud discreta o magnitud continua"*

Cuando las cantidades son continuas, y si las unidades no se dan de antemano, dejando a cargo de los alumnos determinar la necesidad de disponer de unidades iguales, la SFR-1 puede ser más compleja que cuando las cantidades son discretas. El carácter relativamente arbitrario de la unidad, la necesidad de que todos cuenten con unidades del mismo tamaño son cuestiones que tendrían que ser abordadas. Estas dificultades no se plantean en el problema en el que las magnitudes son discretas puesto que ahí la unidad está dada naturalmente.

Otro factor que puede hacer más compleja la situación con cantidades continuas que con cantidades discretas, en el caso de ciertas magnitudes como la superficie o la capacidad, es la mayor dificultad para considerar equivalentes dos cantidades cuando varían otros factores como la forma, en el caso de superficies, o la forma de los recipientes con los que se evalúan las cantidades de materia. Esta dificultad adicional tiene que ver con la conservación de la cantidad, capacidad que los niños desarrollan en momentos diferentes para distintos tipos de magnitud. Pero también se ha demostrado que esta capacidad cognitiva, la de la conservación de la cantidad, se desarrolla conjuntamente con las experiencias de comparación de cantidades mediante la utilización de unidades de medida (Hiebert, 1988).

### *Condición 2: Razón no entera*

En la SFR-1, el caso de una razón no entera entre la cantidad por medir y la unidad ocurre principalmente cuando la magnitud es continua. Cuando es discreta, se requieren circunstancias especiales para estar en este caso. Analizaremos por lo tanto primero las magnitudes continuas y solo haremos un comentario sobre el caso de las discretas.

**Condición 2.1: razón no entera entre cantidades continuas**

Consideraremos el caso de las longitudes. Dentro de la variante “razón no entera”, el tamaño relativo de la unidad con respecto a la cantidad por medir, puede propiciar soluciones distintas para medir la cantidad con la unidad. Interesa analizar las formas en que la noción de razón interviene en estas soluciones, y más precisamente, la forma en que, cuando la estructura explicitable del sujeto es el conjunto de los números naturales, la noción de razón interviene como una forma de dar cuenta de una medida no entera.

*La cantidad que se mide es grande en comparación con la unidad*

La iteración de la unidad sigue siendo una acción adecuada para dar una buena aproximación mediante medidas naturales, por ejemplo, “L mide un poco más de 20 unidades”. “Un poco más”, por ejemplo, media unidad, puede dar lugar a una diferencia entre la cantidad reproducida y la original suficientemente pequeña, no mayor que la que se genera por errores inevitables de medición, para ser considerada aceptable.

*La cantidad que se mide es pequeña en comparación con la unidad*

En este caso es la cantidad por medir la que es susceptible de ser iterada sobre la unidad. Si la última iteración no es exacta, el error puede ser despreciable, igual que en el caso anterior.

La situación conduce entonces a una relación del tipo n L = U, en la cual la razón entre las cantidades se expresa también con un número natural. Es decir, los naturales siguen siendo el recurso para expresar una medida, aun cuando ésta corresponde a una fracción unitaria de la unidad.

Las formas de expresar la medida *1/n* mediante el número *n* pueden ser diversas: La tira cabe *n* veces en la unidad; la tira es *n* veces más chica que la unidad; corta la unidad en *n* partes iguales. En los dos primeros ejemplos, el número *n* juega claramente como una razón entre dos cantidades, en el tercero, se hace explícita la acción que se debe realizar sobre la unidad, el número n juega como factor de partición. De esta acción se desprende la relación L = U/n, a la cual se pueden asociar expresiones como “la tira L es un *enésimo* de la unidad”, en el sentido de la unidad partida en n partes iguales.

Notemos que en esta última expresión, el objeto de la partición “entre n” no es aún el *número* uno (abstracto), sino la cantidad de magnitud U.

Este suele ser el significado con el que se introducen las fracciones unitarias en la escuela primaria: 1/n significa U/n. Remiten a partes de unidad obtenidas mediante una partición. El papel de los números naturales ha variado poco, expresan ahora el número de veces que se itera la cantidad que se mide sobre la unidad, o el número de partes iguales en que se divide la unidad.

Consideremos un ejemplo en el que la magnitud en juego es el peso en lugar de la longitud, por ejemplo: los emisores tienen algunos conjuntos de clavos que se diferencian por el peso y, como unidad de medida, pesas de ¼ de kg. Se tiene además una balanza. Escogen uno de los conjuntos y deben comunicar a los receptores cuál es el conjunto que escogieron. Los receptores disponen de los mismos conjuntos y las mismas unidades. En este caso, es impensable "fraccionar" la unidad. Los mensajes quedarían en el nivel de la relación "n clavos = U" (por ejemplo, 20 clavos pesan igual que una pesa)

*La cantidad que se mide es cercana a la unidad*

Por ejemplo, ½ U < L < 2U, de manera que la diferencia entre L y U sea significativa (no son "casi iguales"). Ahora ni la iteración de L sobre la unidad, ni la de la unidad sobre L resuelven el problema. Una estrategia de solución es el fraccionamiento de la unidad en partes suficientemente pequeñas para que con ellas se pueda dar una aproximación razonable de la medida L. No obstante, esta estrategia puede ser difícil de propiciar debido a que hay otro recurso que se querrá anteponer, por ser más sencillo en situaciones aisladas: la utilización de una o varias unidades adicionales, más pequeñas que U, para cubrir la parte que falta, o que sobra, y expresar la medida con una suma de medidas enteras: L = nU + n'U' + n''U''... o bien L = nU – n'U'. En general los niños disponen de un repertorio de unidades suficientemente pequeñas para frustrar el propósito didáctico de partir la unidad (el ancho de un dedo, el ancho de la tira, etc.). Puede ser necesario introducir una restricción como "únicamente se puede hacer referencia a la unidad establecida" (Block,1987).

Las fracciones de unidad que los niños tienden a considerar en primer lugar, son las que se derivan de la partición en mitades (medios, cuartos, octavos...) (Dávila, 1991) . Se obtiene entonces un *sistema* de unidades, similar al sistema decimal pero en base dos, que posibilita aproximar medidas no enteras (Douady, 1980)

Para la introducción de otro tipo de particiones, en tres, en cinco, puede ser necesaria una intervención explícita del maestro. Más adelante, al estudiar esta situación fundamental entre dos conjuntos de medidas (SFR-2), analizaremos los problemas de reparto, los cuales pueden dar lugar de manera más directa a particiones en cualquier número de partes.

Veamos ahora de cerca la construcción de las fracciones en esta solución. Las fracciones que se generan son también fracciones unitarias de unidad pero esta vez la medida de L puede ser aproximada por una *suma* de tales fracciones: L = U/n+ U/n ...+ U/n, o bien "m veces U/n", en donde *m* expresa la razón natural que guarda la cantidad de magnitud *L* con respecto a la cantidad *U/n*.

Las fracciones n/m de U se definen como sumas de fracciones unitarias 1/n de U, *m* veces. En esta construcción destaca el uso de una razón natural, *m*, entre dos cantidades, L y U/n. La razón numérica no entera entre L y U queda implícita en una *composición de razones*: U/n es *n* veces *menor* que U, L es *m* veces *mayor* que U/n.

En la enseñanza, estas dos razones no suelen emerger como relaciones de comparación entre cantidades dadas, sino como operadores que se aplican a la unidad: n/m de U tiene el sentido de "partir U en n partes" y "tomar m de esas partes".

Así, en esta construcción, el sentido de la escritura m/n de U es primero el de una composición de operadores y de manera implícita, el de una composición de razones. El cambio de estatuto de esta composición al *número* que expresa una *medida*, no es inmediato como lo atestiguan diversos estudios que ponen en evidencia que, los niños conciben a la fracción como dos números, y muchas veces como dos números aislados, ni siquiera con el sentido de dos operadores, uno que divide y otro que multiplica, durante un tiempo que puede ser largo (Figueras, 1988).

La fracción unitaria es una pieza clave de esta construcción. Si bien los niños aprenden con dificultad a realizar operaciones con las fracciones, en ciertas situaciones, sobre todo cuando no está dada una fracción y ésta debe obtenerse, tienden a mostrar que disponen de manera funcional únicamente de las fracciones unitarias (Solares, 1999)

A continuación, veremos una construcción alternativa de las fracciones, que no parte de las fracciones unitarias y que utiliza más explícitamente la razón como forma previa a la fracción para expresar una medida no entera. Esta construcción se propicia también por medio de una variante de la SFR-1.

*La unidad no es físicamente fraccionable: la conmensuración*

Ya mencionamos anteriormente un ejemplo de unidad no fraccionable: la pesa con la que se puede dar cuenta del peso de un conjunto de clavos, $nP = U$ (P el peso de un clavo). La razón entre los pesos se expresa en una relación de conmensuración. En este caso, el peso de los clavos es suficientemente pequeño en comparación con la pesa, de manera que es posible obtener la cantidad de clavos que pesan aproximadamente una unidad. El peso de un clavo es nuevamente una fracción unitaria de la unidad, aunque ésta no pueda obtenerse físicamente.

Veamos ahora una variante de la SFR-1 con longitudes, diseñada y experimentada por Brousseau (1981), en la que la unidad no es fraccionable por ser muy pequeña. La situación da lugar a relaciones de conmensuración entre la cantidad que se mide y la unidad, como la anterior, pero esta vez se requerirá de varias unidades.

Emisores y receptores disponen, cada uno, de cinco paquetes de hojas, identificadas con las letras de la A a la E. Las hojas se distinguen entre sí solamente por su espesor. Los alumnos disponen además de un vernier. Los emisores escogen un paquete y deben enviar información a los receptores para que ellos identifiquen, entre sus paquetes, el que escogieron los emisores. La única restricción es no proporcionar la letra que identifica al paquete.

Dado que es imposible medir el espesor de una hoja con los instrumentos de medición disponibles, como la regla o el vernier, la idea de medir el espesor de pequeños paquetes de hojas surge naturalmente. Los niños llegan rápidamente a utilizar la pareja (nº de hojas, mm de espesor) para identificar el espesor de cada tipo de hoja, por ejemplo 50 hojas, 4mm. Logran manejar las variaciones debidas a la imprecisión en la medición, por ejemplo, las parejas 50 hojas, 4 mm y 52 hojas, 4 mm corresponden probablemente a hojas con el mismo espesor. Establecen parejas equivalentes, es decir, parejas que expresan un mismo espesor de hoja, por ejemplo 50 hojas, 4 mm y 25 hojas, 2 mm. Mediante estas relaciones de conmensuración, logran también anticipar, entre dos tipos de hoja, cual tiene mayor espesor, por ejemplo, las hojas que corresponden a “50h, 4mm” son más gruesas que las que corresponden a “80h, 4mm”

El estatuto matemático de estas parejas es momentáneamente ambiguo: en el origen, son parejas de cantidades en relación. Podemos decir que son razones. La relación de equivalencia entre las parejas pone en juego implícitamente una propiedad básica de las razones que podría formularse así: R(nA, mB) = R (kA, kB), en donde A y B son magnitudes y k es un escalar natural.

Brousseau (1981: 104-105) comenta que en este manejo de la equivalencia puede verse un modelo implícito que incluye un acercamiento a la relación de equivalencia algebraica fundamental (nº de hojas A X espesor B = nº de hojas B por espesor A), aunque él mismo precisa: "ciertamente no bajo esta forma, sino bajo la de *aplicaciones* de N en N", y más adelante precisa que la linealidad se manifiesta por su característica de conservar las razones.

En este punto podemos ver con más claridad el momento en el que una razón entre cantidades enteras permite dar cuenta de una medida no entera, es decir, el momento en el que la razón juega el papel de precursora de la fracción, en la función de expresar una medida.

A partir del momento en el que se obtiene la relación de conmensuración "*n* hojas = *m* milímetros", es posible plantear relaciones en el nivel de las *medidas* sin recurrir ya a las magnitudes: ¿cuántos milímetros corresponden a n' hojas? (SFR-2) o bien, dadas dos relaciones de conmensuración, inferir qué hojas son más gruesas (SFC). Hasta este punto, el trabajo se desarrolla con razones, para dar cuenta de medidas fraccionarias.

Aunque dedicaremos más adelante un apartado al estudio de las razones entre medidas, nos adelantaremos a éste en aras de no interrumpir el hilo de una secuencia que parte de las razones entre magnitudes, continúa con razones entre medidas y culmina con la medida fraccionaria.

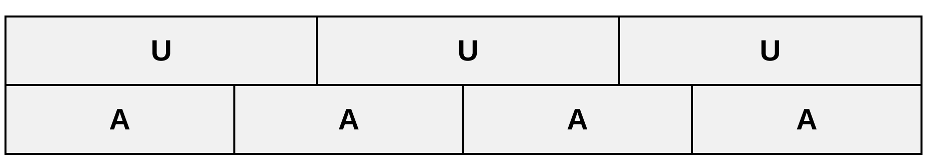
Es en este nivel, el de la relación entre *medidas*, en el que ocurre el proceso de expresión de estas razones con un número, es decir, el proceso de construcción de las fracciones: a partir de las parejas del tipo (50 hojas, 4 mm) se introduce la escritura 4/50 como expresión de la medida de una hoja. Decir que el espesor de una hoja mide 4/50 con la unidad milímetro *significa* aquí que 50 veces ese espesor es igual a 4 milímetros, o bien, que ese espesor mide 4 milímetros entre 50:

| | Número de hojas | Espesor en milímetros | |
|---|---|---|---|
| | 50 | 4 | |
| (:50) | | | (:50) |
| | 1 | 4:50 = 4/50<br>(por definición) | |

La distinción entre el espesor de una hoja y la designación de una pila de hojas, agrega Brousseau, es esencial pero difícil y sólo se aprende poco a poco. En ese proceso está el paso de la noción de razón, de relación entre dos cantidades, a la noción de número fraccionario. Podemos suponer que serán las relaciones (la comparación) y las operaciones (suma, resta, multiplicación) que los alumnos realizarán sobre este nuevo "ostensivo", 4/50, las que le darán, poco a poco, su carácter de número.

En otro estudio con alumnos de 4º y 5º grados (Block, 1987; Balbuena, 1988) también se propició el recurso a la conmensuración como forma de dar cuenta de una medida no entera, pero utilizando unidades que sí eran susceptibles de ser fraccionadas. Se partió del contexto del reparto. Los alumnos repartieron físicamente "barras de chocolate" entre niños. Después, resolvieron ciertos problemas que los llevaron a establecer la igualdad "total de barras antes de ser repartidas = total de porciones repartidas". Por ejemplo, sabiendo que se repartieron 3 barras entre 4 niños y disponiendo de la porción por niño, debían reconstruir la barra entera. Para resolverlo, los niños unieron 4 porciones y dividieron esa unión entre 3. En otro problema, disponiendo de una barra entera y de la porción que tocó a un niño, debían averiguar cuántas barras se repartieron y entre cuántos niños. Para ello buscaron la coincidencia de cierto número de barras enteras con cierto número de porciones. Observaron que hay más de una solución.

Finalmente, se planteó una situación de medición: un equipo tiene varias barras enteras y varios pedazos (del mismo tamaño). Debe mandar un mensaje escrito a otro equipo para que éste, que solo tiene barras enteras, construya una porción del mismo tamaño que aquella. Debido a que en las situaciones previas utilizaron el empate de *n* barras con *m* porciones, en ésta la mayoría retomó dicha relación como recurso para dar cuenta de la medida de las porciones. Aparecieron mensajes como: "junta tres barras y parte en cuatro" o simplemente "tres barras enteras coinciden con cuatro pedazos" Posteriormente los mensajes se redujeron a su mínima expresión: la tira A mide (m, n) significa que ***m*** Unidades coinciden en longitud con ***n*** pedazos A.




**3 tiras U = 4 tiras A**

Los alumnos utilizaron estos pares para expresar la medida de las tiras. Establecieron la regla de equivalencia (m, n) = (km, kn), compararon parejas con la unidad (m, n) >1 si m>n, las compararon entre sí, las sumaron y las restaron.

Esta situación, a diferencia de la del espesor de las hojas, permite *construir* (y no sólo identificar) la longitud con la medida indicada. Sin embargo, por esta misma razón, en esta situación el recurso a la conmensuración no es óptimo, resulta más natural fraccionar la unidad. Si los niños recurrieron a la conmensuración, fue por la influencia de las actividades anteriores[4].Cuando, después de unos meses, se planteó nuevamente a estos niños la situación fundamental de comunicación de la medida, la mayoría regresó a la búsqueda de unidades adicionales, o intentó el fraccionamiento de la unidad.

*Las dos construcciones de la fracción como expresión de una medida*

Comparemos ahora las dos construcciones de las fracciones que hemos revisado. En la primera, el fraccionamiento de la unidad, se destacan las transformaciones que se efectúan sobre una cantidad para *construir* la otra: el denominador es un factor de partición, indica en cuántas partes se subdivide la unidad, el numerador expresa cuántas de estas partes se consideran. La fracción m/n expresa en primer lugar una composición de operadores. La equivalencia de fracciones m/n = km/kn se justifica por el hecho de que al partir la unidad en *k* veces más pedazos y simultáneamente tomar *k* veces más partes, la cantidad no se altera, es decir, los operadores (:k)(Xk) se neutralizan.

En la segunda construcción, la de la relación de conmensuración, las acciones que se deben efectuar sobre la unidad para obtener la magnitud L no se expresan directamente. Prevalece la idea de comparación: n veces L mide lo mismo que m veces U. La medida de L, m/n, se define por medio de la condición que debe satisfacer: es la medida que repetida ***n*** veces es igual a ***m***. La equivalencia se justifica en dos niveles: en el nivel de la relación de conmensuración, si nL = mU, entonces k(mL) = k(nU), subyace una propiedad de la *congruencia* de cantidades: si dos cantidades iguales se iteran un mismo número de veces, se obtienen cantidades iguales. En el nivel de las fracciones como cocientes, n/m =

[4] Una dificultad más en esta situación es el siguiente: dadas dos tiras de distinta longitud, ¿qué garantiza que repitiéndolas podrían empatar?. En el contexto en el que trabajamos esta garantía estuvo dada por el hecho de que se trataba de porciones de chocolate que fueron hipotéticamente obtenidas de un reparto equitativo. Sin embargo, en la medida en que ese origen se aleja, se desvanece ese motivo.

km/kn porque los cocientes no se alteran cuando se multiplican los términos de la división por un mismo factor[5].

Además, en la segunda construcción: 1) las fracciones no unitarias se definen directamente, sin requerir de las unitarias, 2) hay un momento en el que una medida no entera se expresa mediante una razón entre cantidades enteras, momento en el cual se ponen en obra propiedades relativas a la equivalencia de razones, 3) La definición de la fracción es directamente la definición más general, como cociente de dos enteros.

Sin embargo, esta segunda construcción presenta también dificultades:

- H. Ratsimba Rajohn (1982) encuentra dificultades para que los alumnos construyan, a partir del “modelo de base” de las fracciones como cocientes, el otro significado, el de unidades que se parten. El autor logra mostrar que se trata efectivamente de dos concepciones de la noción de fracción y que cualquiera de éstas tiende a erigirse en obstáculo para la adquisición de la otra.
- N y G. Brousseau (1987) reportan, en la secuencia de las fracciones como aplicaciones lineales que estudiaron experimentalmente, que los niños no logran establecer fácilmente que el resultado de dividir **a** unidades entre **b** es **a/b**, a pesar de que antes construyeron las fracciones como cocientes.
- Por otra parte, introducir las fracciones como cocientes implica dejar de lado durante un tiempo el conocimiento previo (extraescolar) que los niños tienen sobre las fracciones, lo cual no necesariamente es negativo (considerando que éste es mínimo), pero también implica dejar de lado el conocimiento que tienen los maestros y los padres de familia, y esto sí representa un problema mayor, más aun cuando no se tiene todavía una propuesta con buenas posibilidades de funcionar.

Queda aquí todavía un trabajo por realizar. Las últimas construcciones que hemos comentado podrían constituir una segunda introducción a las fracciones, cuando los niños ya conocen la interpretación como partes de unidad, por ejemplo, en la escuela secundaria. Se trataría entonces de demostrar que las medidas que se determinan mediante un cociente a:b y las que se determinan mediante una fracción a/b son las

[5] Esta propiedad se deriva de la anterior: si x es el cociente de m entre n, entonces:
n x = m,
k (n x) = km (propiedad de la congruencia)
(kn) x = km, (asociatividad) por lo tanto, x es también el cociente de km entre kn.

mismas. Hemos explorado con buenos resultados una variante de esta idea con alumnos de 5º grado (Solares, 1999) y con maestros de primaria (Fuenlabrada, 1987).

**Condición 2.2: razón no entera entre cantidades discretas**

No es común, porque no es práctico ni necesario, que el cardinal de un conjunto se mida con una unidad que no guarda una razón entera con éste. Las situaciones en las que ocurre una medición de este tipo son en general en el nivel de las relaciones entre *medidas*, no directamente magnitudes: 1) en el seno de la situación SFR- 2 (reproducción de una razón a nivel de medidas), al cuantificar una razón interna de un conjunto de medidas para conservarla en el otro, o al cuantificar una razón externa para aplicarla como operador constante, 2) en el seno de la situación SFC (situación de comparación de razones), cuando se comparan dos razones y, finalmente, 3) cuando para evaluar el tamaño de un cardinal, éste se “mide” con otro, por ejemplo, si en una población de *n* personas, *m* tienen cierta característica, puede interesar conocer la razón que guarda *m* con respecto a *n*: *m/n* de la población tiene la característica indicada. Para dar una idea clara de la relación, por lo general interesará expresar esta razón con una fracción aproximada muy simple, o con base en una cantidad de referencia normalizada, por ejemplo 10, 100 o 1000, en cuyo caso estamos en el caso particular de la situación fundamental SFR- 2. Analizaremos estas situaciones más adelante.

## *Resumen*

En la SFR-1, que es a la vez la situación fundamental de la medida, la noción de razón es inherente al acto de medir. En este sentido, aparece como precursora de los números, naturales y racionales, en su papel de cardinal y de medida. Distintas variables del medio determinan formas específicas en que la noción de razón juega este papel. En el cuadro de la siguiente página se destacan algunas de estas determinaciones, las más importantes .

**La noción de razón en la SFR-1**

| Variables | | Funcionamiento de la razón y vínculos con otras nociones |
|---|---|---|
| **Razón entera** | Cantidad discreta | A la noción de cardinal subyace una razón entre la cantidad que se mide y la unidad. |
| | Cantidad discreta y unidad de conteo mayor que uno | El número de grupos expresa la medida de la colección y es a la vez, implícitamente, la razón que guardan dos colecciones, la que se mide y la que se usa como unidad.<br>La expresión de un cardinal mediante un número de grupos con determinado número de objetos está en el origen de la multiplicación como suma repetida, y del principio de agrupamientos del sistema decimal. |
| | Cantidad continua | A la noción de medida subyace una razón entre la cantidad que se mide y la unidad y, recíprocamente, la construcción de la noción de unidad para comunicar una cantidad es consubstancial a la noción de razón entre cantidades. |
| **Razón racional** | Cantidad continua, Unidad fraccionable | Se construyen las fracciones como sumas de fracciones unitarias. La razón entre la cantidad que se mide y la unidad queda implícita en una composición de operadores:<br>A= m/n de U significa A = (U:n)Xm. |
| | Cantidad continua, Unidad no fraccionable | La medida, antes de expresarse con una fracción, se expresa mediante una razón que surge de la relación de conmensuración: nL = mU.<br>Éste constituye el primer caso en el que las razones juegan el papel de extender el uso de un conjunto de las medidas naturales, para dar cuenta de una medida racional.<br>La fracción m/n de U se define como cociente, a partir de la condición que verifica: es la medida que *n* veces es igual a *m* unidades. |

Cabe señalar que, si bien en las distintas variantes de la SFR-1 se establece, en la acción, una razón entre dos cantidades, la idea misma de *relación entre cantidades* no se hace explícita (el número de grupos, por ejemplo, no es visto necesariamente como la razón entre la cantidad que se mide y el grupo). La razón, en tanto relación entre dos cantidades, desaparece en el momento mismo en que surge el número que la expresa, el cardinal o la medida. Únicamente en el caso de la relación de conmensuración vimos una razón funcionar durante un tiempo y de manera manifiesta, como una relación entre cantidades, que permite dar cuenta de una medida racional.

Una vez establecida la relación de conmensuración, y antes de definir la fracción a partir de ésta, es posible desarrollar un trabajo en el que se hacen anticipaciones sobre diversas relaciones entre medidas, expresadas todavía mediante razones entre dos cantidades. Volveremos sobre este trabajo al estudiar las situaciones SFR-2 y SFC.

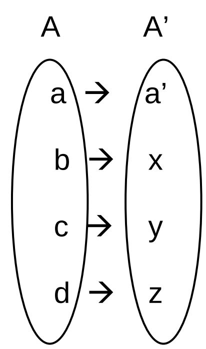
Por otra parte, no hemos analizado aún, lo haremos también más adelante, los fenómenos relativos a los cambios de unidad: la medida de una misma cantidad depende de la unidad; la razón que guardan dos cantidades es la misma que guardan sus medidas, cualquiera que sea la unidad; hay una relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y el tamaño de la medida.

# 5) De la razón entre medidas a la noción de aplicación lineal (SFR-2)

## *5.1) Introducción*

En el apartado anterior, al estudiar la situación fundamental de la medida (SFR-1) hemos analizado el papel de la razón en la construcción de los números, naturales y racionales, como expresiones de un cardinal, o más ampliamente, de una medida. Ahora, continuaremos el análisis de este proceso y además estudiaremos un segundo proceso: el papel de la razón en la construcción de los números como relaciones escalares entre medidas y como aplicaciones.

En la SFR-2 se plantea una relación lineal entre los elementos de dos conjuntos de *medidas.* El medio proporciona, por lo menos para un valor *a* del primer conjunto, el valor *a’* del segundo que le está asociado. Dados otros valores *b, c, d...* del primer conjunto, se deben anticipar los valores *x, y, z..* que les están asociados.




Ahora tenemos *medidas* variables. La meta es determinar las medidas del segundo conjunto que corresponden a las del primero, determinación que implica reproducir una razón y no, como en la situación anterior, una razón y una medida.

Las situaciones que consideraremos aquí no son, en general, situaciones de comunicación, sino de acción: no se tratará de comunicar la medida, sino únicamente de anticiparla. La verificación de dicha anticipación se debería poder realizar, para algunas situaciones, sobre todo cuando son iniciales, mediante la obtención de la medida directamente del medio material (contando o midiendo), el cual, como ya dijimos, funciona como un autómata que proporciona un valor asociado a cada valor del conjunto inicial.

En ciertas casos, podríamos llamar a esta situación “situación de la medición indirecta” puesto que, desde cierto punto de vista, anticipar el valor X de la magnitud 2 es una forma de medir la magnitud 2, a partir de la magnitud 1: el peso de un objeto se puede medir a través del alargamiento del resorte, la longitud de un alambre (homogéneo) se puede medir a través de su peso, la distancia recorrida por un móvil (si la velocidad es constante), se puede medir a partir del tiempo de recorrido, etc.

Un gran número de situaciones que implican una multiplicación o una división constituyen casos particulares de ésta. La situación juega por lo tanto un papel clave en la adquisición de estas dos operaciones, y, en general, en el aprendizaje de la proporcionalidad.

Lo anterior tiene implicaciones de distinta índole sobre el análisis que nos proponemos realizar: nos obliga a considerar un espectro muy amplio de situaciones, desde los inicios de la multiplicación con números naturales, hasta la utilización de operadores racionales, es decir, prácticamente todo el campo de situaciones multiplicativas de la primaria; por otro lado, nos sitúa en la intersección de estudios que se han realizado desde diversas perspectivas, en particular, la del desarrollo del razonamiento proporcional y la de la enseñanza de los números racionales. En el análisis haremos referencia a los aportes de algunos de estos estudios, y, en el octavo apartado del capítulo I, nos detendremos un momento para caracterizar sus perspectivas y, recíprocamente, para mostrar aquello que puede aportar un estudio realizado desde la perspectiva de las situaciones didácticas, como el presente.

Antes de analizar los efectos de las variables de la SFR-2 sobre los procedimientos de resolución, veremos más de cerca la estructura de esta situación, los distintos tipos de razones que pone en juego y las características generales de los procedimientos de resolución que se derivan. Revisaremos también las principales variantes a nivel de la estructura misma.

### 5.1.1) Dos tipos de razón, dos tipos de procedimientos de resolución

Pueden distinguirse dos clases de procedimientos para resolver la SFR-2, basados en distintas propiedades de la linealidad: 1) aquéllos en los que se establecen relaciones internas a los elementos de un conjunto, relaciones que, gracias a los isomorfismos aditivo y multiplicativo, se conservan entre los elementos del segundo conjunto. Los llamaremos “procedimientos internos” y 2) aquéllos en el que se trabaja directamente con la relación constante entre los dos conjuntos: “procedimiento del operador constante”.

*A) Los procedimientos “internos”*

- La conservación de la suma (CS)

A la suma de dos valores del conjunto inicial, le corresponde la suma de los valores del conjunto final. Esta propiedad, conocida también como isomorfismo aditivo, $f(x + x') = f(x) + f(x')$, permite encontrar el valor de x sólo cuando la razón interna R(a, b) es entera:

$$\begin{array}{rcl} a & \rightarrow & a' \\ a+a & \rightarrow & a'+a' \\ b= a+a+...+a \text{ (n veces)} & \rightarrow & x= a'+a'+...+a' \text{ (n veces)} \end{array}$$

Es el procedimiento más elemental para resolver la SFR-2.

- La conservación de las razones internas (CRI)

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, "(Xb/a)"'] \arrow[dd, bend right=60, "(Xc/a)"'] & a' \arrow[d, "(Xb/a)"] \arrow[dd, bend left=60, "(Xc/a)"] \\
b \arrow[r] & y_1= a' \mathrm{X}\ b/a \\
c \arrow[r] & y_2= a' \mathrm{X}\ c/a
\end{tikzcd}$$

La razón interna entre cualesquiera dos elementos del primer conjunto se conserva en el segundo conjunto: $R(a, b) = R(a', y_1)$. Para calcular el valor de $y_1$, se determina primero el factor Xb/a que expresa a la razón R(a, b). Llamaremos a este factor *operador interno.*

Mediante la conservación de las razones internas (y más precisamente, al aplicar los operadores internos) se obtiene un conjunto de razones externas: (a, a’); (b/a•a, b/a•a’) (c/a•a, c/a•a’) etc., que son equivalentes en virtud de la propiedad fundamental de la equivalencia de las razones, según la cual, al multiplicar por un mismo número los términos de una razón, se obtiene una razón equivalente. No obstante, el hecho de que estas razones son equivalentes puede permanecer implícito en esta resolución.

En términos de la función que asocia los elementos del primer conjunto con los del segundo, f(a) = b, la propiedad aquí es la del isomorfismo multiplicativo:

$$f(kx) = kf(x)$$

- El valor unitario (VU)

En el conjunto de parejas de cantidades que se obtienen a partir del par (a, a') mediante conservación de las razones internas, está el que proporciona el "valor unitario", (1, a'/a). Esta pareja, como cualquier otra del conjunto, expresa la razón externa que guardan dichas parejas, pero con la ventaja de facilitar el cálculo de la cantidad que corresponde al segundo conjunto para cualquier valor del primer conjunto y también de facilitar la comparación con otras razones que se expresan de la misma manera. Por ello, esta pareja es la "razón canónica", la representante más práctica, más utilizada, del conjunto de razones equivalentes. El valor unitario constituye una de las formas de expresión típicas de la constancia de la razón externa.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, bend right, ":a"'] & a' \arrow[d, bend left, ":a"] \\
1 \arrow[d, bend right, "Xb"'] & a'/a \arrow[d, bend left, "Xb"] \\
b & y_1 = b \text{ X } a'/a
\end{tikzcd}$$

La razón interna a→ b, cuyo valor implícito es b/a, se descompone en a → 1 → b, y da lugar a la composición de operadores internos (:b) (Xa).

*B) El procedimiento "externo": la determinación del operador constante (OP)*

Mediante la conservación de la suma o de las razones internas se obtienen parejas de cantidades del tipo (na, na'), cuya razón externa es la misma, incluyendo la razón canónica (1, a'/a). En todas estas parejas la segunda cantidad es igual a *a'/a veces* primera cantidad. "a'/a veces", expresa la relación que debe haber entre cualquier elemento del primer conjunto con el que le corresponde en el segundo. Expresa, con un solo número, aquello que permanece invariante cuando las cantidades varían. Lo llamaremos *operador externo constante*.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{X } a'/a & \\
a & \rightarrow & a' \\
b & \rightarrow & y_1 = b \text{ X } a'/a \\
c & \rightarrow & y_2 = c \text{ X } a'/a
\end{array}$$

La razón externa a'/a es ahora el coeficiente de la función lineal:

$$y = f(x) = a'/a \; x.$$

A nivel numérico, las tres resoluciones son, evidentemente, equivalentes:

| Conservación de las razones internas (CRI) | Valor unitario (VU) | Operador constante (OP) |
|---|---|---|
| $y_1$ = b/a veces a' | $y_1$= b veces a'/a | $y_1$ = a'/a veces b |

Sin embargo, en las relaciones que se ponen en juego, hay diferencias:

1) En el nivel de aquello que es asumido como invariante:

En el procedimiento CRI es la razón entre **cada** par de valores de un conjunto la que se conserva en el segundo conjunto. Si en el primer conjunto hay n valores, tendremos $(n^2-n)/2$ razones que se conservan, mientras que en el procedimiento OP, aquello que es invariante asume la forma de un solo número: a'/a.

Sólo esta diferencia, considerar la razón entre *dos* valores de un conjunto o la razón constante que guardan *todas* las parejas de valores de ambos conjuntos, permite prever una mayor dificultad conceptual del procedimiento OP, al mismo tiempo que deja ver su importancia desde el punto de vista de la conceptualización de la noción de invariante, y, a la postre, de la noción de función.

Entre los dos procedimientos anteriores, está el procedimiento VU en el cual la constancia de la relación no se manifiesta aún bajo la forma de un número pero sí bajo la forma de una sola razón externa, la canónica (1→a'/a).

2) En el nivel de los números que juegan el papel de operador y de medida:

Dado que las relaciones que se establecen en la SFR-2 son entre medidas concretas (número más unidad) y no entre números abstractos, en las multiplicaciones que se desprenden de cualquiera de los tres procedimientos, uno de los factores funciona como operador (indica un número de veces) mientras que el otro funciona como medida o cantidad, a la que se aplica el operador. En las tres multiplicaciones que se obtienen, los números que juegan estos papeles son distintos:

| Conservación de las razones internas (CRI) | Valor unitario (VU) | Operador constante (OP) |
|---|---|---|
| $y_1$ = b/a veces a’ | $y_1$= b veces a’/a | $y_1$ = a’/a veces b |
| *Se multiplica la cantidad **a’*** por el *operador interno **b/a*** | *Se multiplica la cantidad **a’/a*** por el *operador interno* **b** | *Se multiplica la cantidad **b*** por el *operador externo constante **a’/a*** |

En el análisis que realizaremos en los dos subcapítulos siguientes (5.2 y 5.3), al considerar las variables relativas a la naturaleza de las magnitudes y las variables numéricas, podremos comprobar que estas diferencias son relevantes.

### 5.1.2) Las variantes estructurales de la SFR-2

Además de las variantes ya mencionadas, la estructura de la SFR-2 puede presentar variantes en el número de datos que se relacionan, y en la forma en que se relacionan. Si bien en el presente estudio no vamos a analizar cada una de estas variantes, haremos referencia a algunas de ellas al considerar las variables numéricas. Veamos cuáles son estas variantes.

*Variante 1: La búsqueda de la cuarta proporcional.*

En la variante clásica de la SFR-2 se presentan cuatro valores en relación, uno de los cuales no se conoce y debe determinarse:

| Conjunto 1 | Conjunto 2 |
|---|---|
| a | a’ |
| b | x |

La estructura corresponde a lo que en la teoría clásica de las razones y las proporciones se ha llamado “una proporción”, una igualdad de dos razones.

La situación en la que se pregunta directamente por la razón que guardan dos cantidades de la misma naturaleza (¿cuántas veces *b* es *a*?, o ¿qué parte de *a* es *b*?) constituye a su vez una situación parcial de esta variante.

*Variante 2: Conjunto inicial con más de dos valores.*

| Conjunto 1 | Conjunto 2 |
|---|---|
| a | a’ |
| b | $x_1$ |
| c | $x_2$ |
| d | $x_3$ |

Tenemos ahora más claramente una relación entre dos conjuntos de valores. Una consecuencia importante de esta variante es el hecho de que se rompe la simetría entre razón externa e interna: ahora, hay una razón externa que es invariante (a’/a) mientras que hay numerosas razones internas distintas: a/b, a/c... Esta variante es importante desde el punto de vista de la construcción de la noción de operador como relación constante, es decir, desde el punto de vista de la noción de aplicación.

*Variante 3: Conjunto final de dimensión mayor que uno.*

La asimetría anterior puede invertirse de manera que la razón interna (escalar) juegue el papel de constante que se aplica a varios valores. Para ello basta con considerar sólo dos valores del conjunto inicial, y plantear un conjunto final de dimensión n:

| Conjunto I | Conjunto F |
|---|---|
| *a* | *(a’, a’’, a’’’)* |
| *b* | $(x_1, x_2, x_3)$ |

De esta manera las razones externas ahora son varias (Xa’/a, Xa’’/a, Xa’’’/a) así como los valores unitarios: 1→ (a’/a; a’’/a; a’’’/a). Esta asimetría pone en primer plano a la razón interna a→b, la cual juega ahora como un factor constante.

Los problemas sobre recetas de cocina, en los que se dan cantidades de diferentes ingredientes para preparar determinado número de porciones y se pregunta por las cantidades que corresponden a otro número de porciones, corresponden a esta variante, de hecho, suelen ser los únicos problemas de este tipo que se estudian en la enseñanza (más adelante veremos otros problemas, más simples, con esta estructura). Esta variante de la SFR-2 presenta ciertas aplicaciones didácticas interesantes: en primer lugar, puede favorecer la identificación de un factor constante, al corresponder éste a una razón interna (ya vimos que la identificación de la razón externa como operador constante, puede ser más difícil). En los casos en que la razón interna no es entera y es necesario calcular valores unitarios, el hecho mismo de que éstos sean varios y no uno sólo puede contribuir a la mejor comprensión del papel de estos valores (es necesario, por ejemplo, determinar las cantidades de cada ingrediente para una porción)

Por otra parte, el hecho de que a cada valor del conjunto inicial estén asociados varios valores en el conjunto final, puede ayudar a disuadir la idea inicial de “sumar una constante” (ver Capítulo II, apartado 2.3.1). En el curso del análisis de las variables numéricas tendremos ocasión de volver sobre estas características, y encontraremos así mismo otras aplicaciones de esta variante.

*Variante 4: La distribución homogénea.*

Esta variante pone en juego la noción de razón de una manera diferente a las anteriores: dadas dos cantidades enteras a y a’, se buscan las cantidades enteras más pequeñas (b, b’) que guardan entre sí la misma razón que las primeras. Esto es, las cantidades a y a’ se distribuyen de manera homogénea en n veces (b, b’), por ejemplo:

> *Luis tiene 20 dulces y 12 chocolates, va a preparar bolsitas con golosinas para los invitados a su fiesta. ¿Cuántos dulces y cuántos chocolates debe poner en cada bolsita para tener el mayor número posible de bolsitas iguales?*

Nuevamente se trata de una relación entre cuatro datos (proporción) pero ahora se desconocen los dos términos de la segunda razón. Los números posibles de bolsitas (n) son los valores de las razones internas. Estos deben determinarse, pero ya no a partir de dos cantidades de un mismo conjunto, como en las situaciones anteriores, sino por la condición de ser divisores comunes de las dos cantidades de dulces.

| | Dulces | Chocolates | |
|---|---|---|---|
| 1 bolsita | $x_1$ | $x_2$ | **(Xn)** |
| **n** bolsitas | 20 | 12 | |

El mayor número de bolsitas es el máximo común divisor. Este problema puede ser adecuado justamente para desarrollar la noción de divisor común.

Sin embargo, llegar a ver de esta manera el problema es disponer ya de una estrategia general. La construcción de esta estrategia requiere de un proceso que probablemente parte de la realización de ensayos sucesivos: se prueba por ejemplo con 3 dulces y 2 chocolates, al agotarse los chocolates sobran dulces, se ajusta y se prueba de nuevo.

Las cantidades que van en cada bolsita (5 y 3) guardan entre sí la misma razón que las cantidades originales (20 y 12), expresan de hecho a la razón con números más pequeños: “En 20 dulces y 12 chocolates, hay 5 dulces por cada 3 chocolates”, aunque este hecho queda implícito en la resolución anterior.

Una estrategia más sofisticada, que supone un conocimiento ya explícito de la noción de razón, consiste en destacar y utilizar la equivalencia de razones anteriores, considerando de entrada que se busca la razón irreductible (simplificada) (x, y), equivalente a (20, 12), o, incluso, que se busca la fracción irreductible x/y equivalente a 20/12, lo cual supone saber que la razón externa en juego se expresa mediante una fracción .

En contextos sobre tratamiento de la información, en cambio, expresar la razón con números pequeños puede ser el objetivo explícito.

*Variante 5: la proporción múltiple.*

Ocurre cuando los elementos del conjunto final dependen linealmente de dos o más variables independientes entre sí. El nombre de “proporción múltiple” fue propuesto por Vergnaud (1988), por oposición a “proporción simple”, que correspondería a nuestra variante 1. Tradicionalmente, en la teoría de las razones y proporciones, este caso se consideraba en la familia de problemas que se resolvían mediante una “regla de tres compuesta”. Veamos dos ejemplos representativos.

Ejemplo: El consumo, función de un número de personas y de un número de días.

> *Para determinar la cantidad de agua que se necesitará para una excursión, se estima que por cada 3 días, y por cada 5 niños hacen falta 20 litros. ¿cuántos litros se deben llevar si a la excursión van a ir 20 niños durante 15 días?.*

Las relaciones pueden esquematizarse como sigue:

| | 3d | 15d |
|---|---|---|
| 5n | 20L | |
| 20n | | x |

El problema puede descomponerse en dos problemas de proporción simple, manteniendo alternativamente constante el número de días, y el número de niños. Se recurre sistemáticamente a razones internas:

Durante, 15 días, para 5 niños se necesita cinco veces lo que se necesita para tres días: 20 litros X5 = 100 litros. Luego, para 20 niños, se necesita 4 veces lo de 5 niños: 100 litros X 4 = 400 litros.

El procedimiento anterior puede dar lugar a un procedimiento más complejo conceptualmente pero más sistemático: consiste en considerar que, dado que la cantidad de litros se multiplica sucesivamente por cada razón interna, ésta puede obtenerse directamente multiplicando por el producto de las dos razones internas: X(5X4). Esta consideración lleva a ver las relaciones en juego como una composición de escalares y requiere establecer que multiplicar sucesivamente por dos factores es equivalente a multiplicar por el producto de los factores: (20L X 5) X 4 = 20L X (5X4).

Finalmente, otro procedimiento también complejo por introducir un componente dimensional (se presentaba en algunos textos clásicos), consiste en considerar la magnitud producto "días·niño": el consumo de 5 niños durante tres días puede verse como el consumo de 15 niños (que en realidad es 15 días·niño), y el consumo de 20 niños durante 15 días puede verse como el de 300 niños. El problema se reduce entonces a una relación entre dos magnitudes: "si 15 niños consumen 20 litros, ¿cuántos litros consumen 300 niños?". Así, las cantidades de litros resultan proporcionales a los productos de las otras dos cantidades, niños y días.

Es poco probable que una resolución como esta última pudiera ser desarrollada por alumnos del nivel básico, debido a la dificultad conceptual que subyace a la noción de medidas producto de este tipo, y al hecho de que existen las otras resoluciones que evitan esta dificultad. Las dos primeras resoluciones, en cambio, son más factibles y presentan un interés didáctico al propiciar cierto enriquecimiento de la noción misma de razón constante en una variación de cantidades: la variación en una de las cantidades iniciales, se traduce en una variación de la cantidad final en la que la razón se conserva. Pero, la variación simultánea de las dos cantidades, produce una variación de la cantidad final con una razón distinta, que es el producto de las dos anteriores.

En resumen, la variante estructural, la "proporción múltiple", pone en marcha la acción *simultánea* de dos (o más) razones internas. La resolución más sencilla consiste en considerar estas acciones como *sucesivas*. Considerar además la posibilidad de sustituir los escalares que resultan por uno sólo, lleva a un problema de composición de razones[1].

*Otras situaciones.*

Recordemos, finalmente, las situaciones que ya mencionamos antes en las que las razones mismas devienen objeto de relaciones y de operaciones, en particular las situaciones de composición y de comparación de razones. No las consideramos como variantes de la SFR-2, en la medida en que implican relaciones de segundo orden.

**La continuación del capítulo:**

A continuación intentaremos organizar una parte sustantiva del vasto conjunto de variantes de la SFR-2, mediante el análisis de dos tipos de variables, ya identificadas en la especificación del medio de la razón que hicimos anteriormente:

- Variables contextuales, relativas a la naturaleza de las magnitudes en relación, y a la manera de formular la constancia de la razón en el problema.
- Variables numéricas, relativas a las medidas y a las razones (conjunto numérico al que pertenecen).

[1] Vergnaud destaca que los problemas que implican productos de medidas, por ejemplo, el cálculo de la superficie de un rectángulo, también son problemas de proporción múltiple: la superficie es proporcional al ancho del rectángulo cuando el largo es constante, y al largo, cuando el ancho es constante. Si ambas magnitudes varían, la razón entre dos superficies es igual al producto de las razones que guardan sus lados (Vergnaud, 1988).

## *5.2) Las variables relativas a la naturaleza de las magnitudes*

Los procedimientos internos y el procedimiento externo constituyen dos formas distintas de dar cuenta de aquello que es invariante en una relación lineal entre cantidades: se cuantifica la razón interna entre cada par de valores del primer conjunto para reproducirla entre los valores correspondientes del segundo, o bien se cuantifica la razón externa que guarda un valor del primer conjunto con el que le corresponde en el segundo y ésta se reproduce para todas las parejas de valores que se corresponden.

Sólo esta diferencia, razón entre *dos cantidades* versus razón entre *dos conjuntos* de cantidades permite suponer ya un nivel de complejidad conceptual mayor en la utilización del procedimiento externo, esto es, en la determinación del operador constante. Pero, al considerar las magnitudes que se ponen en relación, aparecen otras diferencias entre los dos tipos de procedimiento, internos y externo, que contribuyen también a la mayor complejidad del segundo.

Analizaremos a continuación estas diferencias, primero a partir de dos categorías ya utilizadas en la literatura sobre el tema, *estado* versus *variación* entre estados y cantidad *intensiva* versus cantidad *extensiva*. Posteriormente estudiaremos los efectos de algunas variables relativas a las magnitudes sobre los procedimientos.

### 5.2.1) Estatutos de la razón externa y de la razón interna

- La razón externa: una tercera magnitud, un nuevo concepto.

Noelting, (1980a: 344) en un estudio sobre el desarrollo del pensamiento proporcional, llama a los tipos de razón que hemos destacado, *within* (razón externa) y *between* (razón interna) y plantea que la razón externa expresa un "estado o concepto", mientras que las razones internas expresan la variación que hay de un estado a otro[1]. Para él, esta diferenciación remite a dos procesos mediante los cuales los sujetos abordan las situaciones de relación proporcional y cuya integración da lugar al concepto de proporción:

> *La distinción entre estos dos tipos de razón proviene originalmente de dos tipos diferentes de procesos cognitivos en el sujeto:*

[1] A la razón que aquí llamamos externa por establecerse entre cantidades de distintos conjuntos (pintura roja, pintura blanca) Noelting la llama w*ithin a state* debido a que da cuenta de un "estado", retomando el ejemplo de la mezclas, de un "tono de rosa". Nuestra razón interna es llamada por él *between states*, por tratarse de una relación *entre* los términos homólogos de dos estados.

1) *Asimilación de elementos similares, con variaciones de un elemento de una especie particular a → c, b→d*
2) *Relación entre elementos, con la construcción de u nuevo concepto, a$\mathcal{R}$b, c$\mathcal{R}$d*

*(...) "El concepto de proporción integra a ambos tipos de razón"*

En una situación como

| | | |
|---|---|---|
| 20 km | → | 1 hora |
| 60 km | → | x |

las razones internas 20 km→60 km y una hora→3 horas dan cuenta de la variación de las cantidades al interior de cada conjunto. Las razones externas 20 km→1hora y 60km→3horas, en cambio, caracterizan a una velocidad determinada. La velocidad es una magnitud distinta a la distancia y al tiempo. Es un tipo de magnitud que en general no se mide por comparación con otra cantidad de magnitud de la misma naturaleza (con otra velocidad), sino justamente por esta relación entre distancia y tiempo. La velocidad constituye en este ejemplo el nuevo concepto al que refiere Noelting.

- Cantidades intensivas y extensivas

En el caso de magnitudes como la distancia, la superficie, el volumen, el tiempo, la suma de las medidas corresponde, en el plano de las magnitudes físicas, a una especie de reunión, de "poner juntas" las cantidades de magnitud, podríamos decir también, de reunión de las dos "extensiones" (poner una detrás de otra dos longitudes, yuxtaponer dos superficies, considerar dos intervalos de tiempo como si fueran sucesivos, etc.). Estas cantidades se llaman por ello *extensivas*, para diferenciarlas de otras, las *intensivas*, como la velocidad, la densidad, la temperatura, lo "dulce" (de una bebida, por ejemplo), el tono de un color obtenido al mezclar determinadas cantidades de otros dos, las cuales se miden por medio de la razón que guardan otras dos cantidades y cuya suma no corresponde a la simple reunión de cantidades. Las situaciones que llevan a sumar las medidas de estas magnitudes son más complejas (Freudenthal, 1983: 203; Rouche, 1992: 244). Podemos decir que las cantidades extensivas son aditivas, mientras que las intensivas no lo son, en el sentido de corresponder a una reunión física de cantidades.

Consideremos ahora una razón externa mucho más simple, por ejemplo la razón canónica "3 pesos por lápiz". Esta formulación de una razón externa está presente en muchos de los problemas de multiplicación o división que se plantean en los primeros grados de la primaria: “Si el precio de los lápices es 3 pesos..., si cada caja contiene 4 botellas” o bien “calcula el precio por lápiz, calcula el número de botellas por caja...”

Podemos considerar, como lo hace Schwartz (1988: 41-43), que también estas razones expresan cantidades intensivas. La autora muestra que estas cantidades tampoco se comportan como las extensivas que las componen en situación de suma. Propone considerar por ejemplo los siguientes tres datos asociados a una cantidad de granos de café: su peso, 5 lb, su precio, digamos $15, y el precio por libra, $3/lb. Si se considera una cantidad de café del doble de la anterior, resulta claro que solo los datos relativos al peso y al precio total se duplican pero no así el precio por libra. A diferencia de los dos primeros, dice la autora, el precio por libra describe una característica no sólo de esa cantidad de café sino de cualquier otra. El precio por libra es, puntualiza, un descriptor de una <u>cualidad</u> del café y no de una cantidad. Más adelante, reconoce, como lo hemos hecho aquí, que el estatuto de esta “cantidad intensiva” es el de una relación:

> *El estatuto de una cantidad intensiva es el de una relación entre cantidades (...) Es extraño referirse a una relación en términos de “cantidad”. Una razón para hacerlo es que estas relaciones pueden ser cuantificadas (...) todo un conjunto de operaciones aritméticas apropiadas puede llevarse a cabo con estas cantidades.*

Schwartz se refiere a la dualidad respecto a estas “cantidades intensivas” o razones: son relaciones entre cantidades, pero pueden ser cuantificadas y ser objeto de operaciones aritméticas, como cualquier número. En nuestro análisis, coincidimos con esta investigadora en considerar que una cantidad intensiva es, antes que *una* cantidad, una *relación* entre dos cantidades, una razón.

- Las variables relativas a la naturaleza de las magnitudes

La naturaleza de las magnitudes que se ponen en relación puede afectar el nivel de dificultad de la tarea en la SFR-2 de dos maneras. En primer lugar, por el grado en que para los alumnos es factible anticipar que la relación entre las magnitudes es lineal, en cualquiera de las manifestaciones de esta propiedad (conservación de la suma, de las razones internas, o constancia de la razón externa). Aquí interviene la familiaridad con la relación en juego así como la posibilidad de constatar empíricamente las anticipaciones que se realizan.

En segundo lugar, el carácter heterogéneo u homogéneo de la razón externa (magnitudes de distinta naturaleza o misma naturaleza) puede afectar el nivel de dificultad al redundar en un operador constante con dimensión o sin dimensión. A continuación analizaremos las variables relativas a las magnitudes desde estos dos puntos de vista. Haremos además un comentario sobre una tercera variable, la manera de expresar la constancia de la razón en el problema, la cual puede influir también en la dificultad para identificar el carácter lineal de la relación y, sobre todo, en la opción por un procedimiento en lugar de otro.

**5.2.2) La variable "ámbito de procedencia de las cantidades".**

*5.2.2.1) Tres ámbitos clásicos.*

Empezaremos por recuperar una clasificación que se proponía en los textos desde finales del siglo XIX, en donde se distinguían tres grandes ámbitos: el de las matemáticas, el de la ciencias experimentales y el de otras actividades o disciplinas, principalmente el comercio[2]. P. Leyssenne (1913: 324-325), por ejemplo, después de dar algunos ejemplos de proporcionalidad en el ámbito de las matemáticas y de la física, afirma:

> *La proporcionalidad en todos estos ejemplos debe considerarse como rigurosa, porque las leyes matemáticas tienen un carácter de certidumbre absoluta, y porque las leyes físicas, verificadas con cuidado, pueden ser aceptadas como la expresión de la verdad, al menos en los límites de esta verificación*

Después el autor considera un tercer ámbito, y hace explícito que éste no goza del rigor de las otras:

> *Pero hay otras magnitudes extrañas a la física y a la geometría que, sin ser rigurosamente proporcionales, son aceptadas y tratadas como tales, porque esta ley de proporcionalidad expresa aproximativamente, por término medio, lo que se verifica en la realidad*

Siguen ejemplos acerca de la relación entre tiempo de trabajo o el número de trabajadores y la cantidad de trabajo producida, entre la cantidad de productos y su precio, entre otros, y la advertencia de que "es fácil ver sin embargo que estas proporcionalidades son a menudo falsas".

No obstante, para los autores de esta época era muy claro que el trabajo propiamente matemático empezaba en el modelo (la proporción numérica) a partir del cual se trabajaban los distintos sistemas de relaciones entre magnitudes. El asunto de las causas

[2] Brousseau (1981:111) retoma esta distinción en un comentario sobre las variables relativas al "estatuto científico de un concepto"

de la proporcionalidad no era de la incumbencia de la aritmética. Leyssenne, por ejemplo, afirma un poco más adelante:

> *Sea de ello lo que fuere, la demostración de la proporcionalidad entre las magnitudes no es dominio de la Aritmética. Pertenece a cada una de las ciencias a que se refieren esas magnitudes. La Aritmética acepta esta proporcionalidad como un hecho adquirido o como una convención.*

Los autores de la época hacían una clara distinción entre lo que hoy día podríamos llamar el sistema objeto de modelización matemática y el modelo matemático. El sistema no era objeto de estudio, únicamente el modelo, razón por la cual, para introducir la noción de proporción en el trabajo con magnitudes, tendían a escogerse ejemplos simples en los que la proporcionalidad fuera evidente (¡para los adultos!), avalada culturalmente, pero también podían considerarse ejemplos en los que "las proporcionalidades fueran falsas", manifiestamente. A final de cuentas las magnitudes constituían una especie de telón de fondo que ayudaba a dar sentido a la introducción de ciertas nociones matemáticas, pero eran más o menos rápidamente abandonadas (Bosh, 1994: 211-216).

Las cosas han cambiado desde entonces, si bien no siempre de manera clara en las prácticas de la enseñanza, sí en los planteamientos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas que postulan la necesidad de que los estudiantes construyan conocimientos matemáticos en tanto herramientas, o en tanto modelos de situaciones diversas. Desde esta perspectiva, la cuestión de en qué situaciones los alumnos de distintas edades tienen la posibilidad de identificar una relación de proporcionalidad es importante y, de hecho, ha sido objeto de comentarios en estudios diversos realizados en las últimas décadas, sobre el proceso de adquisición de la noción de proporcionalidad, o sobre el desempeño de estudiantes frente a cierta diversidad de problemas (en las conclusiones haremos una revisión rápida de los aportes de algunos estudios).

Uno de los motivos, por los cuales se consideró que los estudios de Piaget sobre el desarrollo de la proporcionalidad, en tanto noción lógico – matemática, no permitían hacer inferencias directas sobre las posibilidades de los niños para resolver cualquier tipo de problema de proporcionalidad, fue justamente el hecho de que en dichos estudios intervenían nociones físicas complejas. Por ejemplo: la relación inversa entre el peso y la distancia en la famosa experiencia de la balanza.

A partir de los años setenta se ha comprobado en diversas experiencias que el desempeño de los alumnos en problemas de proporcionalidad (sobre todo adolescentes) depende en parte de la complejidad de las magnitudes en relación: magnitudes físicas como el calor específico o la tensión implican mayor dificultad en la resolución de problemas de proporcionalidad que magnitudes más conocidas como volumen, distancia, tiempo (Vergnaud, 1988:155). Con niños más pequeños, de escuela primaria, se ha observado que la familiaridad con la razón entre las magnitudes tiene también una influencia. Tourniare (1985), por ejemplo, explica, mediante este criterio, el que los niños a quienes puso una serie de problemas similares en dificultad numérica, logran mejores resultados cuando la relación es entre dulces y su precio que cuando es del contexto de mezclas, y en éste último, los resultados son mejores si la mezcla es entre jugo de naranja y agua, que si es entre dos pinturas.

Desde una perspectiva distinta, la del estudio de las condiciones que explican la permanencia o la desaparición de un conocimiento en el currículum (estudio del “nicho ecológico” de un conocimiento) Chevallard y Julien (1989) distinguen dos ámbitos de procedencia de las magnitudes, ámbitos que ellos asocian a dos clases de matemáticas, las “matemáticas de la ciudad” y las “matemáticas de la naturaleza”. El primero abarca la tradicional gama de problemas relativos al comercio y a la administración de bienes (conformación de sociedades, herencias, problemas sobre instituciones bancarias, etc) mientras que el segundo remite a leyes sobre fenómenos físicos (velocidad, relación entre volumen y masa a presión constante, etc).

Una diferencia que los autores destacan entre estos dos tipos de cantidades es que las primeras, las de las matemáticas de la ciudad, se relacionan según reglas *creadas por los hombres* para facilitar, o incluso para permitir su convivencia en sociedad. La proporcionalidad obedece pues a una *convención*, para retomar el lenguaje de los autores clásicos, y este mismo hecho, el de ser reglas creadas ad hoc, las hace sumamente transparentes. Las otras en cambio, las de las matemáticas de la naturaleza, constituyen reglas que intentan modelar fenómenos complejos, independientes de la voluntad del hombre. Los referentes de estas reglas están constituidos, además, por magnitudes cuya comprensión va más allá de la comprensión de la proporcionalidad.

Los autores observan que, sin embargo, en los textos de principios de siglo se registra un desplazamiento de las “matemáticas de la ciudad” por las “matemáticas de la naturaleza”, desplazamiento que explican en términos del prestigio creciente de las ciencias en la sociedad. Este desplazamiento del corpus de problemas tradicional y orgánicamente ligados al tema de razones y proporciones, debido a la valoración a ultranza de “lo científico", pudo haber contribuido, señalan, a la desaparición progresiva del tema "razones y proporciones" de los programas de matemáticas en varios países.

Dada la importancia que concedemos hoy en día a la comprensión por parte de los estudiantes de las relaciones de proporcionalidad inmersas en situaciones, deberíamos revalorar la función didáctica de esta tradicional familia de problemas del ámbito de las "matemáticas de la ciudad", relativos a los "negocios de los hombres", al intercambio, al comercio, a las finanzas, etc[3].

A continuación abordaremos dos ámbitos menos clásicos que los anteriores, o, insuficientemente considerados en el tema de proporcionalidad de los manuales de aritmética, incluso actuales, pero que sin embargo, presentan atributos relevantes desde el punto de vista didáctico: el de la medición y el del tratamiento de la información.

### *5.2.2.2) La linealidad en la medida y en los cambios de unidad.*

En la familia de problemas directamente derivados del proceso de medir una cantidad con una unidad o relativos al cambio de unidad no hay, estrictamente hablando, cantidades proporcionales sino cantidades equivalentes: una cantidad es equivalente a cierto número de veces una unidad. Sin embargo estas relaciones de congruencia entre *cantidades* dan lugar a diversas relaciones lineales entre *medidas* tan elementales como "a cierto número de veces una cantidad le corresponde ese número de veces su medida". La importancia de esta familia de situaciones, ubicadas entre el ámbito de las matemáticas y el de física, radica en que en ella se encuentran algunas de las primeras situaciones en las que los alumnos manejan las relaciones lineales, al mismo tiempo que desarrollan nociones básicas como la de medida y la de multiplicación.

#### *La linealidad en la medida.*

La SFR-1 que analizamos en un apartado anterior propicia la puesta en relación de dos magnitudes, una de las cuales funciona como unidad y permite expresar la medida de la otra. Una vez establecida una medida, por ejemplo, la longitud L es igual a ***n*** veces una unidad U, o bien, el conjunto A es igual a ***n*** veces un conjunto unidad, la SFR-1 ha sido resuelta. Pero, en ese momento, pueden relacionarse nuevas cantidades expresadas en función de la cantidad L, con sus medidas, sin tener ya que comparar directamente, en el nivel físico, estas cantidades con la unidad: "*si L mide n, ¿cuánto mide k L?"*

[3] La pintura y la música constituyen otros ámbitos clásicos de uso de la noción de razón, pero falta analizar más el grado en que son accesibles y factibles para *estudiar* esta noción.

| Conjunto de cantidades | → | Conjunto de medidas |
|---|---|---|
| L | → | n |
| Xk | | Xk |
| kL | → | x = kn |

La función "medida", digamos $m_u$, que asocia a cada magnitud una medida mediante la comparación con determinada unidad U, es lineal, verifica los isomorfismos aditivo y multiplicativo[4]:

$$m_u(L\text{"+"}\ L') = m_u(L) + m_u(L') \text{ y}$$
$$m_u(k\ \text{"X"}\ L) = k \text{ X } m_u(L) = k\ n$$

En esta situación estas dos propiedades se pueden justificar a partir de la relación de congruencia entre las cantidades, por ejemplo, en el caso de la segunda propiedad tenemos: si la medida de L, con la unidad U es n, entonces, L y nU son cantidades congruentes; "iterando" ambas cantidades k veces, tenemos kL = k (nU) = (kn) U, de donde kn es la medida de kL.

Ésta es probablemente la relación de linealidad más fácil de ser anticipada, justificada y verificada empíricamente, de ahí una parte de su importancia. En las relaciones entre *cantidades* proporcionales, aún en las más simples, no hay en juego una relación de congruencia que justifique a la linealidad.

La linealidad de la función medida es lo que permite, en este punto, abandonar el trabajo con magnitudes, las cuales quedan sólo como referencia, para realizar un trabajo en el nivel de medidas. De hecho, el mismo conjunto de magnitudes aparece ahora como otro conjunto de medidas, expresadas con la unidad L:

| Medidas con L | → | Medidas con U |
|---|---|---|
| 1 | → | n |
| k | → | x = kn |

[4] Las comillas son para distinguir las operaciones que se efectúan con cantidades de magnitud de aquellas que se efectúan sobre medidas. No las mantendremos en lo que sigue.

Tenemos ahora una variante de la SFR-2: dos conjuntos de medidas variables, una razón constante entre las medidas. Esta variante constituye la continuación de la SFR-1, ahora en el nivel de las medidas, en particular:

- La relación "Conjunto A = n objetos", con la que culmina la SFR- 1 con magnitudes discretas, da lugar a ahora a la siguiente variante de la SFR-2, en el nivel de medidas:

| Conjuntos A | Objetos |
|---|---|
| 1 | n |
| m | x |

- La relación de conmensuración "n L = m U", con la que culmina la SFR-1 con cantidades continuas, y con una unidad no fraccionable, da lugar a la siguiente variante de la SFR-2:

| L | U |
|---|---|
| n | m |
| kn | x |

Notemos que en este caso, la relación "nL = mU" y las que se generan a partir de ésta mediante procedimientos internos constituyen formas de expresar la *medida* de L, sin hacer explícita todavía la fracción (L = m/n de U)

*Los cambios de unidad.*

Los cambios de unidad constituyen un caso particular del anterior, linealidad en la medida. Hacen intervenir relaciones de proporcionalidad de dos maneras: por un lado, las medidas de una cantidad son inversamente proporcionales al tamaño de la unidad (con una unidad *n* veces más pequeña, se obtiene una medida *n* veces más grande). Por otro lado, dadas dos cantidades, $L_1$ y $L_2$, la razón que guardan sus medidas con determinada unidad es invariante, cualquiera que sea la unidad.

Consideremos el último caso. La SFR-2 es la siguiente:

| | U | V |
|---|---|---|
| Medidas de $L_1$ | a | a' |
| Medidas de $L_2$ | b | x |

Tenemos un conjunto de magnitudes ($L_1$, $L_2$, etc.) y dos conjuntos de medidas, las que se obtienen con la unidad U y las que se obtienen con la unidad V. La relación entre las medidas concretas (número más unidad) de un conjunto con las del otro conjunto es, nuevamente, una relación de *congruencia* puesto que las medidas expresan la misma cantidad:

$$a\,U = a'\,V$$

$$b\,U = x\,V$$

Pero la relación entre las medidas “abstractas” (entre los números, a→a’, b→b’) es una relación lineal que puede caracterizarse mediante la conservación de la suma, de las razones internas o la constancia de un operador. Esta propiedad fundamental de la medidas permite estudiar relaciones entre magnitudes *desde* el ámbito de las medidas, sin preocuparse de la unidad.

Un ejemplo simple: se dispone de una tira L cuya longitud se conoce: 3 unidades. Se pide construir otra tira L’ que mida 6 unidades. El camino más breve consiste en duplicar L. Al hacerlo, se da por hecho que la razón que guardan las medidas es la misma que la que guardan las magnitudes, en este caso, las longitudes.

Veamos ahora un ejemplo complejo, en el que la razón entre las unidades no es entera: es el problema de “Mr Tall and Mr Short” con el que Karplus (1981) estudia el proceso de desarrollo del razonamiento proporcional en adolescentes: Se plantea que Mr. Short mide 4 clips o 6 botones mientras que Mr Tall mide 6 clips. Se pregunta por la medida de Mr. Tall en botones.

| | Clips | Botones |
|---|---|---|
| Mr. Short | 4 | 6 |
| Mr. Tall | 6 | X |

Este problema puede resolverse sin hacer intervenir medidas fraccionarias, aunque éstas estén implícitas: si 4 clips = 6 botones, entonces, 2 clips = 3 botones y 6 clips = 9 botones. Subyace que la razón de la medida en clips de Mr Tall a la medida en clips de Mr Short, (X3/2) es la misma que la que existe entre sus medidas en botones.

Este problema presenta varias dificultades: ninguna razón es entera; la diferencia entre las medidas en clips y en botones es relativamente pequeña; además, el saber que la magnitud que corresponde a la diferencia de las dos alturas no cambia por el hecho de que cambien las unidades con que se miden puede llevar, al identificar las magnitudes (longitudes) con las medidas, a considerar que la diferencia entre las *medidas* no cambia (y por lo tanto a constar que Mr. Tall mide “8 botones”, es decir dos más) (Carraher,1986).

Como en este ejemplo, la identificación de cantidad y medida puede ser una fuente de dificultades en este ámbito, aunque también puede constituir un motivo para cuestionarla mediante actividades adecuadas (por ejemplo, anticipar las medidas de una misma cantidad con unidades diferentes).

Por otra parte, notemos que la relación entre medidas que se desprende de este último problema (4 clips = 6 botones, 6 clips = x) y la relación de conmensuración que revisamos antes, nL = mU, son similares. Lo que no es similar es el motivo por el cual se plantean las relaciones, y en consecuencia, el sentido que éstas adquieren: en la relación de conmensuración, por lo menos una de las cantidades en juego no tiene la función de unidad de medida, es ella misma objeto de medición.

Lo mismo ocurre con la relación entre un conjunto y un número de objetos: aunque en ciertas circunstancias, ésta relación puede corresponder efectivamente a un cambio de unidad en un conteo (unidad objeto, unidad grupo de objetos), en otras circunstancias la relación no es la de un cambio de unidad, el número de objetos expresa *el cardinal* de un conjunto, el conjunto no interviene como otra unidad.

Podemos decir, en resumen, que este ámbito, el de la medida, discreta o continua, da lugar, en virtud de la naturaleza lineal de la función medida, a variantes de la SFR-2 que son fundamentales desde el punto de vista de la adquisición inicial de la noción de medida, de linealidad, y también de la noción razón como precursora de la fracción en su papel de medida. En este ámbito, la condición de linealidad descansa en una relación de congruencia de cantidades.

Una mirada a los textos y programas de matemáticas en el nivel básico utilizados en México durante los últimos 40 años deja entrever que este ámbito se encuentra sub utilizado tanto en lo que se refiere a la enseñanza de la medición como a la de la proporcionalidad. Uno de los pocos problemas de esta familia (cambios de unidad) que suele utilizarse en la enseñanza de la proporcionalidad es el de los cambios de moneda.

#### *5.2.2.3) El tratamiento de la información*

Las situaciones relativas al tratamiento de la información constituyen también un “habitat” natural de la noción de razón. A diferencia de los ámbitos clásicos de las magnitudes proporcionales, en éste frecuentemente no se trata de cantidades que varíen y sean proporcionales. El uso de la razón obedece al interés de destacar la *relación* entre dos cantidades dadas, de hacerla fácilmente perceptible y comparable al expresarla mediante una relación equivalente entre cantidades relativamente pequeñas, a escala de lo imaginable.

Las situaciones más sencillas en este ámbito consisten en preguntar directamente por la razón que guardan dos o más cantidades, ya sea bajo la forma de un número de veces, de una fracción, de un porcentaje o, también, de una gráfica (por ejemplo, representar en un diagrama circular un conjunto de cantidades en que se divide una totalidad). Otras situaciones consisten en interpretar razones ya expresadas numéricamente o mediante gráficas. En las situaciones más complejas se trata de tomar decisiones a partir de información cuantitativa, decisiones que suponen considerar determinadas razones entre los datos que se dan (son por lo general situaciones de comparación de razones).

La expresión de las relaciones entre cantidades mediante razones simplificadas, o mediante porcentajes, a la vez que permite destacar información relevante, puede también dar lugar con cierta facilidad a errores de interpretación, sobre todo cuando se pierden de vista las cantidades absolutas o el factor de escala. Es lo que Freudenthal llama “errores debidos a la normalización” (Freudenthal, 1983:195).

Aunque no estudiaremos aquí la problemática específica de estas situaciones, consideramos que pueden constituir un ámbito adecuado para propiciar el desarrollo de ciertos aspectos de la noción de razón a la vez que favorecen el desarrollo de conocimientos cuya utilidad práctica en la vida moderna es evidente.

### 5.2.3) La variable “razones externas heterogéneas u homogéneas”

Dados dos conjuntos de medidas en relación, las razones internas a cada uno de los conjuntos son siempre, por definición, razones entre medidas de un mismo tipo de magnitud, y con una misma unidad. Son razones *homogéneas*. La expresión de estas razones con un número da lugar a un *escalar*, un “número de veces”, sin dimensión.

En cambio, las razones externas, las que se establecen entre un elemento de un conjunto y un elemento del otro, pueden ser tanto homogéneas, si los dos conjuntos son de cantidades de la misma especie (por ejemplo, en las homotecias), como *heterogéneas*, si las cantidades no son de la misma especie (por ejemplo, en la relación entre distancias y tiempos). En ambos casos la razón externa expresa una “cantidad intensiva”, pero en el segundo el número que expresa a la razón es un *factor con dimensión* mientras que en el primero puede ser asimilado a un operador sin dimensión.

Esta variable, razones homogéneas o heterogéneas, puede tener una influencia distinta dependiendo del procedimiento que se utiliza: desde el punto de vista de los procedimientos internos (CS: conservación de la suma, y CRI: conservación de las razones internas), el hecho de que las cantidades sean de distinta naturaleza puede ayudar a distinguir mejor las relaciones que se establecen en un conjunto de las que se establecen en el otro. Puede ayudar, así mismo, a inhibir procedimientos aditivos externos, es decir, a inhibir la idea de que sumando una cantidad fija a los elementos del conjunto inicial se pueden obtener los elementos del conjunto final, puesto que al sumar cantidades de una especie no se obtiene una cantidad de especie diferente (la suma conserva el referente, diría Schwartz).

Pero, desde el punto de vista del operador, de su identificación como razón constante y de su aplicación para calcular valores, la presencia de magnitudes de distinta naturaleza puede dificultar la tarea con respecto al caso en que las magnitudes son de la misma naturaleza debido a que el paso de una cantidad a la otra no es sólo cuantitativo sino cualitativo. Identificar un operador sin dimensión cuando las cantidades son de distinta naturaleza implica hacer abstracción de las unidades, y por ello puede ser más difícil que hacerlo cuando las cantidades son de misma naturaleza.

Por esta razón es previsible que la variante “cantidades de distinta naturaleza” favorezca aún más los procedimientos que hemos llamado “internos”, en detrimento del externo.

Al mirar de cerca el universo de los objetos que pueden ser puestos en relación de razón, identificamos casos particulares que merece la pena destacar por el carácter que asume en cada uno el operador constante. Obtenemos una pequeña fenomenología organizada a partir del criterio “razón homogénea, razón heterogénea”:

Razones homogéneas
Operador sin dimensión

- Caso 1
  Cantidades proporcionales de misma naturaleza; misma unidad de medida
- Caso 2
  Cantidades proporcionales de misma naturaleza; misma unidad, pero distintos objetos portadores.

| | |
|---|---|
| Razones heterogéneas<br>Operador con dimensión | • Caso 3<br>Cantidades proporcionales de distinta naturaleza o de misma naturaleza pero medidas con distinta unidad.<br>• Caso 4<br>Cambios de unidad en la medición .<br>• Caso 5<br>Cambios de unidad en las relaciones entre cantidades proporcionales |

A continuación comentamos algunas de las características de estos casos.

- Caso 1: Misma magnitud, misma unidad, mismos objetos portadores

Ejemplo de relación parte/parte: la escala

> "Un lado A de una figura mide 2 cm y su homólogo, A', mide 6 cm. Se desea saber cuánto mide el homólogo del lado B de 10 cm"

La razón externa constante "por cada 2 centímetros en A, 6 centímetros en B" expresa, al igual que cuando las cantidades son de distinta naturaleza, una "cantidad intensiva". Pero en este caso, debido a que las dos cantidades en relación son de misma naturaleza y se expresan con la misma unidad, el operador constante X3 cm/cm puede ser asimilado a un operador sin dimensión, X3, sin tener que hacer abstracción de las unidades:
2 cm X3 =6 cm. Desde este punto de vista, identificar un operador constante puede ser menos difícil cuando la razón externa es homogénea.

Un caso frecuente de relaciones entre magnitudes de misma naturaleza y misma unidad es el de las relaciones parte/todo. En este caso el operador sin dimensión es siempre una fracción menor que uno. Considerando que las fracciones se enseñan en la escuela durante varios años justamente a partir de relaciones parte todo, aunado al hecho de que éste es también el uso frecuente que se da a las fracciones en la vida cotidiana, es probable que, siempre desde el punto de vista del operador externo, para los niños resulte más natural la idea de expresar las relaciones parte todo mediante una fracción, que las relaciones parte – parte, cuando éstas no son enteras.

- Caso 2: Misma magnitud, misma unidad, distintos objetos portadores:

El interés didáctico de esta variante radica en que se beneficia de ciertas propiedades de las razones homogéneas (operador sin dimensión) y de las heterogéneas (operador con dimensión): la razón expresa una relación entre dos conjuntos de cantidades que se distinguen bien uno del otro, como cuando las magnitudes son de distinta naturaleza (por ejemplo, cantidades de pintura *roja* y cantidades de pintura *blanca,* en una mezcla), pero a la vez la razón externa puede expresarse con un operador sin dimensión, que transforma *medidas concretas* (por ejemplo, transforma cantidades de litros en cantidades de litros), lo cual es más difícil cuando las magnitudes son de distinto tipo.

- Caso 3: Magnitudes de distinta naturaleza, o de misma naturaleza pero medidas con distinta unidad.

Consideremos primero un ejemplo en el que las magnitudes son de distinta naturaleza: la relación entre distancia y tiempo. Si sabemos que un vehículo, cuya velocidad es constante, recorre 40 km en 20 minutos, podemos expresar su velocidad mediante cualquiera de las razones externas que se generan al conservar las razones internas, por ejemplo, "20 km por cada 10 min", y en particular mediante la razón canónica "2 km por cada minuto[5]".

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 20 min | 40 km | |
| :20 | | | :20 |
| | 1 min | 2 km | |

Para calcular el recorrido que se realiza en otra cantidad de minutos, por ejemplo, en 30min:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 min | 2 km | |
| X30 | | | X30 |
| | 30 min | 30 X 2 km = 60 km | |

Las operaciones se realizan siempre al interior de cada conjunto. Los operadores internos (:20, X30) actúan entre cantidades de la misma naturaleza, son escalares, no tienen dimensión.

En cambio, si optamos por cuantificar con un número la razón externa, es decir, por determinar el operador constante, mediante la división "40 km entre 20 min", obtenemos un operador externo con dimensión: 2 km/min

X2 km/min

| | |
|---|---|
| 20 min | 40 km |
| 30 min | 30 min X 2 km/min = 60 km |

[5] Frecuentemente estas razones entre cantidades distintas son llamadas en inglés "rates".

El operador externo "2 km/min" expresa una medida de una nueva magnitud, la velocidad. Suele llamarse "magnitud cociente" por el hecho de que la medida surge de un cociente de otras medidas (ver nota I al final del capítulo).

Tenemos entonces dos formas de expresar la velocidad constante: mediante la razón canónica "2 km por cada minuto" o mediante el operador con dimensión "2 km/min", el cual representa una medida de la magnitud velocidad. Ciertamente, éstas tienden a identificarse, la dimensión km/min de hecho se acostumbra a leer "kilómetros *por* minuto" y no "kilómetros *sobre* minuto", a pesar de que no se trata de un producto de dimensiones[6]. Pero esta identificación no nos debe hacer perder de vista el hecho de que comprender y manejar un operador con dimensión conlleva una dificultad conceptual mayor que la que implica manejar la razón "2 km por cada minuto" mediante la conservación de las razones internas. Considerar en estos casos un operador *sin dimensión,* implica hacer abstracción de las unidades, establecer una relación numérica entre las medidas abstractas.

En estos casos (magnitudes distintas) se presenta, además, una dificultad en el nivel de la escritura de las unidades en los cálculos (sobre este punto, ver nota II al final del capítulo).

Veamos ahora el caso en el que las magnitudes son de misma naturaleza, pero las unidades con que se miden son distintas, por ejemplo:

> *En una reproducción a escala, a una longitud de 1 metro corresponde una de 2 cm ¿Cuánto mide, en la reproducción, una longitud de 3 metros?*

El operador constante, X2 cm/m, tiene dimensión. Sin embargo ahora, a diferencia de cuando las magnitudes son de distinta naturaleza, es posible obtener un operador sin dimensión, reduciendo a la misma unidad. El operador es entonces X2/100:

1 m→ 2 cm

100 cm→ 2 cm

1 cm → 2/100 cm

---

[6] Cuando se trata efectivamente de un producto de magnitudes se usa un punto, o simplemente se yuxtaponen los nombres de las magnitudes, por ejemplo, la cantidad de trabajo de una compañía de transportes se mide en "kilómetros toneladas", el consumo de electricidad se mide en "kilowatts.hora".

Este constituye uno de los casos de determinación del operador externo más difíciles debido a que el operador se presenta como una composición de otros dos, uno de los cuales está implícito en el cambio de unidad.

En el otro extremo, es posible entrever variantes muy simples del problema que aquí consideramos. Por ejemplo, una situación que se utiliza ya en el primer grado de primaria consiste en reproducir un dibujo realizado sobre una cuadrícula, en otra cuadrícula más grande o más pequeña. La sencillez de la situación obedece a la posibilidad de dejar completamente implícito el cambio de unidad, aunado al uso del factor más simple posible, X1, lo cual se traduce en reproducir cantidades: lo que mide *n* de un lado, debe medir *n* del otro.

Así, en este caso, misma magnitud pero diferentes unidades, encontramos dos variantes de la SFR- 2 que, desde el punto de vista de la utilización del operador externo, están en los dos extremos de la escala de dificultad, según si el cambio de unidad puede quedar implícito o no.

- Caso 4: Cambios de unidad en la medición.

Cuando se trata de un cambiar la unidad de una medida o de un conjunto de medidas, el operador también tiene dimensión, aunque es muy frecuente que se haga abstracción de las unidades. Por ejemplo, en la conversión de una medida en decímetros a centímetros, suele decirse “se multiplica por 10”:

X10 X10 X10

| metros | decímetros | centímetros | milímetros |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 100 | 1000 |

No obstante, sería incorrecto escribir:

1 dm X 10 = 10 cm.

La escritura es:

1 dmX 10 cm/dm = 10 cm

El operador X10cm/dm, llamado en este caso, “factor de conversión”, tiene dimensión, dimensión cociente, como en el caso de las magnitudes distintas. Podemos decir que se comporta como una “cantidad intensiva”, desde el momento en que no expresa la extensión de una cantidad (como 10cm o 1dm), sino la relación que guardan dos cantidades.

Si se desea expresar la razón *escalar* entre las magnitudes "decímetro" y "centímetro", y no la transformación de las medidas cuando cambia la unidad, la escritura es:

1 dm = 10 X 1 cm

o bien

1 cm = 1/10 X 1 dm

Por lo tanto, en las relaciones entre unidades de medida debemos distinguir dos tipos de relación externa, y dos tipos de operador:

**Factor de escala entre magnitudes**

| X1/10 | |
|---|---|
| Decímetros | Centímetros |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |

**Factor de conversión entre medidas**

| X10 cm/dm | |
|---|---|
| Decímetros | Centímetros |
| 1 | 10 |
| 2 | 20 |
| 3 | 30 |

- Caso 5: Los cambios de unidad en las relaciones entre magnitudes proporcionales.

Los cambios de unidad al interior de cada uno de los conjuntos de medidas que se ponen en relación introducen una dificultad considerable incluso cuando se utilizan las razones internas, al requerir considerar, además de los operadores internos que se conservan, los factores de conversión. Por ejemplo, si plantea que un alambre de cierto calibre pesa 1.250 kg por metro, y se pregunta por el peso en gramos de 25 cm de alambre:

1 m → 1.250 kg.

X100 cm/m X1000 g/kg

100 cm → 1250 g (cambio de unidad)

:4 :4

25 cm → 312.5 g (razón interna :4)

Intervienen dos factores distintos de conversión X100 cm/m y X1000 g/kg y una razón interna que se conserva, "**:**4".

La posibilidad de expresar las medidas en relación con distintas unidades da lugar a expresiones equivalentes del operador. Por ejemplo X 1.250 kg/m = X 12.5 g/cm; 2 km/h = 33.33 m/min... De esta manera, cuando se hacen intervenir cambios de unidad, se pone de manifiesto que a una misma cantidad, extensiva o intensiva, pueden corresponder distintas *medidas*, dependiendo de las unidades que se utilicen. Los cambios de unidad introducen una dificultad adicional significativa en la SFR-2 desde el punto de vista de la determinación del operador constante y, al mismo tiempo, exigen una comprensión del componente dimensional del operador.

En resumen, la naturaleza de la los objetos que se ponen en relación determina la naturaleza del operador externo, y al mismo tiempo, determina sobre qué tipo de objetos (magnitudes, medidas concretas o números) actúa un operador sin dimensión. En el cuadro de la siguiente página resumimos estas relaciones.

### 5.2.4) Formas de expresión de la constancia de la razón en el problema

La constancia de la razón externa entre las cantidades constituye una característica del medio específico en el que se plantea la situación. Esta característica puede:

- Estar implícita, no dicha, porque se da por obvia, por ejemplo, en el problema “tres lápices me costaron cinco pesos, ¿cuánto debo pagar por seis lápices?”, se sobreentiende que *el valor de cada lápiz* es constante;
- Evocarse mediante una propiedad específica del medio, por ejemplo “las figuras tienen la misma forma”, “las mezclas de pintura tiene el mismo tono”, “la velocidad es constante”, etc. En estos casos, queda a cargo del alumno identificar la pertinencia de la conservación de la suma, o de las razones internas, o identificar la existencia de un valor unitario constante, o, por último, de un operador externo constante.
- Evocarse mediante la referencia a un valor unitario constante, por ejemplo: “Cuatro varillas *del mismo tamaño* miden en total 3 metros, ¿cuánto mide cada una?”.
- Finalmente, la constancia de la razón puede estar explícita, cuando se da o se pregunta por ella:
  - como un factor o un porcentaje (“¿cuál es el factor de escala?”, “¿cuál es el porcentaje de tal sustancia en la mezcla?”), o bien
  - mediante una regla de correspondencia del tipo “a por cada b”, por ejemplo ”la mezcla se prepara con dos de agua por cada tres de pintura”.

  En estos casos se elimina la primera dificultad, a saber, identificar la pertinencia de considerar una razón constante, queda únicamente la dificultad técnica, que puede no ser trivial, de aplicar esta razón o de determinar su valor.

**Efectos de la variable “objetos, magnitudes y unidades iguales o distintos” sobre la naturaleza del operador constante:**

| | Objetos, magnitudes y unidades | Características del operador |
|---|---|---|
| 1 | Misma magnitud, misma unidad, mismos objetos portadores.<br>Ejemplo de relación parte parte: la escala<br>Ejemplo de relación parte todo: el impuesto | Operador sin dimensión.<br>Actúa como un transformador de las medidas concretas y también de las magnitudes. |
| 2 | Misma magnitud, misma unidad, distintos objetos portadores.<br>Ejemplos:<br>Mezclas de cantidades que se miden en litros<br>Intercambio de dos tipos de objetos que se miden con el mismo tipo de unidad. | Operador sin dimensión<br>Actúa como un “transformador” (o comparador) de medidas concretas más no de las magnitudes. |
| 3 | Magnitudes de naturaleza distinta, o de misma naturaleza pero unidades distintas.<br>Ejemplos:<br>Relación tiempo – distancia<br>Escala con unidades distintas 3 cm/m = 3/100 | Operador con dimensión.<br>El operador sin dimensión actúa únicamente sobre las medidas abstractas.<br>En la escala, la utilización de unidades distintas implica una composición de operadores uno de los cuales está implícito en el cambio de unidad. |
| 4 | Cambios de unidad en la medición<br>(Misma magnitud, distinta unidad)<br>Ejemplo: conversión de metros a decímetros | Operador con dimensión<br>Actúa como un factor de conversión entre medidas concretas (1 m X 10 dm/m = 10 dm)<br>Actúa como un operador sin dimensión, como un transformador, entre las magnitudes<br>(1 m “X” 1/10 = 1 dm). |
| 5 | Cambios de unidad en las relaciones entre magnitudes proporcionales.<br>Ejemplo: El operador 1.25 kg./m es equivalente al operador 12.5 g/cm | Los cambios de unidad dan lugar a expresiones diversas del operador.. |

Como veremos en los resultados del cuestionario que aplicamos a alumnos de 4º a 6º de primaria (Capítulo II), estas distintas formas de expresar aquello que es invariante en la relación, además de incidir en la dificultad para asumir el carácter lineal de la relación, pueden influir también en el tipo de procedimiento que se elige.

**5.2.5) Resumen y comentario**

Las variables relativas a las magnitudes que se ponen en relación en la SFR-2 influyen de manera significativa en el sentido que asumen las razones en juego, en el procedimiento de resolución que se elige, y en el nivel de dificultad de éste.

Mientras las razones internas expresan la variación de una cantidad a otra en un mismo conjunto, las razones externas expresan un “estado”, al cual corresponde un nuevo concepto, una cantidad “intensiva”. Mientras la razón externa no se cuantifique, esta “cantidad intensiva” se expresa mediante una relación entre dos cantidades.

Los valores numéricos de las razones interna y externa tienen por lo tanto funciones y características dimensionales muy distintas: los operadores internos son siempre escalares, números sin dimensión que dan cuenta de una comparación multiplicativa entre dos valores de un mismo conjunto. Mediante éstos es posible generar razones externas equivalentes, es decir, “estados” equivalentes.

En cambio, los operadores externos tienen dimensión cociente, expresan la medida de una nueva magnitud. Esta característica añade una dificultad adicional considerable a este recurso. Sólo cuando la razón externa es homogénea (misma magnitud y misma unidad) estos operadores pueden ser asimilados a un operador sin dimensión. Este es el caso más favorable para la utilización de un operador externo constante. Un caso particular interesante desde el punto de vista didáctico es aquél en el que las magnitudes y las unidades en relación son iguales, pero los objetos portadores no lo son.

Por otra parte, las magnitudes específicas que se ponen en relación determinan el mayor o menor grado de dificultad para asumir la linealidad de la relación en la SFR-2. Las razones constantes que se establecen entre magnitudes del ámbito de “las matemáticas de la ciudad”, lo son en virtud de acuerdos explícitos, de convenciones, mientras que aquellas que se establecen en el ámbito de las “matemáticas de la naturaleza” constituyen aproximaciones a fenómenos físicos frecuentemente más difíciles de comprender. Otro ámbito especialmente favorable para la identificación de una razón constante, es el de la medida misma. En éste, la relación proporcional entre dos conjuntos de medidas obtenidas con dos unidades diferentes, descansa en una relación de congruencia entre las magnitudes que son objeto de medición. Situaciones elementales como “si un grupo tiene 5 objetos, ¿cuántos objetos hay en tres grupos?” pertenecen a esta familia.

Finalmente, la manera de formular la constancia de la razón en el texto del problema puede incidir también sobre la dificultad para identificar la linealidad de una relación y en el procedimiento específico por el que se opta.

Resumimos en el siguiente cuadro las características generales de los dos tipos de procedimiento, interno y externo, que hemos destacado.

| Procedimientos internos<br>Conservación de la suma<br>Conservación de las razones internas | Procedimiento externo<br>Operador constante |
|---|---|
| Se establece una equivalencia entre una razón de un conjunto y una del otro conjunto. | Se establece una equivalencia entre todas las razones que se forman con un elemento de un conjunto y su imagen en el otro. |
| La razón interna es homogénea, el factor que la expresa no tiene dimensión, puede provenir de una suma repetida. | La razón externa puede ser heterogénea; el número que la expresa puede tener dimensión (cociente); no proviene de la suma repetida. |
| La razón interna da cuenta de la variación de una cantidad a otra. | La razón externa da cuenta de una nueva magnitud, de una “cantidad intensiva”. |

En el proceso de concepción de la noción de proporción, Noelting destaca la *integración* de los dos procesos cognitivos, uno relativo a las variaciones de las cantidades de misma naturaleza, el otro relativo a la relación de elementos de distinta naturaleza la cual conlleva la construcción de un nuevo concepto, una nueva magnitud[7]. Pero esta integración no significa que los procedimientos aritméticos de resolución de la SFR-2 que hemos llamado “internos” (la conservación de la suma, de las razones internas y combinaciones de estos dos) y “externo”, uso del operador constante, se desarrollen simultáneamente. El análisis que hemos iniciado permite ya suponer la mayor complejidad conceptual del procedimiento externo. Es previsible que los procedimientos internos sean los primeros que los niños desarrollan, incluso espontáneamente, y posiblemente los

[7] En el apartado 6, sobre la situación fundamental de comparación, hacemos una referencia más amplia al trabajo de Noelting.

únicos que muchos llegan a dominar, mientras que el procedimiento externo requiere en mayor medida de una enseñanza intencional, de un trabajo didáctico específico.

Este supuesto encuentra evidencia empírica en la frecuencia con la que estudiantes de secundaria utilizan ciertas variantes de los procedimientos internos (Hart, 1988) así como el hecho de que éstos son los únicos que han sido identificados en las resoluciones de adultos no escolarizados (Soto y Rouche, 1995). En el trabajo experimental que presentaremos en los capítulos II y III confirmaremos esta observación.

### *5.3) Las variables numéricas*

Estudiaremos aquí los efectos de algunas variables de tipo numérico de la SFR-2 sobre los procedimientos de resolución posibles.

La variable que consideraremos como central es el carácter numérico de las razones en juego: éstas pueden ser naturales, cuando el valor de la razón es un número natural (N), o no naturales pero sí racionales (y positivas, naturalmente), en cuyo caso diremos simplemente "racionales" o "no enteras" (Q).

Dado que en la SFR-2 intervienen dos tipos de razones, internas y externas, en realidad tenemos dos variables: La razón interna natural o racional y la razón externa natural o racional:

Razón externa

a'→a

| | Conjunto 1 | Conjunto 2 |
|---|---|---|
| Razón interna a→b | a | a' |
| | b | x |

#### 5.3.1) Panorama General

En el siguiente cuadro mostramos la forma que asumen los principales procedimientos de resolución de la SFR-2 en cada uno de los cuatro casos que se generan mediante estas dos variables con dos valores cada una (N ó Q).

| | Razón Interna | N | | Q | |
|---|---|---|---|---|---|
| Variables | Razón externa | N | Q | N | Q |
| | Ejemplo | 2→10<br>6→ x | 2→5<br>6→x | 2→10<br>3→x | 2→5<br>3→x |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Proced. Internos | CS<br>Conservación<br>de la suma | 2→10<br>**+2** **+10**<br>... ...<br>6→ 30 | 2→5<br>**+2** **+5**<br>... ...<br>6→15 | No es posible | No es posible |
| | CRI<br>Conservación<br>de las razones<br>internas | 2→10<br>**X3** **X3**<br>6→ 30 | 2→5<br>**X3** **X3**<br>6→15 | improbable | improbable |
| | VU<br>Valor unitario | 2→10<br>**1→5**<br>6→ 30 | 2→5<br>**1→5/2**<br>6→15 | 2→10<br>**1→5**<br>3→15 | 2→5<br>**1→5/2**<br>3→7½ |
| Proced. Externo | Op<br>Operador | **X5**<br>2→10<br>6→ x | **X5/2**<br>2→5<br>6→15 | **X5**<br>2→10<br>3→15 | **X5/2**<br>2→5<br>3→7½ |

El cuadro permite esbozar un panorama de lo que podría ser una parte importante del recorrido de los niños en el estudio de la SFR-2 a lo largo de la primaria: desde la utilización de la suma hasta la utilización de un operador racional. El panorama es parcial porque por ahora sólo estamos considerando la variable “razones naturales y no naturales” y no otras variables numéricas, en particular el tipo de números que expresan a las cantidades (grandes, pequeños, naturales, racionales). Se pueden destacar los siguientes momentos:

1) El paso de la conservación de la suma a la conservación de las razones internas naturales, en el que las sumas repetidas se sustituyen por una multiplicación. Aquí se registra la construcción de un primer significado de la multiplicación: como suma

repetida. Por su parte, la razón externa constante (a, a') se expresa en conjuntos de pares del tipo (na, na'). El número que cuantifica a esta razón permanece implícito.

2) La construcción del procedimiento universal "Reducción al valor unitario" (natural primero, no natural después) . El valor unitario constituye la expresión canónica de la razón externa constante. Da cuenta, mediante una relación entre dos cantidades, de aquello que permanece invariante cuando las cantidades varían.

3) La construcción de la noción de operador constante. Aquello que es invariante, y que, con los procedimientos internos, permaneció implícito en los conjuntos de razones equivalentes o se manifestó como una razón canónica, ahora deviene explícito como una multiplicación. Con ello, se registra la construcción de un segundo significado de la multiplicación: la multiplicación "Xn", como expresión de la razón constante 1→n.

Desde el punto de vista de las razones externas no enteras podemos destacar una progresión vinculada a estos tres momentos, progresión que ya señalamos una vez. La razón externa no entera (a', a):

- da lugar a conjuntos de razones equivalentes del tipo (na, na') mediante procedimientos internos, en el momento 1
- se expresa mediante la razón canónica (1, a/a') lo cual lleva a la utilización de un número fraccionario (o decimal) en tanto *medida*, en el momento 2
- y en el momento 3, se expresa mediante un factor: Xa/a', y con ello una nueva significación de la multiplicación emerge al ámbito de lo explícito, de lo representado y nombrado, significación que permaneció implícita en los procedimientos anteriores.

Por su parte, la razón *interna* racional, cuando es utilizada mediante el procedimiento VU, se descompone en dos razones "naturales", por ejemplo, 2→3 en 2→1→3. El factor racional X3/2 queda implícito en la composición (:2) (X3)[1].

Así, las *razones* entre números naturales revelarán su papel como lo implícito de una multiplicación por un racional de dos maneras: en el conjunto de razones externas equivalentes, al que subyace un operador racional constante, y en la descomposición de la razón interna, a la que también subyace un factor racional. Cabe suponer que es a

[1] Decir que la operación (:2) es natural requiere de una precisión: en primer lugar, no constituye una operación cerrada en los naturales, sólo en un subconjunto de los mismos, y en segundo lugar, aunque formalmente equivalente a X½, para los niños es simplemente "entre dos" o "2 veces menos".

partir de estas formas implícitas que podría propiciarse la adquisición, por parte de los estudiantes, de la noción explícita de operador multiplicativo racional.

En lo que sigue vamos a analizar más detenidamente la forma en que las variables que hemos considerado aquí (razones enteras y no enteras) aunadas a otras variables numéricas que no hemos considerado aún, pueden afectar la dificultad de cada procedimiento y propiciar eventualmente el paso de un tipo a otro.

Para no complicar excesivamente el análisis del efecto de estas variables, no atenderemos simultáneamente a las variables relativas a la naturaleza de las magnitudes y de las unidades que ya hemos revisado, ni pretenderemos realizar el análisis para cada una de las variantes estructurales. Optaremos, cada vez, por considerar los valores más simples de estas variables y, sólo ocasionalmente, cuando sea pertinente, haremos un comentario relativo a otros valores. La conformación de un mapa amplio que contemple las variantes relevantes al mismo tiempo, mostrando lo que sabemos acerca de los niveles de dificultad, de los vínculos conceptuales y de las nuevas construcciones que se van estableciendo en cada nivel, constituye una tarea por hacer.

Analizaremos el efecto de las variables “razón interna entera/no entera” y “razón externa entera/no entera”, a las que llamaremos “condiciones”, sobre los procedimientos internos (CS, CRI y VU) primero y externos (OP) después. El subcapítulo queda organizado en los apartados que se muestran a continuación.

**Procedimientos internos (CS, CRI, VU)**
(apartado 5.3.2)

| | |
|---|---|
| Condición 1: { Razones **internas naturales;**<br>El valor buscado <u>es mayor</u> que el valor homólogo conocido | |
| Condición 1.1: no se da el valor unitario | 2 5 y 4.6 2<br>6 x 13.8 x |
| Condición 1.2: se da el valor unitario | 1 3 y 1 3<br>5 x x 15 |

| | |
|---|---|
| Condición 2: { Razones **internas naturales;**<br>El valor buscado es el valor unitario | |
| Condición 2.1: razón externa natural | 6 24<br>1 x |
| Condición 2.2: razón externa racional | 4 3<br>1 x |

| | |
|---|---|
| Condición 3: Razones **internas racionales**;<br>(El procedimiento de reducción a la unidad: VU) | |
| Condición 3.1: razón externa natural | 3 15<br>1 15**:**3<br>4 x |
| Condición 3.2: razón externa racional | 4 7<br>1 7**:4**<br>5 x |
| Condición 3.2.1: se da el valor unitario<br>(Primera aproximación a la multiplicación por un racional, en tanto razón <u>interna)</u> | 1 12<br>X ¾<br>¾ x |

**Procedimientos externos: el operador externo constante (OP)**
(apartado 5.3.3)

| | |
|---|---|
| Condición 1: Razón externa natural | X2<br>3 6<br>4 X |
| Condición 2: Razón externa racional | X7/4<br>4 7<br>5 X |

Desde el punto de vista del desarrollo de procedimientos por los alumnos, los externos se intercalan con los internos. Un operador natural puede aparecer mucho antes que un valor unitario fraccionario, pero la identificación del operador fraccionario puede ser efectivamente la culminación de este proceso. Hemos separado estos dos tipos de procedimientos debido a que, como ya hemos visto, el segundo, uso de un operador constante, corresponde a una forma distinta, en general más compleja, de enfrentar la invarianza de las razones en la SFR-2, que la de los procedimientos que hemos llamado internos (CS; CRI y VU). Por otra parte esta organización nos permite destacar mejor la forma en que las variables numéricas inciden sobre cada tipo de procedimiento.

### 5.3.2) Efectos de las variables sobre los procedimientos internos (CS, CRI, VU)

<table>
<tr><td colspan="3">Condición 1: { Razones internas naturales;<br>El valor buscado <u>es mayor</u> que el valor homólogo conocido</td></tr>
<tr><td>→ Condición 1.1: no se da el valor unitario</td><td>2   5<br>6   x</td><td>4.6   2<br>13.8   x</td></tr>
</table>

*La conservación de la suma (CS).*

La condición mínima para que este procedimiento pueda ser utilizado es que la razón interna sea entera. Hay además otra condición que puede favorecerlo (ante otros procedimientos, por ejemplo, el del valor unitario): una formulación de la razón externa que sugiere la repetición de los términos, por ejemplo:

> *Un comerciante vende melones a razón de 2 por 5 pesos, ¿cuánto hay que pagar por 6 melones?*.

| | Melones | Pesos | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | |
| +2 | | | +5 |
| | 4 | 10 | |
| +2 | | | +5 |
| | 6 | 15 | |

La consideración de que por cada 2 melones, se pagan 5 pesos propicia la conservación de la suma. Esta es la propiedad específica de la linealidad que se pone en juego.

Antes de la utilización de la suma puede considerarse un procedimiento todavía más elemental: si se dispone de material concreto, una colección de melones puede agruparse de dos en dos y por cada agrupamiento de dos, formar un agrupamiento de 5 “pesos”, para finalmente contar los pesos uno por uno.

*De la suma, a la “suma de sumas”; efectos de la variable “tamaño de la razón interna”.*

Una razón interna relativamente grande puede propiciar la reducción del número de sumas mediante la realización de “sumas de sumas”. Llamaremos a esta variante del procedimiento CS “conservación de las sumas, generalizada (CSg)”. Esta variante presenta a su vez un caso particular, importante por la economía que logra: la duplicación. Consiste en sumar sistemáticamente el resultado de la suma anterior. Por ejemplo, si se pregunta por el precio de 40 melones:

| | melones | pesos | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | |
| +2 | | | +5 |
| | 4 | 10 | |
| +4 | | | +10 |
| | 8 | 20 | |
| +8 | | | +20 |
| | 16 | 40 | |
| +16 | | | +40 |
| | 32 | 80 | |
| +8 | | | +20 |
| | 40 | 100 | |

Los 20 sumandos (+2) se reducen a 6 sumandos.

Otra forma de simplificar el procedimiento de sumas repetidas consiste en *separar los dos conteos*. Primero se suma la cantidad “2 melones” hasta obtener 40 melones, después, o simultáneamente, se cuenta el número de sumandos. Finalmente, se suma ese mismo número de veces la cantidad de 5 pesos. En este caso, la razón interna “20 veces” se habrá hecho explícita, por lo que tenemos ya una variante del procedimiento CRI: las razones internas aparecen como los números de veces que se debe sumar cada uno de los términos de la razón externa. Dichos números de veces deben ser iguales.

*De la conservación de la suma a la conservación de las razones internas (CRI)*

El procedimiento CRI consiste en cuantificar la razón interna entre dos cantidades de un mismo conjunto y reproducirla entre las cantidades correspondientes del otro. La razón interna puede significar “el número de veces que se suma”.

Por ejemplo, para calcular el precio de 20 melones:

| | Melones | Pesos | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | |
| **X10** | | | **X10** |
| | 20 | 50 | |

La razón interna 2→20 debe ser igual a la razón 5→x, de donde:
“10 veces 2 melones, cuestan 10 veces 5 pesos”

El procedimiento implica la realización de dos operaciones sucesivas: una división de dos cantidades de la misma naturaleza para determinar cuántas veces una es la otra, la llamaremos división “comparación” para distinguirla de otros tipos de división que veremos más adelante, y una multiplicación. Cada una de estas operaciones puede ejecutarse mediante técnicas más o menos elementales, y es posible incluso que las operaciones no sean identificadas como una división y una multiplicación.

En el siguiente cuadro se describen las principales técnicas posibles.

| La división “comparación”<br>20 melones entre 2 melones = 10 veces | La multiplicación<br>10 veces 5 pesos = 50 pesos |
|---|---|
| 1. Agrupando una colección de 20 objetos de dos en dos, luego contando el número de grupos | A) dibujando 10 colecciones de 5 objetos y contando. |
| 2. Sumando de manera iterada el número 2 hasta llegar a 20, luego contado los sumandos | B) sumando 10 veces 5 pesos |
| 3. Abreviando el número de sumas mediante composiciones aditivas, y contando el número de sumandos | C) abreviando el número de sumas mediante composiciones aditivas |
| 4. Buscando el número que multiplicado por 2 melones da 20 melones | D) multiplicando 10X5 mediante algún algoritmo |
| 5. dividiendo 20 entre 2 mediante algún algoritmo | |

Cuando se utiliza la suma, lo que distingue al procedimiento CRI del procedimiento CS es el hecho de que, en el segundo, las sumas se realizan simultáneamente en ambos conjuntos y por lo tanto la razón interna no se hace explícita. En el procedimiento CRI, en cambio, se realizan primero las sumas en el primer conjunto y se cuenta el número de sumandos. Este número es la razón interna.

Por lo tanto, el procedimiento CRI podría llegar a ser utilizado por los niños antes de dominar incluso la multiplicación. Dado que "el número de veces" que debe repetirse el segundo término se hace explícito, la situación puede resultar adecuada justamente para propiciar la sustitución de las sumas repetidas por multiplicaciones, simplemente como una forma más económica de obtener el resultado.

Ésta es la segunda situación que identificamos en donde ocurre una sustitución de sumas repetidas por una multiplicación, la primera fue la SFR-1 (reproducción de una cantidad) cuando se propicia que los elementos de la colección cuyo cardinal será comunicado se agrupen en colecciones equipotentes.

El paso de CS a CRI puede propiciarse mediante una razón relativamente grande, de manera que se favorezca la separación de los dos conteos implicados. No obstante, con una razón relativamente grande, hay otro procedimiento, el de las combinaciones lineales (CL), en el que se combinan CS y CRI, y en el que la razón interna tampoco se hace explícita debido a que nuevamente las operaciones se pueden realizar simultáneamente en ambos conjuntos Por ejemplo, para calcular el precio de 80 melones:

| | melones | pesos | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | |
| +2 | | | +5 |
| | 4 | 10 | |
| +4 | | | +10 |
| | 8 | 20 | |
| X10 | | | X10 |
| | 80 | 200 | |

En los procedimientos CS y CL no se calcula el valor de la razón interna en juego. Ésta se va "componiendo" sobre la marcha mediante sumas en CS, o mediante sumas y multiplicaciones en CL[2]. Con ello, se evita la realización de la primera operación, la

[2] Los autores de habla inglesa llaman con frecuencia a estos procedmientos "building up procedures". En los estudios sobre razonamiento porporcional, algunos autores los consideran como "pre proporcionales" por no hacer explícita la razón interna (e.g. Lamon, 1991)

división comparación. Son por ello más simples conceptualmente, pero a la vez menos sistemáticos y menos económicos que el procedimiento CRI, con la utilización de las técnicas para dividir y multiplicar.

Ya señalamos que los procedimientos CS y CL son frecuentemente utilizados por los estudiantes de primaria y de secundaria para resolver problemas de valor faltante con las características aquí señaladas (razón interna entera y relativamente grande) (Hart, 1988) y también por adultos con un nivel de escolarización bajo, a veces, con un impresionante dominio (Soto y Rouche, 1995).

El paso de la conservación de la suma a la conservación de las razones internas no está exento de dificultades para los niños de primaria. Hemos identificado en dos estudios[3] a algunos alumnos de 4º, 5º y 6º de primaria, que cometen errores como los siguientes:

| Melones | → Pesos |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | *10* |
| 4 | *15* |

Cuando las tres cantidades del conjunto inicial (1, 2, 4) ya están dadas algunos alumnos ponen 10 como imagen de 2, y 15 como imagen de cuatro, a veces porque dejan de considerar la primera columna, y completan la segunda como si las cantidades (de melones) aumentaran de uno en uno. Algunos incluso lo expresan “porque está en el tercer renglón”.

Este mismo error, en este ejemplo multiplicar 5 pesos por 3, tiene, para otros niños, un origen más complejo: porque “por dos y por dos es por tres”. En este caso, los alumnos atienden a la aplicación de dos razones sucesivas (1 melón →2 melones, y 2 melones → 4 melones), y por lo tanto, introducen una noción más compleja, la composición de dos escalares.

Cuando los alumnos van generando ambos términos de cada par, hemos identificado otro error que consiste en duplicar de un lado y del otro lado sumar una constante. Errores menos graves, debidos a confusiones sobre la marcha de resolver son: a partir de cierto

[3] En la exploración mediante entrevistas que presentamos en la segunda parte de este trabajo, y en un seguimiento a las clases de proporcionalidad impartidas por un maestro de 6º de grado (Ramírez, en proceso).

momento empezar a sumar la misma cantidad de ambos lados, o contar mal el número de sumandos, sobre todo cuando se usaron sumas de sumas (CSg).

Así, estos procedimientos no son triviales para los alumnos de primaria, ni siquiera para los más grandes. Se desprende la importancia de disponer de una validación empírica en los momentos en que éstos se construyen, en particular, cuando se propicia el paso de la suma repetida a la multiplicación.

*El paso de la suma a la multiplicación en la variante estructural 3 (conjunto final de dimensión mayor que uno).*

En esta variante, la razón interna deberá conservarse entre más de dos pares de valores. El operador interno deviene así una constante. Veamos un ejemplo: se tienen los precios de dos melones en varios puestos y se quiere el precio de 8 melones:

| | Puesto 1 | Puesto 2 | Puesto 3 | Puesto 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 Melones | 5 pesos | 3 pesos | 4 pesos | 7 pesos |
| 8 Melones | | | | |

El operador interno “4 veces” deberá aplicarse esta vez a cuatro cantidades. Resulta por lo tanto más económico determinarlo primero y aplicarlo después que realizar las sumas simultáneamente (lo que implicaría repetir el proceso cuatro veces). Identificar a la razón interna como constante es el reto de la tarea.

*Con cantidades no enteras*

Mientras la razón interna sea natural y se traduzca en una multiplicación por un entero, la complejidad de los procedimientos internos no cambia de manera importante, en el nivel de las relaciones multiplicativas, por el hecho de que la imagen que se conoce sea una cantidad no entera, por ejemplo:

| Melones | Pesos | | Pesos | Melones |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4.60 | | 4.60 | 2 |
| 6 | x | | 13.80 | x |

Los mismos procedimientos que ya vimos son susceptibles de ser aplicados, desde el agrupamiento y conteo, la conservación de la suma, hasta la identificación de la razón interna natural. En la multiplicación que se obtiene, por ejemplo, 3 veces 4.60, el operador es un número natural, por lo cual la multiplicación sigue siendo una simple suma iterada.

| | | |
|---|---|---|
| Condición 1: { Razones internas naturales; El valor buscado <u>es mayor</u> que el valor homólogo conocido | | |
| Condición 1.1: no se da el valor unitario | | |
| → **Condición 1.2: se da el valor unitario** | 1 3<br>5 x | 1 3<br>x 15 |

Cuando en la SFR-2 se da el valor unitario obtenemos los problemas típicos que implican sólo una multiplicación o una división.

Multiplicación

| Melones | Pesos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 5 | x |

División comparación

| Melones | Pesos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| x | 15 |

En tanto casos particulares de las situaciones que revisamos anteriormente, pueden aplicarse los mismos procedimientos: desde el agrupamiento de objetos y el conteo, hasta la conservación de las razones internas, utilizando la multiplicación y la división. Veamos ahora las particularidades que introduce la presencia del valor unitario.

*La multiplicación*

La primera aproximación a la noción de multiplicación suele realizarse, en la enseñanza, a partir de la cuantificación de una colección mediante un número de conjuntos equipotentes (agrupamientos, paquetes, etc) y la especificación del cardinal de estos conjuntos.

La notación “aXb” se introduce con el sentido de “a grupos de b objetos”, en donde “a grupos” será interpretado como un escalar “a veces” que se aplica a una cantidad[4]:

| Grupos | Objetos | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | |
| | | X5 |
| 5 | x | |

[4] La notación “aXb” tiene el sentido de “a veces b” o, para otros, de “a, b veces”, la cuestión del lugar es una convención que se adopta en el momento de introducir la escritura multiplicativa. La diferenciación de estos dos papeles (escalar y cantidad) tenderá a desvanecerse a nivel del cálculo en la medida en que se constate la conmutatividad, pero jugará un papel importante durante un largo periodo, como modelo de situaciones multiplicativas.

Notemos que este significado de la multiplicación, en tanto suma repetida (3+3+...+3, 5 veces) se define justamente en la función de una razón interna, de una relación escalar entre valores de un mismo conjunto (5 veces 3 objetos).

Cuando se da el valor unitario, la razón interna entre los valores del primer conjunto coincide con la segunda cantidad, no importa que se trate de grupos o de objetos, por ejemplo:

| Melones | Pesos | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | X5 |
| 5 | x | |

Esta característica permite inferir, sin cálculo alguno de por medio, el valor de la razón interna, 5 veces, de manera que el número 5 juega dos papeles que se confunden: expresa un cardinal y expresa una razón. Si consideramos que los cardinales también son razones (5 melones es 5 veces un melón), podemos decir que en esta situación se pone en evidencia esta doble naturaleza de los cardinales. Hablaremos de un *desdoblamiento* de funciones (en el sentido de Duval (1983)).

Finalmente, la razón externa constante aparece bajo la forma de pares de cantidades: (1 grupo→3 objetos) (2 grupos→ 6 objetos) ... (5 grupos, →15 objetos), pero no se hace explícita bajo la forma de un factor (X3) durante el periodo de introducción de la multiplicación (y llega a suceder que tampoco se estudia después)[5].

La variante estructural 3 (conjunto final de dimensión mayor que uno) ofrece la posibilidad de introducir muy pronto la idea de un factor constante, por ejemplo:

| | Puesto 1 | Puesto 2 | Puesto 3 |
|---|---|---|---|
| 1 melón | \$3 | \$2 | \$5 |
| 4 melones | | | |

Tenemos aquí la situación más simple posible en la que debe aplicarse un factor constante a varias cantidades: la razón interna "4 veces" se infiere sin cálculo de por medio, por desdoblamiento, de la cantidad "4 melones".

[5] La noción de operador multiplicativo constante suele estudiarse poco en la escuela primaria. Volveremos más adelante sobre este punto.

*La división.*

División comparación

| Melones | Pesos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| x | 15 |

Al igual que el problema de multiplicación, éste puede resolverse con cualquiera de los procedimientos que se indicaron para el caso general en el que no se da el valor unitario (agrupamientos y conteo, sumas repetidas, etc.). Puede entreverse también un procedimiento que no hemos comentado, “las restas sucesivas”, en donde se parte de la cantidad grande, 15 pesos, y se van restando 3 pesos, aunque, dado que restar es más difícil que sumar, se requieren condiciones que lo favorezcan, que pongan en primer plano la idea de disminución progresiva de la cantidad, por ejemplo, tenía 15 pesos, cada vez que jugué perdí 3 pesos....

Al igual que en el caso general, la razón interna “5 veces” se hará explícita en cuanto los conteos (sumas o restas repetidas) se realicen por separado en los dos conjuntos y surge también con el significado de “número de veces que se suma”.

A diferencia del problema de multiplicación, la razón “5 veces” es ahora el objeto de la búsqueda y se distingue bien de las dos cantidades de pesos que relaciona. Una vez determinado el cociente, éste se identificará con el número de melones, de manera que ahora la segunda razón (5 veces un melón igual 5 melones) es la que queda implícita.

**Comentarios sobre los procedimientos CS y CRI**

1) En la SFR-2, las adiciones iteradas se realizan en el interior de cada uno de los conjuntos y pueden dar lugar al procedimiento que consiste en calcular y conservar una razón interna (CRI). Un primer significado de la multiplicación se construye en este tránsito, de la utilización de adiciones iteradas a la identificación de una razón interna.

En la variante estructural 3, “conjunto final de dimensión mayor que uno”, la razón interna pasa a primer plano al constituir la operación constante que se debe aplicar a todas las cantidades. Constituye con ello una de las experiencias más simples en las que los niños pueden llegar a utilizar un factor constante.

2) Mientras las razones internas sean enteras, incluso los problemas que incluyen cantidades no enteras son relativamente sencillos. Brindan la ocasión de realizar, en el marco de un problema de proporcionalidad, sumas iteradas de decimales y de fracciones

o multiplicaciones de un decimal o de una fracción por un entero, antes de abordar cuestiones más complejas como la obtención de un cociente no entero.

3) Fracciones implícitas.
Mientras la razón interna sea entera, desde el punto de vista de la utilización de los procedimientos internos, es indiferente que la razón externa sea entera o no lo sea. Cuando no lo es, por ejemplo en (2 melones por 5 pesos, por cada 2 cm en A corresponden 3 cm en B; de cada 5 naranjas que recojan, se quedan con 2, etc.) la posibilidad de trabajar con la suma y la multiplicación de números enteros en el nivel de las relaciones internas, permite generar pares de medidas concretas (2 melones, 5pesos) (4 melones, 10 pesos) (6 melones, 15 pesos) etc., que guardan la misma razón, aunque esto no se haga explícito. El valor unitario racional (1 melón, 2.5 pesos) y por supuesto también el operador racional constante (X2.5) permanecen implícitos en el conjunto de pares de medidas enteras.

Al analizar la SFR-1, en la que una cantidad es objeto de reproducción, vimos el caso en el que la razón entre la unidad y el objeto de la medición no es entera. Estudiamos entonces el caso específico en el que la unidad no es fraccionable (en el nivel físico) y da lugar a una relación de conmensuración, por ejemplo, en la situación del espesor de las hojas de papel, “50 hojas = 4mm”. Esta relación entre dos medidas, y todas las que se generan a partir de ella mediante operadores internos (conservando las razones internas), dan cuenta de manera implícita, del espesor de una hoja. Puede plantearse aquí la SFR-2, con razones internas enteras, por ejemplo: (50h, 4mm) = (100h, x). En este nivel, las fracciones, en tanto expresión de una cantidad, y por supuesto también las fracciones en tanto operador constante, permanecen implícitas.

Así, en esta categoría de problemas (razón interna entera) y con los procedimientos que aquí estudiamos (CS, CRI), <u>tenemos el primer caso en el que las razones de números naturales constituyen una construcción que permite extender el conjunto de números naturales para dar cuenta de relaciones racionales</u>. Medidas racionales y operadores racionales están implícitos en las resoluciones que hasta aquí hemos analizado.

| | |
|---|---|
| Condición 2: | Razones **internas naturales;**<br>El valor buscado es el valor unitario |

En los casos que hemos revisado hasta aquí el valor que se busca es *mayor* que el valor conocido del mismo conjunto. Nos falta considerar, entre los problemas con una razón interna entera, el caso en el que la cantidad que se busca es *menor* que la cantidad que se conoce, por ejemplo:

| Melones | Pesos |
|---|---|
| 6 | 18 |
| 2 | x |

En estos casos, el procedimiento de conservación de la suma se dificulta considerablemente (es necesario ensayar valores posibles y ajustar); la conservación de las razones internas implica ahora efectuar una división en el segundo conjunto en lugar de una multiplicación. Hart (1981) , en su estudio sobre el desempeño de estudiantes de secundaria frente a problemas de proporcionalidad como el anterior, observa una caída significativa en el nivel de logros en cuanto el valor buscado es menor que el valor conocido, lo cual tiende a confirmar la mayor dificultad de este caso.

En estos casos, aun más que en los anteriores, pasar por el valor unitario puede constituir un procedimiento más accesible que determinar directamente el valor de la razón interna. Antes de analizar dicho procedimiento, nos centraremos aquí en un importante caso particular: aquél en el que se pregunta precisamente por el valor unitario.

Debido a que esta vez el carácter entero o no entero de la razón externa sí afecta el nivel de dificultad de los problemas (una razón externa no entera llevará a un valor unitario no entero), revisaremos estos casos por separado.

| | |
|---|---|
| Condición 2: | Razones internas naturales;<br>El valor buscado es el valor unitario |
| →**Condición 2.1: razón externa natural** | 6 24<br>1 x |

En los problemas en los que se busca un valor unitario, la operación división, que llamaremos "partición", surge de una relación entre los datos distinta a la de los problemas de la división "comparación" que ya revisamos. Para ilustrarlo, utilizaremos ahora un contexto típico, el reparto de dulces:

| División “comparación” (se conoce el VU) | División “partición” (se busca el VU) |
|---|---|
| *Luis tiene 24 dulces. Quiere formar bolsitas con 6 dulces cada una. ¿Cuántas bolsitas puede formar?*<br>Bolsitas Dulces<br>1 6<br>x 24<br>La división 24: 6 es entre cantidades de la misma naturaleza. El cociente (4) expresa un número de veces; es el valor de la razón interna que debe conservarse entre los valores correspondientes del conjunto de bolsitas. | *Luis tiene 24 dulces. Quiere formar 6 bolsitas con la misma cantidad de dulces. ¿cuántos dulces deberá poner en cada bolsita?*<br>Bolsitas Dulces<br>1 x<br>6 24<br>La división 24: 6 tiene el sentido de distribuir homogéneamente 24 dulces en 6 lugares para obtener la razón canónica “x dulces por lugar”. Podríamos decir también que tiene el sentido de “partir” una cantidad en partes iguales. |

Tenemos pues dos tipos de problemas, dos tipos de relaciones claramente diferenciados, asociados a una misma operación. Se trata de dos significados de la división. Los procedimientos más elementales de resolución también son distintos. A continuación veremos algunos de los numerosos procedimientos que corresponden a la división “partición”, división que permite determinar un valor unitario.

*Agrupamientos*: La cantidad total de dulces no puede ser esta vez agrupada fácilmente debido a que no se conoce el tamaño de cada grupo. Puede realizarse no obstante mediante ajustes sucesivos, siempre y cuando el número de grupos sea pequeño: se distribuyen los objetos en seis grupos aproximadamente iguales, se cuentan los objetos que quedaron en cada grupo, y después se hacen ajustes pasando objetos de los grupos que tienen más a los que tienen menos. El procedimiento es claramente más difícil que cuando se conoce el tamaño del grupo.

*El reparto cíclico:* Si se dispone del material concreto, el procedimiento más sistemático para resolver este problema, siempre y cuando el divisor no sea demasiado grande, es el reparto cíclico. Este procedimiento constituye un algoritmo menos simple de lo que parece cuando se analiza de cerca. Consiste en :

- Determinar un número de lugares bien diferenciados y cuyo orden pueda ser identificado fácilmente, en el ejemplo, 6 lugares;

- Asignar a cada lugar, en orden, un objeto;
- Si sobran objetos, se repite el paso 2, hasta que no sobren objetos;
- Cuando ya no sobran objetos, debe verificarse si en la última vuelta se asignó un objeto a cada lugar;
- Si no se asignó un objeto a cada lugar, deben retirarse los objetos asignados en la última vuelta. Se cuentan entonces los objetos asignados a uno de los lugares.

Cuando el cociente es relativamente grande, una variante para abreviar este procedimiento consiste en repartir los objetos de dos en dos, o en grupos mayores. En ciertos casos, la colección que será objeto de reparto puede estar ya agrupada en cuyo caso puede convenir repartir los grupos ya conformados, por ejemplo, en el reparto de una cantidad de dinero formada por billetes de distintas denominaciones.

*Transformando la división "partición en una división comparación".* Es posible replantear las relaciones entre los datos de un problema de división "partición" de manera que la división a realizar es finalmente del tipo "comparación". Basta considerar que, en el reparto cíclico, cada vez que se realiza una ronda asignando un dulce a cada bolsita, se han asignado 6 dulces en total. El problema que se plantea entonces es: ¿cuántas rondas se pueden hacer?, lo que lleva a ¿cuántas veces 6 dulces da 24 dulces?. Cada ronda corresponde a un dulce por bolsita:

| Dulces por bolsita | Dulces en total |
|---|---|
| 1 | 6 |
| x | 24 |

Este procedimiento, aunque relativamente complejo por la transformación de las relaciones originales que implica, ha llegado a ser identificado entre los procedimientos de principiantes en la resolución de este tipo de problemas. (Moreno, 1996) De hecho, obtenemos una versión de la variante estructural 3, en la que los valores unitarios aumentan progresivamente, mientras que la razón interna (número de bolsitas) es constante:

| | 1º ronda | 2º ronda | ... | ronda x |
|---|---|---|---|---|
| Dulces por bolsita | 1 | 2 | | x dulces |
| Dulces en 6 bolsitas | 6 | 12 | | 24 |

*Una variante del "diezmo"*: Este procedimiento se deriva también del reparto cíclico: si por cada ronda se asigna un dulce a cada bolsita, esto significa que, en cada bolsita se pondrán *uno de cada 6 dulces*. Si por alguna razón hubiera que formar sólo la primera bolsita (por ejemplo, un invitado no podrá asistir y Luis le quiere apartar sus dulces), el procedimiento, contando con el material, podría consistir en separar una de cada 6 golosinas.

La operación "entre 6" asume la forma de una razón "uno de cada 6". En un análisis sobre el sentido de la división, N y G. Brousseau (1987:280), comentan con respecto a este procedimiento que si bien no da lugar a un algoritmo escrito, pone de manifiesto la naturaleza de razón de la división. Más adelante, cuando estudiemos el procedimiento del operador constante, veremos la situación inversa: la transformación de una razón externa expresada como "uno de cada n", en el operador constante "entre n".

*La conservación de la suma*: Ahora, al no conocer el valor que es objeto de sumas iteradas, el procedimiento que se basa en la conservación de la suma deviene más complejo, implica un proceso de aproximaciones sucesivas: estimar una cantidad de dulces posible, realizar las seis sumas, comparar el resultado con la cantidad total de dulces, ajustar en función de esta comparación el valor estimado, y repetir el proceso.

| Bolsitas | Dulces |
|---|---|
| 1 | x |
| 1 | x |
| 1 | x |
| 1 | x |
| 1 | x |
| + 1 | + x |
| = 6 | = 24 |

*La conservación de las razones internas: "6 veces"*.

| | Bolsitas | Dulces | |
|---|---|---|---|
| | 1 | x | |
| **X6** | | | **X6** |
| | 6 | 24 | |

La razón interna X6 se infiere directamente de la relación 1 bolsita →6 bolsitas. Nuevamente tenemos un desdoblamiento del cardinal 6 en el escalar "seis veces". Ahora se trata de encontrar el valor x, que seis veces es igual a 24. Dicho valor puede determinarse también mediante el procedimiento de aproximaciones. En este punto, se destaca la relación multiplicativa que subyace a la división partición, y con ello empieza a manifestarse aquello que esta operación de partición tiene en común con la otra, la comparación. La utilización de la multiplicación puede favorecerse desde los procedimientos anteriores como una forma de verificar si un resultado es correcto (Moreno, 1996).

| División comparación | División partición |
|---|---|
| Bolsitas Dulces<br>1 6<br>**X?** **X?**<br>x 24 | Bolsitas Dulces<br>1 x<br>**X6** **X6**<br>6 24 |
| Se busca *al factor sin dimensión* (operador interno) que multiplicando a 6 dulces da 24 dulces: ***x** veces 6 = 24* | Se busca a *la cantidad de dulces* que multiplicada por el factor sin dimensión X6 da 24 dulces: *6 veces **x**=24* |

Haciendo abstracción de las magnitudes, en ambos casos se busca un factor de una multiplicación cuyo producto se conoce. Identificar a la división como la operación que modela a ambos tipos de relación requiere, por lo tanto, un proceso a lo largo del cual evolucionan los procedimientos locales a cada tipo de problema y, a la vez, una descontextualización[6]. Desprenderse del modelo del reparto en favor del modelo más general de la búsqueda de un factor en una multiplicación es necesario para poder extender la división a los racionales. Un conocimiento de la división demasiado anclado en la idea de reparto, obstaculizará la comprensión de la división con estos números (N. y G. Brousseau 1987:293).

Señalemos que en la mayoría de los contextos de la división partición, la idea de “reparto” no está presente, aunque puede introducirse de manera metafórica. Estos problemas pueden favorecer más que los de reparto la identificación de la relación multiplicativa, por ejemplo “Se pagaron 20 pesos por 5 lápices, ¿cuánto costó cada lápiz”?

[6] En Martínez F., N. P. (1997) puede verse un análisis acerca de la evolución de estos procedimientos para dividir.

<table>
<tr><td>Condición 2:</td><td>Razones internas naturales;<br>El valor buscado es el valor unitario</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición 2.1: razón externa natural</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">→ Condición 2.2: razón externa racional</td><td>4   3<br>1   x</td></tr>
</table>

Cuando la razón externa no es entera, el valor unitario es una fracción, o un decimal. La situación SFR-2 puede ser el marco en el que se definen las fracciones en tanto cocientes que expresan una cantidad, o bien, puede tratarse de una situación en la que se espera que se aplique un conocimiento sobre fracciones definidas previamente como “partes de unidad” (quebrados), también para expresar cantidades.

El primer caso, la construcción de la noción de fracción como cociente, ya fue presentado al analizar la SFR-1 en aras de mostrar una secuencia completa que inicia con un trabajo sobre cantidades de magnitud y culmina con una medida fraccionaria. Sin embargo, advertimos entonces que el paso de la relación nL = mU, a la medida, L = m/n U, se registra en el nivel del que nos ocupamos ahora, el de la relación entre medidas. Recordaremos brevemente esta construcción, para después analizar el segundo caso, cuando las fracciones se definieron previamente como partes de unidad.

*La construcción de las fracciones como cocientes, en el papel de un valor unitario.*

En la situación del espesor de las hojas de papel, vimos que una razón externa como (50 hojas, 4 mm) puede dar lugar a otras razones equivalentes como (100 hojas, 8 mm) mediante la conservación de las razones internas. Es a partir de estas razones que se define la cantidad fraccionaria 4/50 de mm como la medida del espesor de una hoja que, 50 veces, es igual a 4mm, es decir, como el cociente 4mm entre 50:

| | Número de hojas | Espesor en milímetros | |
|---|---|---|---|
| | 50 | 4 | |
| (:50) | | | (:50) |
| | 1 | 4:50 = 4/50<br>(por definición) | |

Concebir las fracciones como medidas y por lo tanto como números, requiere, más allá de la definición, de que dichas medidas sean objeto de las manipulaciones que los niños ya reconocen como propias de los números: comparaciones, sumas, restas, multiplicaciones por un entero.

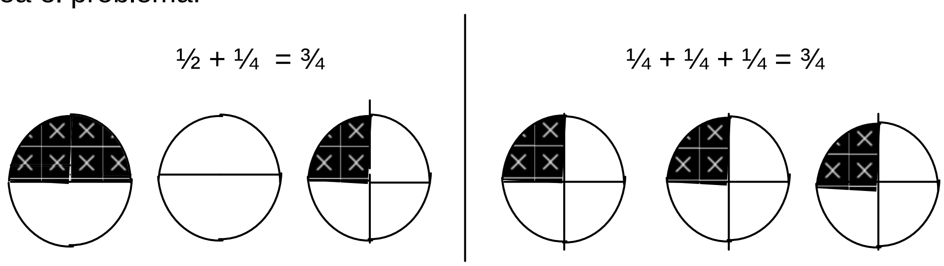
*Aplicación de fracciones previamente definidas como "partes de unidad".*

Si las fracciones fueron construidas, como suele suceder, como "partes de unidad" y no como cocientes de dos naturales (3/4, por ejemplo, con el sentido de "partir la unidad en 4, tomar 3 partes, y no de 3 unidades entre 4) entonces la situación de determinar el valor unitario se presenta como un problema de división "partición", en el que es necesario *calcular* un cociente fraccionario. Veamos esto en un contexto ya típico en la enseñanza, el del "reparto de pasteles" (Block y Solares, s/f)

> *4 niños (A; B; C y D) se reparten 3 pasteles en partes iguales, sin que sobre nada. ¿Qué fracción de pastel le toca a cada uno?*

| Niños → | Pasteles |
|---|---|
| 4 | 3 |
| 1 | x |

Es perfectamente posible encontrar el cociente solicitado (3/4 de pastel) a partir de la interpretación de la fracción como "partes de unidad", <u>sin conocer</u> la definición de las fracciones como cocientes. De hecho esto es lo que suelen hacer los niños cuando se les plantea el problema:




La fracción que resulta de la división sigue siendo concebida como quebrado, como suma de fracciones unitarias. El hecho de que esta fracción tenga como numerador al dividendo de la división y como denominador al divisor, es algo, desde la perspectiva de los niños que resuelven, tan completamente casual que puede incluso pasar inadvertido (ver nota III al final del capítulo).

Las fracciones son aquí cocientes pero, a diferencia de la situación anterior, no son cocientes por definición, sino cocientes "calculados", exactamente igual que cuando se calcula un cociente con decimales, por ejemplo, en 3 metros entre 4 = 0.75 metros, o igual que cuando se calcula cualquier cociente natural, por ejemplo 6 entre 3 = 2.

De hecho esta observación lleva a diferenciar dos sentidos posibles de una igualdad como "3**:**4 = 3/4": ésta puede indicar que 3:4 y ¾ son dos notaciones para un mismo concepto, cuando se habla de las fracciones definidas como cocientes, o bien, que ¾ es el número que *resulta* de dividir 3 entre 4, cuando la fracción no fue definida como un cociente.

Hasta este punto, el interés de la situación de reparto radica en que propicia una utilización de fracciones quebrados que presenta ciertas propiedades didácticas: los problemas ponen en juego varias unidades y no una sola, permiten que el resultado fraccionario sea mayor o menor que la unidad, permiten expresar el resultado con escrituras aditivas diferentes, según se haya hecho la partición y estudiar su equivalencia, por ejemplo, ½ + ¼ = ¼+ ¼ + ¼ (Balbuena, Espinosa et. al., 1984; Block, 1987; Dávila, 1991 y 1992) (ver nota IV al final del capítulo) En estos problemas, la división no interviene como característica definitoria de las fracciones, sino como fuente de problemas que funcionalizan la noción de "quebrado" (fracción con el significado de relación "parte todo").

No obstante, es posible ir un poco más lejos y plantear como objetivo que los alumnos, además de *constatar* que la división *a* unidades entre *b* arroja como cociente el quebrado *a/b* de unidad, comprendan y anticipen la necesidad de dicho resultado. Una de las formas más simples de comprender lo anterior es considerar que el reparto se hace pastel por pastel: si se reparten m pasteles entre n niños, *de cada pastel* toca, a cada niño, 1/n de pastel, por lo tanto, de m pasteles, tocan m veces 1/n, es decir, m/n de pastel.

Al razonamiento anterior subyace un replanteamiento de las relaciones en juego en el que se hace intervenir la variante estructural 3 (conjunto final de dimensión mayor que uno): a *n* niños, se hacen corresponder varias cantidades de pastel.

**Xm**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **:n** | Pasteles para ***n*** niños | 1 | 2 | ... | m |
| | Porción por niño | 1/n | 2/n | | m/n |

Manteniendo fijo el divisor "***n*** niños", se obtiene una relación proporcional entre el número de pasteles y la porción de pastel por niño. Cuando sólo se reparte un pastel las interpretaciones de la fracción como cociente y como "partes de unidad" coinciden. Esto permite determinar sin dificultad que un pastel entre ***n*** es ***1/n*** de pastel. Luego, si en vez de un pastel, se reparten *m* pasteles, la porción de cada niño será ***m*** veces mayor, es decir, ***m*** veces ***1/n*** = ***m/n*** de pastel.

Este procedimiento no es el “método del valor unitario” que analizaremos más adelante, de hecho, es más complejo: no consiste en calcular la imagen de un valor intermedio, sino en plantear las relaciones entre los datos de una nueva manera, destacando la propiedad a unidades entre b = a veces una unidad entre b.

Por otra parte, el lograr esta anticipación (a unidades entre b = a/b de unidad) en el contexto del reparto de pasteles no significa que los alumnos se apropian del significado de las fracciones como cocientes. En la exploración de procedimientos que realizamos con alumnos de 4º a 6º grados (capítulo II, apartado 2.3.3), pudimos comprobar que la variable “tipo de magnitud” es, nuevamente, relevante: frente a un problema en el que se plantea la relación de conmensuración “una rana avanzó 6 varas en 4 saltos”, alumnos que pudieron realizar antes repartos de pasteles, esta vez consideraron que los saltos no podían ser del mismo tamaño (plantean que, dado que los saltos no miden una vara, ni dos, tendría que haber varas chicas y varas grandes). Este problema, a diferencia del de reparto de pasteles, no favorece la determinación del valor unitario mediante la partición de cada vara entre el divisor (el número de saltos), sino la búsqueda de la medida que multiplicada por el divisor da como resultado al dividendo ( 4 veces $x$ varas = 6 varas). A raíz de esta observación, Solares organizó una experiencia didáctica en 5º grado para propiciar que los alumnos establecieran la relación a**:**b = a/b en un contexto similar a éste (Solares 1999; Block y Solares, s/f), ver nota V al final del capítulo.

**Comentarios sobre el uso del procedimiento CRI para determinar un valor unitario.**

**La división partición**. Aun cuando el valor unitario que se busca es entero, la división “partición” (a unidades entre b) es más compleja que la división “comparación” que se usa para determinar una razón interna entera (a unidades entre b unidades). Es cuando los procedimientos específicos para cada tipo de problema convergen en la búsqueda de un factor mediante un proceso de descontextualización, que la división puede empezar a ser considerada como una operación, por ahora, con los significados de comparación de cantidades, de partición de cantidades, de razón interna “veces menos” y, de manera más general, como la operación que permite determinar un factor faltante en una multiplicación.

**Las fracciones, como valores unitarios, cocientes de una división partición**. Cuando el valor unitario no es entero, la situación que pide determinarlo lleva a una construcción de la noción de cantidad fraccionaria como resultado de una división, ya sea que la fracción se defina en esta situación como un cociente, o que se trate de calcular la fracción previamente definida como "partes de unidad". Hemos visto que dicho cálculo no es trivial. La variante estructural 3 (conjunto final de dimensión mayor que uno) permite establecer que una división partición "**a** unidades entre **b**" es equivalente a "**a** veces (**una** unidad entre **b**)", relación útil para explicar que el resultado de dicha división de igual a la facción **a/b** de unidad.

**Razones que multiplican, razones que dividen**. Dadas dos cantidades n y m, siempre tenemos dos razones: "n a m" y "m a n". Esta forma tradicional de nombrar las razones da lugar con facilidad a confusión, "n a m" debe entenderse como "n es con respeto a m (n/m)", y no como "n se transforma en m", en cuyo caso tendríamos Xm/n. No obstante, en el trabajo con la SFR-2, el problema de identificar y nombrar la razón pertinente no se plantea en lo absoluto porque nunca se trata de nombrar una razón aislada sino de conservar una razón en dos conjuntos. Las razones, cuando se nombran, son "números de veces". Por ejemplo:

| A | | | B | |
|---|---|---|---|---|
| Conjunto 1 | conjunto 2 | | Conjunto 1 | conjunto 2 |
| 1 | 3 | | 5 | 15 |
| X5 | | | :5 | |
| 5 | x | | 1 | x |

En el caso A se busca una cantidad que sea igual a 5 veces 3. No hace falta nombrar la razón como "5 a 1". En el caso B, se busca la cantidad que, 5 veces, es igual a 15; tampoco falta nombrar a la razón como "1 a 5".

**Condición 3: Razones internas racionales;**

(El procedimiento de reducción a la unidad: VU)

Cuando el valor unitario no se da, ni se pregunta por él, un procedimiento general para encontrar el valor faltante en la SFR-2 es el método del valor unitario, también conocido como "método de reducción a la unidad". Consiste en determinar primero la imagen de la unidad y a partir de ésta, las imágenes que se buscan.

Aunque el procedimiento VU puede utilizarse en la SFR-2 cada vez que no se da el valor unitario, en general es cuando la razón *interna* es racional que se vuelve necesario, por ejemplo, en el problema "*Para hacer 3 collares iguales se usaron 12 perlas, ¿cuántas perlas se necesitan para hacer 5  collares iguales a las anteriores?*. El procedimiento de la conservación de la suma (CS) queda bloqueado y la determinación de la razón interna con un solo número (CRI) se vuelve muy difícil.

El valor unitario asume entonces un sentido que no tenía, necesariamente, en los problemas anteriores en los que era el objeto de la pregunta. Ahora va a intervenir como un recurso privilegiado para calcular imágenes. En las situaciones de comparación de razones (SFC) lo veremos intervenir como un recurso para identificar razones y para compararlas. Estas funciones pueden propiciar que el valor unitario asuma el papel de representante canónico de una relación entre las cantidades de dos conjuntos, de expresión privilegiada de aquello que permanece invariante en un conjunto de razones. Más adelante, el valor unitario puede constituir también una estrategia de base para la adquisición de la noción de operador multiplicativo.

Por otra parte, el procedimiento del valor unitario presenta ventajas significativas desde el punto de vista de la posibilidad de comprender las relaciones que pone en juego, en comparación con la técnica que suele rivalizar con éste: la regla de tres (la analizamos más adelante).

No obstante, la apropiación de este recurso en calidad de una técnica con cierto nivel de generalidad, no es espontánea. En distintos estudios sobre el desempeño de alumnos de secundaria frente a problemas de proporcionalidad, se ha encontrado que el recurso a este procedimiento no es en general muy frecuente, mientras que lo es un poco más en los países en los que es objeto de enseñanza, aunque su utilización es frágil, tiende a desaparecer  frente a problemas menos usuales (Karplus et al., 1983) o bien se utiliza en tanto algoritmo, sin poder explicarlo (Hart, 1981). Esta dificultad para utilizarlo debería llevarnos, en primer lugar, a una revisión de las condiciones que se ofrecen para propiciarlo y del tiempo que se consagra a su aprendizaje.

Entre las variables que determinan el grado de dificultad para *decidir* calcular un valor unitario podemos distinguir nuevamente las relativas al contexto y las numéricas.

Con respecto a las primeras, ya hicimos algunos señalamientos cuando estudiamos las variables relativas a las magnitudes y la manera de formular la constancia de la razón (apartado 5.2 de este capítulo). En la exploración de procedimientos que se reporta en el capítulo II (apartados 2.2 y 2.3) se confirmaron, entre otras, las siguientes relaciones:

- Cuando la unidad tiene una existencia real en el contexto evocado, por ejemplo, cuando se trata de cajas con objetos, de mercancías a las que se asocia un precio etc., puede ser más factible pensar en determinarlo que cuando sólo constituye un medio de cálculo, por ejemplo, en la relación entre números de personas y cantidades de ingredientes en una receta, o en la relación entre centímetros en una escala.
- Cuando la constancia de la razón se formula en términos de valores unitarios iguales ("todas las cajas tienen la misma cantidad") puede ser más fácil pensar en determinar el valor unitario que cuando la constancia de la razón se expresa mediante reglas de correspondencia del tipo "por cada...", o cuando queda implícita en la propiedad que se conserva (figuras semejantes, mezclas con el mismo tono, etc.).

Estas variables permiten ya establecer una jerarquía de dificultad desde el punto de vista de la utilización de esta técnica, al mismo tiempo que dejan ver la necesidad de considerar progresivamente cierta diversidad de contextos y de formulaciones en los problemas que se proponen para su desarrollo, a lo largo de la primaria.

Una dificultad más procedente del tipo de magnitudes ocurre cuando el valor unitario no es entero, al mismo tiempo que la magnitud en juego es discreta. Pueden aparecer valores como "fracción de obrero", "fracción de canica", etc., que no tienen sentido, al menos para los niños que no tienen porqué saber que no se trata de una fracción de obrero, sino de una fracción del tiempo de trabajo del obrero, o que la fracción de canica únicamente interesa como un medio de cálculo. Esta eventualidad expresa también la importancia de desarrollar métodos alternativos como los que ya hemos revisado (CS, CRI), y también la necesidad de cuidar la factibilidad de los contextos.

Desde el punto de vista de las variables numéricas, la presencia de una razón *interna* no entera determina la necesidad de utilizar el método de reducción a la unidad, y el nivel de dificultad lo determina el carácter entero o no entero de la razón *externa*, puesto que una razón externa no entera dará lugar a un valor unitario no entero. A continuación analizaremos estos dos casos.

| Condición 3: Razones internas racionales;<br>(El procedimiento de reducción a la unidad: VU) | | |
|---|---|---|
| →**Condición 3.1: razón externa natural** | 3<br>1<br>4 | 15<br>15**:**3<br>x |

Consideremos un ejemplo en el contexto más simple, el de los agrupamientos, en la variante estructural 2 (conjunto inicial con más de dos valores), por ser en la que el valor unitario expresa más claramente su función de constante:

> *Luis hace collares iguales. Para hacer 3 collares necesitó 15 perlas. Anota en la tabla las cantidades de perlas que necesita para hacer otras cantidades de collares*

| *Nº de collares* | *Nº de perlas* |
|---|---|
| *3* | *15* |
| *4* | |
| *5* | |
| *6* | |
| *7* | |
| *...* | |

*La descomposición de la razón interna: otra forma implícita de un racional.*

En el procedimiento de reducción a la unidad se registra una descomposición de una razón interna racional, en una composición de razones enteras, por ejemplo:

| | Collares | Perlas | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 12 | |
| **:3** | | | **:3** |
| | 1 | 4 | |
| **X5** | | | **X5** |
| | 5 | 20 | |

La razón interna racional (3→5), a la que corresponde el operador interno X5/3, se descompone en la composición de razones enteras: 3→1→5, que equivale a (:3)o(x5).

En la variante estructural 3 (conjunto final de dimensión mayor que uno) el operador interno implícito actúa sobre un conjunto de cantidades y deviene de esta manera una constante, por ejemplo:

| | | Perlas Rojas | Perlas Amarillas | Perlas Anaranjadas |
|---|---|---|---|---|
| | 3 Collares | 15 | 6 | 18 |
| (:3) | 1 collar | | | |
| (X5) | 5 collares | | | |

Las tres cantidades de perlas que hay en 5 collares son iguales a 5/3 de las cantidades de perlas que hay en 3 collares. El operador fraccionario (X5/3) permanece implícito en la composición (:3) (X5).

Veamos brevemente otras descomposiciones de la razón interna:

- Se utiliza un submúltiplo distinto a uno.

| Collares | Perlas |
|---|---|
| 4 | 32 |
| 6 | x |

Puede determinarse la razón intermedia 2 collares →16 perlas. Este tipo de descomposiciones de la razón interna se facilitan cuando consisten en “sacar mitades” (la razón interna es del tipo $m/2^n$), o bien cuando un submúltiplo común (distinto a uno) a los dos valores del conjunto inicial es muy evidente, por ejemplo, entre
5 000 y 3 000, resulta más fácil pasar por 1000 que por uno.

- Se utiliza un valor intermedio *múltiplo* de los dos valores

| Collares | Perlas |
|---|---|
| 4 | 16 |
| 6 | x |

Puede determinarse la razón intermedia “Una docena de collares → 48 perlas”, de donde 6 collares→ 24 perlas. La descomposición de la razón interna es ahora:
4→6 = 4→ 12→ 6. Se trata de un procedimiento poco frecuente, y se vuelve poco práctico en cuanto las cantidades del conjunto inicial son mayores. Es más factible cuando el valor múltiplo (12 collares) aparece explícitamente entre las cantidades del conjunto inicial.

En estas diversas descomposiciones de la razón interna, y particularmente en la más importante, la del valor unitario, podemos identificar una segunda forma en la que las razones juegan su papel fundamental de permitir extender el dominio de los naturales para dar cuenta de relaciones racionales. Anteriormente vimos el caso en el que medidas y operadores racionales permanecieron implícitos bajo la forma de razones *externas*, por ejemplo, en “2 melones, 5 pesos”, “4 hojas, 50mm” o “de cada 3 naranjas, 2 naranjas”. Ahora, es la razón interna, en el ejemplo, X5/3, la que permanece implícita y se maneja mediante una composición de escalares enteros.

*El valor unitario, factor constante que expresa una cantidad.*

Una vez que se ha determinado el valor unitario, para encontrar las demás imágenes, éste es multiplicado por cada valor del conjunto inicial.

***X5***

| *Nº de collares* | *Nº de perlas* |
|---|---|
| *3* | *15* |
| ***1*** | ***5*** |
| *4* | |
| *5* | |
| *...* | |

La multiplicación constante “X5” tiene el sentido original de una cantidad (5 perlas) a la que se aplican operadores internos variables, tres veces, cuatro veces, etc., que se obtienen, por desdoblamiento, de las cantidades de collares. Esta cantidad, 5 perlas, puede devenir en operador externo sin dimensión (5 veces) por un acto de descontextualización, pero con el riesgo de perder el control semántico sobre la situación cuando esto se propicia prematuramente (sumando 5 veces 4 collares ¡no se obtienen 20 perlas!). De ahí la importancia de considerar el valor unitario como una razón, o “cantidad intensiva” (5 perlas *por collar*), no como un número sin dimensión.

*El valor unitario: expresión de aquello que es invariante en la relación.*

Decidir buscar la razón canónica 1 collar → n perlas, supone considerarla de antemano como generadora de *todos* los pares de cantidades, mediante conservación de la suma o de las razones internas. En otros términos, significa considerarla como aquello que es invariante en la relación entre cantidades variables: en (3 collares, 15 perlas) y en (5 collares, x perlas) y en cualquier otro par, hay *el mismo número de perlas por collar*.

Concebir al valor unitario de esta manera, como el invariante en una relación, es producto de una construcción que los niños realizan a lo largo de varios de años. G. Ricco (1982) logró poner en evidencia, a partir de un estudio longitudinal, ciertos aspectos de este proceso. Utilizó para ello una lista en la que se relacionan cantidades de lápices con sus precios (variante estructural 2). En la primera experiencia, las cantidades de lápices de la lista van de 1 a 8, luego 10, 15, 16, 18, 71 72 y 73 lápices. Se da el precio para 3 y para 4 lápices (12 y 16 francos respectivamente). Se debe calcular el precio para las demás cantidades de lápices. Entrevistó a niños de 7 a 11 años

La investigadora muestra que los errores de los niños no son consecuencia de una falta de conocimientos, los niños ponen en juego algunos aspectos de la función lineal pero de manera limitada: primero sólo respetan el orden creciente (a más lápices, más pesos), después incorporan la utilización de una constante, pero aún no multiplicativa (a los +1 del conjunto inicial hacen corresponder +1 en el conjunto final), y, finalmente, manifiestan la noción de constante, primero al conservar la suma (a los +1, corresponden +4), después, al conjeturar la existencia de un valor unitario, finalmente, al calcular el valor unitario (en la nota VI al final del capítulo se especifican los niveles y los procedimientos identificados por la investigadora en el proceso de conceptualización de una constante).

Con los niños que no pudieron determinar un valor unitario, estudió una variante en la que proporcionó directamente este valor (4 francos por lápiz). Encontró que para algunos de estos niños tampoco este dato fue suficiente para que pudieran resolver la tarea con éxito. Este hecho parece expresar que la noción de valor unitario se constituye en el acto mismo de conservar la suma, y después las razones internas: a diferencia de “un lápiz cuesta cuatro pesos”, comprender que “*cada* lápiz cuesta cuatro pesos” equivale a comprender que “un lápiz más un lápiz cuestan cuatro pesos más cuatro pesos”.

Cabe señalar que las variables contextuales, no mencionadas en el estudio, podrían tener cierta influencia. Por ejemplo, la relación entre cantidad y precio puede no ser la más transparente para los niños más pequeños, desde el punto de vista de la conservación de la suma, considerando que comprender el valor en dinero de las cosas no es sencillo. Posiblemente en el contexto de los agrupamientos, collares-perlas, cajas-chocolates, etc., sea más fácil identificar la pertinencia de conservar la suma. Estas magnitudes pueden ser también un poco más favorables que las de “lápices - francos” para determinar un valor unitario mediante la idea de repartir uno a uno, idea que no se vislumbra en las respuestas de los niños del estudio.

*Comparación de la dificultad relativa de los procedimientos CRI y VU.*

En un problema, una razón interna entera puede dar lugar a los procedimientos internos CS o CRI con operadores internos naturales, aun cuando la razón externa no sea entera. Por otra parte, una razón externa entera puede dar lugar al procedimiento VU, con un valor unitario natural. En la escuela primaria, cuando se estudian las relaciones de proporcionalidad, suelen plantearse sobre todo problemas del segundo tipo. Sin embargo, éstos no son necesariamente más sencillos que los primeros.

Comparemos los siguientes dos problemas, cada uno presenta las condiciones que favorecen CRI (o CS) y VU respectivamente:

| *A*<br>*Las naranjas se venden a 8 pesos el costal con 60. ¿cuánto hay que pagar por 300 naranjas?* | *B*<br>*Por 20 toronjas se pagaron 60 pesos. ¿Cuánto habría que pagar por 35 toronjas?* |
|---|---|
| La razón externa es racional<br>La razón interna es entera<br>El procedimiento CRI permite resolver sin utilizar números racionales:<br><br>Naranjas Pesos<br>60 8<br>X5<br>300 40 | La razón externa es entera, por lo tanto también lo es el valor unitario<br>La razón interna es racional<br>El procedimiento VU permite resolver sin utilizar números racionales<br>Toronjas Pesos<br>20 60<br>1 3<br>35 105 |

El procedimiento CRI presenta una dificultad adicional en comparación con el procedimiento VU: el operador interno (X5) no tiene relación con una cantidad específica (de naranjas), expresa una relación escalar entre dos cantidades no unitarias. Obtenerla supone prever, en primer lugar, que la razón interna se conserva y, en segundo lugar, que ésta podría ser entera. En cambio, en el procedimiento VU, los operadores internos (:20, X35) se desprenden de la relación que las dos cantidades de naranjas guardan con *una naranja* (20 veces menos, 35 veces más). Desde este punto de vista, el procedimiento VU se manifiesta más accesible que el procedimiento CRI.

Sin embargo, el procedimiento CRI se puede facilitar considerablemente cuando el texto sugiere considerar al valor inicial, en el ejemplo “60 naranjas”, como una nueva *unidad* de conteo. En el texto, la referencia a los costales de 60 obra en este sentido. El problema se acerca entonces al caso en el que se da el valor unitario (ahora se trata de un valor unitario compuesto) y con ello puede ser más sencillo que aquél que requiere calcular un valor unitario. Puede incluso resolverse con el procedimiento más elemental en el que se conserva la suma.

Así, los contextos, las maneras de formular aquello que es invariante, pueden influir en el procedimiento que se escoge y en el nivel de dificultad del problema. A mediano plazo el procedimiento VU cobrará importancia, debido a que CRI es eficiente únicamente en ciertos casos, mientras que VU constituye una técnica general.

*Comentario*

Cuando el valor unitario no se da ni se pregunta por él, deviene, en la SFR-2, un recurso de cálculo fundamental cuya utilización supone anticiparlo como el invariante en una relación entre cantidades variables. Esta anticipación implica un proceso en el que las características de la linealidad son progresivamente asumidas.

En la utilización de esta técnica ocurre un caso más en el que una razón racional se maneja desde los números naturales, esta vez a través de una composición de operadores naturales.

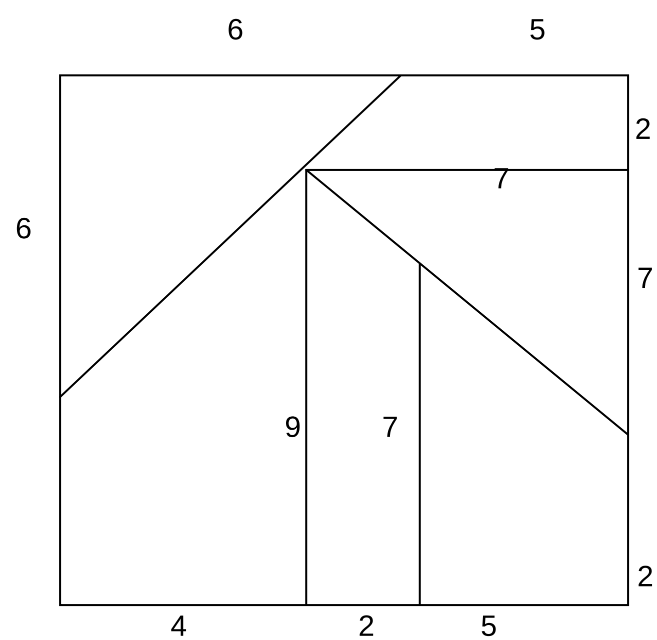
Más adelante, al estudiar los procesos de hacer explícito un operador racional, analizaremos las opciones a partir de una razón interna o de una razón externa. Por ahora, nos interesó subrayar las manifestaciones implícitas de estos operadores, bajo la forma de razones entre parejas de cantidades, o como vimos aquí, bajo la forma de una composición de operadores.

| | | |
|---|---|---|
| Condición 3: Razones internas racionales;<br>(El procedimiento de reducción a la unidad: VU) | | |
| Condición 3.1: razón externa natural | | |
| →**Condición 3.2: razón externa racional** | 4<br>1<br>5 | 7<br>7**:4**<br>x |

El cálculo del valor unitario implica ahora la dificultad adicional, que ya estudiamos, de realizar una división partición cuyo cociente no es entero.

Consideraremos aquí, a título de ejemplo, la situación del “Rompecabezas” que utiliza Brousseau en el inicio de una secuencia destinada a la construcción de la noción de fracción como aplicación lineal. Durante una primera fase, el objeto de estudio es precisamente el valor unitario como expresión de la constancia.

Se plantea una primera situación en la que se debe agrandar un rompecabezas como el siguiente:




En la consigna se informa que el lado que mide 4 cm en la original, debe medir 7cm en la copia. Los niños tienen un dibujo del rompecabezas original, con las medidas indicadas, y además, las piezas sueltas del mismo rompecabezas. Se les pide que se repartan las piezas entre los integrantes de cada equipo.

Los niños, sistemáticamente, proponen sumar 3 cm a todas las medidas. Sin embargo, la situación proporciona una forma de validación empírica: cuando terminan sus piezas e intentan armar el rompecabezas con ellas, descubren, siempre con azoro, que éstas no embonan.

A partir de esta constatación se suscita la reflexión. Surge primero la sospecha de que se midió mal, se rectifican las medidas. Surgen propuestas diversas como “multiplicar por 2, y restar 1”, lo cual acusa ya la búsqueda de un operador constante.

En la experiencia que analiza Brousseau, la solución que, no sin dificultad, se acaba imponiendo es la determinación del valor unitario: 1→ 7/4 cm. Ya hemos analizado antes los dos caminos que pueden llevar a determinar un valor unitario fraccionario: 7 cm **:** 4 es directamente 7/4 cm por definición, o bien, si se dispone de la noción de fracción como partes de unidad, entonces es necesario calcular el cociente, lo cual no es simple, o, por último, puede suceder que en este punto ya se conozca el algoritmo que proporciona el cociente como fracción: a unidades entre b = a/b de unidad.

No obstante las dificultades anteriores, se comprende el interés de institucionalizar en este momento la solución en la que el valor unitario se expresa con una fracción: aunque los decimales acabarán imponiéndose debido a las facilidades de cálculo que ofrecen, el cálculo con fracciones permitirá *justificar* al cálculo con decimales.

Una vez establecida la razón 1→7/4, se calculan las imágenes, por ejemplo, para 5cm:

| | Figura A | Figura A’ |
|---|---|---|
| | 7 | 4 |
| **:7** | | |
| | 1 | 7/4 |
| **X5** | | |
| | 5 | 5 X7/4 |

El operador externo constante X7/4 subyace al conjunto de razones externas (7→ 4), (1→7/4), (5→ 35/4), y por lo tanto no interviene explícitamente. Por su parte, el operador interno X5/7 subyace a la composición (:7) (x5) y tampoco interviene explícitamente. Así, hasta este punto, las fracciones intervienen únicamente como medidas, no como relaciones u operadores. Los operadores que intervienen son siempre naturales.

Detengámonos sólo un momento para comparar el valor unitario 1 cm→ 7/4 cm con otro valor unitario que ya se analizó: 1hoja → 4/50 mm. Ambos proceden de razones entre medidas enteras (4cm → 7cm) y (50h → 4mm), ambos implican determinar una cantidad fraccionaria mediante una división (7cm:4 y 4mm:50). La diferencia más importante es la función que están destinados a cumplir: en el caso de las hojas, la razón (50h→4mm) funciona como precursora de una medida racional: 4/50 mm. No interesó, en ese momento, identificar al operador X4/50 mm/hoja. En cambio, en la situación del rompecabezas, la razón (4cm→7cm) aunque también da lugar a una medida fraccionaria (1cm→7/4cm), tiene una función que va más allá: dar cuenta de una transformación cuantitativa de medidas. En este caso, interesará culminar el proceso identificándola explícitamente como el operador multiplicativo constante X7/4. A partir de este objetivo se comprende el interés de estudiar el método de reducción a la unidad en el contexto de una relación de semejanza geométrica y no, por ejemplo, de una relación entre magnitudes distintas: 1) el operador que será construido más adelante es un operador sin dimensión 2) la situación facilita la posibilidad de verificación empírica y 3) la situación da lugar a relacionar varios valores de un conjunto inicial, con varios valores de un conjunto final, condición importante cuando interesa desatacar progresivamente la noción de aplicación.

En la secuencia de los Brousseau, se propicia mediante diversas situaciones que los niños identifiquen la razón (1→7/4) como una razón privilegiada debido a una serie de ventajas que ofrece: facilita el cálculo de cualquier imagen, cuando hay varias escalas en juego, permite distinguir las que “achican” de las que “agrandan”, y , sobre todo, permite ordenarlas de la que achica más a la que agranda más (hay aquí ya una intervención de la situación fundamental de comparación de razones, SFC) . La expresión 1→b/a de la razón externa, equivalente a a→b, se convierte así en la representante canónica de las transformaciones.

Con estas herramientas se abordan varios aspectos como la noción de aplicación recíproca y la multiplicación (todavía implícita) por fracciones y decimales en el papel de razón interna. Veamos dos ejemplos.

La multiplicación (implícita) de una fracción medida por un operador racional.

| | |
|---|---|
| Si la aplicación es 1→7/4,¿cuánto mide en la copia un lado que en el figura original mide ¾ de cm?<br><br>A A'<br>1 7/4<br>**:4**<br>¼ 7/4:4= 7/16<br>**X3**<br>¾ 7/16 X3 = 21/16 | Si la aplicación es 1→2.3,¿cuánto mide en la copia un lado que en la figura original mide 0.7 cm?<br><br>A A'<br>1 2.3<br>1 23/10<br>**:10**<br>0.1 23/100<br>**X7**<br>0.7 161/100 = 1.61 |

Estas técnicas, basadas en la obtención de razones equivalentes a la razón externa a → b ó 1→ b/a mediante la conservación de las razones internas, requieren de un buen dominio del trabajo sobre razones internas, así como de la multiplicación y la división de una medida fraccionaria por un entero.

Subrayemos que el hecho de que la medida 7/4 de cm fue *multiplicada* por el operador interno ¾ permanece implícito, puesto que dicho operador fue descompuesto en (:4) (x3). En la secuencia de N. y G. Brousseau, la multiplicación por un racional no se hace explícita sino más adelante, hasta que la razón externa constante se expresa como operador (1→7/4 = X7/4), es decir, la multiplicación por un racional se hace explícita con el significado amplio de aplicación lineal, y no como razón interna[1]. Veremos este proceso en el apartado siguiente.

No obstante, vamos a ver a continuación que la alternativa de hacer explícita a la multiplicación por un racional que subyace a una razón interna es factible en ciertos casos particulares. Hay que señalar, sin embargo, que el hecho mismo de tener que considerar casos particulares constituye una primera desventaja de este camino.

[1] Los autores no justifican la decisión de hacer explícita a la multiplicación por un racional en tanto razón externa constante y no cuando es una relación interna, aunque, como veremos más adelante, pueden suponerse algunos de los motivos.

| | |
|---|---|
| Condición 3: Razones internas racionales;<br>(El procedimiento de reducción a la unidad: VU) | |
| Condición 3.1: razón externa natural | |
| Condición 3.2: razón externa racional | |
| **→Condición 3.2.1: se da el valor unitario**<br>(Primera aproximación a la multiplicación por un racional, en tanto razón <u>interna</u>) | X ¾ 1 → 12<br>¾ → x |

Cuando una razón <u>interna</u> no es entera, (3 cajas→5 cajas), (4cm→5cm), la resolución mediante el procedimiento del valor unitario lleva a descomponer dicha razón, por ejemplo: 3 cajas→1caja→5 cajas. La razón X5/3 queda implícita en la composición (:3)(X5). Estudiaremos ahora un caso particular en el que la razón interna racional se puede hacer explícita: cuando se da el valor unitario (1→u), y se pregunta por la imagen de una cantidad b/a racional. De esta manera, la razón <u>interna</u> es racional, pero, a diferencia de los casos anteriores, ahora no se presenta como a→b sino directamente como 1→b/a.

Veamos un primer ejemplo simple, en el contexto de cambios de unidad (vueltas, kilómetros):

> *Un tren da vueltas alrededor de un circuito de 12 km. Anotar cuántos kilómetros recorre al dar ¾ de vuelta:*

| Vueltas→ | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 12 |
| ¾ | |

La conservación de las razones internas lleva a considerar que a ¾ de vuelta corresponden ¾ de 12 kilómetros. Esta cantidad puede calcularse conforme al significado típico de las fracciones como partes de unidad, considerando a 12 kilómetros como la unidad que es objeto de partición: ¾ de 12 es tres veces ¼ de 12.

Notemos que este procedimiento constituye una forma del método del valor unitario: la razón 1 → ¾ se descompone en 1→1/4→3/4 y da lugar a la composición (:4)(X3).

Vueltas→Kilómetros

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 12 |
| | (:4) | | |
| ¾ de | | ¼ | 3 |
| | (X3) | | |
| | | ¾ | 9 |

La descomposición corresponde de hecho a la definición de la fracción como partes de unidad[2].

Si, además, se dan varios valores en el conjunto inicial (números de vueltas), y se intercalan números enteros con números no enteros (2 vueltas, 3 vueltas, 2.3 vueltas, ¾ de vuelta), se harán coexistir en una misma situación y jugando un mismo papel, operadores internos enteros (X2, X3...), con operadores internos no enteros (X2.3, ¾ de...), lo que puede dar pie a una primera forma de justificar que la operación “3/4 de”, que se infiere de la razón interna 1→3/4, se llame multiplicación: “por ¾”.

Vueltas→Kilómetros

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 12 |
| | ¾ de | | |
| | | ¾ | |
| X2 | | | |
| | | 2 | |
| | | 2.3 | |
| | | 3 | |

La multiplicación Xa/b se define aquí con el sentido original de “partir en b partes, tomar a”. En cierta forma, se regresa a la composición de operadores que originó la definición de fracción como partes de unidad, pero esta vez la definición recupera a la composición misma, y no a la cantidad resultante.

Una característica numérica que facilitó la resolución en el ejemplo que utilizamos y que lo hace un caso aún más sencillo, es el hecho que la imagen de una vuelta, 12 kilómetros, es divisible entre el denominador de la fracción ¾ de vuelta. Cuando no es así, por

[2] Estamos llamando técnica del “valor unitario”, o de “reducción a la unidad” al caso en que se determina la imagen no propiamente de la unidad, sino de una fracción unitaria. Esta extensión se justifica debido a que el principio es el mismo.

ejemplo, a una vuelta corresponden 5 kilómetros, el paso por la fracción unitaria, digamos ¼ de vuelta, trae consigo la dificultad operatoria que ya analizamos de calcular un cociente no entero: 5 km entre 4.

Veamos en el contexto "vueltas-kilómetros", los casos de razón interna racional que hemos revisado:

| El operador interno X ¾, permanece implícito . | | El operador interno X ¾ se hace explícito como "¾ de" | |
|---|---|---|---|
| Imagen de uno, entera | Imagen de uno, no entera. | Imagen de 1/n, entera | Imagen de 1/n, no entera |
| Vueltas → kilómetros<br>4 12<br>:4<br>1 3<br>X3<br>3 9 | Vueltas → kilómetros<br>4 5<br>:4<br>1 5/4<br>X3<br>3 15/4 | Vueltas → kilómetros<br>1 12<br>:4<br>¼ 3<br>X3<br>¾ 9 | Vueltas → kilómetros<br>1 5<br>:4<br>¼ 5/4<br>X3<br>¾ 15/4 |

El interés didáctico de los dos últimos casos radica en que la razón interna 1→b/a da lugar, por el fenómeno de desdoblamiento, al operador "b/a de" el cual puede constituir un primer significado de la multiplicación "por b/a". Tenemos una situación en la que, por primera vez interviene *explícitamente* un escalar racional.

Variante: ¿Qué parte de *a* es *b*?

Kilómetros→Vueltas

12 1

8 x

La estructura es ahora la de una división comparación. Al tener un dividendo (8) menor que el divisor (12), la pregunta ¿cuántas veces 12 es 8? no tiene sentido, pero en su lugar, dado que 8 km es *una parte* de una vuelta, el problema puede favorecer la pregunta ¿*qué parte* es 8 de 12?. La razón interna es evocada directamente como fracción. Para responder esta pregunta es necesario recurrir al procedimiento del valor unitario, o a otra descomposición de las razones internas, partiendo de que 12 km es una vuelta, por ejemplo:

| Km →Vueltas | | Km →Vueltas | | Km →Vueltas | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| 1 | 1/12 | 2 | 1/6 | 4 | 1/3 |
| 8 | 8/12 | 8 | 4/6 | 8 | 2/3 |

La razón interna racional 12→8 se hace explícita en tanto una fracción de vuelta, y en tanto *la parte* que 8 km es de 12 km.

No obstante, plantear la pregunta ¿qué parte de 12 es 8? puede ser difícil, y también puede serlo saber que ésta se puede contestar mediante alguna de las descomposiciones anteriores (ver experiencia puntual “Encuentra el tesoro”, en el Capítulo 3)

Los desarrollos que analizaremos a continuación implican ya multiplicar y dividir por fracciones. El estudio explícito de estas operaciones puede aplazarse hasta que la multiplicación por una fracción se defina como un operador externo constante, esta es la opción que tomaron N. y G. Brousseau. Aquí, los estudiamos a partir de definir la multiplicación por una fracción como operador interno.

La multiplicación de una fracción por una fracción (o un decimal por un decimal).

Volvemos ahora al caso en el que se multiplican dos fracciones.

| Vueltas→ | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 2/5 |
| ¾ | x |

La imagen de uno es ahora una fracción. El problema lleva a calcular ¾ de 2/5 de km. Nuevamente, la descomposición de la razón interna proporciona un camino:

| Vueltas→ | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 2/5 |
| (:4) | |
| ¼ | 2/20 |
| (X3) | |
| 3/4 | 6/20 |

Puesto que la razón interna 1→¾ ahora se hace explícita como “¾ de”, puede destacarse que:

3/4 de 2/5 de km. = (3X2)/(5X4) de km

Es decir, es posible construir un algoritmo para la operación “a/b de” aplicada a una fracción, con el sentido de operador interno que se aplica a una cantidad fraccionaria.

Veamos ahora el caso de los decimales:

| Vueltas → | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 2.7 |
| 2.3 | x |

El problema lleva a calcular 2.3 veces 2.7 kilómetros. Dos caminos, entre otros:

| Vueltas → | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 2.7 |
| 2 | 5.4 |
| 0.1 | 0.27 |
| 0.3 | 0.81 |
| 2.3 | 6.21 |

| Vueltas → | Kilómetros |
|---|---|
| 1 | 2.7 |
| 1/10 | 0.27 |
| 23/10 | 6.21 |

El segundo procedimiento puede llevar a establecer un algoritmo: multiplicar por 2.3 equivale a “23/10 de”, esto es, a dividir entre 10 y multiplicar por 23, o, si se conmuta el orden, a multiplicar por 23 y dividir entre 10.

Estos procedimientos requieren saber multiplicar y dividir una cantidad fraccionaria por un entero. En el caso de los decimales, disponer del algoritmo para dividir entre potencias de 10.

Una vez que los alumnos saben calcular el producto de una medida decimal por un escalar decimal, en principio pueden resolver los problemas clásicos que implican una división “comparación”, o “partición” con cantidades decimales (ver nota VII al final del capítulo se analizan algunos casos).

**Comentarios finales sobre los procedimientos internos (CS, CRI, VU)**

*Construcciones relevantes*

Los procedimientos que hemos llamado “internos”, conservación de la suma, conservación de las razones internas, y, sobre todo , el procedimiento del valor unitario, permiten resolver prácticamente todas las variantes de la SFR-2.

El análisis anterior nos ha permitido poner de manifiesto la forma en que determinadas variantes de las situaciones pueden propiciar el desarrollo de conceptos y técnicas fundamentales. A continuación resumimos aspectos relevantes de este proceso:

| | | |
|---|---|---|
| Condición 1: | Razones **internas naturales;**<br>El valor buscado es mayor que el valor homólogo conocido | |
| Condición 1.1: no se da el valor unitario | | a a'<br>b- x- |
| Condición 1.2: se da el valor unitario | | 1 a'<br>b x |

Se propicia el desarrollo de las nociones de multiplicación por un natural en el papel de razón interna, en sustitución de las sumas repetidas, y de división comparación, como medio para determinar una razón interna (b**:**a).

Hemos mostrado que en este nivel, el grado de dificultad no aumenta necesariamente cuando la razón externa es racional, sobre todo si la constancia se formula explícitamente en términos de "a' por cada a". En este grupo, cuando la razón interna es relativamente pequeña, están también los problemas menos difíciles de división ("comparación"), con cantidades decimales.

El operador externo racional (X a'/a) permanece implícito en el conjunto de parejas de cantidades que se generan mediante procedimientos internos. La medida fraccionaria (1→b/a) también permanece implícita.

Así, estamos en un nivel en el que medidas y relaciones racionales se pueden manejar a partir de los números naturales. *Las razones juegan claramente el papel de descriptores de un conjunto numérico del que no se dispone, pero que subyace a las manipulaciones que se realizan*.

Cuando se da el valor unitario, la razón interna entre dos cantidades es del tipo 1→b, la cantidad *b* deviene, por un proceso de desdoblamiento de funciones, en el operador interno "*b* veces".

| | | |
|---|---|---|
| Condición 2: | Razones **internas naturales;**<br>El valor buscado es el valor unitario | |
| Condición 2.1: razón externa natural | | a→a'<br>1→x |
| Condición 2.2: razón externa racional | | |

Interviene ahora la división partición, como medio para determinar un valor unitario. Hemos visto que, en los problemas que implican divisiones "comparación" o "partición", es necesario destacar progresivamente, mediante un proceso de descontextualización, la búsqueda de un factor en una multiplicación. Esta forma de concebir las relaciones es la que permitirá identificar ambos tipos de relación como una sola operación y, además, permitirá resolver problemas en los que las cantidades ya no son enteras y por lo tanto, no admiten una interpretación en términos de reparto.

Cuando la razón externa no es entera, el valor unitario es racional. Hemos destacado dos caminos que llevan a la razón canónica (1→a'/a), aquél en el que la fracción se define precisamente como el cociente de dos naturales, y aquél en el que se define previamente, como "partes de unidad", en cuyo caso es necesario desarrollar un procedimiento de cálculo para encontrar que el cociente de *a'* unidades entre *a* es la fracción *a'/a* de unidad, y/o, un procedimiento de cálculo para expresar este cociente mediante un decimal.

La razón (1→a'/a) constituye un antecedente del operador externo racional Xa'/a. La fracción que se hace explícita en esta razón representa una medida, es un valor unitario. El operador (Xa'/a) permanece implícito.

| Condición 3: Razones **internas racionales**; (El procedimiento de reducción a la unidad: VU) | |
|---|---|
| Condición 3.1: razón externa natural | a→a'<br>1→a'/a |
| Condición 3.2: razón externa racional | b→ x |

Cuando la razón interna (a→b) es racional, se favorece el procedimiento que consiste en descomponerla, en particular, el paso por la unidad: a→1→b, lo que se traduce en la composición de dos operadores internos enteros (:a) (Xb). El operador interno racional (Xb/a) permanece implícito en esta descomposición, con lo cual identificamos *una segunda forma de extensión del conjunto de los naturales para dar cuenta de una relación racional*.

La razón externa (1→ a'/a) se vuelve la representante canónica de la relación entre los dos conjuntos de cantidades, la forma implícita de un operador racional Xa'/a.

A partir de este punto, es posible desarrollar técnicas, basadas en descomposiciones diversas de las razones internas, para abordar variantes de la SFR-2 en las que intervienen cantidades no enteras. La multiplicación y la división por escalares no enteros pueden permanecer implícitas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Condición 3.2.1: se da el valor unitario<br>Primera aproximación a la multiplicación por un racional, en tanto razón <u>interna</u> | X b/c | 1<br>b/c | a'<br>x |

Finalmente, hemos estudiado el caso de una razón <u>interna</u> racional del tipo 1→b/c, en el que la cantidad racional b/c da lugar al operador interno explícito “b/c de”.

Éste puede ser el primer caso en el que un operador racional se hace explícito. La operación “b/c de a’ “ recupera y hace explícito el sentido con el que las fracciones suelen construirse: “b veces 1/c de a’ ”.

No obstante, en este camino, la multiplicación por un racional no emerge aún como la forma explícita de aquello que es invariante en una relación entre cantidades proporcionales, es decir, no asume aún el sentido de aplicación lineal.

*Identificación explícita de la linealidad*

La linealidad se ha manejado hasta ahora mediante la propiedad de la conservación de la suma y de las razones internas. Las razones internas expresan la variación de las cantidades en el interior de cada conjunto y asumen una función operativa: se utilizan (se cuantifican, se descomponen) para poder calcular.

A partir de cierto momento, estas propiedades, la conservación de la suma, la conservación de las razones internas, la existencia de un valor unitario constante, que se han utilizado con fines de cálculo, podrán ser también propiedades que *definen* a un tipo particular de relación entre cantidades: relación lineal o “de proporcionalidad”. Lo anterior requiere de situaciones en las que intervengan simultáneamente relaciones lineales y relaciones que no lo son.

*La razón externa constante: un significado implícito y fundamental de la multiplicación*

En los procedimientos internos, la multiplicación aparece de manera explícita en el papel de un operador interno que permite conservar las razones internas. Su antecedente inmediato es la suma repetida de los valores de un mismo conjunto. Su sentido es la variación entre estos valores.

La utilización de estos operadores internos da lugar a un conjunto de parejas de cantidades, (a, a’), (na, na’), (1, a’/a) cuyos términos guardan una misma razón, esta vez externa. Estas razones no han sido cuantificadas, no han dado lugar al operador externo

Xa'/a, y este es el motivo por el cual es indiferente que sean naturales o racionales: en ambos casos se manejan mediante las mismas propiedades, en particular, mediante la propiedad fundamental de las razones: R(a, b) = R(na, nb).

Desde este punto de vista podemos decir que las resoluciones de la SFR-2 mediante procedimientos internos implican, además de un trabajo explícito con la multiplicación en tanto operador interno natural, un trabajo en el que está implícita una acepción más amplia de la multiplicación, la multiplicación como operador externo constante, como aplicación lineal. En el apartado siguiente, vamos a estudiar las características de la SFR-2 que podrían propiciar la identificación explícita del operador constante en un conjunto de razones externas equivalentes.

### 5.3.3) Efectos de las variables sobre los procedimientos externos (el operador externo constante, OP)

Las razones externas, naturales o racionales, se han manifestado hasta ahora como conjuntos de parejas de cantidades. Las razones que se han traducido en una multiplicación o en una división han sido las internas y han sido siempre naturales. Las multiplicaciones por fracciones o decimales han permanecido implícitas en la descomposición de la razón interna, excepto en el caso particular en el que una razón interna del tipo 1→a/b, se traduce como “a/b de”.

Ahora estudiaremos las variantes de la SFR-2 que pueden dar lugar a la cuantificación de una razón externa constante mediante un operador multiplicativo, natural y racional. Aquello que permanece invariante en el conjunto de pares, y que se expresó eventualmente como un valor unitario, ahora se objetiva en un factor constante.

Cuando la razón externa es racional, la construcción del operador constante constituye al mismo tiempo el proceso de hacer explícito un nuevo significado de la multiplicación.

La construcción del operador deberá permitir comprender relaciones como: “el interés mensual es 0.02 por el capital”, y, más adelante, operaciones entre *operadores*, por ejemplo, si se cobra un impuesto de 0.25 sobre el interés, el impuesto es 0.25X0.02 del capital.

Pueden distinguirse las siguientes funciones de un operador constante:

1) Como *un medio de cálculo*, que convendrá utilizar cuando procure cierta economía con respecto a los procedimientos internos. Debido a que prácticamente todas la variantes de la SFR-2 pueden resolverse mediante procedimientos internos, y dado que éstos son los primeros que los niños desarrollan, es previsible que la utilización del operador constante en la SFR-2 requerirá de condiciones especiales que lo propicien, o incluso de momentos de intervención directa del maestro, sobre todo cuando es racional.

2) Como *medida* de una “cantidad intensiva”, por ejemplo, en la escala, los operadores “X2”, o “X 1/1000” dan cuenta del tamaño de la transformación; en una mezcla, 5%, 0.2, dan cuenta del grado de concentración de una sustancia, etc.
   El operador se convierte en cierta forma en el *nombre* de la aplicación, en aquello que la distingue de otras. Para propiciar este papel, puede ser necesario que la medida sea objeto de *comparación* con otras medidas. Estudiaremos el caso de la

comparación más adelante, al analizar la situación fundamental de comparación de razones (SFC).

3) Finalmente, como *una propiedad* más que caracteriza a una relación lineal, de hecho, ésta es la caracterización explícita de la linealidad. No obstante, en un proceso de matematización, esta caracterización explícita tendría que realizarse una vez que el procedimiento del operador constante es ya utilizado.

La utilización de un operador natural puede ocurrir relativamente pronto, en los grados intermedios de la primaria, cuando se estudia la multiplicación en los naturales. El operador racional (fraccionario o decimal), por su parte, constituye una de las construcciones más complejas que los estudiantes tienen que realizar al término de la primaria.

| | |
|---|---|
| 5.3.3) Procedimientos externos: el operador externo constante (OP)<br><br>**→ Condición 1: Razón externa natural** | X2<br>3 6<br>4 X |

En los procedimientos internos, los factores escalares “n veces” han aparecido como operadores internos para expresar la variación de un valor a otro, al interior de cada conjunto. Ahora estudiamos las condiciones que pueden favorecer que el operador “n veces” se identifique y se utilice a partir de una relación <u>externa</u> 1→n. y, en general a→na.

Podemos identificar de entrada los siguientes caminos que llevan a determinar un operador natural:

- El uso del operador surge de conmutar los términos de las multiplicaciones, originalmente identificadas como razones internas, por motivos de economía.
- Surge por una intuición de una regularidad numérica en la relación entre elementos del conjunto inicial y final, sobre todo cuando ya se dispone de una lista de pares obtenidos mediante procedimientos internos.
- Surge con el sentido de una transformación cuantitativa específica de las cantidades del primer conjunto en las del segundo, cuando las cantidades son de misma naturaleza. Puede calcularse dividiendo el consecuente de la razón entre su antecedente (por ejm. 2→6 = X(6:2) = X3), o bien, calculando previamente el valor unitario (2→6 = 1→3 = X3).

Por otra parte, diversas características relativas a los contextos pueden influir en el grado de dificultad para determinar al operador, y en la forma de hacerlo. A continuación, analizamos estos casos.

*a) La razón interna "a veces b" se sustituye por la externa "b veces a", por economía*

<u>Cuando la razón externa es menor que la interna.</u>
Ejemplo:

| Toronjas | Pesos |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 8 | x |

Dado que se da el valor unitario, tanto la razón interna como la externa se infieren, sin cálculo de por medio, de los cardinales: 8 toronjas da lugar a 8 veces 2 pesos, y "una toronja, 2 pesos" da lugar a 2 veces 8. Hemos visto ya que la utilización del operador externo, a diferencia del interno, implica hacer abstracción de las magnitudes, por lo cual es más complejo.

Sin embargo, la multiplicación "8 veces 2" puede ser, en cierto momento, más difícil para los niños que la multiplicación "2 veces 8" debido a que para calcular los productos mediante sumas iteradas, en un caso tienen ocho sumandos mientras que en el otro sólo tienen dos. Por otro lado, los niños suelen memorizar primero las "tablas de multiplicar" de los primeros números. Esto puede llevarlos a conmutar los factores, es decir, una vez identificada la operación a realizar como 8 veces 2 pesos, se resuelve la operación 2 veces 8.

<u>Cuando la razón interna no es entera y la externa es fácil de identificar:</u>

| Toronjas | Pesos |
|---|---|
| 12 | 24 |
| 15 | x |

Para utilizar un procedimiento interno es necesario un paso intermedio, calcular el valor unitario, lo que lleva a dividir, con el sentido de "repartir", 24 pesos entre 12. Esta dificultad, aunada al hecho de que la razón externa implica una división más simple, la búsqueda de un factor (el número que por 12 da 24 es 2), puede llevar a optar por esta última.

No obstante es posible que un estudiante que utiliza este procedimiento no asigne ningún significado al factor 2 (ver Ricco, 1982). Su resolución estaría basada en la intuición de una regularidad, y el que ésta sea el producto por 2, y no, por ejemplo, la suma de 12, es algo por ahora fortuito. La ruptura con los significados que se registra al abandonar las magnitudes, si es propiciada prematuramente, puede dar lugar a procedimientos azarosos, sin un control semántico sobre la situación.

Cuando hay que calcular varios valores (variante estructural 2):

| Toronjas | Pesos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | |
| 3 | |
| (...) | |

Al haber varios valores en el conjunto inicial, una diferencia esencial entre los procedimientos internos y el externo se hace explícita: el cálculo de las imágenes mediante la conservación de las razones internas lleva a utilizar, cada vez un escalar diferente: 2 veces 3 pesos, 3 veces 3 pesos, 4 veces 3 pesos, etc. que se aplican a una cantidad constante. En el momento de calcular, en la medida en que la conmutatividad se vuelve un hecho natural, dicho factor puede asumir el papel de *operador* constante, sin dimensión “3 veces” (“se multiplica por 3”), que actúa sobre números sin dimensión, sobre todo cuando dicho operador es menor que los escalares (internos).

Cuando se aprenden las tablas de multiplicar.

En una tabla de multiplicar el factor que es constante puede representar, en principio, a la cantidad que es objeto de repetición o al número de veces. Por ejemplo, en la tabla del tres:

| La cantidad es constante | El número de veces es constante |
|---|---|
| una vez tres, tres | tres veces uno, tres |
| dos veces tres, seis | tres veces dos, seis |
| tres veces tres, nueve | tres veces tres, nueve, |
| cuatro veces tres, doce, | tres veces cuatro, doce, |
| ... | ... |

La primera interpretación, cantidad constante, es la que se infiere de la forma en que frecuentemente se introduce la multiplicación, a partir de la repetición de una cantidad, por ejemplo, se tienen una, dos, tres... bolsitas con 3 dulces cada una. Es también la interpretación que corresponde a la mayoría de los problemas de multiplicación que se plantean en los grados iniciales, en los cuales, como en el anterior, el número de veces, (razón interna) varía, como consecuencia de la variación de una de las cantidades.

En comparación con la otra, esta interpretación facilita además el cálculo de los productos en forma progresiva puesto que para obtener un producto, basta con sumar la cantidad constante a la anterior, mientras que en la segunda interpretación es necesario realizar cada vez todas las sumas, hasta que se observe que los productos aumentan de n en n.

Por otra parte, es en la segunda interpretación en donde aparece claramente una razón constante bajo la forma de operador sin dimensión: tres veces es el operador que se aplica a todas la cantidades, es a la vez, aunque menos explícitamente, la relación que guardan todos los pares de cantidades (1, 3) (2, 6) (3, 9)... que se generan. Sin embargo, esta segunda forma de interpretar las tablas no presenta las ventajas para el cálculo y la memorización de la anterior[1].

<u>Comentario.</u>

En los casos anteriores, la primera manifestación de una constante en la SFR-2 es la de una *cantidad* a la que se aplican operadores internos variables, y no la de un operador constante sin dimensión (3 toronjas de dos pesos = 3 veces dos pesos, 4 toronjas de dos pesos = 4 veces dos pesos). Esta cantidad (dos pesos), en cierto momento y de manera imperceptible, puede devenir operador sin dimensión en virtud de un uso implícito de la conmutatividad, y de un acto de descontextualización, de abandono de las unidades, con la finalidad de obtener una economía en los cálculos (2 veces 3, 2 veces 4...).

El uso del operador puede provenir también de la intuición de que “se multiplica”, intuición que puede no guardar ninguna relación con aquello que justifica a la operación, por ejemplo, la existencia de un valor unitario constante.

A continuación vamos a analizar otras variantes de la SFR-2 que pueden hacer más propicia la identificación del operador constante en tanto transformación de las cantidades del primer conjunto en cantidades del segundo conjunto. Ello requiere de situaciones en las que las magnitudes sean de la misma naturaleza.

---

[1] A pesar de ello, en la forma de propiciar la memorización de las tablas mediante la tradicional recitación “dos por uno, dos; dos por dos, cuatro; dos por tres, seis...” el sentido suele ser el de un operador constante y una cantidad variable, sentido que, considerando lo anteriormente expuesto, no es el que más facilita a los alumnos recuperar mentalmente los productos.

*b) El operador con el sentido de transformación multiplicativa*

Consideraremos primero tres casos: 1) la constancia de la razón externa es explícita en el enunciado del problema mediante una expresión del tipo “a’ por cada a”, en cuyo caso, la dificultad estriba en “traducir” dicha expresión en un operador y 2) la constancia de la razón externa no se hace explícita, en cuyo caso la primera dificultad es reconocerla y 3) situaciones en las que el operador se da o se pregunta por él.

Posteriormente, revisaremos brevemente algunas situaciones de segundo nivel, en las que el operador deviene él mismo objeto de operaciones.

<u>Primer caso: la razón constante se expresa como “a’ por cada a”</u>
La constancia de la razón externa se hace explícita, pero no directamente bajo la forma del operador, sino bajo la forma de un par de cantidades vinculadas por la expresión “por cada”. La determinación del operador puede estar motivada por la economía que procura en los cálculos.

Ejemplo: el intercambio

*Por cada 2 fichas amarillas, se dan 6 azules. Completar los datos de la tabla:*

| Fichas amarillas | Fichas azules |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 6 | |
| 8 | |
| 14 | |

El enunciado de la regla en términos de “por cada 2...” invita a utilizar procedimientos internos: por cada 2 fichas amarillas que se suman de un lado, se suman 6 azules del otro, o se considera que a *n* veces 2 fichas amarillas, corresponden *n* veces 6 fichas azules.

Resulta considerablemente más breve identificar el operador constante “3 veces”. Esta economía se vuelve significativa en la medida en que aumenta el número de valores en el conjunto inicial, y también su tamaño. Las cantidades que se ponen en relación, si bien remiten a objetos diferentes (fichas amarillas, fichas azules), pertenecen a una misma clase abarcativa, fichas, lo que puede facilitar pensar en un operador que transforma cantidades de fichas, haciendo abstracción del color[2].

Pero, ¿cómo puede realizarse la identificación del operador externo? ¿en base a qué los alumnos pueden considerar que a una razón como “kn por cada n” corresponde una multiplicación de las cantidades? Esta vez no tienen el sustento de la suma repetida, puesto que la cantidad de fichas azules no resulta de una suma de fichas amarillas.

En los resultados del trabajo empírico que se presentan en los dos capítulos siguientes podremos comprobar la dificultad que subyace a la identificación de un operador externo, inclusive en los casos más sencillos. Veremos que la identificación del operador constante, en tanto expresión de aquello que es invariante en un conjunto de razones externas, puede requerir de varias experiencias con condiciones didácticas específicas, e incluso de la introducción explícita de los operadores.

Cuando, en cierto momento, para los alumnos ya es evidente que las razones del tipo “n por cada 1” y, en general, “kn por cada n” corresponden a multiplicaciones, podemos decir que se han apropiado de un nuevo sentido de la multiplicación, el sentido como expresión de una razón constante entre dos conjuntos de cantidades, y no sólo como variación de una cantidad al interior de un conjunto, derivada de una suma repetida.

Por otra parte, los mismos casos que hemos visto anteriormente, considerando las relaciones recíprocas, dan lugar al operador “n veces menos” o “entre n”. Al identificar y usar este operador, esta vez es la división la que juega el papel de razón externa constante, o aplicación. Naturalmente, la identificación y el uso de este operador puede ser más difícil que la del operador que multiplica, aun cuando la operación para determinarlo sea la misma en ambos casos (una división comparación) y esto puede obrar a favor de mantener procedimientos internos[3]. Por ejemplo:

---

[2] Juegos como el de la ruleta, en el que una cantidad de fichas se transforma en otra cantidad mayor de fichas idénticas, pueden ser aún más favorables para la identificación de un operador. No obstante, este tipo de contextos suele tener, en la escuela, una carga moral negativa.

[3] Carretero, citado por Vergnaud (Vergnaud, 1988: 156) encuentra que las expresiones “tres veces más” o “tres veces menos” no son comprendidas por todos los estudiantes de 5º grado de la escuela elemental. La inclusión de la expresión “3 veces menos” produjo una caída de aciertos de 50% mientras que la de “tres veces más” produjo poca diferencia, lo que se puede explicar, dice Vergnaud, porque “tres veces menos” se presta más a una interpretación sustractiva que “tres veces más” a una aditiva.

*De cada 6 fichas que obtengas, pagarás dos fichas de impuesto.*

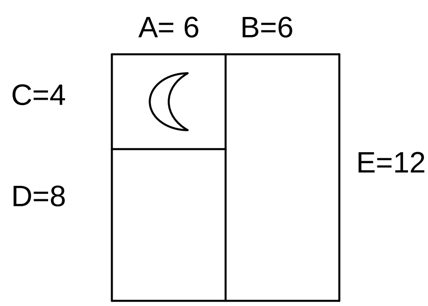
| Fichas que se obtuvieron | Fichas que se pagan |
|---|---|
| 6 | 2 |
| 24 | |
| 36 | |

Naturalmente, la presencia de un valor unitario (por cada 3, 1) puede facilitar la identificación del operador que divide, o del operador fraccionario (1/3 de).

<u>Segundo caso: la constancia de la razón externa no se expresa (la escala)</u>

Otro contexto típico de relación entre magnitudes de misma naturaleza es el de la escala, por ejemplo:

*Hacer una ampliación de la bandera en la que el lado C mida 12 cm*




En esta situación, el hecho de que hay una constante numérica subyace a la idea de "ampliación", que podría precisarse como "más grande pero con *la misma forma*", "como fotografía ampliada", etc. La constancia numérica queda implícita en la conservación de una cualidad, la forma. Por lo tanto este problema presenta, en comparación con el que vimos antes, la dificultad adicional de determinar que algo (numérico) deberá permanecer constante cuando las cantidades varían. Aquello que se asume como invariante puede ser:

- la razón "*por cada* 4cm, corresponden 12 cm", y, en particular, el valor unitario "a cada centímetro corresponden 3cm" en cuyo caso pueden generarse otras razones equivalentes mediante conservación de la suma o de las razones internas;
- el operador constante: las medidas nuevas son *tres veces* las originales. El operador constante aparece nuevamente como el recurso más económico a nivel de los cálculos, y puede tener como antecedente al valor unitario.

En el capítulo II analizaremos la complejidad específica que este tipo de problema representó para los alumnos entrevistados.

Tercer caso: el operador se da o se pregunta por él

En los textos escolares se suelen plantear ejercicios en los que se deben poner los datos que faltan en tablas con un operador constante, esto era común en algunos países, entre los años sesenta y setenta, cuando el auge de los operadores, frecuentemente llamados “maquinas” [4], por ejemplo:

| X5 | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

| X5 | |
|---|---|
| | 10 |
| | 25 |
| | 30 |
| | 45 |

| X? | |
|---|---|
| 2 | 10 |
| | 15 |
| | 25 |
| 7 | |

Notemos sin embargo que estos ejercicios no dan lugar a *decidir* usar un operador constante como un medio para encontrar valores y por lo tanto, si bien pueden contribuir en cierta medida al conocimiento del operador, no favorecen su construcción con el sentido de razón constante.

Más adelante, al analizar las situaciones de comparación de razones (SFC), veremos una alternativa intermedia: la comparación de dos relaciones, una de las cuales se expresa mediante un operador y la otra mediante una razón entre dos cantidades.

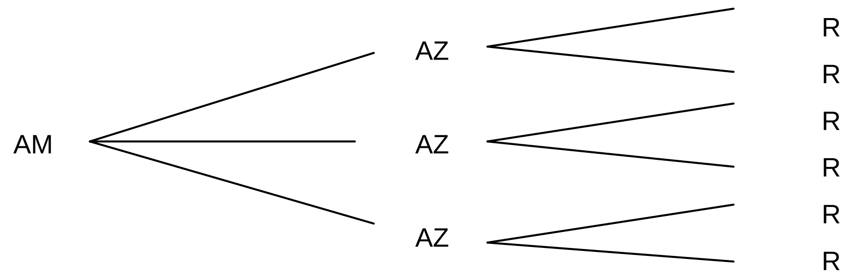
Relaciones y operaciones con operadores

En ciertos casos, el trabajo en este segundo nivel puede requerir ya que los operadores hayan sido identificados como tales, pero, en otros puede favorecer justamente el proceso de identificación del operador (ver “Las situaciones fundamentales”, en el subcapítulo 2). La comparación de razones, que analizaremos en el apartado siguiente, pertenece a este segundo caso. Veremos aquí brevemente el caso de la composición de razones.

Consideremos un ejemplo, nuevamente en el contexto del intercambio y con las razones más simples posibles, aquellas en las que hay un valor unitario:

*Por cada ficha amarilla se dan 3 azules*
*Por cada ficha azul, se dan 2 rojas*
*¿Cuántas fichas rojas se obtienen con 2, con 5, con 10 amarillas...?*

[4] Esta modalidad no fue frecuente en México, en los textos oficiales, pero sí en otros textos, por ejemplo, en los textos elaborados a finales de los años setenta, por el DIE, para los cursos comunitarios del CONAFE la idea de las “máquinas” se encuentra muy presente.




La utilización de procedimientos internos lleva a realizar, cada vez, las siguientes operaciones:

| Amarillas → azules | Azules →Rojas |
|---|---|
| 1 3<br>X5 X5<br>5 15 | 1 2<br>X 15 X15<br>15 30 |

Una primera economía en los cálculos se obtiene cuando se identifica la razón compuesta 1 amarilla → 6 azules. Esto se facilita cuando entre las preguntas figura el cálculo de las azules que corresponden a una sola amarilla.

| Amarillas → azules→ rojas |
|---|
| 1 ⟶ (3) ⟶ 6<br>X5 X5<br>5 30 |

Omitir el paso intermedio (1→3→6) para utilizar la razón compuesta 1→6 probablemente requiere de experiencias que permitan constatar la equivalencia de ambos caminos.

Cuando las razones no son unitarias, incluso si son racionales (por ejemplo, “por cada dos amarillas, tres azules”), sigue siendo posible obtener la razón compuesta mediante un trabajo con procedimientos internos y cantidades enteras aunque éste es un poco más laborioso.

Hasta aquí, las razones externas han sido objeto de composición, pero no han sido cuantificadas mediante un operador externo. Veamos, en un segundo ejemplo con razones externas no unitarias, la importante economía que proporciona la utilización de operadores externos al evitar calcular, cada vez, el valor de las razones internas:

*Dadas las reglas “por 2 amarillas, 6 azules” y “por 3 azules, 6 rojas”, calcular cuántas rojas para 4, 6, 8... amarillas:*

Resolución mediante procedimientos internos (CS o CRI).

| Amarillas → azules | | | | | | Azules →Rojas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 6 | | | | | 3 | 6 | | |
| | X2 | | | X2 | | | X 4 | | | X4 | |
| | | 4 | 12 | | | | | 12 | 24 | | |
| X3 | | | | | X3 | X6 | | | | | X6 |
| | | 6 | 18 | | | | | 18 | 36 | | |

Resolución mediante operadores externos.

| Amarillas | → | Azules | → | Rojas |
|---|---|---|---|---|
| | X 3 | | X2 | |
| 2 | | 6 | | 12 |
| 4 | | 12 | | 24 |
| 6 | | 18 | | 36 |

Finalmente, el operador compuesto (X6) es probablemente más fácil de identificar a partir de cualquiera de las razones compuestas (4, 24) o bien (6, 36), que operando sobre los operadores. Preguntarse si a partir de los operadores X3 y X2 es posible obtener un solo operador constituye una problemática de un orden de complejidad mayor, y supone que la noción de operador natural ya ha sido construida. No es difícil suponer que la primera hipótesis que los niños se hacen al respecto es que el operador resultante será la suma de los dos operadores.

Cabe recordar aquí que la composición de dos factores multiplicativos puede aparecer mucho antes de abordar una situación explícita de composición:

1) Cuando los alumnos resuelven una situación mediante combinaciones lineales (ver el apartado 5.3.2/ Condición 1.1). En ese caso se trata de una composición de razones

internas. Ya hemos comentado su dificultad específica y algunos de los errores a que da lugar.

2) Cuando se hacen cambios sucesivos de unidad en el sistema decimal de numeración o de medidas, por ejemplo pasar de centenas a decenas y de decenas a unidades.

Estas situaciones constituyen dos de las pocas experiencias escolares en las que los alumnos enfrentan situaciones de composición de razones externas.

*Comentario*

Más allá del uso fortuito de un operador multiplicativo entero al conmutar los términos de una multiplicación, éste puede emerger como una relación constante entre cantidades que procura cierta economía en los cálculos. Algunas de las condiciones que podrían propiciarlo son:

- magnitudes de misma naturaleza, de manera que el operador pueda asimilarse a una transformación de cantidades, pero no de magnitudes;
- la variante estructural 2, en la que es necesario calcular varias imágenes (la presencia de varios pares obtenidos mediante procedimientos internos puede constituir el punto de partida para identificar la relación constante);
- la posibilidad de validar empíricamente los resultados obtenidos a partir de una conjetura de regularidad;
- eventualmente, la introducción de operadores de manera explícita;
- finalmente, situaciones en las que los operadores devienen ellos mismos objeto de comparación o de composición.

Hemos comentado, basándonos en las experiencias que presentamos en los capítulos II y III, que la identificación del operador puede ser difícil para los niños, aun en los casos más simples, lo cual se agrava por el hecho de que, en la enseñanza escolar, esta función de la multiplicación suele estar ausente, más allá de las situaciones de llenado de tablas cuyas limitaciones ya comentamos.

| | |
|---|---|
| 5.3.3) Procedimientos externos: el operador externo constante (OP)<br><br>Condición 1: Razón externa natural<br>**→ Condición 2: Razón externa racional** | X7/4<br>4 7<br>5 X |

En un apartado anterior (5.3.2) analizamos una primera aproximación a la multiplicación por un racional, en tanto operador interno. En ésta, el operador interno "b/a de" se infirió de la razón interna unitaria 1→b/a. Ahora vamos a analizar una segunda construcción de la multiplicación por un racional, esta vez en tanto operador externo constante. Esta construcción, como la anterior, conlleva un nuevo significado para la multiplicación, puesto que multiplicar, por ejemplo, por 7/4 no tiene ya nada que ver con la idea de sumar repetidamente, idea que constituye el significado de la multiplicación en los naturales. De hecho, para los niños no existe un número que, por ejemplo, multiplicado por 4 dé 7 y, menos aún, un número que multiplicado por 4 dé 3. Se trata de una operación nueva, cualitativamente distinta a la multiplicación que ya conocen. Para los niños no es evidente por qué se llama también "multiplicación" (¿por qué tomar tres cuartas partes de una cantidad es "multiplicar" esa cantidad?). Más aún, el conocimiento que los niños tienen sobre la multiplicación de naturales en tanto suma repetida y en tanto operación que "agranda", tenderá a dificultar el aprendizaje de la multiplicación por una fracción, o por un decimal (Brousseau, 1976). Es sobre todo este fenómeno lo que lleva a Rouche (1992:164-165) a afirmar que

> *La estructura de los "números racionales", considerada de manera global, no es modelo de nada. Es un arquitectura intelectual autónoma, abstracta, incluso cuando sus principales facetas están inspiradas en contextos dispares: el orden y la suma de magnitudes, la composición de operaciones de fraccionamiento, la medición de áreas... Por ello la afirmación según la cual los racionales se encuentran escondidos "en la naturaleza" y que basta con buscar en ella para encontrarlos, es muy probablemente falsa. Desde el punto de vista en el que nos situamos, los racionales se revelan en cambio como una construcción humana que guarda con la "naturaleza" relaciones complejas.*

En la enseñanza, éste ha sido uno de los temas en los que se registran mayores tropiezos. Por lo general, la enseñanza de la multiplicación de fracciones o decimales corresponde al momento en el que se evaporan las unidades y con ellas las magnitudes, quedando únicamente reglas de cálculo sin contexto (Brousseau, 1981). Se encuentran también intentos de no abandonar las magnitudes, por ejemplo, utilizando el cálculo del área de un rectángulo cuyos lados miden fracciones de unidad, contexto que si bien permite una interpretación de la multiplicación, no da cuenta de un gran número de situaciones en las que pueden aparecer operadores fraccionarios; o bien, los clásicos malabarismos en los que el contexto se asume y se abandona alternativamente para justificar una propiedad matemática, por ejemplo, se parte de una multiplicación en la que el operador es entero, digamos, 8 veces ¾ de metro = 24/4 = 6 metros", y después, aplicando implícitamente la conmutatividad se concluye que "8 metros multiplicado por 3/4 es igual a 24/4 = 6". (Block, 1987)

La justificación plena de porqué una fracción de una cantidad es una multiplicación se encuentra sólo, como lo dice Rouche, en el nivel de las estructuras algebraicas y, hasta donde sé, no hay una situación que de lugar de manera natural, únicamente a partir de los saberes previos, a la construcción de esta operación. Lo que tenemos son opciones diversas que nos permiten acercarnos hasta cierto punto, algunas más, otras menos, a esta operación. A continuación analizamos algunas de estas opciones. Posteriormente, revisaremos un expresión alternativa de una razón racional, importante por la frecuencia de su uso: el porcentaje.

*Primer camino: el operador se define como la forma explícita de la razón externa constante: 1→a'/a = Xa'/a*

Los estudiantes no conocen el sentido de multiplicar por una fracción, pero, como vimos en el apartado anterior, esto no impide que hayan podido generar conjuntos de pares de cantidades que guardan *una misma razón externa racional* al utilizar los procedimientos internos. Al hacerlo, el operador racional permaneció implícito. La opción que veremos aquí consiste en *definir* la noción de operador a partir de dicho conjunto de pares de cantidades, y en particular, a partir de la razón canónica 1→a'/a. Éste es el camino que utilizaron N. y G. Brousseau en su secuencia, la tomaremos nuevamente como ejemplo.

Recordemos el problema de escala, y la primera solución que se propicia, el cálculo del valor unitario:

| Fig A | Fig A’ |
|---|---|
| 4 | 7 |
| 1 | 7/4 |
| 5 | 5 veces 7/4 |

Una vez que los alumnos utilizan la razón canónica 1→7/4 para resolver este problema, se presentan otras situaciones en las que se afirma el uso de este recurso: con éste logran, ya lo vimos, calcular la imagen de una medida fraccionaria o decimal, determinar la razón canónica recíproca (la recíproca de 1→a’/a es 1→ a/a’). Así mismo, al trabajar con varias reproducciones al mismo tiempo, se propicia que reconozcan a la razón canónica como la expresión que mejor identifica a cada relación: permite no sólo calcular cualquier imagen, también permite ordenar las transformaciones de la que achica más a la que agranda más. La razón canónica (1→a’/a) deviene la representante por excelencia de las transformaciones. Los procedimientos hasta aquí han sido internos.

Es entonces cuando *se define* al operador racional, destacando la analogía funcional que guarda con el operador natural:

X4

| 1 | 4 |
|---|---|
| 5 | 4X5 =20 |

X0.25

| 1 | 0.25 |
|---|---|
| 5 | x |

Así como la razón 1→4 corresponde a la multiplicación X4, la razón 1→0.25 se define como una multiplicación y se expresa como X0.25.

De esta manera, multiplicar una medida *c* por un racional q, significa encontrar la imagen de *c* dada por la razón 1→ q:

**Xq**

1 → q

c → x = c X q

El operador Xq se convierte así en una segunda forma de dar cuenta de una transformación multiplicativa, que nace de la forma anterior 1→ q. Puede observarse una similitud entre esta definición y las antiguas definiciones de la multiplicación según las cuales *“**a X b** es el número que es a **a** como **b** es a **1**”*[5]**.** Podemos traducir esta última

[5] Es probable que este tipo de definiciones, mediante la idea de razón, daten de la época de Euclides. Mucho después, en el siglo VII, Alkhwarizmi define la multiplicación de esta manera, definición que subsistió hasta finales del siglo XIX y principios del XX, en los textos de aritmética.

como: ***a X b*** es el valor que corresponde a ***a*** en la relación lineal ***1→ b.*** La multiplicación se define a partir de la noción de razón.

No obstante, hay un punto débil no trivial en esta definición: cuando se utiliza el valor unitario para calcular las imágenes, el número racional, digamos 0.25, fue siempre una medida (0.25 cm) a la que se aplicó un multiplicador natural:

| 1 cm | 0.25 cm | |
|---|---|---|
| 5 cm | **5 veces 0.25 cm** | **(X5)** |

En cambio, al definir a 0.25 como operador, la medida es ahora 5cm:

**X0.25**

1 cm → 0.25cm

5 cm → **0.25 por 5cm**

Entonces, definir al operador X0.25 como la relación 1→0.25 implica considerar la conmutatividad de la multiplicación (5 veces 0.25= 0.25 veces 5), haciendo abstracción de los distintos papeles que juegan el multiplicador y el multiplicando, lo cual no es simple.

Sin embargo, esta construcción presenta dos ventajas importantes: 1) recupera una noción que se ha trabajado de manera implícita durante un lapso de tiempo considerable, prácticamente desde los inicios de la multiplicación, a saber, la noción de razón constante 1→ n, m→n, y después 1→n/m, y 2) recupera la construcción previa de las fracciones como medidas.

Notemos que en esta definición, el operador fraccionario no surge como un medio de cálculo. Los cálculos se han realizado hasta aquí mediante procedimientos internos. El operador surge como el *nombre* de un tipo de relación. No será sino hasta que se disponga de un algoritmo para aplicar este operador que éste se insertará en los cálculos.

En la secuencia de N. y G. Brousseau, después de la definición explícita de la multiplicación por una fracción en tanto operador externo, los procedimientos internos siguen constituyendo durante un tiempo considerable la base a partir de la cual se construyen y se justifican las relaciones y operaciones entre operadores (ver nota X al final de este apartado). No es sino hasta el final de este proceso que las cantidades quedan atrás y el trabajo se realiza a nivel de los operadores. Es hasta este momento que la noción de razón, como relación que se expresa mediante parejas de cantidades, como “descriptor” de relaciones racionales, tiende a dejar su lugar a la noción número racional como aplicación lineal. Así, esta secuencia pone de manifiesto el papel fundamental que juega la noción de razón en el proceso de aprendizaje de la noción de fracción medida y de fracción aplicación lineal.

*Otros caminos*

Revisemos brevemente otros caminos posibles para introducir la noción de operador fraccionario.

<u>1) El operador Xa’/a como “a’/a de” y como “a’ de cada a”.</u>
En la secuencia de N. y G. Brousseau, el operador “a’/a de” con el sentido de “partir en a, tomar a’ ” se introduce tardíamente, después de conocer al operador Xa’/a con el sentido de una razón constante 1→ a’/a. Sin embargo, en la enseñanza, las fracciones generalmente se introducen con el sentido de partes de unidad, en donde a’/a de unidad significa “partir en *a*, tomar *a’* ” y, por ello, cabe preguntarse si los estudiantes podrían identificar al operador que transforma *a* en *a’* directamente como “a’/a de”

7/4 de

| Fig A | Fig A’ |
|---|---|
| 4 | 7 |
| 5 | x = 7/4 de 5 |

Este camino, que extiende la noción de “partes de unidad” a la fracción operador, presenta la ventaja de recuperar un sentido ya adquirido de las fracciones, y, además, de volver inmediatamente funcional al operador: éste se usará efectivamente para calcular las imágenes. No obstante adolece también de limitaciones importantes: si la “parte” es mayor que “el todo”, la pregunta se torna difícil (¿qué fracción de 4 es 7?) y, la más importante, determinar el operador cuando las cantidades se expresan con decimales o con fracciones se vuelve difícil, por ejemplo, ¿Qué fracción de 2.3 es 0.7?

Las dificultades que presenta esta opción se podrían allanar en situaciones en las que la relación es parte todo y las cantidades son enteras: ya hemos dicho antes que estas relaciones pueden ser especialmente favorables para identificar a un operador fraccionario. Sin embargo, se requiere analizar entonces hasta qué punto se justifica una entrada que permite abordar sólo casos particulares.

2) Definición del operador Xa'/a como composición de operadores naturales

Un camino alternativo para introducir un operador racional consiste en descomponer la razón racional en dos razones enteras. El operador racional podría definirse entonces justamente como el operador resultante de la composición, es decir, X(a'/a) es, por definición (:a) (xa'):

:4 X7

| Fig. A | | Fig A' |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 7 |
| 5 | 5:4 | (5:4) X7 |
| 6 | 6:4 | (6:4) X7 |

Sin embargo, también esta entrada presenta puntos débiles: primero, decidir descomponer una razón externa puede ser mucho más difícil que hacerlo con una interna. Cuando la razón es interna, se trata de introducir un *valor* intermedio en el conjunto inicial, mientras que cuando la razón es externa, la descomposición consiste en introducir una transformación intermedia que se aplicará a *todos* los valores. La dificultad más grande aparece nuevamente con las cantidades no enteras: una razón como 2.3 → 5.1 se descompondría en 2.3→1→5.1. La primera razón lleva a dividir las cantidades entre 2.3, operación que probablemente los alumnos no sepan hacer.

Varios investigadores, entre otros Dienes, Freudenthal, Rouche, Lesh, han propuesto este camino: definir de entrada la multiplicación por una fracción a'/a como la composición de dos aplicaciones con números enteros:

**X a'/a = (Xa') (:a).**

En estas propuestas, se trabaja primero con las aplicaciones enteras aisladas, después combinadas para finalmente sustituir, por definición, la composición multiplicar-dividir, por la multiplicación por una fracción:

X3/2

X3 :2

6 18 9

Varias de estas propuestas, la de Dienes (1972) por ejemplo, se desarrollan sobre el caso particular en el que el estado inicial, en el ejemplo el 6, es múltiplo del operador que divide (:2) para evitar la entrada de medidas fraccionarias.

Esta opción es atractiva por su sencillez, y porque recupera un significado implícito de las fracciones presente desde las situaciones iniciales de partición: al tomar ¾ de pastel, las fracciones funcionan, antes que como medidas, como una composición de operadores, “dividir el pastel, tomar cierto número de partes”.

Sin embargo, en esta elección, el punto de partida no es una relación entre dos cantidades dadas ni, en consecuencia, entre dos conjuntos de cantidades. Es decir, el operador no emerge como cuantificación de una razón externa constante. El énfasis está en la noción misma de operador, de operación, multiplicación y división que se aplica a un conjunto de cantidades para obtener otro.

Por lo tanto, esta opción, si bien es más fácil de manejar, presenta la desventaja de dejar de lado, al menos momentáneamente, la idea más amplia de relación entre dos conjuntos de medidas así como los recursos implícitos que los niños han desarrollado con anterioridad para manejar estas relaciones, la conservación de la suma, de las razones internas, y la utilización de la razón canónica 1→a’/a. Con ello, tampoco se pone en evidencia el problema que da sentido a este operador, esto es, la imposibilidad de resolver ecuaciones como 2 X ? = 3 con un operador entero. Al definir de entrada la multiplicación de fracciones como composición de operadores enteros, se proporciona una herramienta para resolver un problema que aún no se ha identificado.

La exploración de alternativas para construir el operador fraccionario no se agota con las que hemos visto aquí. Es claro que se trata de un aspecto complejo, cuyo tratamiento adecuado en el nivel básico es en principio posible, el trabajo de N y G Brousseau lo demuestra, aunque la secuencia que nos presenta este trabajo no constituye todavía un camino viable, considerando el nivel de conocimientos matemáticos y sobre todo de didáctica que supone su adaptación.

Para la escuela primaria es todavía necesario estudiar otras opciones, por ejemplo, la posibilidad de trabajar simultáneamente con varios acercamientos, por un lado, utilizar con más frecuencia el operador, “a’/a de”, aprender a determinarlo en situaciones menos complejas (como razón interna, como razón externa en relaciones parte todo) y, más adelante, enfrentar situaciones como la del rompecabezas estudiando la equivalencia entre la razón 1→a’/a con los operadores “a’/a de”, Xa’/a, y (:a)(xa’).

En la nota VIII, al final del capítulo, mostramos, a título de ejemplo, algunos de los procedimientos que un grupo de alumnos de 6º grado de una escuela de la ciudad de México desarrolló para abordar la situación del rompecabezas. Entre estos procedimientos figuran los tres tipos que hemos revisado: la determinación de la razón canónica 1→ a'/a (el valor unitario), la identificación del operador externo "a'/a de", y la descomposición del operador externo (:a) o (Xa').

*El porcentaje*

Antes de terminar este apartado, detengámonos en esta expresión decimal, culturalmente importante de una razón. Puede tratarse de la expresión de la razón que guardan dos cantidades aisladas, en cuyo caso el porcentaje se utiliza para destacar una comparación, o bien, de la razón *constante* que guardan dos conjuntos de cantidades en cuyo caso constituye una forma de expresar una relación lineal.

Como toda razón, el porcentaje puede manifestarse como una regla de correspondencia que se expresa con un par de cantidades, "25 de cada 100", o directamente mediante un operador constante, "25/100 de", o "por 0.25". Estas dos manifestaciones del porcentaje se pueden poner en correspondencia con dos momentos del proceso de construcción de la noción de razón externa que hemos estudiado: la razón como pareja de cantidades, equivalente a otras parejas que se generan mediante procedimientos internos y la cuantificación de la razón mediante un operador racional, fraccionario o decimal. Por ello, la noción de porcentaje puede abordarse en distintos momentos, poniendo en juego herramientas cada vez más elaboradas.

<u>1) El porcentaje como razón entre dos cantidades</u>

El porcentaje forma parte de la diversidad de razones que se expresan mediante un par de cantidades "1 de cada 4", "5 de cada 20", etc., con la única particularidad de tener un consecuente igual a 100. Se comporta igual que las demás, pero se nombra y se representa de una manera especial. Esto permite introducir variantes de la SFR-2 en las que la razón externa constante se nombra explícitamente bajo la forma de porcentaje y puede ser por lo tanto el objeto de la pregunta.

- Las razones internas son enteras y se traducen en una multiplicación

Cuando las razones internas son enteras y se traducen en una multiplicación, obtenemos los problemas más simples. Por ejemplo, en una situación en la que el descuento en el precio de mercancías se expresa mediante porcentaje tenemos:

**Relación entre cantidades - procedimiento 1 (CRI):**

| Problema 1<br>se aplica un porcentaje | Problema 2<br>se pregunta por un porcentaje | Problema 3<br>se pregunta por la cantidad de la que se conoce un porcentaje |
|---|---|---|
| *Se descuentan $25 de cada $100. Calcular el descuento que se aplica a $200.* | *En una mercancía de $200, se descontaron $30. ¿qué porcentaje se descontó?* | *Se descuentan $25 de cada $100. En una mercancía se descontaron $50.¿cuál era su precio sin descuento?* |
| Precio → Desc.<br>$100 $25<br>X2 X2<br>$200 $x<br>Resp. $50 | Precio → Desc.<br>$100 $ x<br>X2 X2<br>$200 $30<br>Resp: 15% | Precio → Desc.<br>$100 $25<br>X2 X2<br>$x $50<br>Resp: $200 |

Esta interpretación del porcentaje da lugar a establecer una relación entre dos conjuntos de cantidades, misma que se maneja mediante procedimientos internos.

- Las razones internas son enteras y se traducen en una división

Sin embargo, la interpretación del porcentaje como una regla de correspondencia (“25 de cada 100”) se enfrenta a dificultades muy pronto, en cuanto la cantidad a la que se aplica el porcentaje es menor que 100. Por ejemplo, ¿a cuánto corresponde 25 de cada 100 aplicado a 20 pesos?

| | | |
|---|---|---|
| | Precio → | Desc. |
| | $100 | $25 |
| :5 | | :5 |
| | $20 | $x |
| Resp. $5 | | |

La dificultad no es principalmente de orden técnico puesto que la razón interna sigue siendo entera, tiene que ver sobre todo con el sentido mismo de la noción de porcentaje. Este caso, al igual que aquellos en que la razón interna ya no es entera, exigen ver al porcentaje como una *razón* (100→25), susceptible de generar razones equivalentes mediante la multiplicación y la división de sus términos, más que como una regla de correspondencia en la que por cada 100, efectivos, se toman 20.

- Las razones internas no son enteras

La situación exige considerar al porcentaje como relación susceptible de aplicarse a cantidades distintas de los múltiplos de 100 y, sobre todo, exige considerar la posibilidad de expresar un porcentaje (100→n) mediante la razón canónica (1→n/100), es decir, como un valor unitario constante. El método del valor unitario permite resolver los tres problemas, los cálculos implican operar con decimales:

**Relación entre cantidades - procedimiento 1 (VU):**

| Problema 1:<br>*Se descuentan $25 de cada $100. Calcular el descuento que se aplica a $123.* | Problema 2<br>*En una mercancía de $123, se descontaron $30.75. ¿qué porcentaje se descontó?* | Problema 3<br>*Se descuenta el 25%. En una mercancía se descontaron $30.75.¿cuál era su precio sin descuento?* |
|---|---|---|
| Precio → Desc.<br>$100 $25<br>$1 $25/100 ó $0.25<br>$123 x = 123 X 0.25<br><br>Resp: $30.75 | Precio → Desc.<br>$123 $ 30.75<br>$1 $ 30.75 :123<br>$100 x = ($30.75:123)X100<br><br>Resp: 25% | Desc. → Precio.<br>$25 $100<br>$1 $100:25<br>$30.75 x = (100:25)X30.75<br><br>Resp: $123 . |

En esta interpretación, una comprensión amplia de un porcentaje se manifiesta en la posibilidad de generar equivalencias como 25 de cada 100 = uno de cada 4 = 1/4 de cada uno.

<u>2) El porcentaje como fracción “25/100 de”</u>

A partir de la razón “25 de cada 100”, se puede favorecer la identificación de la fracción que expresa a esa razón, 25/100. A partir de este punto, el hecho de que el porcentaje expresa una relación constante entre dos conjuntos de cantidades puede volverse explícito, representa una misma “parte de” entre dos conjuntos de cantidades. Pero, para que esto suceda así, su construcción tendría que emerger justamente como el invariante en una relación entre dos conjuntos de cantidades, comprender este sentido puede ser más difícil cuando el porcentaje se introduce directamente con el sentido de una fracción que se aplica a una cantidad aislada.

Una vez que el porcentaje es una fracción, se pueden desarrollar, además del procedimiento que ya vimos, otros dos.

**Relación entre porcentajes y cantidades - procedimiento 2 (VU)**

| Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 |
|---|---|---|
| *Se descuenta el 25%. Calcular el descuento que se aplica a $123* <br> . | *En una mercancía de $123, se descontaron $30.75. ¿qué porcentaje se descontó?* | *Se descuenta el 25%. En una mercancía se descontaron $30.75.¿cuál era su precio sin descuento?* |
| Porcentaje → cantidad <br> 100% $123 <br> 1% $123/100 <br> 25% x = <br> $25 X 123/100 <br><br> Resp: $30.75 | Cantidad → porcentaje <br> $123 100% <br> $ 1 (100**:** 123)% <br> $30.75 x = <br> 30.75 X (100**:** 123)% <br><br> Resp: 25% | Porcentaje → cantidad <br> 25% $30.75 <br> 1% $30.75 **:**25 <br> 100% x = <br> $100 (30.75 **:**25) <br><br> Resp: $123 . |

Se establece una relación proporcional entre dos conjuntos, uno de los cuales está formado por los porcentajes mismos, en tanto operadores variables, y el otro son las cantidades que corresponden a esos porcentajes.

En el problema 2, un procedimiento frecuente para *estimar* el porcentaje consiste en resolver aplicando porcentajes al total. Por ejemplo, el 10% de $123: es $12.3, luego entonces $30.75 es algo menos que el 30%.

Las técnicas de resolución siguen descansando en relaciones internas, pero ahora las razones son entre porcentajes: se deben comprender relaciones como “n/100 de una cantidad es n veces mayor que 1/100 de esa misma cantidad”. Dado que la cantidad de referencia es siempre la misma, puede hacerse abstracción de ésta y considerar sólo a los porcentajes mismos: n/100 es n veces mayor que 1/100.

De hecho, ocurre que el porcentaje <u>no</u> se interprete explícitamente como una fracción: el “100” es visto como un número abstracto y arbitrario, de referencia que expresa al “todo”. 25% de 123 pesos se interpreta entonces como: “123 pesos es 100, entonces, ¿cuánto es 25?”. Habría que averiguar qué tan difícil es para los alumnos comprender esta idea abstracta de “el total es 100”.

Comparemos los dos tipos de procedimiento que hemos revisado:

<table>
<tr><td colspan="2">Se descuenta el 25%. Calcular el descuento que se aplica a $123..</td></tr>
<tr><td>Procedimiento 1<br><br>El porcentaje expresa una relación entre las dos cantidades de magnitud (de cada 100, 25)</td><td>Procedimiento 2<br><br>El porcentaje expresa una relación en la que el todo es 100/100 (o “100”).</td></tr>
<tr><td>Precio → Desc.<br>$100 $25<br>1 $25:100 = $0.25<br>$123 x = 123 X $0.25</td><td>Porcentaje → Cantidad<br>100% $123<br>1% $123:100 =$1.23<br>25% 25 X $1.23</td></tr>
<tr><td>El porcentaje interviene como razón constante entre dos conjuntos de cantidades.<br><br>No implica todavía la interpretación del porcentaje como fracción.<br><br>Es muy simple cuando la cantidad total es múltiplo de 100<br><br>Es el más económico cuando hay que calcular el mismo porcentaje de varias cantidades</td><td>El porcentaje interviene como escalar variable.<br><br>Implica la definición como fracción, o como número abstracto de referencia (“100”)<br><br>Es el más económico cuando hay que calcular distintos porcentajes de una misma cantidad</td></tr>
</table>

Veamos ahora el tercer tipo de procedimiento:

**Relación entre cantidades – procedimiento 3 (Operador constante)**

| Problema 1: *Se descuenta el 25%. Calcular el descuento que se aplica a $123.* | Problema 2 *En una mercancía de $123, se descontaron $30.75. ¿qué porcentaje se descontó?* | Problema 3 *Se descuenta el 25%. En una mercancía se descontaron $30.75.¿cuál era su precio sin descuento?* |
|---|---|---|
| X25/100<br>Precio → Desc.<br>$123 25/100 X123<br><br>Resp: $30.75 | X?<br>Precio → Desc.<br>$123 $ 30.75<br><br>El operador se puede determinar vía el valor unitario, o, más difícil, dividiendo el consecuente entre el antecedente.<br>Resp: 25% | X25/100<br>Precio . → Desc. .<br>x $30.75<br><br>La cantidad inicial se puede determinar aplicando el operador recíproco, X100/25 |

Para utilizar este procedimiento se requiere un conocimiento previo del sentido de multiplicar por un racional. Su antecedente es el procedimiento uno, en el que la razón constante se expresa mediante un valor unitario. La resolución de los problemas 2 y 3 se vuelve difícil, requiere de un dominio considerable de la noción de operador y de operador recíproco.

<u>Comentario</u>
Un conocimiento funcional de la noción del porcentaje requiere muy probablemente comprenderlo en sus dos acepciones, como razón que se expresa mediante dos cantidades y como operador multiplicativo racional.

Cabe señalar que esta noción constituye una de las pocas manifestaciones institucionalizadas de una razón en tanto relación entre dos cantidades. Podría ser por ello un reducto en el que se propicia en mayor medida un trabajo sobre la noción de razón, previamente a su expresión mediante un operador. Sin embargo, el algoritmo para traducir un porcentaje, de su expresión como relación entre dos números a un factor decimal, así como el algoritmo para multiplicar por un decimal, suelen ser bien conocidos por los maestros y es frecuente que se enseñen directamente. Esta opción puede no tener consecuencias muy graves cuando los alumnos han logrado antes comprender y manejar el porcentaje como una razón mediante procedimientos transparentes para ellos. La conversión a expresión decimal y la multiplicación aparecen entonces como una técnica más, no justificada, más rápida. Pero puede tener consecuencias negativas en la comprensión de este concepto cuando el acercamiento al mismo se reduce prácticamente a las técnicas de multiplicación por decimales. Así mismo, la rigidez de dicho algoritmo dificulta considerablemente, si no es que imposibilita, resolver problemas ligeramente distintos a la aplicación de un porcentaje, como el 2 y 3.

*La identificación explícita de la linealidad.*

Vimos en el apartado anterior que los procedimientos internos, conservación de la suma, conservación de las razones internas, determinación del valor unitario pueden pasar a ser también propiedades explícitas que caracterizan a una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades. La noción de operador multiplicativo constante deberá jugar también este mismo papel: las cantidades de dos conjuntos son proporcionales si existe un factor constante que aplicado a unas, dé las otras, o, dicho en otros términos, si los cocientes que expresan a las razones externas son iguales.

Por otra parte, un conocimiento explícito de las propiedades de la linealidad debería permitir a los alumnos no sólo reconocer cuándo hay o no proporcionalidad, sino también proponer reglas de correspondencia lineales en situaciones en las que son pertinentes (por ejemplo, situaciones sobre impuestos, sobre cooperación proporcional al ingreso, etc). En una experiencia didáctica puntual con alumnos de 5º grado pude observar que esta tarea no es trivial para ellos (ver nota IX al final del capítulo).

*Un comentario sobre la regla de tres*

La "regla de tres" constituye un método popular en la enseñanza elemental para abordar casi todas las variantes de la SFR-2. En la teoría clásica de las razones y proporciones este procedimiento se derivaba del principio según el cual en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. De éste se desprendía la forma de cálculo de la cuarta proporcional o de una media proporcional. Por ejemplo (Leysenne P., 1913: 327):

> 5 metros de género han costado 21 pesos. ¿cuánto costarán 12 metros del mismo género?.
>
> *Una vez determinado que las magnitudes son directamente proporcionales, se establece la proporción:*
>
> $$x : 21 : : 12 : 5$$
>
> *De donde 5x (producto de los extremos) es igual a 21X12 (producto de los medios), y finalmente:*
>
> $$x = (21X12)/5$$

Actualmente, la escritura de los puntitos ha sido sustituida por la escritura fraccionaria, por lo que se tiene x/21 = 12/5. No obstante, algunas veces se utilizan todavía los términos "medios" y "extremos", y otras veces se habla simplemente de productos cruzados:

$$\begin{array}{cc} x & 21 \\ 12 & 5 \end{array}$$

Si ubicamos en un eje los procedimientos desde el punto de vista de la transparencia de su justificación para los alumnos, este procedimiento se ubica en el extremo de la opacidad, debido al hecho de que los productos "cruzados" (de los medios entre sí y de los extremos) no tienen referente en el contexto (por ejemplo, el producto de 12 metros de género por 21 pesos). La justificación del procedimiento es a nivel algebraico, sin consideración de las magnitudes. Las dos propiedades fundamentales de la linealidad, la conservación de las razones internas, y la constancia de la razón externa quedan completamente ocultas, y por lo tanto el estudio explícito de la aplicación lineal no puede realizarse como culminación del estudio de la SFR-2.

En algunos estudios sobre desempeño de los alumnos en la resolución de problemas de proporcionalidad se ha observado que prácticamente nunca utilizan este procedimiento, aún en los países en los que es enseñado (Rupley, 1981: en Karplus, 1981) (Hart, 1981).

**5.3.4) Comentario final sobre los procedimientos externos (operador constante)**

El análisis de la construcción del operador constante en el seno de la SFR-2 nos permitió destacar lo siguiente:

La razón externa, natural o racional, antes de objetivarse en un número, es objeto de transformaciones mediante procedimientos internos. Estos dan lugar a una clase de razones externas equivalentes, entre las que se encuentra la razón canónica o unitaria.

En el paso de los procedimientos internos a la identificación del operador constante se registra un proceso de hacer explícito aquello que es invariante en dicha clase. El operador, con el sentido de una razón externa constante, se construye sobre la base de esta clase de equivalencia.

En este proceso, la multiplicación pasa de expresar una variación entre dos valores de un mismo conjunto que debe reproducirse en otro conjunto, relación que surge de la suma repetida, a expresar un tipo de relación constante que guardan todos los elementos de un conjunto con los de otro conjunto. Podemos decir que el desarrollo de la noción de multiplicación es inherente al de la noción de linealidad y se realiza en estas dos vertientes, con características muy específicas según si la razón de la que surge la multiplicación es natural o es racional.

El análisis anterior muestra también que la noción de operador externo constante, a diferencia de la mayoría de las nociones que son objeto de estudio en la educación básica, no se construye, excepto en casos muy particulares, como un recurso de cálculo con ventajas sobre otros.

Si bien algunas variantes de la SFR-2 pueden favorecer la utilización de un operador constante natural como medio de cálculo, ninguna de éstas imposibilita la utilización de procedimientos internos, o los dificulta al grado en el que prácticamente sólo quede el del operador.

En el caso del operador externo racional, es muy claro que éste no surge como un medio de cálculo, no tiene al principio esta funcionalidad en lo absoluto, más bien se introduce por medio de un acto de enseñanza, de intervención directa, como el nombre de una relación que se ha manejado mediante procedimientos internos. Su funcionalidad en el cálculo aparece después, en la medida en que, al hacer explícita a la multiplicación por una fracción, permite, para empezar, reconstruir los algoritmos para multiplicar y para dividir en los racionales, esta vez explícitamente.

Cabe preguntarse entonces ¿cuál es el interés de que los alumnos del nivel básico adquieran la compleja noción de operador constante, sobre todo cuando es racional, si prácticamente todas las variantes de la SFR-2 pueden resolverse mediante procedimientos internos?

Pueden esgrimirse dos motivos, uno de índole práctica, de utilidad inmediata: numerosas relaciones entre variables se expresan y se manejan mediante un coeficiente racional. Una comprensión mínima de este coeficiente no se lograría enseñando únicamente una técnica para multiplicar por decimales. Y el otro, de índole conceptual: la noción de operador multiplicativo está implicada en dos conceptos importantes del edificio matemático que se construye en la educación básica y media básica, el de número racional y el de aplicación lineal.

No obstante, debe analizarse más cuál es el momento más oportuno para introducir la noción operador racional (considerando los recursos didácticos realmente disponibles en la enseñanza), y, sobre todo, debe considerarse la importancia tanto de favorecer en mayor medida el estudio de operadores sencillos, naturales, como de no reducir el tratamiento de las situaciones de proporcionalidad más complejas a la aplicación de operadores dados

<u>Las fracciones: como medidas y como relaciones.</u>

La construcción del operador constituye la segunda ocasión en la que un significado de las fracciones se construye a partir de una relación entre dos cantidades naturales. Anteriormente, al analizar la construcción de las fracciones como expresiones de medidas en la alternativa de la conmensuración, después de representar, por ejemplo, el espesor de una hoja con el par (a hojas, b mm) pasamos a la expresión b/a mm:

| Hojas | milímetros |
| --- | --- |
| a | b |
| 1 | b/a mm |

en donde la fracción **b/a** mm es la <u>medida </u>que **a** veces es igual a **b** mm.

En ese caso, pasamos de una relación entre dos cantidades (a hojas→b mm) para expresar una medida, a la expresión de la medida con una fracción.

Ahora es la noción misma de relación la que es objeto de expresión. Pasamos de una relación entre dos cantidades a→b o 1→b/a, a su expresión con una fracción: X b/a:,

La fracción **b/a** significa la <u>relación </u>que a la cantidad **a** asocia la cantidad **b**
o bien que a 1 asocia b/a.

A la postre, significará también el número que multiplicado por **a** es igual a **b**,
es decir, el cociente de **b** entre **a**

La noción de razón está presente en ambas construcciones de las fracciones, en la primera culmina en la noción de medida, en la segunda en la noción de aplicación. Ambas construcciones serán abarcadas por la noción más amplia de número racional positivo, dotado de adición y multiplicación.

<u>La noción de fracción como cociente</u>

Hemos mencionado ya, al estudiar la SFR-1, dos interpretaciones posibles de las medidas fraccionarias, como partes de unidad (**a/b** de unidad = **a** veces **1/b** de unidad) o como cocientes (**a/b** de unidad es la medida que **b** veces es igual a **a**).

Mencionamos también la dificultad para construir una de las interpretaciones a partir de la otra, y la posibilidad, en la primaria, de por lo menos establecer un puente entre ambas, considerando que el cociente **a** unidades entre **b**, tiene que ser igual a la fracción **a/b** de unidad, entendida como partes de unidad.

Ahora encontramos, por segunda ocasión, la presencia de una fracción cuyo significado es el de un cociente: Al definir al multiplicador X**b/a** como la aplicación **1→b/a**, o **a→b**, podemos inferir (nosotros, no los niños) que X**b/a** es el número que al multiplicar a **a**, da como resultado **b** , y por lo tanto es el cociente de **b** entre **a**.

Esta vez no se trata de un cociente que exprese una medida, y que provenga de “partir” unidades, es un cociente que expresa una relación, que surge de la comparación multiplicativa entre dos cantidades del mismo tipo (por ejemplo, 7/4, relación entre 4cm y 7cm), y que está destinado a funcionar como operador sin dimensión. Es pues un cociente conceptualmente mucho más complejo.

| Cociente medida | Cociente relación |
|---|---|
| 4cm → 7cm | X(**7:4**) |
| 1cm→ **7:4**cm | 4cm 7cm |

Así, cuando se habla del significado de las fracciones como cocientes, es necesario ir más lejos y distinguir si se trata de un cociente que expresa una medida o de un cociente que expresa una relación (y, con respecto al cociente medida, todavía hay que distinguir cociente calculado de cociente por definición).

Observemos sin embargo que, en la secuencia que estudiamos, para los niños el operador X7/4 no surge como cociente de 7 entre 4. Dicho cociente, en tanto “número de veces no entero” no tiene aún sentido para ellos. El operador 7/4 surge directamente como el “nombre” de la aplicación 1→7/4 ó 4→7. Cabe suponer que más adelante dicho operador empezará a ser concebido como el cociente de los términos de la razón.

### *6) La situación fundamental de la comparación de razones (SFC)*

Analizaremos aquí situaciones de comparación aditiva de razones (mayor, menor, igual) como la siguiente:

> *Laura tiene varias estampas nuevas que casi nadie tiene y las quiere cambiar por estampas viejas; Miguel le ofrece el siguiente trato: por cada 2 de tus estampas nuevas, te doy 6 viejas. Armando le ofrece el siguiente trato: por cada 5 de tus estampas nuevas, te doy 10 viejas. ¿Con quien le conviene más a Laura hacer el trato?*

#### 6.1) La noción de razón: de recurso de resolución a objeto de comparación.

Mientras que la SFR-2 lleva a establecer razones equivalentes mediante la conservación de las razones internas, la SFC permite estudiar de manera más explícita el efecto de las variaciones de las cantidades sobre el tamaño de la razón. Dada una razón, por ejemplo la que subyace al trato “por cada 2 estampas nuevas te doy 6 viejas”, la alteración de cada una de las dos cantidades afecta al tamaño de la razón en sentidos opuestos:

| E. nuevas / E. viejas | no se altera | aumenta | disminuye |
|---|---|---|---|
| no se altera | --- | conviene menos(*) | conviene más |
| aumenta | conviene más(*) | puede haber equivalencia | conviene más |
| disminuye | conviene menos | conviene menos | puede haber equivalencia |

(*) desde la perspectiva de quien recibe estampas viejas y da estampas nuevas.

Así, un trato no conviene más que otro sólo porque se reciban más estampas viejas, o porque se tengan que dar menos estampas viejas, sino por cierta *relación* entre las dos cantidades. La SFC implica de manera más patente que la SFR-2 la coordinación de las dos variables que afectan de manera opuesta al tamaño de la razón.

Comparemos las resoluciones SFR-2 con la SFC en uno de los casos que requieren de operaciones aritméticas. En la SFR-2 (por ejemplo: si por cada 2 estampas nuevas, se dan 6 viejas. ¿cuántas estampas viejas se dan por 10 nuevas?), para determinar la cantidad solicitada, se pueden generar razones externas equivalentes mediante procedimientos internos, entre las que puede encontrarse la razón canónica (valor unitario), o bien determinar un operador para calcular el valor buscado.

La SFC puede dar lugar a los mismos procedimientos que la SFR-2: en el ejemplo que dimos al principio, el trato de Miguel, “2 nuevas por 6 viejas”, lleva a la relación “10 nuevas por 30 viejas” mediante procedimientos internos. El trato de Armando lleva a 10 nuevas por 20 viejas[1]. Para establecer estas dos relaciones, se hace funcionar la SFR-2. Sin embargo, en la SFC, pensar en otras cantidades de estampas, en esta caso en 10 estampas nuevas, constituye una tarea más compleja que en la SFR-2, puesto que en la SFC dicha cantidad no está dada, su determinación obedece ya a una estrategia de solución: igualar las cantidades de estampas nuevas en ambos tratos.

La SFC plantea una comparación de razones con independencia de las cantidades a las que se aplican, las cantidades que se utilizan constituyen sólo un recurso: un trato conviene más que otro independientemente de cuántas estampas se cambien. Esto representa una dificultad conceptual mayor con respecto a SFR-2. Varios niños de tercer grado de primaria a quienes plantemos un problema como el anterior, durante cierto tiempo, manifestaron la necesidad de reducir esta complejidad considerando cantidades específicas a las que se aplican las razones (experiencia didáctica “Los intercambios” en el capítulo III).

Por otra parte, la SFC pone en juego a la equivalencia de razones de dos maneras, una implícita, como en la SFR-2 y otra explícita. La primera ocurre como *recurso* para resolver, cuando se generan razones equivalentes a cada una de las razones dadas para igualar un término. La segunda ocurre cuando las dos razones que se comparan resultan equivalentes. En esta última, la equivalencia de razones aparece como un *resultado* posible de tres (razón mayor, igual o menor), se manifiesta, retomando el ejemplo, como “tratos que convienen igual”, o “tratos equivalentes”. En este sentido, en situación de comparación de razones, la noción de equivalencia de razones pasa de recurso implícito de resolución a un objeto de estudio.

Por su parte, las razones canónicas (valores unitarios) y sobre todo los operadores externos constantes, surgen, en la SFC, como los objetos de la comparación, más allá de

[1] Seguiré llamando razones *internas* a las que se establecen al interior de un mismo tipo de magnitud. En el ejemplo de los tratos de Miguel (2 nuevas por 6 viejas) y de Armando: (5 nuevas por 10 viejas), las razones internas son (2 nuevas, 5 nuevas ) o (6 viejas, 10 viejas), o también, 2 nuevas con otra cantidad de estampas nuevas que se utilice para generar una razón equivalente a (2 nuevas, 6 viejas).

las cantidades: en un trato nos dan *el triple* de lo que damos, mientras que en el otro nos dan sólo el *doble*. Triple es mayor que doble.

Estas características hacen de la SFC un hábitat característico de la noción de razón, y motivan a analizar nuevamente, en este hábitat, la función de esta noción como descriptor de números que no se disponen aún, los racionales, o incluso de los números naturales cuando de éstos se conoce sólo su función de expresar medidas.

Nos interesa estudiar los momentos que identificamos ya en el análisis de la SFR-2: 1) la razón constante se manifiesta bajo la forma de un conjunto de razones equivalentes de cantidades enteras, 2) bajo la forma de la razón canónica, en la que se expresa un valor unitario y en la que los racionales intervienen como medidas y, finalmente, 3) se manifiesta explícitamente bajo la forma de un operador.

Nos interesa también mostrar que el estudio de la SFC puede constituir, en la escuela primaria, no sólo una ocasión más para la construcción de un antecedente de los racionales, sino también una ocasión para desarrollar la noción misma de *relación*, al mismo tiempo que se adquieren las *operaciones* de multiplicación y división.

Partiremos de algunos de los resultados de un estudio realizado desde la perspectiva del desarrollo del razonamiento proporcional, en el que se utilizó una situación de comparación de razones. Posteriormente, analizaremos brevemente los efectos de algunas variables de la SFC sobre los procedimientos de resolución.

### 6.2) Estudio del desarrollo de la noción de razón, mediante la SFC

Para analizar el proceso de desarrollo de la noción de razón, Noelting (1980a, 1980b) propuso a una muestra de 321 sujetos de entre 6 y 16 años de edad una tarea que consiste en comparar la intensidad de sabor a naranja de dos naranjadas que se preparan con determinadas cantidades de vasos de agua y vasos de jugo de naranja:

$$(a, j) \text{ vs } (a', j')$$

La prueba consta de 21 ítems de dificultad creciente. Los números en juego son siempre pequeños (menores que 10).

Ubica los logros de los niños en 7 sub estadios (posteriormente añade dos más) agrupados en las categorías de Piaget, intuitivo, operatorio concreto y formal. A continuación resumimos los dos primeros estadios de esta jerarquía, que son aquellos en los que Noelting identifica los momentos importantes de construcción de la noción de razón.

**I** Intuitivo

**IA)** Intuitivo bajo: sólo compara el primer término de cada par.

Tiene éxito en (1, 4) vs (4, 1)

**IB)** Intuitivo medio: compara el segundo término, cuando el primer término es igual; éxito en (1, 2) (1, 3). Implica la comprensión del efecto inverso del agua en el sabor de la naranjada.

**IC)** Intuitivo alto: puede comparar (a, b) vs (a', b') cuando a $\geq$ b y a'< b´;

éxito en (1, 1) vs (2, 3). Los niños recurren primero a las relaciones *between*[2], pero esto no los lleva a una respuesta. En este estadio, los niños logran considerar entonces la relación *within*. Hay pues una primera consideración de ambos tipos de razón.

**II** Concreto

**IIA)** Concreto bajo: puede considerar la clase de equivalencia de (1, 1).

por ejemplo A (1, 1) = B (2, 2) *"(igual) porque cada vaso diluye un vaso (within); entonces, A tiene un vaso de jugo mientras que B tiene dos, y A tiene un vaso de agua y B tiene dos. Son iguales, solo que hay más líquido en B (between)"*

En este momento, señala Noelting, los sujetos distinguen "estado" de "variación". La relación *within*, entre los términos complementarios de una razón, se estabiliza como invariante. La relación *between* entre términos que se corresponden (agua, agua o jugo, jugo) se moviliza como variación, ya sea mediante comultiplicación, o codivisión. Las cuatro relaciones entre los términos son consideradas.

Esto conduce a la clase de equivalencia más simple: la razón (1, 1). La estrategia between: m(1, 1) = (m, m) consiste en amplificar o simplificar la razón.

Este estadio, añade el investigador, parece cerrar un período y abrir otro: las comparaciones de aquí en adelante no pueden realizarse sólo a partir de los términos, deben incluir operaciones.

---

[2] Recordemos que Noelting nombra a las razones internas, entre cantidades de la misma especie, razones "entre" (between): (a, a') y (j, j') debido a que constituyen razones entre un componente de una mezcla, y el mismo componente de la otra mezcla, es decir, se trata de una razón *entre* mezclas. A las razones externas, entre los dos componentes de una misma mezcla le llama "intra" (within): (a, j) y (a', j').

**III** Formal

Se caracteriza por la posibilidad de modificar un par o ambos (covariación). En el nivel más alto, las razones se cuantifican con fracciones o con porcentajes

Noelting destaca que cada una de las dos relaciones en juego, *within* y *between*, implican un proceso cognitivo distinto: las razones *between* conllevan una asimilación de elementos similares, en tanto variaciones de un elemento. Las razones *within* implican una relación entre diferentes elementos con la construcción de un nuevo concepto. Una aportación de este trabajo fue mostrar que el concepto de proporción se construye a partir de la integración de ambos tipos de razón.

Por otra parte, una limitación de este estudio ya señalada por varios investigadores es el hecho de que, para estudiar el razonamiento proporcional, considera un solo tipo de tarea, la cual además no es de las más simples en el universo de situaciones sobre proporcionalidad. En varios estudios sobre razonamiento proporcional se ha mostrado que la utilización de razones "within" o "between" en la resolución de los problemas de proporcionalidad puede estar influida por diversas variables de la situación, el carácter entero o no entero de las razones, y el tipo de magnitudes en relación (Karplus, Pulos y Stage, 1983)

Por otra parte, es muy claro que las resoluciones que se nos presentan implican muy pronto la utilización de conocimientos que se enseñan en la escuela, desde la multiplicación y la división, hasta la expresión de una razón mediante una fracción o un porcentaje. La forma en que estos conocimientos son enseñados puede tener también un efecto en los resultados que se obtienen, si no en cuanto a la jerarquía de los estadios, sí en cuanto al momento en el que los sujetos acceden a ellos. Volveremos sobre esta cuestión en el último apartado (8) de este capítulo, al considerar los aportes de la línea de investigación sobre desarrollo conceptual.

No obstante estas limitaciones, la investigación de Noelting constituye una de las aportaciones más relevantes al estudio de las operaciones que subyacen al razonamiento proporcional, a la vez que proporciona una primera jerarquía de las características numéricas determinante de la complejidad conceptual de la tarea y una evidencia empírica del funcionamiento de la noción de razón en las resoluciones de los niños, previa a su cuantificación con un número.

### *6.3) Las variables relativas a las magnitudes y a la formulación de la razón*

La familiaridad que los alumnos tienen con las magnitudes en relación, la posibilidad de contar con un modo de verificación que permita desechar conjeturas falsas, el carácter homogéneo u heterogéneo del operador y las maneras de expresar la constancia de la razón en el problema, son variables que ya analizamos en la SFR-2 y que pueden incidir de manera similar en las situaciones de comparación de razones.

Veamos brevemente algunos efectos específicos de estas variables sobre los tres principales procedimientos de resolución: obtención de razones equivalentes mediante procedimientos internos, determinación de los valores unitarios, y determinación de los operadores externos.

Comparemos las siguientes tres situaciones:

> *1) El robot A avanza cuatro unidades al dar tres pasos, El robot B avanza cinco unidades al dar cuatro pasos. ¿cuál de los dos da pasos más grandes?*
>
> *2) A un lado que mide 3 cm en la figura A, le corresponde uno de 4cm en la reproducción B;*
> *a un lado de 4cm en A, le corresponde uno de 5cm en la reproducción C. ¿Cuál de las reproducciones, B o C, es más grande?*
>
> *3) Miguel ofrece a Laura el siguiente trato: por cada 3 de tus estampas nuevas, te doy 4 viejas. Armando le ofrece el siguiente trato: por cada 4 de tus estampas nuevas, te doy 5 viejas. ¿Con quién le conviene más a Laura hacer el trato?*

Los tres problemas llevan a comparar las razones (3, 4) vs (4, 5), pero aquello que representan las razones en cada uno es muy distinto:

- En el caso de los robots, se comparan las medidas de *un* paso de cada Robot. Dichas medidas están expresadas como relaciones entre medidas, es decir, en una relación de conmensuración. Podemos decir que la comparación porta entonces sobre los "valores unitarios", los evoca, y por lo tanto podría propiciar la idea de determinarlos (un paso de A = 4 unidades entre 3, un paso de B = 5 unidades entre 4).
  Aun cuando la comparación se realice sin calcular los valores unitarios, por ejemplo, obteniendo razones equivalentes mediante multiplicación, (20 unidades, 15 pasos) vs (20 unidades, 16 pasos), las propiedades que se ponen en juego se vinculan de manera más manifiesta con propiedades de la operación división (partición) que arroja los valores unitarios, un cociente, a:b no se altera cuando se multiplican por un mismo

número el dividendo y el divisor, o bien, un cociente a:b es mayor que un cociente a':b' si a>b y a'<b'.
Por otra parte, la dificultad debida a la ausencia de una cantidad específica a la que se apliquen las razones no está presente aquí, puesto que es claro que se trata de comparar valores unitarios. La dificultad puede provenir en cambio del hecho de que dichos valores no sean naturales, como en el ejemplo.

- En el caso de las homotecias no se trata de comparar dos medidas, sino dos conjuntos de medidas. Una forma de resolver consiste efectivamente en determinar los valores unitarios y comparar dos medidas (a un centímetro de A corresponden 4cm **:** 3 en B y 5cm **:** 4 en C), pero, en este caso, dicho valor no está sugerido en la situación, y decidir determinarlo puede ser por ello mucho más difícil que en el caso anterior.
  En cambio, desde el punto de vista de la identificación de un operador constante, la situación de las homotecias puede ser la más favorable, por el hecho de que la relación externa es entre cantidades de la misma naturaleza y por el sentido mismo de transformación de tamaños que subyace.

- Finalmente, en el caso de los intercambios, se trata de comparar dos *relaciones*. La formulación de las razones mediante una regla de correspondencia, "a por cada b", puede favorecer la iteración de las parejas de cantidades para igualar un término, mientras que posiblemente disuade la idea de determinar valores unitarios, dado que no se sugiere que se pueda cambiar una sola estampa.
  Notemos que esta situación sería distinta si los intercambios se plantearan como una relación entre dos cantidades fijas, y no como reglas de correspondencia (Miguel tiene tres estampas nuevas y las cambia por 4 viejas...). En este último caso, pensar en otras cantidades posibles de estampas para igualar un termino es más difícil, puesto que el contexto no hace referencia a éstas. Este es el caso de las naranjadas de Noelting.

Así, el hecho de que la situación evoque comparar valores unitarios o no, plantee una regla de correspondencia o no, así como el hecho de que la razón sea homogénea o heterogénea, constituyen variables que puede afectar la forma de resolver, y también el grado de dificultad de la comparación.

## 6.4) Variables numéricas

El estudio de Noelting proporciona ya una jerarquía de los niveles de dificultad en función de ciertas características numéricas de la situación. A continuación, vamos a especificar un poco más las variantes numéricas relativas al carácter entero o racional de las razones en juego y sus efectos posibles sobre los procedimientos internos y externo. Consideraremos siempre cantidades enteras y relativamente pequeñas.

*6.4.1) Comparaciones que no requieren alterar las razones dadas.*

Ya vimos, en la jerarquía de Noelting, dos casos en los que la comparación puede realizarse sin transformar las razones que se dan: cuando hay un término común (niveles IA y IB) y cuando una razón es mayor que uno mientras que la otra es menor (en a, b vs a', b', a>b y a'<b', nivel IB).

Veremos aquí otros casos, menos simples y que seguramente corresponden a niveles más avanzados en la jerarquía de Noelting, que pueden resolverse sin modificar las razones originales

- Las razones entre términos homólogos (internas) son, una mayor que uno, la otra menor.

Por ejemplo: Robot A (5 pasos, 2 unidades) vs Robot B (4 pasos, 3 unidades): Los pasos de ambos robots miden menos de una unidad, pero el Robot A avanza menos unidades en más pasos, por lo tanto, sus pasos son menores.

- La diferencia entre los términos de cada razón externa es la misma

  *Robot A (4 unidades, 3pasos) vs*

  *Robot B (5 unidades, 4 pasos)*

Se trata de un caso considerablemente más complejo, en primer lugar porque al haber una misma diferencia entre las dos cantidades, se propicia en mayor medida una primera conclusión falsa: los pasos son del mismo tamaño. Un razonamiento que permite comparar sin alterar las razones es el siguiente:

Si el Robot A avanzara 3 unidades en 3 pasos, sus pasos serían de una unidad. Pero en 3 pasos, avanza una unidad más, por lo que sus pasos son un poco mayores que una unidad y ese poco más lo lleva a avanzar *una unidad extra cada tres pasos*.

Los pasos del Robot B también son un poco mayores que una unidad, pero ese poco más lo lleva a avanzar *una unidad extra cada cuatro pasos*, y no cada tres, por lo tanto, sus pasos son más chicos.

A = (3, 3) U (1, 0)... más grande

B = (4, 4) U (1, 0)... menos grande

Este razonamiento puede llevar a ordenar conjuntos de razones en los que la diferencia entre los términos es constante:

(4 unidades, 3 pasos) <(3 unidades, 2 pasos)< (2 unidades, 1 paso),

porque se gana una unidad, en cada vez menos pasos

Cuando la razón es menor que uno, la relación se invierte:

(3 unidades, 4 pasos) >(2 unidades, 3 pasos)> (1 unidad, 2 pasos)

porque *se pierde* una unidad, en cada vez menos pasos

La posibilidad de comparar sin hacer cálculos (o mediante cálculo mentales extremadamente simples) permite poner en relieve de manera muy clara la consideración de las relaciones internas y externas. Puede apreciarse también, en ciertos contextos, la posibilidad de comparar "divisiones indicadas" mediante la estimación de los cocientes que *expresan valores unitarios*. Veamos ahora los procedimientos en los que se alteraran las razones dadas.

*6.4.2) Los procedimientos internos CS (conservación de la suma) o CRI (conservación de las razones internas).*

- Una razón interna es natural

*A (2 unidades, 3 pasos) vs*
*B (6 unidades, 7 pasos)*

Mediante la conservación de las razones internas (o de la suma) es posible generar razones equivalentes hasta igualar un término:

A

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 4 | 6 |
| **6** | **9** |

B

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| **6** | **7** |
| | |
| | |

Llamaremos a estos procedimientos $I_1$, el número 1 indica que se modifica una sola razón.

Como ya vimos, estos procedimientos requieren, en primer lugar, considerar la posibilidad de que los robots den otras cantidades de pasos y esto puede depender de la manera en la que se formule la razón. Si se plantea la relación como “El robot A avanza 2 unidades *por cada* 3 pasos” se propicia en mayor medida considerar otras cantidades que si se trata de dos cantidades fijas, en cuyo caso puede favorecerse la determinación de los valores unitarios.

Notemos que el recurso a este procedimiento no requiere, necesariamente, prever que un término es múltiplo del otro. En las resoluciones de los alumnos que entrevistamos (se reportan en el capítulo II) observamos que con frecuencia empiezan a generar razones equivalentes a una de las dos razones, o a ambas, con la finalidad de acercar una de las cantidades a la otra. Es sobre la marcha que descubren el término común.

- Ninguna razón interna es natural

*A (2 unidades, 3 pasos) vs*

*B (5 unidades, 7 pasos)*

El recurso a la conservación de la suma o de las razones internas para obtener un término común sigue siendo posible, pero esta vez es necesario generar razones equivalentes a cada una de las dos razones:

A

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 4 | 6 |
| 6 | 9 |
| 8 | 12 |
| **10** | **15** |

B

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| 5 | 7 |
| **10** | **14** |
| | |
| | |
| | |

Llamaremos a estos procedimientos $I_2$. A la postre, la variante más sistemática consiste en anticipar el valor común buscado (es un múltiplo común de los términos), en cuyo caso el procedimiento puede dar lugar al siguiente algoritmo: para comparar las razones (a, b) con (c, d), comparamos las razones equivalentes (ac, bc) con (ac, ad), lo que se reduce a comparar las *cantidades* bc con ad. Llegamos aquí al mismo resultado que se infiere de los algoritmos para comparar dos fracciones positivas, por ejemplo:

$a/b > c/d \Leftrightarrow ad/bd > bc/bd \Leftrightarrow ad > bc$.

Si no se anticipa el múltiplo común y se van generando poco a poco razones equivalentes, puede suceder que, sobre la marcha, se encuentren pares sin un término común que permiten comparar, por ejemplo:

A

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 4 | 10 |

B

| Unidades | Pasos |
|---|---|
| 5 | 7 |
| | |

El robot A (4 unidades, 10 pasos ) recorre menos distancia y con más pasos que el B (5 unidades, 7 pasos), por lo que A da pasos más pequeños.

Esta forma de realizar la comparación (efectivamente utilizada por los alumnos, como veremos en el capítulo II) evoca la manera en que los matemáticos de la antigua Grecia definían la equivalencia de razones de magnitudes. La definición 5 de Libro V de los Elementos de Euclides, atribuida a Eudoxo de Cnide, dice:

> *Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and the third, and any equimultiples whatever of the second and fourth the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.*

En términos modernos, esta definición puede traducirse diciendo que, dados dos pares de magnitudes A, B y C, D, éstos guardan la misma razón si y solo si, para todo par de enteros no nulos (m, n), se tiene una y solo una de las tres implicaciones siguientes:

Si $nA > mB$, entonces $nC > nD$

Si $nA = mB$, entonces $nC = nD$

Si $nA < mB$, entonces $nC > nD$

Y en la definición 7, la negación:

> *When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth then the first is said to have a greater ratio to the second than the third to the fourth.*

Es decir:

la razón que guarda A con respecto a B es mayor que la que la que guarda C con respecto a D si y sólo si existen n y m enteros tales que nA >mB y nC < mD,

En nuestro ejemplo de los pasos de los robots, considerando que A y B expresan las cantidades de unidades y C y D las de pasos, tenemos:

| | Robot 1 | | Robot 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Unidades | Pasos | Unidades | Pasos | |
| | A= 2 | C= 5 | B= 5 | D= 7 | |
| **n= X2** | 2A= 4 | 2C= 10 | B= 5 | D= 7 | **m=X1** |

El robot 1 da más pasos que el robot 2 (10>7) y sin embargo avanza menos unidades (4<5) por lo que los pasos del robot 1 son más chicos:
**2** X (2 unidades) < **1** X (5 unidades) mientras que **2** X (5 pasos) > **1** X (7 pasos).

En los Elementos de Euclides, hay otra definición para la equivalencia de razones, esta vez entre números (enteros), de hecho más sencilla (definición 21 del Libro 7): "*dos pares de números tienen la misma razón si el primero es el mismo múltiplo del segundo que el tercero del cuarto, o si el primero es la misma o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto"*. Esta definición da cuenta, en términos modernos, de la equivalencia de fracciones. En cambio, la sofisticada definición anterior porta sobre las magnitudes, y en particular, está pensada para dar cuenta de las magnitudes inconmensurables, aquellas en las que una de las magnitudes no es "parte de" o "partes de " la otra.

Al analizar los procedimientos de resolución de los alumnos entrevistados (capítulo II) veremos que varios de ellos enfrentan los problemas de comparación de razones racionales como si éstas fueran irracionales, es decir, retomando el ejemplo anterior, como si no existieran dos factores m y n tales que m veces 2 = n veces 5. El conocimiento que estos alumnos manifiestan no disponer (en contexto, de manera funcional) es el hecho de que, dados dos enteros cualesquiera, existe siempre un número entero que es *múltiplo* común de ambos. La SFC podría constituir un espacio adecuado para estudiar esta propiedad.

Comentario

Los procedimientos que hemos revisado aquí, la obtención de razones equivalentes mediante conservación de las razones internas (iterando o multiplicando los términos), permiten resolver los problemas de comparación desde los naturales, aun cuando ninguna de las razones en juego es natural (considerando siempre cantidades enteras y relativamente pequeñas). Los problemas propician la obtención de razones externas equivalentes que serán objeto de comparación y exige considerar que cualquier razón de la clase permite realizar la comparación.

*6.4.3) El procedimiento VU: comparación mediante la obtención de valores unitarios*

Ya vimos anteriormente que las variables relativas a las magnitudes y a la formulación de la razón pueden influir en la decisión de determinar o no los valores unitarios para realizar la comparación: esta decisión se facilita cuando la comparación porta explícitamente sobre valores unitarios (¿qué pasos son más grandes? ¿a qué niños les toca, a cada uno, más pastel?) y puede dificultarse en cambio cuando los valores unitarios no son evocados, eventualmente porque no tienen una existencia real en el contexto, son sólo medios de cálculo (¿qué escala agranda más?, ¿qué naranjada sabe más a naranja?). Veamos ahora el efecto de las variables numéricas sobre este procedimiento.

- Las razones internas, enteras o racionales

En la SFR-2 vimos que una variante determinante para propiciar el procedimiento VU es cuando las razones internas son racionales. Se puede prever que en la SFC, la presencia de razones internas no enteras (las que se establecen entre los valores homólogos) <u>no propiciará</u>, en igual medida que la SFR-2, la determinación de valores unitarios debido a que, como acabamos de ver, ahora es factible realizar la comparación obteniendo razones equivalentes mediante la iteración o multiplicación de los términos de cada par, incluso cuando ambas razones internas son racionales (procedimientos $I_1$ o $I_2$). Calcular los valores unitarios implica realizar divisiones y esta operación es en general más difícil para los alumnos de primaria que la multiplicación.

- Las razones externas, enteras o racionales

A diferencia de la variable anterior, el carácter entero o no entero de las razones externas es determinante del grado de dificultad del procedimiento VU. Si la razón externa es racional y por lo tanto el valor unitario también, la dificultad técnica del procedimiento VU aumenta considerablemente en comparación con los procedimientos $I_1$ o $I_2$. Si en cambio la razón externa es entera, el procedimiento VU deviene más sencillo y por lo tanto más factible.

Notemos, por otra parte, que en situaciones de comparación, no es indispensable determinar los dos valores unitarios, basta con determinar uno de ellos y después calcular, para la misma razón, el valor que corresponde a la cantidad de la otra razón. Esto se vuelve todavía más atractivo cuando una de las razones externas es natural. Por ejemplo, para comparar (3 pasos, 7 unidades) contra (2 pasos, 6 unidades):

| Pasos | Unidades |
|---|---|
| 3 | 7 |

| Pasos | Unidades |
|---|---|
| 2 | 6 |
| **1** | **3** |
| 3 | 9 |

La situación así planteada incluye la realización de una variante sencilla de la SFR-2 (2 pasos = 6 unidades, 3 pasos = x).

- Una razón externa es mayor que un natural *n*, la otra es menor

En este caso particular el procedimiento VU también se facilita al permitir comparar valores unitarios racionales mediante su aproximación al entero:

A

| Pasos | Unidades |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 1 | más de 2 |

B

| Pasos | Unidades |
|---|---|
| 5 | 7 |
| 1 | menos de 2 |

En este caso y en el anterior tenemos dos formas específicas más en las que los naturales permiten comparar razones racionales sin necesidad de expresar los valores unitarios racionales.

- Variante estructural: más de dos razones por comparar.

Más allá del carácter entero o racional de las razones, otro factor que puede volver ventajoso al procedimiento VU es la presencia de más de dos razones por comparar, por ejemplo:

| A | |
|---|---|
| Unidades | Pasos |
| 2 | 5 |

| B | |
|---|---|
| Unidades | Pasos |
| 3 | 7 |

| C | |
|---|---|
| Unidades | Pasos |
| 5 | 12 |

Puede ser más económico determinar los tres valores unitarios que comparar dos a dos mediante los procedimientos $I_2$. No obstante, cuando las razones externas son racionales, como en el ejemplo, para que dicha ventaja exista es necesario que las divisiones con cociente no entero no constituyan ya una dificultad.

- Comentario

La determinación de los valores unitarios se revela menos fácil de propiciar en la SFC que en la SFR-2, debido a que los procedimientos $I_1$ o $I_2$ permiten resolver los casos en los que la razón interna es racional (considerando cantidades enteras y relativamente pequeñas) . No obstante, ciertos contextos y la variante en la que se comparan más de dos razones pueden favorecerlos.

Cuando hay valores unitarios racionales, en ciertos casos se presentan posibilidades de resolución exclusivas de la SFC que permiten no determinar dichos valores: si sólo uno es racional, basta con determinar el que no lo es; si ambos son racionales pero uno mayor que un natural y el otro menor, es suficiente con obtener la aproximación al valor entero.

En la SFC, mediante los procedimientos internos, CS, CRI o VU, se registra un doble tratamiento de la equivalencia de razones, uno implícito, al generar razones equivalentes a cada una de las razones dadas, otro, más explícito, al establecer la comparación entre las dos razones, a partir de alguno de sus representantes. De esta manera, la SFC puede favorecer, a la par con la SFR-2, el desarrollo de la noción de clase de equivalencia de razones.

*6.4.4) Comparación mediante la determinación de los operadores externos (OP)*

Cuando la comparación se realiza en el nivel de los operadores ocurre, por primera vez, y a diferencia de los procedimientos anteriores, que la idea de razón conquista una forma de expresión propia, independiente de las cantidades en juego. En este punto llegamos nuevamente a la culminación y al término de la función de la razón como la forma germinal del racional: la razón como objeto distinto del número deja de existir, para dar lugar al racional con el significado amplio de expresión de una razón constante.

Ya hemos destacado la dificultad conceptual y técnica de la determinación del operador constante en la SFR-2. Veremos ahora las variantes de la SFC que pueden favorecer esta determinación.

Las variables de contexto, relativas a las magnitudes y a la formulación de la razón, actúan de manera similar a como lo hacen en SFR-2. El caso de cantidades de misma naturaleza y expresadas con la misma unidad, al dar lugar a un operador sin dimensión, puede ser más propicio que el de las cantidades de distinta naturaleza. Cuando la razón externa es racional, el caso de relaciones parte-todo puede ser más propicio que el de razones parte parte.

Desde el punto de vista de las variables numéricas, tenemos: 1) el caso más sencillo, cuando las razones externas son enteras y por lo tanto los operadores también lo son; 2) el caso de las razones externas “fracciones unitarias”, asimilables a operadores enteros que dividen y, finalmente, 3) el caso más complejo de razones externas racionales, no unitarias. Sobre todo en este último caso, la SFC difícilmente propiciaría por sí sola la determinación de los operadores, en virtud de la diversidad de procedimientos alternativos más sencillos, en particular, $I_1$ o $I_2$. En cambio, una vez que se ha adquirido un dominio sobre el procedimiento del operador en la SFR-2, la SFC permite ampliar el campo de aplicación de este procedimiento.

Por otra parte, el hecho de tener ahora dos o más razones por comparar abre la posibilidad de considerar variantes que no ocurren en la SFR-2, y que pueden contribuir, de nuevas maneras, a identificar al operador. Veamos las más importantes.

- Sólo un operador es natural (o fracción unitaria)

Al igual que en la determinación de los valores unitarios, una vez que se sabe determinar un operador natural, puede compararse contra una razón racional sin que sea necesario expresar a esta última mediante el operador:

Trato de M

**X3**

| Nuevas | Viejas |
|---|---|
| 2 | 6 |

Trato de A

**menos del triple**

| Nuevas | Viejas |
|---|---|
| 3 | 7 |

| Trato de M **un tercio** | |
|---|---|
| Nuevas | Viejas |
| 6 | 2 |

| Trato de A **más de 1/3** | |
|---|---|
| Nuevas | Viejas |
| 9 | 5 |

En este último caso, la posibilidad de identificar al operador depende de que el denominador de la fracción sea pequeño y las cantidades en relación también, de manera que pueda intuirse, a simple vista, la existencia de una relación natural "veces menos". El caso más simple es la relación "mitad".

- Un operador es mayor que un número natural (o fracción unitaria), mientras que el otro es menor

| Trato de M **Más del triple** | |
|---|---|
| Nuevas | Viejas |
| 2 | 7 |

| Trato de A **menos del triple** | |
|---|---|
| Nuevas | Viejas |
| 3 | 8 |

- Un operador está explícito

Por ejemplo:

*Trato de Miguel: por cada 10 de tus estampas nuevas, te doy 15 viejas.*

*Trato de Armando: Te doy lo que me des más la mitad de lo que des*

En esta variante un operador se introduce explícitamente. Además de permitir la aplicación de un operador dado, puede favorecer el estudio de la equivalencia entre las dos expresiones de la razón, lo cual redundaría en un enriquecimiento del significado de ambas: "1 1/2 (o 3/2) también significa 15 por cada 10", o bien con razones naturales, "triple" también significa "6 por cada 2".

En el capítulo 3, al presentar algunas secuencias didácticas relativas a la situación de comparación de razones, se presentan también algunas variantes estructurales de esta situación fundamental.

### 6.5) Comentario final sobre la SFC

Los procedimientos internos, $I_1$ e $I_2$ (incluyen el uso de CS y de CRI) propician la obtención de clases de equivalencia de razones, el procedimiento VU da lugar a la expresión de la clase mediante la razón canónica y, finalmente, con la determinación del operador (OP) la razón se cuantifica con un número y con ello los números, naturales o racionales, asumen el significado de razones constantes en una relación.

El análisis anterior sugiere que la SFC participa, a la par con la SFR-2, en crear las condiciones que dan lugar a este proceso, con ciertos matices:

- la SFC propicia un análisis de las formas en que varía el tamaño de una razón en función de las variaciones de sus términos que no se propicia desde la SFR-2;
- la noción de equivalencia de razones deviene más explícita en la SFC, al intervenir no solo en el momento en el que se generan razones equivalentes a cada razón (como en la SFR-2), sino sobre todo al hacer explícita la comparación de dos razones.
- finalmente, la SFC ofrece más alternativas de solución para abordar problemas con razones no enteras, desde los naturales. Pero, por este mismo motivo, se revela menos adecuada que la SFR-2 para propiciar los procedimientos VU y OP.

Lo anterior sugiere, nuevamente, la posibilidad de extender el campo de situaciones multiplicativas que se estudian en la primaria, previamente a la utilización de fracciones y decimales, en aras de propiciar un conocimiento más amplio y profundo de las relaciones multiplicativas con números naturales y, al mismo tiempo de propiciar el desarrollo de un conocimiento de los racionales, previo a su definición explícita.

En el trabajo con razones previo a la cuantificación de la razón con un solo número, se ponen en juego propiedades de las razones que también lo son de los cocientes y de las fracciones (ver cuadro), pero no se suelen estudiar como propiedades de los cocientes y, en tanto propiedades de las fracciones, suelen ser más difíciles de comprender, o, frecuentemente, se presentan como algoritmos.

## Algunas propiedades de las relaciones de equivalencia y orden

Relaciones de equivalencia

| Razones | Cocientes | Fracciones |
|---|---|---|
| $R(a, b) = R(na, nb)$ | $a:b = na:nb$<br>(no suele estudiarse) | $a/b = na/nb$<br>(equivalencia de fracciones) |
| $R(a, b) = R(c, d) \Rightarrow$<br>$R(a, b) = R(a+c, b+d)$ | $a:b = c:d \Rightarrow$<br>$a:b = a+c:b+d$<br>(no suele estudiarse) | $a/b = c/d \Rightarrow$<br>$a/b = a+c/b+d$<br>(no suele estudiarse) |
| $R(a, b) = a\,R(1, b)$ | $a:b = a\,(1:b)$<br>(propiedad que permite establecer un vínculo entre el cociente y la fracción) | $a/b = a\text{X}1/b$ |

Relaciones de orden

| | | |
|---|---|---|
| $b<c \Rightarrow R(a, b) > R(a, c)$ | $B<c \Rightarrow a:b > a:c$ | $b<c \Rightarrow a/b>a/c$ |
| $a>b$ y $c<d \Rightarrow$<br>$R(a, b) > R(c,d)$ | $a>b$ y $c<d \Rightarrow$<br>$a:b>1>c:d$ | $a>b$ y $c<d \Rightarrow a/b>1>c/d$ |
| $a>c$ y $b<d \Rightarrow R(a, b)>R(c, d)$ | $a>c$ y $b<d \Rightarrow a:b>c:d$ | $a>c$ y $b<d \Rightarrow a/b>c/d$ |
| $a<b \Rightarrow R(a, b) < R(a+n, b+n)$ | $a<b \Rightarrow a:b < a+n : b+n$<br>(no suele estudiarse) | $a<b \Rightarrow a/b<a+n/b+n$<br>(no suele estudiarse) |
| $R(a, b) > R(c, d)$ si existen m y n naturales tales que<br>$ma \geq nc$ y $mb < nd$<br>ó, dado que $R(a, b) = R(ca, cb)$ y<br>$R(c, d) = R(ac, ad)$, entonces<br>$R(a, b) > R(c, d)$ si $ad > cb$ | Para comparar $a:b$ y $c:d$, se calculan los cocientes. | Para comparar $a/b$ y $c/d$ se reduce a denominador común (o se aplica la regla de productos cruzados) lo que lleva también a comparar ad y cb |
| Dadas dos razones existe siempre una mayor que la más chica y menor que la más grande | No suele estudiarse | Propiedad de la densidad de los racionales |

## *7) Conclusiones del capítulo I La razón, precursora del número en su función de medida y de aplicación*

A través de un análisis de situaciones, nos propusimos estudiar la hipótesis según la cual la noción de razón juega en el aprendizaje, de manera parecida a como sucedió en la historia, el papel de precursora de la noción de número, en sus funciones de medida, de relación entre medidas y de aplicación lineal.

Este propósito implicó estructurar el *medio* de la razón, destacando algunas de las situaciones fundamentales que dan vida a esta noción, y un conjunto de variables didácticas que permitieran generar una parte significativa del conjunto muy amplio de situaciones en las que interviene una razón. Repasemos brevemente algunos de los resultados de este análisis.

Determinar el número de veces que una cantidad A es igual a una cantidad B, es determinar la razón numérica que guardan ambas cantidades. Esta acción se realiza cuando: (a) interesa comparar  o medir A con B, (b) existe una relación proporcional entre dos conjuntos en donde A y B son cantidades del primer conjunto y su razón debe conservarse en el segundo conjunto (razón interna) o, por último, (c) A y B pertenecen a conjuntos diferentes y su razón es la constante que vincula a todos los pares de cantidades en relación.

La noción de “número de veces” constituye la cuantificación de una razón, por lo que podemos decir que, cada vez que se cuantifica una razón, en cada una de las circunstancias señaladas, se registra una nueva forma de utilizar los números en el papel de razones, con una función específica (medidas, operadores internos, operadores externos constantes)

No obstante, y esto es lo importante desde el punto de vista didáctico, el paso de la razón al número que la expresa no es en todos los casos inmediato, si lo fuera, tendríamos únicamente números jugando el papel de razones, pero no razones como formas previas del número. Durante el tiempo en el que la razón se utiliza para dar cuenta de una relación cuya expresión con un número aún no se conoce, las razones funcionan como el antecedente de dicho número, como descriptores de un conjunto que será construido, pero del que aun no se dispone.

En la función de expresar una medida a partir de la relación entre cantidades de magnitud (SFR-1) cuando las colecciones son discretas, la razón entre el conjunto unidad y el conjunto que se mide se traduce inmediatamente en un número natural, en un cardinal.

Cuando el conjunto unidad está formado por más de un elemento, la razón emerge también como un número, número de agrupamientos, y, aunque expresa la relación entre dos cantidades, dicha relación no interesa por sí misma, en tanto relación, sino en tanto cardinal de un conjunto, o en tanto multiplicador que se aplica a una cantidad.

Ciertas variantes en este nivel pueden, no obstante, poner en relieve la noción de razón, como relación entre dos cantidades, que subyace a la noción de agrupamientos, por ejemplo, al introducir agrupamientos de distintos tamaños y estudiar la relación entre el tamaño del agrupamiento y el número de agrupamientos.

Cuando la medida no es entera, la noción de razón muestra, por primera vez, que puede jugar durante un tiempo el papel de precursora de la medida racional, en la relación de conmensuración. A partir del momento en el que, al poner en relación las cantidades, se obtiene la relación de conmensuración $nL = mU$, la linealidad de la medida permite desarrollar un trabajo con esta relación entre medidas, dejando atrás el ámbito de las cantidades físicas, el cual sólo funcionará como recurso de verificación de las anticipaciones: las medidas fraccionarias implícitas pueden ser comparadas y sumadas en tanto razones, antes de ser fracciones. En este nivel se puede desarrollar una noción de equivalencia de razones, son razones entre medidas que expresan una misma cantidad. El estudio de estas relaciones constituye ya un caso particular de las relaciones proporcionales entre medidas.

En el ámbito de las relaciones proporcionales entre medidas identificamos dos situaciones fundamentales, la situación SFR-2, en donde se reproduce una razón (o varias) como medio para determinar una cantidad (o varias), y la situación SFC-2, en la que se comparan dos razones. Hemos mostrado que es mediante diversas variantes de estas situaciones que se propicia desde la adquisición de las nociones básicas de multiplicar y dividir por naturales hasta la de la noción de operador multiplicativo racional. En este proceso, la noción de razón vuelve a manifestarse como precursora de los números en su papel de expresar relaciones. Identificamos tres grandes momentos:

1. Una razón externa (a, a’) entre medidas de dos conjuntos A y A’ da lugar a un conjunto de razones equivalentes (ka, ka’) (parte de AXA’) mediante la conservación de la suma y de las razones internas. Las razones que son objeto de cuantificación son las internas,

describen una variación de cantidades al interior del mismo conjunto. Cuando la razón interna es racional, no se hace explícita como tal, permanece implícita al descomponerse en una composición de razones internas naturales (a→b = a→1→b).

Las razones externas *resultan* de este trabajo a nivel de las internas sin ser ellas mismas objeto de cuantificación.

Al conjunto de razones externas (ka, ka') subyace una *medida* constante (1→a'/a) y un *operador* constante (Xa'/a). Cuando las razones no son enteras, subyacen una medida y un operador racionales. Las situaciones SFR y SFC llevan a realizar un trabajo con estas razones (ka, ka') como precursoras de medidas y operadores fraccionarios.

2. Se establece la razón que proporciona el valor unitario1→a'/a.

Hemos distinguido distintas funciones de la razón canónica (1→a'/a) dependiendo del contexto (del tipo de magnitudes en juego, de la variante estructural): su papel puede ser únicamente el de proporcionar *una* medida, cuando se pregunta directamente por un valor unitario, o bien, proporcionar esta medida es un recurso para determinar varias medidas más (cuando en el conjunto inicial hay varios valores), o para comparar entre sí varias razones externas. En estos últimos dos casos la razón externa canónica (1→a'/a) constituye una forma privilegiada de expresar la invarianza de la relación entre los conjuntos de cantidades, deviene la representante canónica de la clase de equivalencia de razones (ka, ka'); permite resolver todas las variantes numéricas de las situaciones fundamentales de reproducción de una razón y de comparación de razones.

La razón canónica constituye, además, un antecedente del operador externo constante Xa'/a.

Por lo anterior, poder anticipar que cualquier razón puede expresarse mediante esta razón canónica constituye un avance conceptual fundamental en el desarrollo de la noción de razón y en la capacidad para resolver la variantes de las situaciones SFR-2 y SFC.

Cuando la razón externa es una relación de conmensuración entre dos medidas de la misma naturaleza (por ejemplo, en las situaciones del espesor de las hojas de papel, o en la situación de los robots) y además es racional, determinar la razón canónica (1→a'/a) implica determinar un valor unitario fraccionario. En este punto, ocurre una primera manifestación explícita de las fracciones, en el papel de medidas. Esta explicitación puede ser efecto de una definición, cuando las fracciones se definen como cocientes, o de un cálculo (no trivial), cuando las fracciones fueron definidas previamente como partes de unidad.

Finalmente, analizamos una vía para establecer una primera definición explícita de la multiplicación por un racional, en tanto operador <u>interno</u>: en una situación SFR-2, dada una razón externa canónica 1→q, el cálculo de la imagen de un valor fraccionario (a/b→ x), puede llevar a identificar la razón interna 1→a/b como "a/b de", de donde x = a/b de q.

3. El tercer momento corresponde a la cuantificación de la razón externa constante, es decir, a la determinación del operador externo constante.

Vimos que incluso cuando el operador es natural, su identificación y su uso no son fáciles de propiciar a partir de variantes de las situaciones (habida cuenta de la funcionalidad de los procedimientos internos), pueden requerir de intervenciones de enseñanza más directas. Para el caso de un operador racional vimos varias alternativas para realizar esta construcción, destacando algunas ventajas y desventajas de cada una. Analizamos con más detenimiento aquella en la que el operador Xa'/a se define a partir de la razón canónica 1→a'/a, y emerge como el nombre de una relación lineal, como la expresión de aquello que guardan en común todos los pares del conjunto de razones externas equivalentes (ka, ka').

En ambos casos, operador natural o racional, la hipótesis según la cual una fuente de significación importante del operador es justamente el conjunto de razones equivalentes y su representante canónico, el valor unitario, se revela bien fundamentada.

En esta perspectiva, la construcción de la noción de operador, lejos de reducirse a la aplicación de multiplicaciones o divisiones, conlleva la construcción de la noción de invariante en una relación lineal entre dos conjuntos de medidas. Es de hecho el inicio de la construcción de la noción de aplicación lineal.

De esta manera, el análisis, desde el punto de vista de las situaciones que ponen en juego la noción de razón, nos permitió poner de manifiesto:

- que esta noción *vive* en situaciones específicas, como precursora de los números en su función de medidas y de aplicaciones;
- dos acepciones de la noción de multiplicación que se desarrollan en el estudio de las situaciones revisadas: una, como operador interno, que nace de la suma repetida y

que permite la conservación de las razones internas, y otra, como operador externo constante en cuyo caso la suma no es su antecedente inmediato, sino el conjunto de razones generado mediante procedimientos internos, y, en particular, la razón canónica;

- vínculos conceptuales entre las nociones de razón, medida, fracciones, y aplicación lineal; se puso de manifiesto además que la construcción de ciertos aspectos fundamentales de la noción de fracción (la medida fraccionaria y el operador fraccionario) se realiza en el seno de situaciones de proporcionalidad;
- la posibilidad de enriquecer el trabajo que se realiza con la multiplicación y la división de naturales en la primaria, al ampliar la gama de variantes de la situación SFR-2, y al considerar la situación de comparación SFC, evitando de esta manera reducciones a casos muy particulares y saltos demasiado grandes a los casos difíciles.

Cabe precisar que lo anterior no significa volver a abrir el antiguo apartado de razones y proporciones con aquella multitud de términos, definiciones y reglas, al término de la enseñanza básica de la aritmética. No es una definición explícita de la razón como cociente y como quebrado la que hace falta. Al contrario, la conclusión de nuestro análisis sugiere tomar en consideración, en los procesos de enseñanza que se organizan desde los primeros grados, que el trabajo *a nivel de las razones,* expresadas mediante parejas de cantidades enteras (la equivalencia, la comparación, la composición), precede al estudio de los números que cuantifican a estas razones.

Se trata de enriquecer el trabajo que se realiza con la multiplicación y la división al considerar las familias de problemas en las que intervienen las razones como invariantes de una relación, previamente al momento en el que se espera que los niños dispongan ya de los números, enteros y sobre todo fraccionarios, como operadores externos constantes.

Hemos hecho referencia, a lo largo del análisis, a estudios empíricos ya realizados que apuntalan esta conclusión, en particular, el trabajo desarrollado por Brousseau sobre las fracciones (Brousseau, 1981), y también los que hemos realizado en el DIE (Block, 1987) (Balbuena, 1988). Estos estudios abordan directamente el proceso de construcción de las fracciones, como medidas y como operadores. No obstante, como vimos a lo largo del análisis, el trabajo con la noción de razón está presente mucho antes del momento en que deben estudiarse las fracciones. Hay aquí un campo amplio para el estudio experimental. En los capítulos II y III de este estudio abordaremos una pequeña parte de este estudio.

Para terminar, en la tabla de la siguiente página se presenta una síntesis del análisis realizado. Se destacan cuatro planos que subyacen al análisis y que son característicos de este tipo de estudios: el de las relaciones, actuales e históricas, entre conceptos matemáticos; el de las relaciones entre los saberes de matemáticas y las situaciones en las que éstos funcionan; entre las situaciones y los procedimientos que éstas pueden propiciar, y, finalmente, entre estos procedimientos y los conocimientos que subyacen, con los saberes que son objeto de enseñanza.

| Saberes<br>(inter relaciones entre objetos matemáticos) → | Situaciones y variables<br>(medio) → | Procedimientos alumnos<br>(conocimientos explícitos o implícitos) → | Saberes<br>(conocimientos explícitos, objeto de institucionalización ) |
|---|---|---|---|
| **La razón** (a, b)<br>definida por sus propiedades:<br>(a, b) = (na, nb)<br>(a, b) > (c, d) ssi ad>bc<br>(subyace a)<br>→ **La medida**<br>(L, U) = (n, m) → L = n/m U<br>→ **La linealidad**<br>Conservación de la suma<br>Conservación de las razones internas<br>Constancia del operador<br>↓<br>**El número racional**<br>(a, b) = (1, b/a) (medida)<br>(a, b) = X b/a (operador) | • Reproducción de una razón (SFR)<br>• Comparación de razones (SFC)<br>Variables<br>1) Relativas a los objetos que se relacionan:<br>Cantidades<br>Medidas<br>Números<br>Razones<br>2) Relativas a las magnitudes<br>Misma/distinta naturaleza:<br>Discretas/continuas<br>Ambitos de procedencia (familiares/no familiares; acordadas para regular un fenómeno o modelo para interpretarlo...)<br>3) Numéricas:<br>cantidades, enteras, no enteras<br>razones, enteras, no enteras<br>4) Otras:<br>VU dado/no dado<br>variantes estructurales | 1) Internos<br>Conservación de la suma<br>Conservación de las razones internas<br>Reducción a la unidad<br>2) Externos<br>Constancia del operador<br>3) Erróneos<br>Reducciones<br>Aditivos<br>Otros<br>TESIS:<br>En los procedimientos de los alumnos es posible identificar, y propiciar, un manejo de razones, i.e., de relaciones multiplicativas entre pares de cantidades, previamente a que estas relaciones se expresen explícitamente con números (en el papel de razones). | 1) Cardinales y Medidas<br>Los números naturales y racionales como expresión de cantidades<br>2) Tratamiento de las relaciones proporcionales:<br>• La conservación de las razones internas (la multiplicación por naturales, las divisiones)<br>• El valor unitario constante en una relación de proporcionalidad; los números racionales como valores unitarios.<br>• El operador, constante en una relación de proporcionalidad; los racionales como operadores multiplicativos |

## *8) Los resultados a la luz de otras perspectivas*

A lo largo del análisis de situaciones que realizamos en este capítulo hemos hecho referencia a estudios que, desde distintas perspectivas, han contribuido al conocimiento del papel de la noción de razón en el aprendizaje de los niños. A continuación vamos a especificar algunas de estas corrientes, al mismo tiempo que intentaremos destacar las aportaciones del análisis desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, que hemos realizado en este capítulo.

### *8.1) La perspectiva de los estudios sobre razonamiento proporcional.*

Las relaciones que se ponen en juego para resolver tareas de proporcionalidad, que en conjunto conforman lo que se suele llamar "razonamiento proporcional", han sido tema de numerosas investigaciones a lo largo de los últimos 40 años, en el mismo lapso en el que, en la esfera de la enseñanza, el viejo tema de "razones y proporciones" ha tendido a desaparecer. Las tareas que se han utilizado para realizar estos trabajos son variantes específicas de lo que aquí hemos llamado "situación fundamental de la reproducción de una razón" a nivel de medidas (SFR-2)[1] y "situación fundamental de la comparación de razones (SFC)".

Distinguiremos los estudios realizados desde la perspectiva de la psicogénesis del razonamiento proporcional de aquellos que buscan evaluar el nivel de desempeño de poblaciones de estudiantes, por lo general adolescentes (entre 11 y 15 años) en la resolución de problemas de proporcionalidad.

<u>Los estudios piagetianos y neo piagetianos</u>

Piaget estudió la adquisición de la proporcionalidad en el marco de su teoría psicogenética del desarrollo cognitivo, en tanto ejemplo característico de relación entre dos variables linealmente dependientes. Con ello, puso de manifiesto, como lo hizo con tantas otras nociones de matemáticas, que la adquisición de la proporcionalidad implica un proceso de desarrollo subordinado a la construcción de determinadas estructuras del pensamiento lógico. Para él, la comprensión de las relaciones de proporcionalidad se desprenden de la estructura llamada INRC (idéntica, inversa, recíproca, correlativa) que organiza los esquemas operatorios del sujeto. La reversibilidad de estas cuatro operaciones y su coordinación explicaría la superioridad del pensamiento del adolescente

[1] Estas tareas son llamadas frecuentemente "missing value tasks", tareas de "valor faltante"

con respecto a la del niño (Inhelder y Piaget, 1955). La proporcionalidad constituye una noción lógico matemática que procede del acceso al estadio formal, alrededor de los 13, 14 años.

A través de distintas tareas que ponen en juego relaciones funcionales lineales entre dos variables (peso y distancia en la experiencia de la balanza, relación entre longitudes en la proyección de una sombra, relación entre total de fichas y fichas marcadas en una experiencia de extracción al azar, entre otras), se identifican tres etapas del proceso de desarrollo del razonamiento proporcional:

a) estadios tempranos, entre los 5 y los 8 años,  en los cuales los sujetos apelan a correspondencias cualitativas y a seriaciones (más uno)

b) estadios intermedios entre los 7 y los 12 años, con compensaciones aditivas o uso de razones elementales del tipo 2:1. (en algunas experiencias, después de estas compensaciones aditivas y antes de la proporcionalidad, se identifica el uso de estrategias aditivas en las que los niños manifiestan la intuición de que las diferencias cambian con el tamaño de los números, y por lo tanto no usan diferencias constantes (preproporcionalidad)

c) estadios avanzados, entre los 12 y los 14 años, que se caracterizan primero por una comprensión lógica de la proporcionalidad y después por la adquisición de una métrica que permite tratar todos los casos posibles, independientemente de los valores numéricos de los datos y de las razones.

Experiencias posteriores relativizaron estos resultados en lo tocante a las edades en las que los alumnos logran tener éxito, por ejemplo, en una experiencia realizada por Sinclair (Piaget, et.al. 1968) en un contexto más simple que los anteriores desde el punto de vista del tipo de magnitudes en juego, se encuentra que los niños tienen éxito en las tareas desde alrededor de los nueve años. Se trata de una experiencia en la que anguilas de tres tamaños “comen una cantidad de alimento proporcional a su tamaño”. El alimento consta de unas “bolitas”, cantidad discreta y, en otra variante, de tiras de longitud determinada, cantidad continua. El esquema de los problemas es el siguiente:

| | 1er problema | 2º problema | 3er problema |
|---|---|---|---|
| A: 5cm | 1 | x | x |
| B: 10cm | y | 4 | y |
| C: 15cm | z | z | 9 |

En cada problema se da la medida de las tres anguilas y lo que come una de ellas; debe determinarse lo que comen las otras dos.

Sinclair explica la precocidad de los logros en esta tarea, en comparación con las que se utilizaron con anterioridad, a partir del buen nivel de la escuela en la que se realizó la experiencia y de la mayor simplicidad de la tarea: “contrariamente al equilibrio de la balanza en donde la proporción inversa (a mayor peso, menor distancia) moviliza los cuatro términos del grupo INRC, estamos en el cuadro de la proporción directa, con, además, una serie inicial creciente con intervalos constantes”

Estos resultados dan cuenta de una inquietud que empieza a expresarse desde un poco antes entre los investigadores que estudian el desarrollo del pensamiento proporcional y que ya hemos comentado: se considera que las tareas utilizadas por Piaget y colaboradores ponen en juego, además de razonamientos de proporcionalidad, otros conocimientos complejos, en particular, la comprensión de ciertas magnitudes físicas o geométricas, y no corresponden a las experiencias en las que los niños tiene mayor familiaridad con situaciones de proporcionalidad.

A decir de Karplus (Karplus et al, 1983) el objetivo de los estudios piagetianos era la dilucidación del desarrollo de los conceptos de función, probabilidad, velocidad y los efectos compensatorios de las variables que describen un sistema físico (como la balanza) o un concepto lógico matemático (correlación). Por ello, las tareas escogidas en estos estudios no eran seleccionadas prioritariamente para ilustrar el razonamiento proporcional.

Levain (1997) comenta acerca de los resultados obtenidos en la experiencia de las anguilas: “Conviene notar que en el caso en el que los valores numéricos son enteros pequeños y en el que las razones son simples, un número importante de alumnos son capaces, desde el estadio de las operaciones concretas, de resolver problemas de proporcionalidad. Los resultados de esta experiencia (...) abren la vía a la necesidad de analizar más finamente las diferentes clases de problemas que se proponen a los sujetos”.

A partir de los años setenta se multiplican los estudios sobre el razonamiento proporcional. Durante la década de los años setenta las investigaciones tendieron a realizarse dentro de los paradigmas de los estudios piagetianos, en algunos casos precisando la teoría de los estadios y, en otros, cuestionándola. El trabajo de Noelting, (1980ª y 1980b), que ya comentamos (apartado 6.2), fue uno de los trabajos más importantes y representativos de este período.

Durante esta época se desarrollan también modelos alternativos para dar cuenta del proceso de adquisición de la proporcionalidad, frecuentemente a partir del modelo de tratamiento de la información (e.g, Siegler, Case, citados por Levain,1997).

Un segundo momento inicia entre las décadas de los setenta y ochenta, cuando la atención se pone, cada vez más explícitamente, en el análisis de las distintas clases de problemas que se plantean a los sujetos y en la influencia de los aprendizajes escolares.

Para Tourniare y Pulos (1985) el cambio de perspectiva que se registra a lo largo de las tres décadas que siguen a los estudios piagetianos radica en pasar de una concepción del razonamiento proporcional como manifestación de una estructura cognitiva general, a un punto de vista más diferenciado, centrado en la descripción de los procedimientos que se usan y en su influencia por la tarea, y por parámetros personales. No obstante, señalan los mismos autores, la atención puesta en unos parámetros ha implicado el descuido de otros, por lo que aún hay lagunas, fragmentación y falta de cohesión en los resultados.

Los estudios de Karplus sobre desarrollo proporcional son representativos de este periodo. A través de varias experiencias con problemas de “valor faltante” y de comparación, ha contribuido a precisar el efecto de determinadas variables de los problemas, en particular, el carácter entero o no entero de las razones internas y externas en juego y la presencia o no de razones equivalentes en los procedimientos de resolución. Los procedimientos se ubican según una categorización que, en grueso, corresponde a lo siguiente: I Incompleto, ilógico; II Cualitativo (más, menos); III aditivo (cálculo de las diferencias); IV Proporcional (considerando errores de aritmética).

Este autor, como otros, busca construir un modelo que dé cuenta del razonamiento proporcional, “como entidad independiente, no íntegramente ligada a otros esquemas, que puede ser aplicada *bajo ciertas condiciones*, simples o complejas, y por lo tanto puede ser usada en diferentes niveles”. No obstante, el autor reconoce que aún se está lejos de especificar cuales son esas condiciones.

Naturalmente, las interpretaciones acerca del origen de los errores han ido cambiando también. A partir de los estudios de Piaget algunas estrategias erróneas fueron comprendidas como parte del proceso general de desarrollo del pensamiento proporcional, entre otras, ignorar parte de los datos, centrarse en una variable y, sobre todo, mantener una diferencia constante (estrategia aditiva). Posteriormente se empezó a prestar atención a las características de la tarea, por ejemplo, se ha mostrado que la estrategia aditiva es recurrente: surge cada vez que la tarea implica la consideración de más factores que aquellos que el sujeto puede manejar en un momento dado (Hart, 1988 Karplus et al, 1983). Esta recurrencia ha sido explicada a partir de una distinción entre esquemas operatorios virtuales (en el sentido de potenciales) y los esquemas activos, ligados a la resolución de un problema específico. Se sostiene que la activación de un esquema requiere siempre de un ejercicio adecuado, adaptado a una clase determinada de problemas (Fishbein, citado por Levain, 1997). Por otra parte, cada vez más investigadores consideran que, a partir de cierto momento, este tipo de estrategias pueden, y deben, ser corregidas mediante situaciones adecuadas de enseñanza (Hart,1988; Karplus et al, 1983).

<u>Comentario</u>

Los estudios sobre razonamiento proporcional ponen de manifiesto que, en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad, los niños y jóvenes ponen en juego relaciones multiplicativas cada vez más complejas sin que necesariamente puedan expresarlas con un número. En este sentido, aportan una evidencia fundamental a la hipótesis central del presente estudio: la existencia de un funcionamiento de la noción de razón previo a la noción de número en la función de relación escalar o de aplicación.

Estos estudios nos permiten conocer también determinadas características generales del proceso de desarrollo del razonamiento proporcional (las grandes etapas y el tipo de procedimientos y errores asociados a éstas); aportan elementos para identificar algunas variables que inciden en la dificultad de las tareas, y finalmente, proporcionan una explicación primera de errores frecuentes, en términos de desarrollo cognitivo.

Por otra parte, el propósito de los estudios más recientes, aportar elementos para la conformación de un modelo que permita dar cuenta de la evolución del razonamiento proporcional en los niños y jóvenes, ha permitido poner en evidencia que el "razonamiento proporcional" no constituye *una* capacidad totalmente dependiente del desarrollo de las estructuras formales del pensamiento, sino una capacidad que se manifiesta ya en niveles anteriores de desarrollo frente a problemas sencillos, y cuya evolución se caracteriza por la posibilidad de abordar problemas cada vez más complejos. La cuestión de determinar los factores que complejizan a los problemas, y de especificar en qué son más complejos, se vuelve central.

Podríamos decir que, en la evolución de esta línea de investigación se registra un proceso en el cual ciertas características del *medio* en el que se realiza el razonamiento proporcional, empiezan a ser, poco a poco, explícitamente consideradas. Precisemos esta observación: en los estudios piagetianos, las interacciones del sujeto con un medio determinado son fundamentales, algunas de las experiencias se caracterizan incluso por un alto grado de sofisticación en el diseño de las situaciones y en los dispositivos con los que se hace interactuar a los sujetos. No obstante, el *medio* en sí mismo, entendido como un conjunto de situaciones características de un saber, no es el objeto de estudio, ni de la teoría (Brousseau, 2000: 8). En consecuencia, tampoco son objeto de estudio las relaciones entre saberes, situaciones y conocimientos, sino los mecanismos cognitivos que explican el desarrollo de los conocimientos mismos o, más aún, de las operaciones lógicas que subyacen. La incorporación de herramientas aritméticas que son producto de la enseñanza escolar (los saberes escolares) queda, en general en segundo plano, señalada como “incorporación de aspectos métricos” en determinados momentos del proceso.

En la perspectiva didáctica que asumimos en este trabajo nos interesó precisamente estudiar esta “incorporación de aspectos métricos”, la forma en la que la noción de razón, en situaciones determinadas, subyace a determinadas nociones que son objeto de enseñanza en la escuela (medida y aplicación, número natural y racional) y es fuente de significación de las mismas.

Nuestro objeto de estudio no fue el desarrollo del razonamiento proporcional, sino las situaciones que favorecen la adquisición de nociones específicas, ciertamente en el marco de las relaciones de proporcionalidad. El estudio sistemático del *medio* de la razón desde la teoría de las situaciones didácticas, la identificación de variables que inciden en el nivel de dificultad y en el tipo de procedimientos que se propician, el análisis de las nociones que subyacen a estos procedimientos y de sus vínculos con los saberes explícitos que son objeto de enseñanza, podría constituir, a su vez, una referencia para el estudio del desarrollo conceptual del razonamiento proporcional.

<u>Estudios sobre el desempeño de estudiantes en tareas de proporcionalidad</u>

Este tipo de estudios se ha realizado principalmente con estudiantes de entre 11 y 15 años de edad que cursan la secundaria, a quienes se plantean tareas, casi siempre de cuarta proporcional.

En el diseño de las baterías de problemas que se utilizan, se han considerado diversas variables, numéricas, contextuales y también algunas variantes estructurales, algunas veces simplemente porque éstas resultan de la selección que se hace de los problemas escolares, otras veces con la intención explícita de estudiar el efecto de determinada variable, o, finalmente, por ambos motivos.

Estos trabajos han puesto de manifiesto el bajo nivel de incorporación de las herramientas aritméticas enseñadas en la escuela, en particular las fracciones y la regla de tres (también llamada "de los productos cruzados"), para resolver los problemas en cuánto éstos devienen un poco difíciles (al mismo tiempo que suele manifestarse cierta sorpresa al constatar que los pequeños de primaria son capaces de resolver las variantes más sencillas). Este dato, aunado a otros reportes que acusan un bajo nivel de comprensión de las fracciones (Figueras, 1988) motiva el estudio de los procesos de incorporación de estas herramientas aritméticas, propiciados desde la enseñanza, y en particular, dirige la atención hacia las manifestaciones primeras, implícitas, de las fracciones en el marco de las situaciones de proporcionalidad.

La abundancia de ejemplos de estrategias espontáneas de los alumnos, en particular las llamadas "building up strategies", que consisten en conservar la suma y las razones internas, constituyen evidencia empírica acerca del carácter previo de los procedimientos internos sobre el externo. En nuestro análisis, procuramos destacar en estos procedimientos la presencia de un manejo de razones, como formas implícitas, germinales de los racionales. Hemos intentado avanzar entonces en la búsqueda de respuestas al problema didáctico que se plantea: ¿qué características de las situaciones los favorecen y cuáles pueden propiciar su evolución en términos de una construcción de los racionales como medidas y como operadores?

Veamos ahora los estudios que se han realizado desde la perspectiva del aprendizaje y de la enseñanza de un contenido escolar específico: los números racionales.

### *8.2) Los estudios sobre enseñanza y sobre el aprendizaje de los racionales*

El concepto matemático de número racional constituye una construcción abstracta en el marco de las estructuras algebraicas. Excepto durante el período de las matemáticas modernas en el que se pensó que era posible enseñar a los estudiantes, aún del nivel básico, la noción de estructura algebraica, dicho concepto no es objeto de enseñanza en la escuela básica. Lo que se estudia en la escuela son interpretaciones particulares que dicho concepto asume en situaciones específicas. Se estudian pues fracciones, expresadas de distintas maneras (notación común, notación decimal), con significados particulares: como expresión de una cantidad formada por partes de una unidad, como razón, como operador...

Durante los últimos veinte años, se han realizado varios estudios, desde perspectivas didácticas distintas, sobre esta polisemia del concepto de número racional. A continuación comentaremos algunos estudios representativos de esta línea.

#### Los subconstructos de la fracción

Kieren (1975) propone una primera categorización en la que distingue siete acepciones de la noción de racional, que él llama “subconstructos”: 1) fracciones (definidas como partes de unidad); 2) decimales, en tanto extensión del sistema decimal de numeración; 3) clase de equivalencia de fracciones; 4) razones (números de la forma p/q, en donde p y q son enteros y q distinto de cero); 5) operadores multiplicativos (agrandan, achican);
6) elementos de un campo cociente, p/q es el número tal que q X p/q = p, es decir, es el cociente de p entre q; 7) puntos sobre una recta numérica, subconjunto de los reales.

Un mérito de esta primera categorización fue justamente el abrir la problemática de la complejidad conceptual que subyace a las fracciones. No obstante, presenta varios puntos débiles. Es fácil ver, por ejemplo, que se registran traslapes importantes entre las categorías, por ejemplo: los decimales pueden funcionar también como expresiones de una relación parte todo, como cocientes, como operadores, como puntos sobre una línea. Parece que en la categorización intervienen varios criterios que no se hacen explícitos: por un lado, la función que pueden cumplir las fracciones (expresar una medida, expresar una relación entre medidas, expresar una transformación de medidas); por otro lado, la forma de construir los racionales, como extensión de los naturales, ya sea a partir del sistema decimal de numeración, introduciendo las fracciones unitarias, o incluyendo en el conjunto de naturales todos los cocientes de números enteros, o bien, a partir de los números reales, como un subconjunto que hereda determinadas propiedades, como la densidad.

En dos publicaciones posteriores, Kieren (1980 y 1988) reduce el número de categorías. Otros autores desarrollan a su vez variantes diversas de las mismas (e.g.,Behr, et. al, 1983; Nesher 1985, citado por Ohlsson, 1988). Pese a ciertas diferencias en los criterios utilizados para definir los subconstructos, puede decirse que en esos años tiende a haber acuerdo en que los siguientes son centrales: parte todo (o medida), cociente, razón y operador

Detengámonos en este punto para confrontar esta categorización de las fracciones con el punto de vista que asumimos en nuestro estudio sobre la noción de razón.

Cabe señalar, en primer lugar, que el subconstructo "razón" en estos estudios suele ser comprendido como una fracción en la función de expresar una razón, es decir, en la función de expresar el resultado de comparar multiplicativamente dos cantidades, pero no necesariamente refieren a la razón como un objeto distinto y previo a la fracción. En nuestro estudio, hemos intentado mostrar que la noción de razón constituye una forma implícita de la fracción y como tal, puede preceder a las fracciones que expresan medidas, y a las fracciones que expresan relaciones entre medidas, es decir, operadores (cabe recordar, por cierto, que el término "número *racional*", tiene su origen en el término *razón*).

Con respecto al subconstructo "cociente", hemos mostrado a lo largo del capítulo que, lejos de tratarse de un significado bien delimitado, existen distintas formas en que un cociente puede dar lugar a una fracción: por una parte está la distinción fundamental entre un *cociente medida*, que resulta de dividir una medida entre un escalar (3 unidades entre 4 = ¾ de unidad), y un *cociente escalar*, sin dimensión, que resulta de dividir dos medidas (3cm: 4cm = ¾), y que puede dar lugar a un operador. Con respecto al *cociente medida*, hemos mostrado también que éste puede ser un número fraccionario *por definición* (derivado de una razón: nL = mU → L = n/m U), o bien, si las fracciones fueron construidas previamente como partes de unidad, entonces se trataría, al menos durante un tiempo, de un cociente *calculado*.

Desde nuestro punto de vista, antes del momento en el que se dejan de lado las cantidades concretas, la fracción como cociente no existe por sí misma, está vinculada a la fracción medida, o a la fracción operador. La división "indicada", sin definición del cociente, es una razón. La definición del cociente, como medida primero y como operador después, constituye el paso de la razón a la fracción.

La presencia de la nociones de razón y operador detrás de los principales significados del número racional pone de manifiesto una importante vinculación entre la construcción de esta última noción y el desarrollo del razonamiento proporcional. Efectivamente, puede observarse una tendencia a integrar estas dos perspectivas. La expresión más clara la constituyen los estudios en didáctica realizados en el marco de la teoría de los campos conceptuales.

La teoría de los campos conceptuales

Comentamos hace un momento la tendencia a considerar progresivamente las características variables de la tarea que se plantea a los alumnos. Esta tendencia asume el carácter de necesidad primera, de punto de partida, desde la perspectiva más reciente de los estudios en didáctica. En ésta, el estudio sistemático de las situaciones con las que interactúan los sujetos es fundamental, no sólo para conocer el grado de dificultad de las mismas sino para comprender los distintos *sentidos* de un concepto, que se construyen a partir de esta interacción. La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1988: 141-160) constituye una de las aportaciones relevantes en esta dirección, al poner en primer plano la especificación de los problemas vinculados a una noción y mostrar, a partir del estudio de éstas familias de problemas, la coexistencia de múltiples nociones, así como la existencia de significados distintos para una misma noción.

El autor propone el concepto de "campo conceptual de las estructuras multiplicativas", que define como "el conjunto de todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple o múltiple y para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir". Dentro de este campo, distingue dos categorías de problemas, los "isomorfismos de medidas" y los "productos de medidas" (las revisamos ya al analizar las variantes estructurales de la situación SFR-2, en el apartado 5.1.2).

La investigación en la línea de los campos conceptuales se ha abocado al estudio de "microgénesis" de nociones de matemáticas y con ello ha hecho importantes aportaciones en la jerarquización de la dificultad de los problemas atendiendo a diferencias en el nivel de las relaciones entre los datos, de las variables numéricas y también de los contextos (el tipo de magnitudes). Ha logrado demostrar que la construcción de las relaciones multiplicativas abarca un largo período que va más allá de la educación primaria.

Esta perspectiva plantea la necesidad de estudiar de manera integral nociones que tendieron a estudiarse por separado, en particular, se considera que las operaciones de multiplicación y división, y la noción de número racional deben estudiarse en el marco amplio de la linealidad, de las relaciones proporcionales. El autor dice al respecto (Vergnaud 1988: 156-158):

> *Antes de que los niños piensen en las fracciones y las razones como números que pueden ser sumados, restados, multplicados y divididos, las comprenden como operaciones, relaciones, o cantidades.*

Y más adelante:

> *Este análisis muestra que no resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estricturas multiplicativas. Es sólo hasta que todos estos significados se sintetizan en el concepto de número racional que es posible pensar en las fracciones y las razones como puros números.*

Así, en esta línea de investigación, los estudios sobre la proporcionalidad y sobre los racionales tienden a converger. Se destacan ahora aspectos centrales de la noción de fracción cuya construcción se realiza en el seno de las relaciones de proporcionalidad. Kieren, (1988: 167), afirma, por ejemplo:

> *De la misma manera en que los números racionales reflejan fenómenos de fracturar, también tienen un carácter de proporcionalidad. Así, los números racionales, en sus diversos subcontructos, pueden ser comprendidos como estructuras multiplicativas. Esto se revela de manera particular en los subcontructos de razón y de operador. Pero (...) las nociones de operador escalar y de operador función penetran las nociones de partición y conforman la base matemática objeto/acción para la noción de equivalencia de los números racionales*

Podemos decir que la noción de razón se encuentra en el corazón del campo de las estructuras multiplicativas. Su estudio, como un *descriptor* de los racionales, en el conocimiento de los alumnos, se ubica en esta tendencia, relativamente reciente, a analizar la construcción de los racionales en el marco de las relaciones lineales o de las estructuras multiplicativas.

Cabe hacer todavía algunas observaciones: Vergnaud, y también Kieren, hablan de "fracciones y razones" como operaciones, relaciones y cantidades, previas a la noción de número racional. Nosotros hemos hecho hincapié en un punto anterior, la razón como antecedente de la noción misma de fracción.

Es verdad que ciertas acepciones de la fracción, en particular su definición como partes de unidad, a la cual subyace una composición de operadores (partir, tomar), son más distantes de la noción de razón (en tanto *relación* entre dos cantidades), y por lo tanto, en estos casos, fracciones y razones pueden verse como dos construcciones previas al racional. Hemos visto sin embargo que incluso las fracciones en su papel de expresar *medidas* pueden construirse a partir de la noción de razón, cuando la construcción se realiza a partir de la relación de conmensuración.

El análisis de situaciones que realizamos en este capítulo nos permitió reconocer también, con mayor precisión, el papel que puede jugar la noción de razón en el proceso de construcción de lo que Vergnaud llama "el operador función": hemos intentado mostrar que la construcción de este operador constituye el proceso de hacer explícito aquello que es invariante en el conjunto de razones equivalentes que se generan mediante procedimientos internos. En el caso del operador racional, este hecho es aún más evidente: la construcción de una nueva acepción para la multiplicación tiene como principal antecedente la clase de equivalencia de razones racionales.

Hemos intentado mostrar que el estudio de razones racionales no sólo cumple la función de construir un antecedente para las fracciones, sino que representa un interés por sí mismo, al permitir ampliar la gama de problemas que se resuelven con las herramientas de los números naturales, y favorecer así la comprensión y el dominio de estas últimas.

La perspectiva fenomenológica

Contra la idea de enseñar *conceptos*, enarbolada particularmente en la reforma de las matemáticas modernas de los años sesenta y setenta, Freudenthal planteó la necesidad de empezar por los fenómenos que requieren ser organizados por dichos conceptos y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular estos recursos de organización. Organizando los fenómenos, el estudiante construye, antes que conceptos, objetos mentales, que se distinguen de los primeros por ser pragmáticos y por un menor grado de formalización[2].

En su obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Situations* (Freudenthal, 1983) el autor presenta, para varias nociones matemáticas fundamentales, amplios conjuntos de fenómenos cuya *organización* requiere de dichas nociones. Dedica el capítulo 6, “Ratio and proportionality” al estudio de la noción de razón. Podemos decir que fue uno de los primeros investigadores (y de los pocos, junto con Brousseau) que prestó atención al interés didáctico de esta noción, como algo distinto de la fracción y del cociente. Al inicio de este capítulo afirma (ob.cit.,181-182):

> *El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, “a es a b como c es a d”, sin anticipar que “a es a b” puede reducirse a un número o a un valor de magnitud a/b (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud)...*

Y más adelante:

> *Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar el estatuto lógico, a costa, como ocurre, de la lucidez*

A lo largo del capítulo da cuenta de una diversidad de fenómenos relativos a la razón, desde las homotecias cualitativas en las que la noción de razón funciona en un nivel implícito e intuitivo (hablamos de éstas en el apartado 3), la comparación cualitativa de tamaños y su formulación mediante el término “relativamente”, los fenómenos relativos a la “normalización” (a los que también hicimos referencia), hasta las situaciones de escala en las que propone un estudio más explícito de la vinculación de la noción de razón con la fracción y con la función lineal.

Distingue tres categorías de fenómenos relativos a las razones: las “exposiciones”, en las que se exhibe una característica de un objeto al poner en relación otras dos características del mismo , por ejemplo, la densidad de población de un país que resulta de la relación “número de habitantes/área”; las “composiciones” que destacan el tamaño de una clase en relación a una totalidad, por ejemplo, los componentes de una mezcla, las clases por rangos de edad en que se divide una población, y, finalmente, los

[2] La fenomenología de un concepto, de una estructura o de una idea matemática significa, dice el autor, la descripción de ese *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización (Freudenthal, 1983: 2).

“constructos” que constituyen funciones entre subconjuntos, por ejemplo, las homotecias entre figuras, en el plano.

La descripción y clasificación fina de esta gama de fenómenos se alterna con sugerencias de progresiones didácticas *a grosso modo*. Éstas se caracterizan por un énfasis en el análisis cualitativo antes que el cuantitativo. Las herramientas matemáticas emergen en un proceso paulatino (sólo señalado) de formalización y algoritmización. Veamos un ejemplo de progresión didáctica sugerida:

> *Comprender histogramas como razones que preservan la razón de exposiciones y de composiciones (por ejemplo, a un rectángulo doble de alto que otro, le corresponde un país con doble superficie);*
> - *construirlos;*
> - *comprender los principios, describirlos;*
> - *reconocer la preservación de la razón como principio común; describirla;*
> - *concluir cosas como “relativamente mas...”*
>
> *Visualizaciones mediante constructos:*
> - *gráfica de la función lineal;*
> - *sombra del sol, de una lámpara.*
>
> *Para la “algoritmización”, en el contexto de la homotecia:*
> - *usar propiedades geométricas;*
> - *verificar que la composición de dos proyecciones (“mapping”) que preservan la razón (PPR), también preserva la razón.*
>
> *Tratándose de magnitudes:*
> - *la preservación de la razón se puede reconocer como un isomorfismo con respecto a la adición;*
> - *identificar la razón externa y el factor escalar;*
> - *simplificar la construcción de PPR con los principios anteriores;*
> - *comprender, describir operacionalmente dichos principios;*
> - *comprender las razones operativamente en el contexto de la aritmética con fracciones;*
> - *describir propiedades de la razón operativamente. como propiedades de fracciones;.*
> - *comprender propiedades de la razón como propiedades de la aplicación lineal.*
>
> *Y a la inversa:*
> - *comprender a las fracciones en el contexto de la razón;*
> - *comprender la aplicación lineal como una PPR.*

Como puede apreciarse, nuestro trabajo presenta coincidencias importantes con el planteamiento general de Freudenthal acerca del estatuto de la noción de razón en la enseñanza de las matemáticas elementales. Puede decirse que recuperamos un punto de partida señalado por él hace casi dos décadas. Su extensa exhibición de fenómenos constituyó, además, una materia prima valiosa para la categorización de lo que nosotros llamamos “el medio de la razón”. Cabe agregar que algunos de estos fenómenos, sobre todo los relativos al tratamiento de la información, no fueron integrados a nuestro análisis de situaciones. Constituyen, no obstante, un ámbito de la noción de razón que requiere ser estudiado.

Destaquemos ahora algunos aspectos que distinguen nuestro trabajo del acercamiento fenomenológico.

- Nuestro análisis del conjunto de situaciones que ponen en funcionamiento la noción de razón no se organizó a partir de la identificación de fenómenos, sino de una estructuración del “medio” de la razón, que consistió en identificar unas pocas situaciones fundamentales y las variables didácticas relevantes. Mediante esta estructura intentamos dar cuenta de un número importante de los fenómenos que dan lugar a un uso de la razón.
- Esta forma de proceder nos permitió identificar ciertos niveles de funcionamiento de la noción de razón en situaciones no consideradas en el repertorio de Freudenthal, situaciones que implican a otras nociones básicas de matemáticas: la de medida y las de multiplicación y división;
- Algunas de las articulaciones más importantes de la noción de razón con otras nociones están efectivamente señaladas en las progresiones didácticas esbozadas por Freudenthal, pero carecen de un análisis en términos de la forma específica en que pueden realizarse y de las características de las situaciones que pueden propiciarlas. En nuestro trabajo, hemos intentado avanzar en esta dirección.

En este punto dejaremos esta revisión. Sin ser exhaustiva, consideramos que es representativa de los diversos acercamientos, relativamente distintos al que realizamos en el presente estudio, a la problemática de la noción de razón en el aprendizaje de las matemáticas. Hemos omitido, naturalmente, los trabajos que se ubican en l misma perspectiva que el presente, la de la teoría de las situaciones didácticas, así como aquellos que se han realizado desde la teoría de la transposición didáctica, puesto que éstos forman parte del marco teórico mismo del estudio y han sido comentados en otro lugar.

# CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS RELATIVAS A LA NOCIÓN DE RAZÓN

# CONTENIDO

# NOTAS

**I** Si restringimos el significado de la noción de "razón" al caso de las magnitudes homogéneas (y por lo tanto al caso en que puede cuantificarse con un "número de veces"), como de hecho lo hicieron los matemáticos griegos, afirmaríamos entonces, categóricamente como lo hace Rouche (Rouche, 1992:212), que no existe una razón entre cantidades de tiempo y de distancia, sino únicamente entre sus medidas. Esta restricción, señala Freudenthal, y la consecuente imposibilidad de permutar "extremos y medios" en una proporción, llevó con frecuencia a los matemáticos griegos a realizar demostraciones geométricas muy complicadas. La restricción perduró mucho tiempo en la formulación de leyes físicas (ver por ejemplo la 2ª ley de Kepler "in equal times the radius vector from the Sun to a planet sweeps equal areas"), más que en el ámbito del comercio y de la técnica, en el que se admitieron antes operaciones algebraicas no geométricas y en particular razones externas. Todavía hoy, añade Freudenthal, los matemáticos puros demuestran frecuentemente poca comprensión de los cálculos con magnitudes (Freudenthal, 1983:184)

**II** Cuando las magnitudes son de distinta naturaleza, o cuando hay distintas unidades se presentan dificultades relativas a la escritura. Consideremos el siguiente problema:

*"2 lápices cuestan 6 pesos, ¿cuánto cuestan 10 lápices?.*

Resolución mediante el operador con dimensión 3p/l

**X3p/l**

| Lápices | Pesos |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 10 | <u>10 lápices X 3p/l = 30 pesos</u> |

Resolución mediante la conservación de las razones internas:

| | Lápices | Pesos |
|---|---|---|
| | 2 | 6 |
| **:2** | | |
| | 1 | 3 |
| **X10** | | |
| | 10 | <u>10 veces 3 pesos = 30 pesos</u> |

Tenemos pues dos formas de resolver el problema a las que corresponden escrituras distintas: 10 veces 3 pesos = 30 pesos y 10 lápices por 3 pesos/lápiz = 30 pesos.

En la igualdad "10 veces 3 pesos = 30 pesos" el referente "lápices" ha desaparecido. La cantidad 10 lápices da lugar, en la resolución, al factor sin dimensión "10 veces", expresión con un número de la razón entre diez lápices y un lápiz.

En la escuela primaria no suele utilizarse ninguna de estas dos escrituras. La costumbre es realizar las operaciones con números (sin indicación de unidad), y en el resultado, recuperar la unidad, frecuentemente de la siguiente manera: 10 X 3 = 30 lápices. Sobre esta costumbre, que viene al menos desde los textos de aritmética de principios de siglo Bosch comenta:

> *"La solución que adopta la aritmética clásica consiste precisamente en evitar esta dificultad mediante el paso de las magnitudes a los números ("abstractos") que las miden. De este modo, el trabajo matemático se libera de las restricciones que impone la noción de magnitud situándose en un ámbito puramente numérico.*
>
> *De ahí que toda la aritmética tradicional, aunque teóricamente fundada en la noción de magnitud, esté organizada como un sistema que gestiona hábilmente la presencia y la ausencia de las magnitudes, autorizando escrituras del tipo 15 X 12 = 180 pts que identifican un "número abstracto" con una cantidad de magnitud ("número concreto"). Estas*

> *incoherencias son el precio que se paga por evitar el problema del cálculo con magnitudes. Las magnitudes son siempre un entorno presente pero se mantiene constantemente a distancia del trabajo matemático tal y como se practica en la escuela (Bosh, 1994: 389-390)*

Estas "incoherencias" tienen consecuencias: con el abandono de las unidades en los cálculos se pierde un recurso de control sobre éstos, lo que posibilita confusiones y errores en cuanto el problema se torna un poco más complejo. Un caso común, por ejemplo, es la inversión de dividendo y divisor en cuanto el dividendo es menor que el divisor.

Sin embargo, no es fácil salvar estas "incoherencias", ni siquiera en el nivel de primaria. Volviendo al ejemplo de los lápices, la expresión "10 veces 3 pesos igual a 30 pesos corresponde bien al procedimiento más probable, pero exige hacer explícito el paso de 10 lápices a 10 veces y esto puede ser prematuro y llevar a confusión. La expresión "3 pesos por lápiz por 10 lápices = 30 pesos" recupera en mayor medida los datos del problema (los lápices no quedan fuera) pero no refleja fielmente el procedimiento en el que 10 actúa como multiplicador sin dimensión. Probablemente una de las esquematizaciones más claras en los primeros grados de la primaria sea una tabla como las que utilizamos anteriormente, en la que las magnitudes quedan indicadas en el encabezado. Ésta esquematización destaca además la presencia de los cuatro datos que están en juego, no tres, organizados en parejas de cantidades en relación: (1 lápiz, 3 pesos) (10 lápices, 10X3 pesos), aunque, nuevamente, "hemos gestionado hábilmente la presencia y ausencia de las unidades"

**III** De León y Fuenlabrada (1996) plantearon a niños de distintos grados de la escuela primaria la situación de reparto de tres barras de chocolate entre 4 niños. Observan que muy pocos niños, en sexto grado, anticipan que el resultado es ¾ de barra. La mayoría se da a la tarea de realizar los repartos.

**IV** Dávila (1991 y 1992), entre otros investigadores, muestra que los repartos de pasteles implican, a cierta edad, dificultades anteriores al uso de fracciones, desde lograr hacer particiones equitativas y exhaustivas, hasta establecer equivalencias como las siguientes: una mitad obtenida partiendo un pastel rectangular en dirección vertical tiene lo mismo que una mitad obtenida partiendo el pastel en forma horizontal, o bien: una mitad de pastel y dos cuartos de pastel son partes iguales.

**V** Solares (1999) plantea un problema en el que la cantidad que será objeto de división no es un conjunto de pasteles, sino una longitud cuya medida se expresa con unidades no convencionales: se presenta un conjunto de "robots" que, al dar todos un mismo número de pasos, avanzan distintas distancias (nuevamente, es la variante estructural 3) . Se trata de determinar el tamaño del paso de cada robot. Eventualmente, entre los robots hay uno que avanza una sola unidad, por ejemplo:

| Robot | Distancia recorrida en 5 pasos | Distancia recorrida en 1 paso |
|---|---|---|
| A | 1 unidad | |
| B | 2 unidades | |
| C | 3 unidades | |
| D | 4 unidades | |

A diferencia de lo que sucede en el reparto de pasteles, en este problema la estrategia de repartir cada unidad del dividendo entre el divisor (el número de pasos) no surge de entrada. El contexto deja sentir su influencia, ahora las unidades no están físicamente separadas, conforman una sola cantidad (no hay tres unidades, como hay tres pasteles, hay una sola longitud, que mide 3 unidades). Los alumnos desplegaron una diversidad de procedimientos relativamente grande, comenzando por las aproximaciones sucesivas: estimar una medida fraccionaria, casi siempre una fracción unitaria, iterarla y ajustarla.

A lo largo de cuatro aplicaciones de este problema, en el grupo se lograron establecer dos procedimientos más sistemáticos para dividir el recorrido entre el número de pasos. El procedimiento que se quiso propiciar consiste en considerar que un robot que avanza *m* unidades tiene un paso *m* veces mayor que el robot que avanza sólo una unidad (siempre con el mismo número *n* de pasos), por ejemplo:

| Robot | Distancia recorrida en 5 pasos | Distancia recorrida en 1 paso |
|---|---|---|
| A | 1 unidad | 1/5 |
| | X3 | X3 |
| C | 3 unidades | 3 veces 1/5 |

Es decir, *m* unidades entre *n* = *m* veces (una unidad entre *n*) = *m veces 1/n* = *m/n* de unidad. Sin embargo, este procedimiento fue puesto en marcha por muy pocos niños.

El segundo procedimiento se originó con la búsqueda de un factor de partición de las unidades que permitiera obtener un número total de partes divisible entre el divisor (número de pasos). Después de varios intentos, algunos alumnos descubren que si se parten las unidades justamente entre el número de pasos, se obtiene una cantidad de partes divisible, por ejemplo: 3 unidades entre cinco = 15/5 de unidad entre cinco = 3/5 de unidad.

Con este último procedimiento los niños logran constatar que el cociente de una división m:n es la fracción m/n de unidad, aunque no logran comprender el motivo. Éste queda oculto en la cadena de operaciones que realizan:

$$a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{(ab \div b)}{b} = \frac{a}{b}$$

**VI** Ricco identifica 4 niveles de conductas:

Reglas que no respetan la proporcionalidad

<u>Nivel O</u> : Correspondencia arbitraria que sólo respeta el orden
creciente (monotonía)
$(\forall n)\ (\forall n')\ \ n < n' \Rightarrow\ p(n) < p(n')$

<u>Nivel 1</u>: Serie numérica + 1
descubren el operador + 1 en la serie del conjunto inicial y lo aplican al conjunto final.

<u>Nivel 2</u>: Reglas compuestas de carácter aditivo o multiplicativo
Ejemplos:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 12 | |
| 4 | 16 | (12+4) |
| 5 | 26 | (20+6) |

Consideran al sujeto (4), y a la imagen del sujeto anterior (12) pero la composición aditiva o multiplicativa que realizan no hace aparecer ningún valor constante.

<u>Nivel 3</u>: Noción de constante, cuatro procedimientos de éxito:

3a) de las diferencias constantes (las cantidades de lápices varían de uno en uno, las de francos varían de 4 en 4)

3b) “hipotética” (estima un precio para un lápiz, prueba y ajusta).

3c) utiliza el operador función

3d) utiliza el operador escalar (para encontrar el valor unitario: a 3 veces menos lápices corresponden 3 veces menos francos).

y dos procedimientos de fracaso

3e) se fija el valor unitario al azar.

3f) se toma como valor unitario el elemento n (*)

del par de que se trate.

De los procedimientos del nivel tres, el b, d, e, y f conllevan una búsqueda explícita del valor unitario. En cambio, los procedimientos a y el c pueden corresponder a la identificación de regularidades numéricas, favorecida por la forma de presentar los datos. Por ejemplo, el factor “cuatro” del procedimiento (c) no significa necesariamente el precio de un lápiz. Esto explica que estos dos últimos procedimientos (a y c) puedan aparecer precozmente, constituyen los primeros procedimientos de éxito que la investigadora identifica, ya en el nivel escolar CE2 (2º, 3º de primaria).

El procedimiento 3d (“operador escalar”) es el que corresponde a la resolución canónica, por ejemplo “divido los 12 francos que costaron los 3 lápices entre 3 y encuentro 4. Es el precio de un lápiz”. Ricco lo identifica sólo en los niños más grandes, quienes cursan, atendiendo a las edades, el tercer ciclo de la primaria (5º, 6º grados).

**VII** Las divisiones con decimales.

Ya vimos en un apartado anterior que mientras la razón interna sea entera los problemas no presentan dificultades nuevas considerables, puesto que el factor que se utiliza para resolver es entero e incluso los procedimientos basados en sumas o restas iteradas pueden funcionar. Por ejemplo, en el contexto del precio de la gasolina:

| División comparación | División partición |
|---|---|
| Litros / Pesos<br>1 / 3.25<br>(·x)<br>x / 81.25 | Litros / Pesos<br>1 / x<br>(x25)<br>25 / 81.25 |
| Se puede sumar de manera iterada 3.25, o buscar por aproximaciones sucesivas el número ***x*** que por 3.25 da 81.25 | Se busca, por aproximaciones sucesivas, la cantidad de pesos que 25 veces es igual 81.50 |

Cuando la razón interna no es entera, los problemas se vuelven más difíciles. Entre estos casos pueden distinguirse aquellos en los que todavía es posible concebir una extensión de los procedimientos utilizados en los naturales, de aquellos en los que esto se vuelve muy difícil. N y G. Brousseau identifican, en un análisis sobre los problemas clásicos de división (pp. 291-293), tres variables que determinan esta posibilidad: a) el valor del divisor con respecto al valor uno y al valor dos; b) el valor del cociente con respecto al valor uno y al valor dos; c) el carácter dimensional del cociente (en la división comparación, el cociente expresa la relación entre cantidades de misma naturaleza y por lo tanto no tiene dimensión, en la división partición, en cambio, el cociente resulta de la partición de una cantidad, y por lo tanto expresa una cantidad).

Veamos primero dos ejemplos en los que las técnicas utilizadas en los naturales pueden extenderse a los racionales:

| División comparación | División partición |
|---|---|
| Litros Pesos<br>1 3.25<br>(·x)<br>x 12 | Litros Pesos<br>1 x<br>(x5.4)<br>5.4 64.80 |
| Las sumas iteras o la multiplicación por enteros llevan a:<br>3 veces 3.25 pesos = 9.75 pesos<br>4 veces 3.25 pesos = 13 pesos<br>El escalar buscado está entonces entre 3 y 4, más cerca de 4.<br>A partir de este momento, los ensayos deben realizarse con escalares decimales:<br>3.5 X 3.25 = 11.375<br>3.6 X 3.25 = 11.7, etc. | Se busca, por aproximaciones sucesivas, la cantidad de pesos que multiplicada por 5.4 es igual 64.80<br>Notemos que en este punto ya es necesario poder identificar en el problema la búsqueda de un factor. Una concepción de división "demasiado anclada en la idea de repartir" bloquearía la posibilidad de abordar este problema, ya que repartir entre 5.4 no tiene sentido (N. y G. Brousseau, ob. cit.) |

Veamos ahora, a título de ejemplo, uno de los casos que producen mayor dificultad:

División comparación (0.5L **:** 0.8L)

| Litros | Pesos |
|---|---|
| 1 | 0.8 |
| (·x) | (·x) |
| x | 0.5 |

Hay dos dificultades: un divisor (0.8) menor que uno, lo que lleva a multiplicar por cero, y un cociente menor que uno, lo que implica una multiplicación que "empequeñece".

El método de las aproximaciones sucesivas implicaría superar estos puntos difíciles:

0.8 pesos por 0.3 = 0.21 pesos
0.8 pesos por 0.6 = 0.48 pesos,
0.8 pesos por 0.7 = 0.56 pesos
0.8 pesos por 0.61 = 0.488 pesos, etc.

El método que consiste en descomponer la razón interna en lugar de intentar determinarla por aproximaciones sucesivas, ofrece un camino considerablemente más accesible y eficiente:

| Litros | | Pesos | |
|---|---|---|---|
| 1 | ← | 0.8 | |
| | | | (:8) |
| 1/8 | ← | 0.1 | |
| | | | (x5) |
| 5/8 | ← | 0.5 | |

Luego, 5/8 de litro = 0.625 litros.

Optar por este camino requiere haber adquirido el hábito de plantear los problemas multiplicativos como relaciones entre dos conjuntos de cantidades, y, nuevamente, haber desarrollado cierta destreza en el manejo de las descomposiciones de la razón interna. Por otra parte, en este camino la división “0.5 entre 0.8” queda implícita como tal, no se “ve” que se haya divido entre 0.8.

En este punto se pone de manifiesto el alcance del trabajo a nivel de las razones internas y de su descomposición: permite realizar operaciones complejas antes de conocer los algoritmos respectivos. Se manifiesta también una de las ventajas de la opción elegida por los Brousseau: no pretender hacer explícitas en este momento las multiplicaciones y divisiones con racionales, y, más adelante, definirlas como razones externas.

No obstante, he insistido en considerar el camino en el que las multiplicaciones por racionales se hacen explícitas en tanto razones internas a pesar de sus limitaciones, debido a que la noción de multiplicación por una fracción en el papel de razón externa, como aplicación lineal, constituye un tema todavía ausente en nuestros programas escolares de primaria, y esto se justifica no sólo por la falta de secuencias didácticas adecuadas, también por la necesidad de considerar la formación de los maestros que les permita comprenderlas, adaptarlas, o incluso crearlas. Sin embargo, los alumnos que egresan de la primaria deben disponer entre sus herramientas básicas de aritmética, de un conocimiento básico sobre la multiplicación por decimales, conocimiento que, para ser funcional, no debe reducirse al de los algoritmos.

**VIII** Aplicamos en un grupo de 6º grado (con un nivel relativamente bueno en matemáticas) el inicio de la secuencia de Brousseau. Se pudo comprobar que efectivamente la situación del rompecabezas permite hacer evidente que la estrategia aditiva no funciona y propicia la búsqueda de soluciones que recuperen el componente de proporcionalidad de la situación. Sin embargo, los procedimientos de solución generados por los alumnos presentan algunas diferencias con respecto a los que reporta Brousseau. La tendencia del grupo fue centrarse en el incremento de 4 a 7cm. Consideraron que las medidas deben aumentar “3 por cada 4”, esto es “0.75 de cada 1”. El divisor 4 facilitó llegar a la unidad mediante divisiones sucesivas entre dos:

a 4 cm corresponde un aumento de 3cm

a 2 cm corresponde un aumento de 1.5cm

a 1cm corresponde un aumento de 0.75 cm

Otros alumnos establecieron, a partir de la relación “por cada 4cm, 3 cm de aumento”, que el aumento es de “¾ de sí mismas”. Sin duda, la identificación del operador “3/4 de” se vio facilitada por lo familiar de la relación “3 de cada 4”.

En la segunda situación, cuando el incremento fue de 5 a 8, es decir, “3 de cada 5”, se les dificultó establecer el incremento correspondiente a 1. Un sólo alumno logró establecer que éste era “3/5 de cada medida”. La mayoría de los alumnos pasó entonces a la estrategia que consiste en buscar el valor unitario, que es la que reporta Brousseau, pero ninguno encontró que el valor unitario era de 8/5, acudieron, como era de esperar, a la división: 8:5 = 1.6.

Un equipo recurrió, desde la primera sesión, a la descomposición de la razón externa a→a’ en a→1→a’ de la que infirieron los operadores enteros “entre a” y “por a’ ”. En la segunda sesión lograron justificarlo: *“Es como hacer primero la escala 5→1 y después la escala 1→8, necesitamos la escala de uno para luego pasar a la que quieras”.*

Finalmente, un alumno logró hacer explícito en la segunda sesión el operador constante: **8/5 de** y, aún más, lo relacionó con las soluciones aportadas por sus compañeros, con la descomposición del operador externo, “8/5 de” es lo mismo que dividir entre 5 y multiplicar por 8 y, con el incremento: “8/5 de” es lo mismo que una vez la medida más 3/5 de la medida.

Estos resultados sugieren que si los alumnos saben determinar qué fracción de una cantidad es otra cantidad, un camino para introducir la noción de operador fraccionario podría ser el paso por la fracción “a’/a de”.

**IX** En la secuencia de N y G Brousseau, a partir de la definición explícita de la multiplicación por una fracción a/b como la aplicación 1→a/b:

- se establecen los algoritmos para multiplicar fracciones por fracciones y decimales por decimales (ya se habían utilizado implícitamente mediante procedimientos internos);

- se aborda una variedad amplia de problemas en distintos contextos, en los que los alumnos identifican la relación en juego, ahora como una multiplicación por un racional;

- se estudian aplicaciones entre cantidades de misma naturaleza y de distinta naturaleza, o distinta unidad (por ejemplo, X1.3 m/kg, X100m/cm);

- los alumnos aprenden a expresar una aplicación en términos de una fracción de una cantidad, y, a la inversa, a interpretar fracciones de una cantidad como operadores multiplicativos: “a/b de” significa Xa/b, es decir, la aplicación que a 1 asocia a/b.

Cabe señalar que la fracción “a/b de”, por ejemplo, en el problema “para preparar mermelada la cantidad de azúcar debe ser **¾ del peso** de la fruta”, no se interpreta todavía como la composición de operadores (:4) (x3), sino como la aplicación 1→3/4, o directamente X3/4. La interpretación como composición de operadores se deja para un momento posterior, cuando las operaciones sobre aplicaciones devienen objeto de estudio. Los autores argumentan que una ventaja de aplazar la interpretación clásica en términos de “partir entre 4, tomar 3”, es evitar una interpretación demasiado concreta que resulte poco acorde en ciertos contextos, por ejemplo, cuando la partición no puede llevarse realmente a cabo, o cuando la fracción es mayor que la unidad (tomar 5/4 de una cantidad).

La secuencia continua con el estudio de situaciones que implican dividir entre números racionales. En un primer momento, se trata de problemas del tipo “partición” o “comparación” que pueden reducirse a la búsqueda de un factor desconocido en una multiplicación (los procedimientos son fundamentalmente internos; mencionamos ya algunos ejemplos en la nota VII). Enseguida, se estudia la división *en* una aplicación lineal, como recurso para: encontrar un valor unitario; para encontrar el valor de una razón interna, o, finalmente, para determinar la regla de correspondencia, es decir, el operador constante.

Esta fase culmina con el estudio de la división *como* aplicación lineal, el cual consiste, más que en resolver problemas, en responder a preguntas de índole más propiamente matemático, en particular a la pregunta: ¿es la división una aplicación lineal? Resulta sorprendente constatar las posibilidades que los niños han logrado desarrollar hasta el punto de poder problematizar de esta manera las herramientas mismas que han venido construyendo. Dicen los autores (N. y G. Brousseau, 1987: 305-306):

> *(...) preguntarse si “dividir entre 8” es una aplicación lineal constituye un problema totalmente diferente a realizar un cálculo o incluso a utilizar esa concepción. Preguntarse si “existe una división equivalente a multiplicar por 5/8” exige una madurez matemática y una curiosidad intelectual de las que los alumnos son totalmente capaces pero que se utilizan y se desarrollan poco en la escuela elemental y, sin embargo, se exigen después, en la secundaria, demasiado tarde y de manera brusca.*

En una etapa posterior, se trabaja con la composición de operadores enteros “multiplicar” y “dividir” y se establece que **(Xb)o(:a)** es equivalente a **Xb/a** (situación de los pantógrafos).

X3 :2

1 3 3/2

X3/2

Finalmente, la secuencia tiende a dejar atrás las medidas para centrarse en la composición de operadores fraccionarios, lo que da lugar a la multiplicación y división de fracciones en tanto operadores multiplicativos.

- X Aplicamos en un grupo de quinto grado una situación que planteaba lo siguiente: un grupo de agricultores, dueños de parcelas de distintos tamaños, necesitaban ponerse de acuerdo en una forma de cooperar para construir un canal de riego para beneficio de todos. En la situación se mostraba a los alumnos que la solución que consistía en que todos los agricultores aportaran la misma cantidad resultaba injusta para los dueños de parcelas pequeñas cuyo producto anual era mucho menor que el de los otros, y, además, tenía la desventaja de que la producción podía ser muy buena unos años y muy mala en otros (se les proporcionaron los datos de la producción de cada agricultor, para dos años). Se les pedía entonces proponer formas de cooperación más justas. El problema era muy abierto, en el sentido de que no se especificaba la cantidad total que se necesitaba.

  La mayor parte del grupo (de 30 alumnos) propuso cantidades específicas por agricultor y por año, ciertamente mayores entre mayor fuera la producción, y acotadas por consideraciones pertinentes como "no pueden dar mucho porque necesitan para comer..." Solamente dos alumnos propusieron reglas de correspondencia lineales, las cuales se limitaron a "la mitad" y "la cuarta parte".

  Es en este sentido puede asumirse como objetivo que la comprensión de la linealidad incluya también la capacidad de proponer las reglas de correspondencia lineales que han venido utilizando, tales como "a por cada b", "a/b de", o "a% de".

# CAPÍTULO 2 EXPLORACION DE PROCEDIMIENTOS Y CONCEPCIONES

# CONTENIDO

# 1) INTRODUCCIÓN

## 1.1) El propósito

En el Capítulo 1 destacamos tres formas de aprehender aquello que es invariante en una relación lineal, al resolver las distintas variantes de la situación fundamental de reproducción de una razón (SFR-2) y la situación fundamental de comparación de razones (SFC). Recordémoslas brevemente:

- mediante la conservación la suma (CS) o de las razones internas (CRI). Estas operaciones permiten generar conjuntos de razones externas equivalentes:
  (a, a’) = (a+a, a'+a') = (na,na’) = (a/n, a’/n), n natural distinto de cero.
- mediante el valor unitario constante (VU), el cual se obtiene a partir de un trabajo a nivel de las razones internas: (a, a’) = (1, a’/a)
- mediante el operador constante que relaciona a todos los elementos del primer conjunto con los del segundo conjunto (OP). Constituye la forma más general y a la vez más compleja de dar cuenta de la constancia: (a, a’) = X a’/a

A partir del análisis de situaciones mostramos que las razones equivalentes (a, a'), (na, na'), que se generan mediante los procedimientos internos (CS y CRI), pueden constituir, en el aprendizaje, un antecedente de los números que las cuantifican (a'/a). Al mismo tiempo, estudiamos la forma en que distintas características de los problemas pueden influir en la elección de un tipo de procedimiento en lugar de otro y en el grado de dificultad para usarlo. En dicho análisis consideramos, cada vez que fue posible, resultados de estudios empíricos ya realizados.

<u>Nos proponemos ahora identificar nuevos elementos que apoyen o cuestionen aspectos específicos de las dos consideraciones anteriores, mediante un análisis de resoluciones de alumnos de primaria a un conjunto de problemas que son variantes de las situaciones SFR-2 y SFC.</u>

Más precisamente, buscamos elementos que ayuden a responder las preguntas que plantemos a continuación. Éstas constituyen formulaciones más precisas de algunas de las preguntas iniciales con las que abrimos la problemática en la introducción general.

1. La noción de razón constante entre dos conjuntos de cantidades, expresada mediante un conjunto de pares de cantidades, ¿ constituye para los alumnos una “estrategia de

base"[1] para manejar relaciones racionales previa a la utilización de números no enteros?

2. Las siguientes variables en los problemas de valor faltante y de comparación[2]:
   - naturaleza entera o no entera de las razones internas y externas;
   - naturaleza igual o distinta de las magnitudes en relación;
   - la constancia de la razón externa se expresa mediante una regla de correspondencia "x por cada y", mediante la evocación de valores unitarios iguales, o no se expresa,

   ¿propician formas distintas de utilizar la noción de razón, como conjunto de parejas ordenadas de cantidades, como valor unitario constante, y como factor constante?

Nos interesamos particularmente en aquellos problemas que pueden abordarse con conocimientos iniciales de multiplicación y división de números naturales, previamente a la utilización de fracciones. Por lo tanto, la población a la que nos dirigimos está formada por alumnos que cursan los cuatro últimos grados de la educación primaria (niños entre 8 y 11 años de edad).

### 1.2) Recurso metodológico de exploración

Optamos por aplicar a una muestra pequeña de niños, 13 en total, de manera individual, un conjunto relativamente grande de problemas, por los siguientes motivos:

- Nos propusimos identificar diferentes formas de poner en juego la noción de razón en una variedad de condiciones derivadas de las variables que identificamos como pertinentes en el análisis de situaciones. Esto nos llevó a plantear un número de problemas considerable: 25.
- Por otra parte, optamos por la modalidad de la entrevista individual debido a la necesidad de contar con información precisa acerca de los procedimientos empleados, lo cual requiere, además de la observación minuciosa, de la posibilidad de interactuar con los niños para obtener información adicional acerca de lo que hacen y dicen.

[1] Ver capítulo 1, "Conceptos preliminares de didáctica".
[2] Para distinguir los problemas de las situaciones fundamentales mismas, recuperaremos aquí los nombres más conocidos de "problemas de valor faltante" y problemas de comparación", respectivamente.

Por lo tanto, esta parte del estudio también es de tipo cualitativo: pretende conocer con cierta profundidad la influencia de determinadas variables sobre los procedimientos de un grupo pequeño de alumnos, e inferir la presencia de formas distintas de poner en obra la noción de razón.

### 1.3) Las variables de los problemas

Mediante las variables que precisamos a continuación se generaron los 25 problemas que se aplicaron (12 de valor faltante, 13 de comparación).

*1) Naturaleza numérica de las razones interna y externa*

Decimos que las razones internas o externas son enteras (E) cuando el número que las cuantifica es entero, y son no enteras (NE) en el caso contrario. Consideramos los cuatro casos posibles:

| Razón externa | Razón interna |
|---|---|
| E | E |
| E | NE |
| NE | E |
| NE | NE |

En los problemas de comparación, “razón externa entera” significa que por lo menos una de las dos razones externas que se dan es entera, lo mismo para “razón interna entera”[3].

En algunas partes del análisis se distinguen, además, las razones que corresponden a fracciones unitarias (1/E), y las razones del tipo n/2, que facilitan su descomposición “sacando mitad” n/2 = (:2) (xn).

*2) Variables relativas al contexto*

- Consideramos la variable “magnitudes de distinta naturaleza (razón heterogénea) o magnitudes de misma naturaleza (razón homogénea)”. En todos los casos se consideraron magnitudes y contextos que fueran familiares para los niños. En la mayor parte de los casos, las magnitudes son discretas.
- Por otra parte, la constancia de la razón se expresa explícitamente mediante una regla de correspondencia del tipo “x por cada y”, por ejemplo, “te dan 2 naranjas de cada 6”,

[3] Recordemos que decimos "razón entera" para abreviar. Nos referimos a que el número que cuantifica a la razón es entero.

o bien se expresa mediante la evocación, explícita o implícita de valores unitarios iguales, por ejemplo, “a los niños les toca la misma cantidad de pastel”, o, por último, se deja implícita, lo cual ocurre sólo en tres problemas, dos de escala y uno sobre una receta de cocina.

A continuación se da la lista de magnitudes en relación con las formas de expresión de la razón:

De distinta naturaleza o distinta unidad:

- Cajas, chocolates
  contexto: agrupamientos.
  Expresión en el texto de la razón externa constante: misma cantidad de objetos por grupo.
- Pasteles, niños
  contexto: reparto
  Expresión en el texto de la razón externa constante: misma porción por niño
- Canicas, precio
  contexto: compra venta
  Expresión en el texto de la razón externa constante : *n* pesos por cada *m* canicas
- Saltos, varas (misma naturaleza pero unidades distintas)
  contexto: medición de longitudes,
  Expresión en el texto de la razón externa constante: mismo tamaño de los saltos
- Ingredientes, personas
  contexto: receta de cocina
  Expresión en el texto de la razón externa constante: implícita

De misma naturaleza:

- Naranjas, naranjas
  contexto: pago en especie (relación parte todo)
  Expresión en el texto de la razón externa constante: “n naranjas por cada m”
- Estampas nuevas, estampas viejas (ambos tipos de objetos son estampas, aunque presentan una diferencia cualitativa, "nuevas", "viejas")
  contexto: trueque
  Expresión en el texto de la razón externa constante: “n estampas viejas por cada m estampas nuevas”
- Centímetros, centímetros
  contexto: escala,
  Expresión en el texto de la razón externa constante: misma forma.

### 1.4) Características que no son variables

En el estudio dejamos de lado otras características de los problemas que tienen un efecto en el grado de dificultad de los problemas:

1. El tamaño de los números:
   Los números que expresan a las cantidades en relación por lo general son pequeños (menores que 30), considerando la edad de los niños.
2. Tipo de números:
   Las cantidades son siempre números naturales
   En los casos de razón externa no entera, el uso de los procedimientos “valor unitario” u “operador externo”, implican cantidades no enteras, pero existe siempre un procedimiento alternativo (conservación de la suma o de las razones internas) que permite una resolución con números naturales.
3. Número de datos en relación:
   Son siempre cuatro, excepto en los problemas de escala y receta.

### 1.5) Los problemas

En las tablas 1 y 2 se presentan las principales características de los problemas. Los números de los problemas corresponden al orden en que fueron resueltos (más adelante comentamos este punto). En el anexo 3 se presenta la lista de problemas.

Puede observarse que, en conjunto, se abarcan todos los valores de las variables consideradas. No obstante, no hay necesariamente un problema para todo cruce de las tres variables y, en algunos casos, hay dos o tres problemas en una misma celda. Esto se debe a que hicimos una selección de los casos considerando el interés que presentan para los fines de este estudio. Algunos de los criterios fueron los siguientes.

- Carácter numérico de las razones

Nos interesaron principalmente las resoluciones en las que se utilizan números enteros, por lo cual hay pocos problemas de valor faltante con ambas razones no enteras. Los únicos dos problemas que se proponen con esta última característica pueden resolverse con números enteros mediante la descomposición de una de las razones, pero este procedimiento puede ser difícil. En el caso de los problemas de comparación hay más casos con esta característica porque, como veremos, para estos problemas hay un mayor número de alternativas de solución que evitan el uso de fracciones.

**Tabla 1.1**
**Características de los problemas de valor faltante**

| | | Magnitudes de distinta naturaleza | | | Magnitudes de misma naturaleza | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Razón externa | Razón interna | Evoca valores unitarios iguales | "x por cada y" | La constancia no se expresa | "x por cada y" | La constancia no se expresa |
| E | E | 3b | | | | |
| | NE | 3<br>14 | | 17 | | 22 |
| NE | E | 12<br>13<br>15 | 7 | | 21 | |
| | NE | 16 | | | | 23 |

características de los problemas   número de problema
**E**: Entera; **NE**: No entera

**Tabla 1.2**
**Características de los problemas de comparación**

| | | Magnitudes de distinta naturaleza | | Magnitudes de misma naturaleza |
|---|---|---|---|---|
| Razón. Externa | Razón Interna. | evoca valores unitarios iguales | x por cada y | x por cada y |
| E | NE | | 8 | 20-b |
| 1/E | E | 11 | 4 | |
| | NE | 11-b | | 19 |
| NE | E | 11-c | | 18 |
| | NE | | 5<br>6 | 20 |

características de los problemas   número de problema
**E**: Entera; **1/E** fracción unitaria; **NE**: No entera

En contra parte, nos interesaron especialmente los problemas en los que una razón es entera mientras que la otra no lo es: constituyen el caso favorable, en principio, al desarrollo de procedimientos en los que se logran manejar relaciones racionales desde los números naturales. Por ello, la mayor parte de los problemas de valor faltante tienen esta característica.

- Naturaleza de las magnitudes y la manera de expresar la constancia de la razón

En los problemas de valor faltante más comunes en la enseñanza y en la vida cotidiana, las magnitudes son de distinta naturaleza y se evoca la igualdad de valores unitarios. Por esta razón se utilizó este grupo para estudiar todos los valores de la variable “carácter numérico de las razones”, y también algunas variables no numéricas adicionales que se precisarán en su momento.

Por otra parte, en los problemas de comparación se descartó el valor “la constancia de la razón no se expresa“ por considerar que era suficiente con estudiar este caso (difícil) en los problemas de valor faltante.

### 1.6) Piloteo del conjunto de problemas y determinación de los grados escolares

El conjunto de problemas se piloteó mediante cuatro entrevistas (un alumno de tercer grado, uno de cuarto, uno de sexto y uno de primero de secundaria) y, posteriormente, mediante una aplicación colectiva bajo la forma de prueba con lápiz y papel a un grupo de 36 alumnos de sexto grado de primaria.

El piloteo permitió además de realizar algunas correcciones, decidir la composición de la muestra. Se pudo comprobar el hecho, ya observado en varios estudios, de que al término de la primaria los alumnos en general se han apropiado poco de las fracciones de manera funcional, y esto es aún más evidente en el caso en el que la fracción toma el papel de operador multiplicativo. Aunque en ciertos casos los alumnos de sexto (y también el de secundaria) utilizaron fracciones o decimales, en general mostraron dificultades y tendieron a resolver los problemas con las herramientas de los números naturales. Por esta razón, se decidió incluir a los alumnos sexto grado en el grupo de entrevistados.

Se consideró, por otra parte, que la mayoría de los problemas resultarían demasiado difíciles para los alumnos de tercer grado, quienes llevan poco tiempo de estudio de la multiplicación. Se optó entonces realizar esta parte del estudio con alumnos de 4º a 6º grados, y la parte siguiente, el estudio de experiencias de ingeniería didáctica, con alumnos de 3º a 5º grados.

La conformación de la muestra con alumnos de tres grados escolares y no de uno sólo obedeció al interés de conocer en qué medida la mayor experiencia en la resolución de problemas multiplicativos de los alumnos más grandes con respecto a los más chicos, se vería reflejada en el tipo de procedimiento que eligen. No se esperaban diferencias importantes en el grado de utilización de fracciones, debido al nivel de desempeño generalmente bajo con estos números, pero sí ciertas diferencias en la frecuencia y en la forma de utilización de la multiplicación y la división con números naturales.

### 1.7) Conformación del grupo de niños entrevistados

El grupo de alumnos entrevistados quedó conformado por 13 alumnos: 4 alumnos de 4º grado; 3 alumnos de 5º grado; 6 alumnos de 6º grado

Los trece alumnos provienen de diferentes escuelas de la ciudad de México[4]. Once de ellos fueron seleccionados de la siguiente manera: se pidió a la maestra del grupo que sobre su lista de alumnos clasificara a aquellos que, según su criterio, tuvieran un desempeño alto, medio y bajo en matemáticas. Cada vez se escogió al azar un alumno o alumna clasificado como “medio”.

Los otros dos alumnos (Mig, 4º grado y Mar, 6º grado, de escuelas particulares) no fueron seleccionados como los otros, se trata de alumnos conocidos con quienes pudimos trabajar durante el período vacacional. Se consideraron en el conjunto de entrevistas que fue objeto de análisis, debido a que los problemas que resolvieron fueron prácticamente los mismos, el nivel de desempeño en general fue similar al de los otros alumnos entrevistados y, sobre todo, debido a que uno de ellos presentó ejemplos particularmente explícitos de tendencias observadas en el conjunto.

### 1.8) La aplicación de los problemas

*El documento de trabajo de los alumnos y el orden de resolución de los problemas .*

El conjunto de problemas se presentó en un documento que contiene un problema por página, redactado bajo la forma de un texto con preguntas, sin dibujos ni esquemas. El orden en el que se presentan los problemas está determinado únicamente por los

[4]Escuelas públicas y una escuela de un sindicato.

contextos, es decir, vienen juntos los problemas sobre reparto, sobre compra venta, sobre escala, etc. Con ello se buscó que el esfuerzo por comprender el contexto y la trama de relaciones implicadas tuviera que realizarse una sola vez en cada contexto. Esto también permitió abreviar la cantidad de texto, puesto que para un solo contexto se plantean diversas preguntas independientes.

Al mismo tiempo, esta distribución ayudó a evitar que los problemas que se pueden resolver de manera óptima con un mismo procedimiento quedaran juntos: por ejemplo, los problemas de valor faltante en los que el valor unitario constituye el procedimiento idóneo están dispersos a lo largo del conjunto de problemas.

Cuando en un mismo contexto hay problemas de valor faltante y de comparación, los de comparación se plantearon siempre primero, para evitar que las resoluciones a estos últimos fueran influidas por las resoluciones de los de valor faltante (los problemas de valor faltante pueden sugerir, por ejemplo, el uso del valor unitario, mientras que en los de comparación puede haber otras alternativas).

Por lo tanto, no hay un orden de presentación de los problemas relativo al grado de dificultad, ni a las variables consideradas.

*Forma de aplicación*

Los problemas se aplicaron en sesiones individuales con cada entrevistado. Al inicio de la sesión, se platicó un momento con él para propiciar, en la medida de lo posible, un ambiente inicial de cierta confianza. Le explicamos el propósito del trabajo, subrayando que no se trataba de una evaluación escolar, e insistimos en que, para resolver los problemas, estaban permitidos todos los recursos, por ejemplo, contar con los dedos, hacer cuentas escritas o hacer dibujos en los espacios en blanco o en las hojas adicionales previstas para ello.

Posteriormente se le fue entregando hoja por hoja. El entrevistador leyó en voz alta y pausada cada problema. Sus intervenciones, a partir de este momento, dependieron de lo que el niño hiciera y fueron en general de dos tipos:

1) Para obtener información acerca de la resolución, por lo general al término de ésta, aunque, en ocasiones, sobre todo cuando la resolución se alargaba, durante la misma (¿cómo supiste tal? ¿de donde viene tal número, o qué significa? ¿por qué haces esa operación? etc.)

En los problemas de comparación en los que la respuesta no es numérica y consiste simplemente en escoger una de dos opciones, algunas veces, cuando los niños no expresaban muy claramente los motivos que los llevaron a una elección, o cuando parecía que, aunque hubieran acertado, sólo consideraron una variable, se plantearon preguntas adicionales como: ¿y si aquí se vendieran las canicas a tanto por tanto, seguiría siendo más barato?

2) Para ayudar, en caso de bloqueo: cuando los niños permanecían en silencio largo rato frente a una pregunta, o llanamente decían "a ésta no lo entiendo", se procedió a releer el problema, o a repetirlo con otras palabras, tratando de poner al niño en la situación (imagínate que tú...). frecuentemente se les sugirió que hicieran una representación con dibujos (¿porqué no dibujas las 4 cajas?... ahí están los 20 chocolates...).
   Algunas veces, cuando el entrevistado confundía los datos, o reducía el problema (por ejemplo, al considerar el valor dado como valor unitario), se le dejaba terminar de resolver y después se le hacía notar la confusión: "oye, pero aquí no dice que cada caja tenga 20 chocolates, sino las cuatro cajas...".

*Duración de las entrevistas*

El tiempo que tomó a los distintos niños resolver los problemas fue muy variable, de 30 minutos a dos horas, la mayoría tardó alrededor de una hora. Las sesiones de trabajo fueron de máximo 50 minutos, o menos cuando los niños se mostraban cansados. La continuación de una entrevista se hizo al día siguiente o dos días después.

## 1.9) El registro

Todas las sesiones fueron registradas con grabadora. Los protocolos se redactaron a partir de las grabaciones de las sesiones y de los apuntes tomados durante las mismas (tiempos, gestos, etc.). Los protocolos incluyen las hojas de trabajo de los niños.

## 2) Los problemas de valor faltante

Realizaremos el análisis en tres niveles, considerando características de los problemas y de los procedimientos cada vez más específicas:

2.1) Efectos de la variable numérica “razones enteras o no enteras” en la elección de un procedimiento.

2.2) Efectos de algunas variables no numéricas en la elección de un procedimiento.

2.3) Efectos de otras variables no numéricas en el grado de dificultad de los procedimientos.

### *2.1) Efectos de la variable “razones enteras o no enteras” en la elección de un procedimiento*

Los doce problemas derivados de la SFR-2, se pueden dividir en tres grupos, según si las razones internas y externas son enteras o no:

primer grupo: razón externa entera (5 problemas);
segundo grupo: razón externa no entera, razón interna entera (5 problemas);
tercer grupo: ninguna razón entera (2 problemas);

En las tablas 2.1 y 2.2, se indican las frecuencias de uso de cada tipo de procedimiento en cada problema, tanto para los 13 niños entrevistados como para los 36 niños del grupo de sexto grado a quienes se aplicó el conjunto de problemas bajo la forma de prueba con lápiz y papel. Los problemas redactados pueden consultarse en el anexo 3.

Puede observarse que en las resoluciones a estos doce problemas los niños muestran cierta flexibilidad en la elección del procedimiento, tienden a escoger aquél que les permite trabajar con números naturales:

- En los cinco problemas con razón externa entera, predomina el recurso al valor unitario (VU), excepto en el problema 22, de escala, en el se cuantifica y se aplica la razón externa (OP).

  El recurso a la conservación de la suma o de las razones internas (I) aparece, en menor proporción que el del valor unitario, en el problema 3b, en el que la razón interna también es entera, y en el 17, de la receta.

- En los cinco los problemas con razón externa no entera, pero razón interna entera, predomina el recurso a la conservación de la suma o de las razones internas (I), con excepción del problema 15.
- Finalmente, en los dos problemas en los que ninguna de las dos razones son enteras, los procedimientos se diversifican y hay un aumento considerable de procedimientos incorrectos, entre los que se encuentran los de tipo aditivo.

Así, se manifiesta la siguiente relación entre las características de las razones (enteras, no enteras) y el tipo de procedimiento utilizado con más frecuencia:

| | | |
|---|---|---|
| Razón externa entera y razón interna NO entera | → | Valor unitario (VU)<br>Operador (OP) |
| Razón externa NO entera y razón interna entera | → | Conservación de la suma o de las razones internas (I) |
| Las dos razones NO enteras | → | Mayor presencia de procedimientos aditivos (AD) |

Es necesario, sin embargo, matizar esta correlación debido a la influencia de otras variables. Como veremos más adelante, en varios de los problemas del segundo grupo, además de haber una razón interna entera, la constancia de la razón se formula mediante una regla de correspondencia del tipo "n por cada m" y esta formulación contribuyó de manera particular el recurso a los procedimientos internos (I). Por otra parte, la correlación anterior señala sólo la tendencia dominante, los casos divergentes dan cuenta de la influencia más sutil de las otras variables.

Por ello, para ser más precisos, la conclusión debe formularse de la siguiente manera:

<u>Bajo ciertas condiciones</u> que se precisarán más adelante, los niños optan, entre los procedimientos I; VU y OP, por aquél que les permite trabajar con números naturales.

**Tabla 2.1**
**Resultados por procedimiento**
**(Entrevistas: 11 a13 alumnos de 4º, 5º y 6º)**

| | | PROCEDIMIENTOS | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Problemas | VU | I | OP | R | AD | Total Aciertos | Total errores |
| RE E | 03<br>(4c, 20ch)<br>(7c, x) | **12/13** | | | 1/13 | | 12/13 | 1/13 |
| | 03b<br>(3c, 15g)<br>(9c, x) | **6/11** | 4/11 | | 1/11 | | 10/11 | 1/11 |
| | 14<br>(3s, 12v)<br>(5s, x) | **12/13** | | | 1/13 | | 12/13 | 1/13 |
| | 17<br>(4p,8t,120g,1200g)<br>(6p, x ,y, z) | **7/13** | 2/13 | 1/13 | 1/13 | 2/13 | 9/13 | 4/13 |
| | 22<br>(4cm, 6cm, 8cm, 12cm)<br>(8cm,...) | | | **9/13** | | 4/13 | 9/13 | 4/13 |
| RE NE<br>RI E | 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 1/13 | **12/13** | | | | 13/13 | |
| | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 3/13 | **7/13** | | 2/13 | 1/13 | 8/13 | 5/13 |
| | 15<br>3s, 5v<br>12s, x | 4/13 | **7/13** | | | 2/13 | 9/13 | 4/13 |
| | 7<br>4c, 3p<br>12c, x | | **13/13** | | | | 13/13 | |
| | 21<br>10n, 4n<br>70n, x | | **13/13** | | | | 13/13 | |
| RE NE<br>RI NE | 16<br>4s, 6v<br>6s, x | **7/13** | 2/13 | | | 4/13 | 6/13 | 7/13 |
| | 23<br>(4cm, 6cm, 8cm,12cm)<br>(6cm... | | | 2/9 | | **7/9** | 2/9 | 7/9 |

**VU**: valor unitario; **OP**: Cuantificación de la razón externa y uso de la misma como operador; **I**: Conservación de la suma o de las razones internas; **R**: Reinterpretación del problema, reduciéndolo a uno más simple; **Ad**: procedimiento aditivo.

Notas: En varias ocasiones los niños empezaron con un procedimiento y sobre la marcha lo cambiaron. En este conteo consideramos únicamente el último procedimiento utilizado.
El problema 23 sólo se planteó a quienes resolvieron bien el 22.

**Tabla 2.2**
**Porcentajes por procedimiento y por acierto/error**
**32 a 36 alumnos de 6º**

| | Problemas | VU | I | OP | R | AD | Otros | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PROCEDIMIENTOS | | | | | | | |
| RE E | 03 (4c, 20ch) (7c, x) | **30/36 83%** | | | 4/36 11% | | 2/36 6% | 83% | 17% |
| RE E | 03b (3c, 15g) (9c, x) | **19/32 60%** | 6/32 19% | | 1/32 3% | | 6/32 19% | 91% | 9% |
| RE E | 14 (3s, 12v) (5s, x) | **29/32 91%** | | | 1/32 3% | | 2/32 6% | 87% | 13% |
| RE E | 17 (4p,8t,120g,1200g) (6p, x ,y, z) | **13/32 41%** | 7/32 22% | | 2/32 6% | 2/32 6% | 8/32 25% | 59% | 41% |
| RE E | 22 (4cm, 6cm, 8cm, 12cm) (8cm,...) | | | **25/32 79%** | 4/32 12% | 1/32 3% | 2/32 6% | 78% | 22% |
| RE NE Y RI E | 12 1p, 4n x, 16n | 3/36 8% | **19/36 53%** | | 1/36 3% | | 13/36 36% | 92% | 8% |
| RE NE Y RI E | 13 3p, 4n x, 16n | 4/36 11% | **14/36 39%** | | 4/36 11% | | 14/36 39% | 61% | 39% |
| RE NE Y RI E | 15 3s, 5v 12s, x | **15/32 47%** | 13/32 41% | | 2/32 6% | | 2/32 6% | 72% | 28% |
| RE NE Y RI E | 7 4c, 3p 12c, x | | **29/36 81%** | | 3/36 8% | | 4/36 11% | 83% | 17% |
| RE NE Y RI E | 21 10n, 4n 70n, x | | **29/32 91%** | | 1/32 3% | | 2/36 6% | 81% | 19% |
| RE NE Y RI NE | 16 4c, 6p 6c, x | **21/32 66%** | 7/32 22% | | | | 4/32 12% | 72% | 28% |
| RE NE Y RI NE | 23 (4cm, 6cm, 8cm,12cm) (6cm... | | 1/32 3% | | 4/32 12% | **20/32 63%** | 7/32 22% | 16% | 84% |

- Los problemas se aplicaron en dos sesiones, a la primera asistieron 36 alumnos, a la segunda 32.
- En la columna de "otros", se consignan los procedimientos que no pudimos identificar.

### Nivel de dificultad de los problemas.

Todos los problemas que se plantean pueden resolverse mediante un trabajo con números naturales. Se esperaba que presentaran cierta dificultad a los alumnos de 4º grado, quienes llevan poco tiempo estudiando problemas multiplicativos, y poca dificultad a los alumnos de 6º grado, quienes ya estudian este tipo de problemas con números más grandes e incluso fraccionarios y decimales.

Este supuesto se confirmó para algunos de los problemas, pero no para todos. Puede observarse, en las dos últimas columnas de la tabla 2.2, que seis de los doce problemas no fueron resueltos correctamente por el 20% o más de los 36 alumnos de sexto a quienes se aplicó el conjunto de problemas:

- en el grupo de problemas con razón externa entera, el 17, de la receta, con 41% de errores y el de escala con 22% de errores;

- en el grupo de problemas con razón externa no entera pero razón interna entera, el 13 de reparto de pasteles, con 39% de errores y el 15 de conmensuración de longitudes con 28% de errores.

finalmente, los dos problemas en los que ninguna de las dos razones es entera:

- el 16, de compra venta, con 28% de errores, y de manera particular, el 23 de escala, con 84% de errores.

Los mismos seis problemas fueron los más difíciles para el grupo de niños entrevistados. Las dificultades tendieron a manifestarse más en el grupo de 4º cuarto grado, como puede verse en el siguiente cuadro.

| | Número de errores de procedimiento | En el problema |
|---|---|---|
| 6º grado: Pedro, Manuel | Entre 0 y 1 | 23 |
| 6º grado: Nancy, Brenda<br>5º grado: Julio, Alberto, Adriana | Entre 2 y 3 | 23, 16, y otro |
| 6º grado: Mariana y Francisco<br>4º grado: Itzel, Arturo, Miguel, Verónica | Entre 4 y 6 | 23, 16, y otros |

Así, los problemas del tercer grupo: 23 y 16 (ambas razones no enteras) no son los únicos difíciles. Las diferencias en grado de dificultad al interior de cada grupo de problemas remiten esta vez a los contextos de los problemas, es decir, a las magnitudes que se ponen en relación y la forma en que se formula esta relación.

Analizaremos estas diferencias en los apartados siguientes, por grupo de problemas. En este análisis, consideraremos principalmente las resoluciones de los niños entrevistados.

## *2.2) Efecto de las variables no numéricas en la elección de un procedimiento*

En cada uno de los tres grupos que destacamos en el apartado anterior (razón externa entera; razón externa no entera pero interna entera; ninguna razón entera), más allá de las tendencias identificadas, es posible observar una influencia de las variables no numéricas en la elección misma de un procedimiento. Esto es lo que revisaremos ahora, para cada uno de los tres grupos de problemas.

### 2.2.1) Primer grupo: razón externa entera.
### Efecto de la variable “magnitudes de misma o distinta naturaleza”

Razón externa entera

| Magnitudes o unidades distintas | | | | Misma magnitud y misma unidad |
|---|---|---|---|---|
| Agrupamiento | | Conmensuración | Receta | Escala |
| 03 | 03b | 14 | 17 | 22 |
| 4c→20ch<br>7c→x | 3c→15g<br>9c→x | 3s → 12v<br>5s→ x | 4p→(8t,120g,1200g)<br>6p→(x ,y, z) | 4cm→ 8cm<br>6cm→x<br>8cm→y<br>12cm→z |

Los datos de la tablas 2.1 y 2.2 que vimos anteriormente muestran que en los cuatro problemas con magnitudes o unidades distintas (03, 03b, 14 y 17), el procedimiento dominante fue VU, mientras que el procedimiento OP apareció únicamente en el problema de escala, en el que las magnitudes y unidades son iguales (22) y, por lo tanto, el operador no tiene dimensión.

Los procedimientos internos (I: conservación de la suma o de las razones internas) aparecen, con menor frecuencia que VU, en el problema 03b con una razón interna entera y, muy poco, en el problema de la receta, el 17, en el que la razón interna “4→6” permite una descomposición, relativamente sencilla, 4→2→6 . En el problema de la escala, entre los alumnos que usaron una estrategia aditiva, pudimos identificar algunos intentos de utilizar la conservación de las razones internas.

Así, las relaciones dominantes que se destacan en este grupo son:

**Razón externa entera**

| | | |
|---|---|---|
| Magnitudes o unidades distintas (razón heterogénea) | ⇨ | VU<br>I, en menor medida, si la razón interna es entera |
| Magnitudes y unidades iguales (razón homogénea) | ⇨ | OP, y AD<br>I, en menor medida, si la razón interna es entera |

Veamos un ejemplo:

*Brenda (6º grado)*. En los problemas 03, 03b, 14 y 17, los cuatro con magnitudes o unidades distintas, calcula sistemáticamente los valores unitarios. En el problema 22, en cambio (4cm, 6cm, 8cm, 12cm = 8cm, x, y, z) se limita a multiplicar todas las medidas por dos (OP).

- Problema 03, procedimiento (VU)

| Cajas | chocolates |
|---|---|
| 4 | 20 |
| **1** | **5** |
| 7 | 35 |

*E: "¿35? ¿cómo supiste?"*

*Bren: "Es que … primero dividí 20 entre 4 para saber a cuánta caja… cuántas cajas… o... a cada caja cuánto le tocaba de chocolates. Y luego nada más lo multipliqué por 5 para saber para 7"*

- Problema 22, procedimiento (OP)

| Fig. 1 | Fig. 2 |
|---|---|
| **X2** | |
| 4 cm | 8 cm |
| 6 cm | 12cm |
| 8cm | 16cm |
| 12cm | 24cm |

*E: (lee el problema)*

*Bren: (Contesta rápidamente, poniendo el doble de cada número)*

Esta relación confirma que la utilización de un operador es poco factible cuando la relación entre las cantidades es heterogénea, y por lo tanto el operador conlleva una cambio cualitativo de magnitud o de unidad.

No permite concluir, en cambio, que las relaciones homogéneas enteras propicien el uso de un operador porque en el caso particular del problema 22 la relación en juego fue muy simple (4→8), cabe preguntarse si los alumnos que usaron el operador X2 (o sumaron las medidas consigo mismas) hubieran utilizado un operador en el caso de la relación “el triple”. Además, a pesar de la sencillez del operador, algunos alumnos no lo identificaron y usaron procedimientos aditivos.

Cabe observar también que en el problema de escala, los alumnos no recurren al valor unitario, el cual puede ser tan eficiente en este problema como en aquellos con magnitudes distintas, y no requiere de mayores complicaciones técnicas. Más adelante, al analizar las dificultades específicas de algunos problemas, volveremos sobre este punto.

### 2.2.2) Segundo grupo: razón externa racional y razón interna entera
### Efecto de la variable “manera de formular la constancia”.

Razón interna entera

| Regla de correspondencia<br>“x por cada y” | | Evoca de valores unitarios iguales | | |
|---|---|---|---|---|
| Canicas - Precio | Naranjas - naranjas | Pasteles - niños | | Saltos –varas |
| 7<br>4c, 3p<br>12c, x | 21<br>10n, 4n<br>70n, x | 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 15<br>3s, 5v<br>12s, x |

En los problemas de este grupo, la razón externa no es entera, por lo tanto, el procedimiento que consiste en obtener el valor unitario (VU), y el que consiste en cuantificar la razón externa y usarla como operador (OP) implican el uso de números racionales. Sin embargo la razón interna es entera (y relativamente fácil de determinar), lo que permite resolver los problemas con números naturales, mediante procedimientos internos (I): la conservación de la suma o de las razones internas. Además, el dato desconocido es siempre mayor que el dato homólogo conocido, situación que es más sencilla que la inversa.

Ya vimos en el apartado 2.1 que en estos problemas (razón externa no entera, razón interna entera) la mayoría de los alumnos recurrió a los procedimientos internos. Veremos ahora, de más cerca, el efecto de otra variable.

En las tablas siguientes puede observarse que tres problemas, 7, 21 y 12, resultaron fáciles (los resuelven bien todos los niños entrevistados y más del 80% de los niños de 6º grado que hicieron la prueba con lápiz y papel), mientras que los otros dos, el 13 y el 15, fueron menos fáciles (no los logran resolver cinco de los 13 niños entrevistados, y entre 30 y 40% de los niños del grupo de 6º grado).

**Resultados obtenidos en las entrevistas**

| | | VU | I | OP | R | AD | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RE NE RI E | 7<br>4c, 3p<br>12c, x | | **13/13** | | | | 13/13 | |
| | 21<br>10n, 4n<br>70n, x | | **13/13** | | | | 13/13 | |
| | 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 1/13 | **12/13** | | | | 13/13 | |
| | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 3/13 | **7/13** | | 2/13 | 1/13 | 8/13 | 5/13 |
| | 15<br>3s, 5v<br>12s, x | 4/13 | **7/13** | | | 2/13 | 9/13 | 4/13 |

**Resultados obtenidos en la aplicación a 6º grado**

| | | VU | I | OP | R | AD | Otros | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RE NE RI E | 7<br>4c, 3p<br>12c, x | | **81%** | | 8% | | 11% | 83% | 17% |
| | 21<br>10n, 4n<br>70n, x | 0% | **91%** | | 3% | | 6% | 81% | 19% |
| | 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 8% | **53%** | | 3% | | 36% | 92% | 8% |
| | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 11% | **39%** | | 11% | | 39% | 61% | 39% |
| | 15<br>3s, 5v<br>12s, x | **47%** | 41% | | 6% | | 6% | 72% | 28% |

Los datos de las tablas permiten ver también una relación bastante clara entre el porcentaje de errores y el procedimiento utilizado: en los problemas que resultaron más difíciles, varios alumnos no recurrieron a la razón interna entre las dos cantidades dadas ; intentaron calcular el valor unitario fraccionario. Otros regresan a una estrategia aditiva. Así, lo que vuelve difíciles a estos problemas es el hecho de que propician el recurso al valor unitario.

Si vemos ahora los enunciados de los problemas, puede verse que, excepto para el problema 12, estas diferencias se originan en la manera de expresar la constancia de la razón externa.

Problemas fáciles:

> **7** Las canicas Cromadas grandes.
> Doña Inés vende estas canicas a 4 canicas por 3 pesos.
> La maestra Silvia quiere comprar 12 canicas.
> ¿Cuánto debe pagar? $\boxed{\phantom{xxxx}}$
>
> **21** Uno de los niños se quedó a trabajar en una huerta que se llama "Los Sauces".
> Le ofrecieron el siguiente trato:
> Por cada 20 naranjas que recojas, te quedas con 8.
> El niño recogió el sábado 60 naranjas.
> ¿Con cuántas naranjas se quedó para él? $\boxed{\phantom{xxxx}}$

En el problema 7 se plantea que las canicas se venden en paquetes de 4, cada uno por 3 pesos. En el problema 21, el trato se formula explícitamente con la expresión "por cada". Esta característica favorece la identificación de las cantidades "4 canicas", o "20 naranjas" como unidades compuestas, sujetas a repetición. Estas cantidades devienen así especies de "valores unitarios" compuestos, facilitando con ello el recurso a la conservación de la suma o de las razones internas.

De hecho, estos problemas "fáciles" tienen un porcentaje de aciertos mayor que los problemas "fáciles" del grupo anterior en los que la razón externa es entera y en los que se tendió a determinar el valor unitario. Este dato expresa ya, por sí solo, el hecho de que el manejo de la razón externa <u>no entera</u> n→ m, mediante la conservación de la suma o de las razones internas, puede ser, en ciertas circunstancias, casi tan sencillo como el manejo de la razón unitaria 1→ n, con la que se introduce la multiplicación en la escuela primaria.

Problemas difíciles

En cambio, en los problemas 13 y 15 la constancia de la razón externa remite a un valor unitario constante: en e problema 13, se pide que a cada niño le toque la misma cantidad de pastel; en el 15, aunque no se hace explícito, se sobreentiende que cada salto de la rana debe medir lo mismo.

> **13** (...) Luis pensó que sus amigos podrían enojarse porque a unos les va a tocar más pastel que a otros. Va a intentar que por lo menos a los niños de algunas mesas les toque lo mismo.
> En la mesa G habrá 4 niños y se van a poner 3 pasteles
> En la mesa L habrá 16 niños.
> ¿Cuántos pasteles debe poner en la mesa L? $\boxed{\phantom{xxxx}}$

**15** La Rana pinta dio 3 saltos y logró avanzar en total 5 varas.
Si da 12 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance? $\boxed{\phantom{xxxx}}$

Esta característica parece explicar que varios niños necesiten calcular el valor unitario. Omitir en estos tres problemas el cálculo de dicho valor y recurrir a la conservación de la suma o de las razones internas, implica considerar que, independientemente del valor unitario (es decir, de cuánto pastel toque a cada niño, o de cuántas varas mida un salto), a *n* veces una cantidad corresponde necesariamente *n* veces la otra cantidad. Más adelante veremos de más cerca cómo se manifiesta esta dificultad en los procedimientos de los niños.

La excepción fue el problema 12 (1 pastel entre 4 niños = x pasteles entre 16 niños) en el que, a pesar de que evoca valores unitarios iguales (como el problema 13), la mayoría de los niños recurrió a la conservación de las razones internas (observan que se pueden agrupar los 16 niños en 4 grupos de 4 niños, y que entonces basta con dar un pastel a cada 4). Más adelante volveremos sobre esta diferencia entre los problemas 12 y 13 (apartado 2.3.2)

En síntesis, la relación que se observa en este grupo es la siguiente:

**Problemas con razón interna entera**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Problemas fáciles:<br>7 y 21 | Formulación “por cada” | ⇨ | I: Uso de razones internas enteras |
| Problemas difíciles<br>13 y 15 | Evocación de valores unitarios iguales | ⇨ | VU: Búsqueda de un valor unitario racional |

Notemos además que, desde el punto de vista del uso de las razones internas, no afecta el que la razón externa sea homogénea (problema 21) o heterogénea (los demás). Tampoco afecta el que las razones externas sean enteras o racionales puesto que éstas no se cuantifican en un operador, y el valor unitario no se calcula. Al usar los procedimientos internos, tanto los valores unitarios racionales como los operadores racionales permanecen implícitos: los niños logran manejarlos mediante razones expresadas con números naturales.

Vemos, a título de ejemplo, las resoluciones de Arturo, de 4º grado:

- Problema 7, (4c, $3 = 12c, x):

> *Art: (Mientras piensa se le escucha decir) 3, 4, 5. (después de un rato dice) ¿9? (Escribe como resultado final) 9 pesos*
>
> *E: ¿Cómo lo averiguaste?*
>
> *Art: Porque 4 x 3, 12 y luego vi que éste es 3 y sume 4 veces 3, digo sume 3 veces 3.*

- Problema 21, (20n, 8n = 60n, x):

> *Art: (Se queda pensando en silencio por un momento y después escribe)*
>
> *60*
>
> *-24*
>
> *36*
>
> *Art: Se quedó con 24 y para ellos (los dueños) fueron 36.*
>
> *E: ¿Me puedes decir como lo averiguaste?*
>
> *Art: Multipliqué 8x3 da 24 y luego reste 60 - 24 me dio 36*
>
> *E: ¿Por que multiplicaste 8x3?*
>
> *Art: Porque aquí son 3 veces, dice por cada 20 naranjas te dan 8, entonces aquí 20x3 da 60, después de ahí como salió el 3 saque 8x3. (...)*

En ambos problemas, Arturo recurre a la conservación de las razones internas. No muestra necesidad de conocer los valores unitarios racionales (el precio de una canica, o la cantidad de naranjas que se da por una sola naranja) para calcular los valores solicitados (el precio de 12 canicas, las naranjas que se reciben al recoger 60).

- Problema 13 (4n, 3p = 16n, x)

Con dificultad, y con apoyo en dibujos, logra determinar que el resultado de repartir 3 pasteles entre 4 niños es ¾ a cada uno (1/2 + ¼). Después, al dibujar 16 niños, considera dar 4 pasteles de manera que cada uno tenga ¼ de pastel. Al hacerle notar que no dio la misma cantidad a unos y a otros, sale del paso proponiendo dividir cada uno de los 4 pasteles en 16 partes, y dar 3 de esas partes a cada uno. Logra así que a los niños de las dos mesas les toquen 3 pedacitos, pero a unos les tocan ¾, mientras que a otros les tocan 3/16...

- Problema 15 (3s, 5v = 12s, x)

Calcula el tamaño de un salto mediante aproximaciones sucesivas con multiplicaciones:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1.55* | *1.70* | *1.65* | *1.67* | *1.66* | *(...)* | *1.66.7* |
| *x 3* | *x 3* | *x 3* | *x 3* | *x 3* | | *X....3* |
| *4.65* | *5.10* | *4.95* | *5.01* | *4.98* | | *5.00.1* |

El doble punto decimal parece expresar que, para él, el paso de centésimos (que nombra “centímetros”) a milésimos expresa un cambio como el de metros a decímetros.

Enseguida, identifica la razón interna 3 saltos **X 4** = 12 saltos, pero... la aplica al valor unitario:

```
 1.66.7
 1.66.7
+1.66.7
 1.66.7
 ------
 6.66.8
```

Para Arturo estos dos últimos problemas sugieren la búsqueda del valor unitario, usa fracciones para determinar el tamaño de un pedazo de pastel, y decimales para determinar la longitud de los saltos, mientras que los dos primeros propician el recurso a las razones internas. La diferencia en el grado de dificultad es evidente.

Si la constancia de la razón externa en los problemas difíciles se formulara explícitamente mediante la expresión “por cada”, posiblemente se volverían más fáciles: “por cada cuatro niños, se ponen tres pasteles...”; “por cada 3 saltos, la rana avanza 5 varas”.

Plantear de esta manera la relación es, posiblemente, el paso previo para recurrir a las razones internas en estos problemas, como lo sugieren las siguientes explicaciones de algunos niños que en el problema 12 (4n, 1p = 16n, x) lograron utilizar la razón interna X4:

> *Itzel, 4º grado: “Un pastel por cada 4 niños”.*
>
> *Julio, 5º grado: “Les toca un pastel en grupos de cuatro”.*
>
> *Adriana, 5º grado: “Supuse que iban a ser 4 niños por pastel“*

### 2.2.3) Tercer grupo: ninguna razón es entera
### Nuevamente, efecto de la variable “magnitudes de misma o distinta naturaleza”

| Saltos, varas | Escala |
|---|---|
| 16<br>4s, 6v<br>6s, x | 23<br>(4cm, 6cm, 8cm,12cm)<br>= (6cm, x, y, z) |
| Conmensuración<br>Unidades diferentes | Unidades iguales |

Ahora los tres procedimientos, determinación del valor unitario (VU), uso del operador constante (OP) y conservación de las razones internas (I), implican la utilización de fracciones o decimales, aunque la dificultad para usar estos números no es la misma en cada uno de los procedimientos: en el procedimiento VU, el número fraccionario juega el papel de una medida o expresión de una cantidad, lo cual es menos complejo que en los otros dos procedimientos en donde la fracción tiene el papel de un factor.

No obstante, en ambos problemas existe todavía la posibilidad de resolver a partir de los números naturales, aunque ésta es ahora más difícil que en los problemas anteriores: en ambos problemas, las dos razones, interna y externa, son iguales a 3/2 y por lo tanto puede pasarse de una cantidad a la otra mediante la división entre 2 y la multiplicación por 3 (procedimiento I-3/2), esto es, descomponiendo las razones en razones enteras.

En el problema 16, dado que las cantidades se expresan con distinta unidad (y por lo tanto el operador tiene dimensión), es previsible que la razón interna sea objeto de descomposición:

| Saltos → | Varas |
|---|---|
| 4 | 6 |
| **2** | **3** |
| 6 | 9 |

En el problema 23, de escala, ambas razones podrían ser objeto de descomposición, aunque la descomposición de la razón externa puede ser más difícil:

| Descomposición de las razones internas | Descomposición de la razón externa |
|---|---|
| | **:2        X3** |
| 4cm → 6cm | 4cm → 2cm → 6cm |
| **2cm → 3cm** | 6cm → 3cm → 9cm |
| 6cm → 9cm | 8cm → 4cm → 12cm |
| 8cm → 12cm | 12cm → 6cm → 18cm |
| 12 cm → 18cm | |

En el apartado 2.1, al revisar la influencia del carácter entero o racional de las razones, vimos que en estos problemas hay un descenso en los porcentajes de respuestas correctas, así como un aumento de procedimientos aditivos. La necesidad de descomponer las razones o de utilizar valores fraccionarios, incluso muy simples, aumenta considerablemente la dificultad de los problemas para nuestros alumnos de primaria.

No obstante, la dificultad de ambos problemas no fue la misma, ni tampoco el tipo de procedimiento dominante en cada uno. Al comparar las resoluciones a estos dos problemas se manifiesta, nuevamente una influencia debida a las magnitudes, similar a la que ya observamos en el primer grupo. En aquél (razón externa entera) ya habíamos constatado la mayor dificultad del problema de escala en comparación con los otros problemas. Observamos entonces que en este problema los alumnos tienden a no recurrir al método del valor unitario. Esta tendencia se confirma claramente ahora, ningún alumno recurre en la escala al valor unitario (1cm→ 1 ½ cm), lo cual ayuda a explicar la diferencia en el grado de dificultad entre los dos problemas, veamos por qué.

**Resultados obtenidos en las entrevistas**

| | | VU | I (:2X3) | OP | R | AD | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RE NE RI NE | 16 4s, 6v 6s, x | **7/13** | 2/13 | | | 4/13 | 6/13 | 7/13 |
| RE NE RI NE | 23 (4cm, 6cm, 8cm,12cm) (6cm... | | | 2/9 | | **7/9** | 2/9 | 7/9 |

Notas:
1) El procedimiento notado "I" en esta ocasión consiste en la descomposición de la razón interna en (:2) (x3). En cambio el procedimiento OP remite a la cuantificación de la razón externa (X3/2 ó X1.5)
2) El problema 23 se presentó únicamente a los alumnos que resolvieron bien el problema de escala 22, en el que la razón externa era entera.

**Resultados obtenidos en la aplicación a 6º grado**

| | | VU | I (:2X3) | OP | R | AD | Otros | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RE NE RI NE | 16 4s, 6v 6s, x | **66%** | 22% | | | | 12% | 72% | 28% |
| RE NE RI NE | 23 (4cm, 6cm, 8cm,12cm) (6cm... | | 3% | | 12% | **63%** | 22% | 16% | 84% |

El problema 16, con unidades en relación de distinto tipo (saltos, varas) propicia la búsqueda de un valor unitario. Este no es entero pero es relativamente fácil de calcular mediante la división "partición" 6 varas entre 4, o sacando dos veces mitad: 4 saltos→ 6 varas, 2 saltos→3 varas y 1 saltos→1.5 varas.

El problema 22, la escala, parece no propiciar la búsqueda de un valor unitario sino la de un operador, pero éste no es entero. Aunque obtenerlo lleva formalmente a la misma división que vimos anteriormente (6:4), ésta es conceptualmente mucho más compleja: implica concebir que puede existir un operador multiplicativo no entero (un número que multiplicado por 4 dé 6; en el Capítulo 1 comentamos ampliamente esta dificultad). Frente a este "agrandamiento" al que no corresponde un factor entero, los niños optan por sumar.

Veamos las resoluciones de los cuatro alumnos entrevistados con el nivel de desempeño más alto. Los cuatro son de 6º grado.

| | 16<br>4s, 6v<br>6s, x | 23<br>(4cm, 6cm, 8cm,12cm)<br>(6cm, x, y, z) |
|---|---|---|
| Manuel<br>6º grado | Usa I (:2) (x3)<br>4→6; 2→3; 6→9.<br>Acierta | Usa OP (:2) (X3)<br>Divide entre 2 cada medida de la figura original, y el resultado lo multiplica por 3.<br>Acierta |
| Pedro<br>6º grado | Obtiene VU = 1 ½ pesos (mental, doble división entre 2: 4→6; 2→3; 1→1 ½; 6→ 9).<br>Acierta | Usa OP = X 1.5<br>(Observa que 6 es igual 4 más la mitad de 4).<br>Acierta |
| Brenda<br>6º grado | Obtiene VU = 1.5 pesos<br>(resuelve la división 6:4)<br>Acierta | AD: suma 2 cm<br>Error. |
| Nancy<br>6º grado | 1) Usa técnica de productos cruzados; no se siente segura.<br>2) Obtiene VU, mediante la división 6:4<br>Acierta | AD: suma 2 cm:<br>Error |

Los cuatro logran resolver el problema 16 pero sólo dos resuelven el problema 23, lo que confirma la mayor dificultad de este último.

Excepto Manuel, los demás resuelven el problema 16 mediante valor unitario y ninguno utiliza este método en el problema de escala.

Manuel es el único que recurre, en ambos problemas, a la descomposición de la razón 3/2 en (:2) (X3), pero no descompone la misma razón en ambos problemas: se trata de la razón interna en el problema 16 (saltos/varas) y de la razón externa en el 23 (el de escala). Nuevamente podemos constatar que la identificación de un operador es más factible cuando expresa un "número de veces" entre cantidades de misma naturaleza. La descomposición de una razón externa, como la que hace Manuel, constituye un procedimiento poco común, dada la dificultad que en sí comporta determinar un operador.

Por su parte, Pedro, en el problema de escala, determina un operador mediante un número decimal. Esta capacidad para obtener y usar un número decimal en el papel de operador multiplicativo constituye un verdadero logro para un alumno del nivel básico. Es cierto que este caso particular, por el tipo de razón en juego (3/2), puede considerarse como de los más sencillos y podemos preguntarnos si Pedro podría hacer los mismo con una razón más difícil (5/3 por ejemplo). No obstante, el que Pedro sea el único que lo hace entre los alumnos entrevistados y posiblemente también entre los alumnos de sexto grado a los que se aplicó el conjunto de problemas, da cuenta de que, pese a la facilidad numérica, está en juego un conocimiento complejo que la mayoría de los alumnos no ha adquirido.

Así, Pedro y Manuel nos muestran dos caminos para resolver el problema más difícil del conjunto de problemas, la descomposición de la razón externa o su cuantificación mediante un decimal. Ambos descansan en un trabajo sobre la razón externa y, por ello, podemos considerarlos como procedimientos avanzados.

En síntesis, en este grupo de problemas se confirma la relación que observamos en el primer grupo:

**Razones externa e interna no enteras**

| | | |
|---|---|---|
| Magnitudes o unidades distintas<br>(razón heterogénea) | $\Rightarrow$ | VU<br>I, en menor medida, para la razón 3/2 |
| Magnitudes y unidades iguales<br>(razón homogénea) | $\Rightarrow$ | AD<br>OP, en menor medida |

### 2.2.4) Comentario

Este segundo nivel de análisis permite observar que, si bien la variable “razones enteras o racionales” puede facilitar o dificultar la utilización de determinado procedimiento, esta variable no es determinante por sí sola. Las distintas elecciones de procedimientos que los niños hicieron en cada grupo de problemas muestran el efecto de otras variables de tipo no numérico.

El procedimiento del valor unitario se favorece cuando las magnitudes son de distinta naturaleza y cuando, además, en la formulación de los problemas se evoca la igualdad de valores unitarios. El carácter entero o racional de la razón externa influye en el grado de dificultad, pero no, de manera notoria, en la elección del procedimiento.

Los procedimientos que consisten en conservar la suma o las razones internas, en cambio, tienden a ser utilizados sólo cuando la razón interna es entera, y, en mucho menor medida, cuando es susceptible de descomponerse “sacando mitad”. Pero esta característica tampoco actúa sola: la formulación de la razón externa en términos de una regla de correspondencia explícita facilita significativamente el recurso a estos procedimientos, al favorecer que una de las cantidades sea considerada como un “valor unitario compuesto”. En este caso, los problemas resultan muy sencillos, casi tanto como aquellos en los que se da el valor unitario. El hecho de que la razón externa sea entera o no, así como el hecho de las magnitudes sean de misma naturaleza o no, no parecen tener ninguna influencia en el grado de dificultad de estos procedimientos.

Finalmente, el procedimiento del operador externo fue muy poco frecuente: se utiliza únicamente en los problemas de escala, en los que tiene el sentido de una transformación de cantidades homogéneas, y tiende a usarse solamente, y sólo por algunos niños, en el caso más simple en el que es “el doble”. Constituye efectivamente un procedimiento conceptualmente complejo.

## *2.3) Otras variables no numéricas que inciden en el grado de dificultad de los procedimientos*

Un mayor acercamiento a las resoluciones de los niños permite identificar dificultades más específicas en la puesta en marcha de cada uno de los procedimientos. Presentaremos aquí aquellas dificultades que pueden estar relacionadas con ciertas características de los problemas y que presentan un interés didáctico.

### 2.3.1) La dificultad para determinar un valor unitario entero

Vimos anteriormente que en el primer grupo de problemas (con la razón externa entera), cuando las magnitudes son de distinta naturaleza (problemas 03, 03b, 14 y 17), el procedimiento dominante fue el cálculo del valor unitario.

| Procedimiento → | VU | | I | | OP | | R | Ad | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | E | A | E | A | E | E | E | A | E |
| (03)<br>cajas-chocolat<br>(4c, 20ch) (7c, x )<br>**13** alumnos | **12** | | | | | | **1** | | 12 | 1 |
| (03b)<br>cajas-galletas<br>(3c, 15g) (9c, x)<br>**11** alumnos | **6** | | **4** | | | | **1** | | 10 | 1 |
| (14)<br>(3s, 12v) (5s, x)<br>**13** alumnos | **12** | | | | | | **1** | | 12 | 1 |
| (17)<br>Receta<br>4p→(8t, 120g, 1200g)<br>6p→( x, y, z)<br>**13** alumnos | **7** | | **2** | | | **1** | **1** | **2** | **9** | **4** |

A: acierto; E: error

En la tabla anterior puede observarse que los problemas 03, 03b y 14 del primer grupo resultaron fáciles para la mayoría del grupo, mientras que el problema 17 (la receta) resultó más difícil[1]. Este resultado era previsible debido a un primer factor de complejidad que salta a la vista: el problema de la receta es el único en el que el conjunto final es de dimensión tres (a cada número de personas, corresponden tres cantidades de ingredientes), lo que se traduce en la existencia de tres valores unitarios. Como veremos más adelante, esta característica también presentó también ciertas ventajas didácticas.

---

[1] Lo resuelven 9 de los 13 alumnos entrevistados y 60% del grupo de 6º, contra más del 85% en los otros tres problemas.

Además de la dificultad anterior, en el problema de la receta concurren otras características que dificultaron identificar la pertinencia de un valor unitario constante, o bien, dificultaron calcularlo: el hecho de que en el texto no hay ninguna referencia a un valor unitario contante, y la dificultad para concebir un "reparto" de magnitudes continuas.

Veamos la forma en que estas dificultades se manifestaron en algunas de las resoluciones de los niños.

*Dificultad para determinar qué es lo que no varía*

En ninguno de los problemas de este grupo se da el valor unitario, por lo que la primera dificultad fue considerar que los valores de la segunda magnitud no sólo deben aumentar, como los de la primera, sino que están determinados por la existencia de un valor unitario invariante. El hecho de que dicho valor unitario existe y es invariante se hace explícito únicamente en los dos problemas de agrupamiento (03 y 03b):

> (03) "Luis llenó ayer **4** cajas. Para llenarlas necesitó 20 chocolates en total. Hoy debe llenar **7** cajas, <u>iguales a las de ayer</u>. ¿Cuántos chocolates necesita hoy?"

En el problema 14 de los saltos que se miden con varas esta característica no está expresada, pero se sobreentiende: los niños deben asumir que cada salto mide un mismo número de varas.

> (14) La Rana Verde dio 3 saltos y logró avanzar en total 12 varas.
> Si da 5 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?

Pocos alumnos manifestaron dificultades en estos tres problemas para identificar la pertinencia de un valor unitario constante, uno de ellos fue Verónica (4º grado) quien, en el problema 03 (4c, 20ch = 7c, x), plantea:

> *(...)*
>
> *E: "Ayer llenó 4 cajas y en total necesitó 20 chocolates. Hoy debe llenar 7 cajas <u>iguales</u>. ¿Tú crees que necesita más o menos de 20 chocolates?"*
>
> *Vero: "Más"*
>
> *E: "¿Como cuántos serán?"*
>
> *Vero: (Se queda en silencio un momento y luego pregunta) "¿60?"*
>
> *E: "¿60 chocolates? ¿por qué?"*
>
> *Vero: "Porque a los 20 se le suman 3, porque 4 para 7 son 3. A 20 le sumas 3 veces 20 y sale 60"*

Verónica determina la diferencia en las cantidades de cajas, pero, al calcular los chocolates que corresponden a esa diferencia, considera que cada caja tiene 20 chocolates, es decir, reinterpreta el problema, considerando al valor que se da como valor unitario.

Cuando esto sucedió, pudo comprobarse que casi siempre el origen de la dificultad radicó en la posibilidad de hacerse una representación clara de las relaciones planteadas en el problema. Al sugerir a los niños que hicieran un dibujo y una estimación, casi siempre lograron resolver el problema correctamente, determinando un valor unitario, y considerándolo constante[2].

En el problema de la receta, en cambio, el valor unitario no sólo no es evocado en el problema, sino que tampoco tiene una existencia supuesta en el contexto, es únicamente un medio de cálculo. Las porciones de cada ingrediente *por persona* no existen realmente, si bien la magnitud “número de personas”, al ser discreta, hace menos difícil considerarlo.

Esta característica, sumada a la que introduce un conjunto final de dimensión tres, dificultó a varios niños resolver el problema. Todos asumieron que las nuevas cantidades de ingredientes debían ser mayores que las que se dan, la dificultad radicó en identificar aquello que es invariante.

Dos de los 13 alumnos entrevistados y dos de los 32 alumnos de 6º a quienes se aplicó el conjunto de problemas recurrieron a procedimientos aditivos. No obstante, ninguno de ellos sumó una diferencia constante a todos los ingredientes (procedimiento aditivo puro). Parece que les resultó evidente que no es posible que la receta para 6 personas se forme agregando dos tazas a 8 tazas, dos gramos a 120 gramos de mantequilla y dos gramos a 1200 gramos de cerezas. Por ejemplo, Francisco (6º grado), quien resolvió correctamente los problemas 03, 03b, y 14, hizo lo siguiente en el de la receta:

> *Fco: (Rápidamente llena la tabla de la siguiente manera, sin realizar ninguna operación escrita)*

Receta para 6 personas

| Taza de harina | Mantequilla | Cerezas |
|---|---|---|
| 10 | 140 | 1400 |

[2] En una prueba adicional con lápiz y papel que aplicamos a un grupo de 31 alumnos de 4º grado de la misma escuela, sólo 12 alumnos (39 %) resolvieron correctamente el problema 03, lo que expresa la dificultad, en este nivel escolar, para comprender las relaciones en juego a partir sólo de la lectura del texto.

> *E: ¿Me puedes explicar como la resolviste?*
>
> *Fco: Sí, aquí dice receta para 4 personas y María quiere hacer un pastel para 6 personas se suman 2, o sea del 4 se le suman 2 y sería aquí (columna de las tazas de harina) en vez de 8, sumarían 2, serían 10, de la mantequilla sumaríamos otros 20 más. 20 porque aquí son 120 gr y no puedo sumar 122 gr.(...) y aquí serían 1400 y sumamos 200, 1200 + 200, 1400.*

Así, no se puede sumar siempre la misma cantidad, Francisco fue explícito al respecto. Los incrementos que propuso, no muy distantes de los correctos, manifiestan una apreciación cualitativa de la razón entre éstos y las cantidades iniciales. Los incrementos están determinados por el orden de magnitud en el que se ubican las cantidades iniciales.

Esta característica del problema de la receta, el que la segunda cantidad esté compuesta por magnitudes distintas y en cantidades que se expresan con números muy diferentes (8, 120, 1200), si bien hace más difícil al problema, a la vez tiende a disuadir la idea de sumar siempre dos (tazas o gramos) a las tres cantidades.

Por otra parte, tres alumnos más centraron su atención, en un primer momento, en una relación multiplicativa que salta a la vista por su simplicidad: la cantidad de tazas es el doble que la cantidad de personas, pero, ¿qué significa, en el contexto, esta relación numérica? Se trata de una razón externa, un operador que conlleva un cambio de magnitud. Comprender esto no es sencillo y supondría darse cuenta de que en este problema hay tres operadores distintos (X2, X30 y X300). Dos de estos tres alumnos no indagaron el sentido del factor identificado y lo utilizaron, equívocamente, como constante. Veamos el caso de la tercera alumna, Mariana (6º grado), quien hizo explícito el hecho de que las ideas de operador y de valor unitario constituyen dos procedimientos distintos. Al empezar a resolver comentó:

> *“Mar: Ah... son dos personas más ¿verdad?, necesitamos entonces <u>más ingredientes, pero NO dos ingredientes más</u>.*

Se fijó en la diferencia interna (aditiva) entre los dos números de personas (dos), pero observó que no tiene sentido poner dos “ingredientes más”.

Enseguida, identificó la relación externa “doble” entre el número de tazas y de personas, la asoció con la relación “2 tazas por persona” pero mostró perplejidad por el hecho de que esa misma razón “doble” no se aplique a las otras cantidades:

> *...aquí hay 4 personas y ocho tazas de harina, o sea el doble de las personas, y si son 6 personas... no creo que sea el doble de las personas ¿o sí? Y entonces no*

> *podría ser 2 tazas de harina por persona ¿o no?, no sé si podría...*
>
> *...el 12 (tazas de harina) queda con las dos ideas, pero el 120 gramos es mi problema, y el 1200 gramos, porque entonces eso es lo que hace dudar que no sea el doble de las personas, ¿por qué sólo las tazas el doble y no las cerezas y la mantequilla?*

Las “dos ideas” parecen ser la de “el doble”, operador, y la de “dos tazas por persona”, valor unitario. Para el caso particular de las tazas, Mariana logró vincularlas, se implican una a la otra. Sin embargo, la idea de “doble” sugiere una regularidad, que todo sea el doble, pero, ¿el doble de qué? La perturbó que no todas las cantidades fueran el doble del número de personas. Y si no es “el doble” para todas, no debe serlo para ninguna, pero entonces, tampoco puede haber “dos tazas por persona”.

Finalmente Mariana identificó la necesidad de determinar los otros *valores unitarios*, mas no los otros *operadores*. Logra entonces resolver el problema:

> *... para dos personas más, ¿cuántos gramos más?... es que deberían poner cuántos gramos <u>por persona</u>.(...)*

Este ejemplo deja de ver con cierta claridad que, frente a problemas en los que se relacionan magnitudes de distinta naturaleza (en este caso, personas e ingredientes), la forma de aprehender aquello que debe ser invariante, que resulta operativa para los niños, es la determinación de la *razón* canónica (el valor unitario), y no la del operador externo sin dimensión. Éste último puede ser identificado como consecuencia de buscar regularidades numéricas, pero los niños no tienen todavía manera de interpretarlo, y por lo tanto, de controlar su uso. La razón canónica es una *relación* que se expresa mediante dos cantidades, una de las cuales es unitaria. A la postre, posiblemente esta relación constituya una fuente de significado del operador.

*Dificultad para “repartir” cantidades continuas*

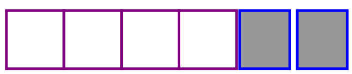
Otros alumnos dejaron ver una dificultad más en el problema de la receta, relacionada con el tipo de magnitudes. Por una parte, el problema no sugiere que los ingredientes deban repartirse entre las personas, en todo caso sería, como lo plantean dos alumnas, entre las rebanadas del pastel, o entre “pastelitos”. Por otra parte, la “repartición” de gramos de mantequilla constituye todo un problema práctico si se tiene en mente repartir gramo por gramo, como se repartiría un conjunto de chocolates.

Adriana (5º grado) requirió de apoyo en representaciones gráficas para resolver los problemas anteriores y vuelve a requerirlos en este problema. Empieza sumando dos tazas a 8 tazas pero en seguida, con cierta dificultad, recupera la idea de distribuir las tazas entre las personas y obtiene la relación de una taza por cada dos personas:

> *Adr: "2 tazas son para…. 2 tazas …(dibuja 2 tazas y pone un 1 abajo)… sí, porque 2 tazas es para cada… 2 tazas serían una rebanada para una persona, y otras dos tazas serían para otra y serían dos personas …*

Encuentra que para 6 personas se necesitan 12 tazas. Sin embargo, las otras dos magnitudes le presentan un nuevo problema:

> *Adr: "¿Qué son? (se refiere a 120 gramos de mantequilla) …(se queda pensativa 32 segundos y luego dice)… a ésta como que no le entiendo"*
>
> *E: "(...) para hacer la receta para 4 personas tiene que ponerle 120 gramos de mantequilla. O sea, cortan un pedazo y lo pesan en una basculita y tienen que ser 120 gramos, pero eso es para cuatro personas"*
>
> *Adr: "Entonces partiríamos en 4 partes 120 gramos y ya después de dos… para 6 tendríamos que agarrar otros dos cachos" (Hace un rectángulo y lo divide en 4 partes, luego agrega otras dos partes y queda como sigue)*



> *Adr: "Entonces tendríamos que dividir 120…"*
>
> *(...)*

La sugerencia de imaginar los 120 gramos de mantequilla como una barra le permite continuar. Después enfrenta el problema de representar 1200 gramos de cerezas. Empieza dibujando una cereza por persona pero enseguida recupera la idea de dividir que logró utilizar en el inciso anterior.

*Otra expresión de la dificultad: el procedimiento del valor unitario con descomposición aditiva (VU+DA).*

Varios de los alumnos que lograron utilizar el valor unitario en los problemas con magnitudes distintas que acabamos de revisar, en lugar de calcular directamente la imagen buscada, calcularon primero la imagen de la diferencia de los dos valores del conjunto inicial, por ejemplo, para el problema 03 (4c, 20ch, 7c, x) hicieron lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Cajas} & \text{Chocolates} & \\ & 4 & 20 & \\ + & 1 & 5 & + \\ & \underline{3} & \underline{15} & \\ & 7 & 35 & \end{array}$$

El cálculo intermedio que hacen estos niños (el valor que corresponde a la diferencia) no es necesario para obtener el resultado cuando ya tienen el valor unitario. Probablemente obedece al hecho de que, en el análisis inicial que hacen de las relaciones, centran su atención en el tamaño del incremento de la primera magnitud en términos aditivos, pero logran considerar que el incremento de la segunda magnitud no es igual a esa diferencia, sino a cierta cantidad "por cada uno" de la otra.

En el problema más difícil de este grupo, el de la receta, son más los niños que procedieron de esta manera, como puede verse en la siguiente tabla. Es posible que la relación entre los dos números de personas en términos de incremento aditivo (4 a 6) se destaque más por la asimetría de los datos: por cada número de personas, esta vez hay tres cantidades de ingredientes.

| | (03)<br>cajas-chocolat<br>(4c, 20ch) (7c, x )<br>**13** alumnos | (03b)<br>cajas-galletas<br>(3c, 15g) (9c, x)<br>**11** alumnos | (17)<br>Receta<br>(4p, 8t, 120g, 1200g)<br>(6p, x, y, z)<br>**13** alumnos | (14)<br>Conmensuración<br>(3s, 12v) (5s, x)<br>**13** alumnos |
|---|---|---|---|---|
| VU | 9 | 6 | **2** | 8 |
| VU+DA | 3 | 0 | **5** | 4 |

VU: procedimiento "valor unitario"
VU+DA: procedimiento "valor unitario" con descomposición aditiva

Cabe preguntarse si los niños que recurren al procedimiento VU+DA en estos problemas, tienden más que los otros a usar procedimientos aditivos cuando la razón externa ya no es entera y por lo tanto el valor unitario es difícil de calcular.

Aunque nuestra muestra es demasiado pequeña para afirmar que hay una relación, podemos decir al menos que ésta se insinúa: si comparamos únicamente las respuestas al problema 14 (3s, 12v = 5s, x) de este grupo, con las que dieron al problema 16, del mismo contexto pero con razón externa no entera (4s, 6v = 6s, x) podemos ver que 3 de los 4 niños que son aditivos en el problema 16 usaron VU+DA en el problema 14.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Usan VU+DA cuando la razón externa es entera<br>(problema 14)</td></tr>
<tr><td>Sí: 4</td><td>No: 9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Usan AD, cuando la razón externa no es entera<br>(Problema 16)</td><td>Sí: 4</td><td>3 niños<br>Art, Alb Fran</td><td>1 niño<br>Mar</td></tr>
<tr><td>No:9</td><td>1 niño<br>Nan</td><td>8 niños<br>Itz, Mig, Ver Jul<br>Adr Man, Bren, Ped</td></tr>
</table>

*Comentario*

G. Ricco, en el estudio que comentamos en el capítulo 1 (Ricco, 1982), muestra que la utilización del valor unitario *en tanto constante* en una situación de variación de cantidades proporcionales es objeto de una construcción que se realiza a lo largo de varios años. Muestra, además que los errores de los niños no son consecuencia de una falta de conocimiento, los niños, dice la investigadora, ponen en juego algunos aspectos de la función lineal pero de manera limitada.

Esta parte de nuestro estudio permite ver que el grado de dificultad de la utilización de un valor unitario entero como el invariante en una relación, depende también de diversas características no numéricas de los problemas: la forma de redacción del problema y la familiaridad con el contexto; la existencia “real” del valor unitario en el contexto; el carácter discreto o continuo de las magnitudes y en consecuencia la posibilidad o no de visualizar la división que lo determina como un reparto.

Los resultados en el problema de escala (22) que veremos más adelante, muestran hasta qué punto la problemática que enfrentan los niños puede variar de un contexto a otro. Algunos niños que en la resolución de los problemas con magnitudes distintas se ubicarían en el nivel III propuesto por Ricco (uso de una constante), en el problema de la escala no llegan al nivel cero (sólo se respeta la monotonía de la función).

La posibilidad de hacer una representación gráfica o, mejor aún, concreta de la situación se manifiesta importante para ayudar a comprender las relaciones que se plantean en el texto a la vez que sirve de apoyo para ciertos procedimientos, como el reparto. En un segundo momento, estas representaciones tendrían que tener sólo la función de proporcionar una forma de verificación empírica.

Finalmente, la variante estructural “conjunto final de dimensión 3”, se mostró adecuada para disuadir las estrategias aditivas puras, a la vez que parece favorecer una mayor comprensión del papel del valor unitario. En el problema que usamos aquí, el de la receta, convergieron además otras dificultades. En el capítulo 3 presentamos un problema más simple con estas características (“Los collares”).

### 2.3.2) La dificultad para utilizar la conservación de la suma o de las razones internas en los problemas que evocan valores unitarios iguales.

Ya vimos que en el segundo grupo de problemas, en los que la razón externa es racional (y por lo tanto, el valor unitario también) pero la razón interna es entera, prevaleció el recurso a los procedimientos internos CS (conservación de la suma) y CRI (conservación de las razones internas) .

Razón interna entera

| Formulación “n por cada m” | | Evoca valores unitarios iguales | | |
|---|---|---|---|---|
| Canicas-Precio | Naranjas-naranjas | Pasteles-niños | | Saltos -varas |
| 7<br>4c, 3p<br>12c, x | 21<br>10n, 4n<br>70n, x | 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 15<br>3s, 5v<br>12s, x |

Vimos también que los problemas en los que la constancia de la razón se enuncia mediante una regla de correspondencia “n por cada m” (7 y 21) fueron más fáciles que aquellos que evocan la igualdad de valores unitarios (13 y 15). En estos últimos, varios niños no cuantificaron las razones internas entre los dos términos iniciales y se dieron a la difícil tarea de determinar valores unitarios racionales.

Veremos aquí las resoluciones de los niños que lograron utilizar los procedimientos internos en los problemas “difíciles”, pero que tuvieron dificultad para ello. Esto nos ayudará a conocer un poco mejor algunos de los aspectos que dificultan recurrir a procedimientos internos, cuando la razón no se formula mediante una regla de correspondencia.

*Dificultad para determinar qué es invariante*

Pocos alumnos siguieron un procedimiento erróneo en estos problemas. Algunos hicieron al principio una interpretación simplificada del problema, considerando uno de los valores que se dan como valor unitario (R), pero al releerles el texto o eventualmente al representar con dibujos las relaciones, rectificaron. Sólo dos niños mantuvieron una estrategia aditiva en uno o en los dos problemas difíciles (13 y 15). Veamos aquí el caso de Mariana (6º grado) quien nuevamente identifica “dos métodos” (lo hizo en el problema de la receta), uno en el que se conservan las razones internas, y otro en el que se conserva la diferencia (aditivo), y muestra no poder decidir cuál es el correcto.

Mariana (6º grado), problema 15 (3s, 5v) = (12s, x)

> *Mar: (relee) se llevan por 2 ahora, entonces será más difícil... (relee) ¿Cuántos saltos más da?, ¿3 por qué es 12?, 3 por 4, 12, entonces sería... 12 saltos en vez de 3 saltos, 3, 6, 9, 12 (cuenta los sumandos con los dedos), sería el cuádruple de esto y aquí (varas) sería (...) sería no el doble sino el cuádruple... y aquí (...) 5, 10, 15... aquí (3 saltos) es la tabla del 3 y aquí podría ser la tabla del 5 ¿no?*

En su primer intento determina la razón interna entre 3 saltos y 12 saltos, el “cuádruple” y aplica esta razón a la otra magnitud. Sin embargo, enseguida examina lo que sucede con las diferencias, esta vez externas: pasan de 2 a 4 y a 8:

> *No, porque aquí se llevan por 2... ahá...ya lo tengo, serían 6 saltos serían... 10 varas, más porque ya se llevarían por 4 y en doce ¡ya se llevarían por 8!*

| Saltos | Varas | Diferencia externa |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 2 |
| 6 | 10 | 4 |
| 12 | 20 | 8 |

El hecho de que las diferencias externas crezcan la perturba (¿porqué esta vez se fija en las diferencias externas y no en las internas?). Opta entonces por conservar la diferencia externa:

> *Ahá, ya lo tengo, si estamos diciendo 3 saltos estamos diciendo que se llevan por 2, (entonces) 3 saltos, 5 varas; 6 saltos, (8 varas); 9 saltos, 11 varas, 12 saltos serían 14 varas... tenemos que olvidar todo esto, sólo nos fijamos en las dos varas, (...), ¿me entiendes?, eso podría ser uno (una posibilidad)*

**+ 2**

| | Saltos | Varas |
|---|---|---|
| | 3 | 5 |
| +3 | 6 | 8 |
| +3 | 9 | 11 |
| +3 | 12 | 14 |

Curiosamente respeta las sumas en saltos de 3 en 3, forma que corresponde a la idea de considerar “cada 3 saltos”. Finalmente hace explícito que hay dos métodos y no sabe cuál es el correcto:

> *Pero también podría ser, aquí sí hay dos métodos, 3, el doble 6, 5, el doble 10, pero eso no porque se pasaría mucho y estamos hablando de que se llevan por 2 (...) esto no ayuda a mi mente, ¡estoy muy confundida! (...)*

Mariana ve el problema desde dos perspectivas, aditiva y multiplicativa, y encuentra que no son compatibles: intuye la conservación de las razones internas, pero ésta implica que las diferencias no se conserven, lo cual, al parecer, también considera necesario. No dispone de un medio de control que le permita desechar alguna de las alternativas. El recurso a un dibujo, que rehusó, podría haberle sido de gran ayuda para comprender que, en estas situaciones, las diferencias no se conservan.

En el problema anterior (3s, 6v = 5s, x), pudo identificar mentalmente un valor unitario (“las varas eran de la mitad de los saltos”), y probablemente este valor justificó para ella que las diferencias no se conservaran. Ahora no muestra ninguna intensión de establecer el valor unitario, quizá porque éste es incalculable para ella (5/3).

Como veremos enseguida, para algunos alumnos, el paso por el registro gráfico fue de gran ayuda: fue en éste que identificaron, si no directamente la pertinencia de la conservación de las razones internas, sí la necesidad de conocer el valor unitario, y, eventualmente, a partir de éste, pudieron entonces inferir la posibilidad de conservar la suma.

*Relaciones entre los procedimientos internos (I) y el valor unitario (VU)*

Los problemas difíciles de este grupo (13 y 15) evocan la igualdad de dos valores unitarios: las porciones de pastel por niño en cada reparto deben ser iguales, los saltos deben ser del mismo tamaño.

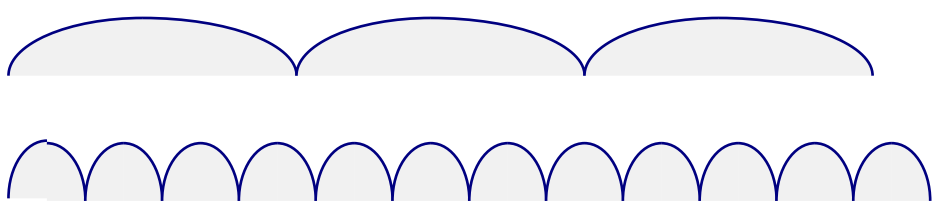
Por lo tanto, en estos problemas, recurrir a los procedimientos internos (conservar la suma o las razones internas) para establecer que "si a *n* corresponde *m*, entonces a *kn* corresponde *km*", implica esta vez considerar que los cocientes de las divisiones "n unidades entre m" y "kn unidades entre km" son iguales, <u>sin resolver las divisiones</u>, es decir, implica anticipar que los valores unitarios que se desprenden de cada una de las dos relaciones son iguales, aun cuando éstos no se conocen, y posiblemente ni siquiera se saben calcular. Ésta es probablemente la anticipación que logran hacer los niños que recurrieron directamente a la conservación de las razones internas y es a la vez, como veremos, aquello que se dificulta a varios de alumnos que no lo hicieron así.

<u>a) Procedimientos CS o CRI, independientemente del valor unitario</u>

La mayoría de los niños que resolvieron el problema 17 (3s, 5v = 12s, x) recurriendo a la conservación de las razones internas (12 saltos es 4 veces 3 saltos) lograron trabajar sin determinar el valor unitario (un salto = 5/3 de vara) y, excepto en un caso, prescindieron de la representación gráfica. Veamos aquí este caso.

- Verónica (4º grado)

La primera respuesta de Verónica a este problema es "60 varas" (12 varas por 5), como si cada salto midiera 5 varas (reducción del problema). Sin embargo, cuando se aclara el problema rectifica. Dibuja tres saltos, y abajo 12 saltos más pequeños que los anteriores.

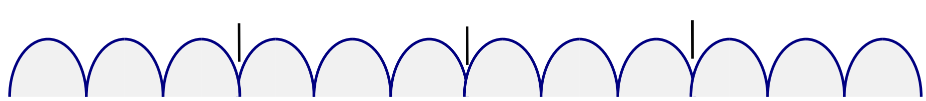


*E: (...) Aquí están los saltos, vamos a suponer que estos saltos …(los primeros 3)… y estos saltos …(los 12)…son del mismo tamaño, entonces, ¿cuántas varas habrá avanzado por todos?"*

*Ver. "<u>Ah, son iguales</u>… 20"*

*E: "¿20? ¿tú crees que 20? ¿cómo supiste que 20?"*

*Ver: "Porque como dijiste que vamos a suponer que éstos …(los 12 saltos)… son del mismo tamaño …(que los 3 saltos que hizo primero)… aquí son 3 saltos …(separa de tres en tres, con rayas, los 12 saltos)… y 3 saltos y 3 saltos y 3 saltos, como aquí son 5 varas ….(en los primeros 3 saltos de los 12)… son 5, 10, 15 y 20"*



En cuanto se aclaró que los saltos eran todos del mismo tamaño, Verónica pudo establecer y usar la relación constante “por cada 3 saltos, 5 varas”, sin necesitar determinar el número de varas por salto

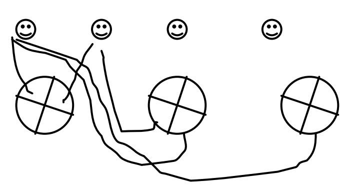
Sin embargo, en este problema no todos los niños lograron prescindir del valor unitario como lo hizo Verónica. Como veremos en otro apartado, algunos buscaron el valor unitario, y, al no poderlo determinar, optaron por una solución singular: introdujeron dos valores unitarios: saltos grandes y chicos, o bien, dos unidades de medida, por ejemplo saltos de una vara grande y saltos de tres varas chicas.

<u>b) Procedimientos CS o CRI, sólo si se conoce el valor unitario</u>

Otros alumnos mostraron que para recurrir a los procedimientos internos (la conservación de la suma o de las razones internas) en los problemas de reparto, necesitaron conocer el valor unitario. Veamos un ejemplo.

- Problema 13 (3 pasteles, 4 niños = x pasteles, 16 niños)

Itzel, 4º grado

> *It: (Dibuja 4 niños; enseguida, abajo del dibujo de los niños, hace 3 círculos que divide en 4 partes. Distribuye las partes entre los niños, dando a cada niño un cuarto de cada pastel.)*
>
> 
>
> *It: (En el extremo inferior derecho del dibujo, escribe) “tendrían que partir en 4 cada pastel”. (Inmediatamente después dibuja 16 niños en dos filas de ocho”. Se detiene un momento y observa los dibujos. A continuación, agrupa a los niños de 4 en 4 y escribe en cada uno 3 pasteles.)*
>
> ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
>
> *3 pasteles 3 pasteles*
>
> ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
>
> *3 pasteles 3 pasteles*
>
> *It: (Determina el total de pasteles sumando 4 veces el 3, obtiene 12 pasteles)*
> *E: ¿12 pasteles?, ¿por qué?*
> *It: Porque aquí (señala el dibujo de 4 niños) es igual, son 4 niños y tienen que partir en 4, cada pastel y entonces aquí (señala el dibujo de 16 niños) volví, como son 3 pasteles aquí (señala el dibujo de 4 niños), entonces conté 4 y le puse 3 pasteles y así.*

Notemos que una vez que Itzel ha logrado determinar gráficamente el valor unitario, no lo itera 16 veces para conocer el número de pasteles para 16 niños, como correspondería al procedimiento VU. En lugar de ello, decide asignar tres pasteles a cada cuatro niños, mostrando con ello que pudo considerar la relación "tres pasteles por cada 4 niños" hasta que conoció el valor unitario que le corresponde. Parece que ella necesitó conocer cuánto toca a cada niño (a nivel gráfico) para poder estar segura de que, al dar tres pasteles a cada 4 niños, a todos les toca lo mismo.

En el problema 12 (1p, 4n) = (x, 16n), fueron más los niños que recurrieron a las razones internas y son menos los que recurrieron al método del valor unitario, es decir, a buscar la porción de pastel por niño y después iterarla 16 veces. Dado que en este problema visualizar el valor unitario es mucho más fácil que en el que vimos anteriormente (la fracción es unitaria), puede suponerse que, efectivamente, para algunos niños, establecer en estos problemas que el cociente de la división n:m es igual al de una división kn:km, requiere, en un primer momento, de conocer ese cociente.

*Comentario*

Cuando el problema evoca la igualdad de valores unitarios (porciones de pastel iguales, saltos del mismo tamaño) la decisión de recurrir a la conservación de las razones internas se revela más difícil que la de buscar un valor unitario; exige trabajar con un valor unitario desconocido, determinado por una condición. Así, es necesario considerar que, independientemente de "cuánto toque a cada uno", a *kn* niños les tocará *k* veces lo que toca a *n* niños.

Esta propiedad (m:n = km:kn), junto con otras relacionadas con ella (si el dividendo aumenta n veces, también el cociente aumenta n veces, o si el divisor aumenta n veces, el cociente disminuye n veces), no suelen estudiarse en la escuela, aunque son objeto de aplicaciones diversas, por ejemplo, para simplificar divisiones eliminando los ceros, o para realizar divisiones con decimales corriendo el punto o, en otro ámbito, al estudiar la equivalencia de fracciones.

El interés didáctico de esta propiedad radica, además de en las aplicaciones anteriores, en que favorece una comprensión más profunda de la operación división, a la vez que permite desarrollar un trabajo con razones racionales, previamente a conocer los números racionales con los que se expresan los valores unitarios.

### 2.3.3) La variable "reparto/ conmensuración" en la dificultad para determinar un valor unitario racional

En principio, ninguno de los problemas planteados exige determinar un valor unitario racional puesto que los problemas en los que la razón externa es racional, la interna es entera (o, en dos casos, igual a 3/2) y por lo tanto pueden resolverse sin determinar el valor unitario, mediante procedimientos internos. Sin embargo ya vimos que, cuando el texto evoca una igualdad de valores unitarios (a diferencia de cuando presenta una regla de correspondencia "n por cada m") varios alumnos no identificaron la posibilidad de cuantificar las razones internas entre los términos y se dieron a la tarea de determinar los valores unitarios no enteros. Para casi todos los que hicieron esto, los problemas fueron difíciles.

Analizaremos aquí por qué fue más difícil determinar un valor unitario racional en los problemas de conmensuración (saltos y varas) que en los de reparto. Consideraremos los problemas de reparto de pasteles (del grupo 2) y los de saltos que se miden con varas (grupos 2 y 3)

| Pasteles - niños | | Saltos –varas | |
|---|---|---|---|
| 12<br>1p, 4n<br>x, 16n | 13<br>3p, 4n<br>x, 16n | 15<br>3s, 5v<br>12s, x | 16<br>4s, 6v<br>6s, x |

*Los problemas de reparto: partición de la unidad*

En los problemas de reparto, para determinar el valor unitario, la mayoría de los niños recurrió a representaciones gráficas: representan los pasteles, con círculos casi siempre, con rectángulos a veces. Naturalmente, el problema 12 en el que la fracción en juego es unitaria fue más sencillo que el 13. En este último, repartir 3 pasteles entre 4 fue difícil para algunos niños, lo que permite ver que han tenido pocas experiencias de este tipo en la escuela. Pocos partieron cada pastel en cuatro, asignando un cuarto de cada pastel a cada niño. Varios dividieron cada pastel entre dos, después entre cuatro, para finalmente encontrar el resultado ½ + ¼ a nivel gráfico. Finalmente, otros mostraron dificultades mayores, por ejemplo, Alberto (5º grado), quien con dificultad logró partir los pasteles en cuatro y, de cada pastel, asignó ¾ a cada niño con lo cual había repartido a tres niños, le faltaba el cuarto niño, le quedaban tres cuartos, uno en cada pastel, pero no le resultó evidente que esos tres pedacitos separados fueran la misma cantidad que los tres pedacitos juntos que tomó de cada pastel. Sobre la marcha, ante la dificultad de hacer la repartición, Alberto intentó una segunda forma de determinar el valor unitario: hizo la división numérica, pero invirtió los términos, dividió el número mayor entre el menor, 4:3 = 1.3. Naturalmente, no logró interpretar este resultado en el contexto, y volvió a los dibujos para finalmente encontrar el resultado ¾.

Pese a dificultades como la anterior, de los niños que buscaron el valor unitario en el problema 13 (3p, 4n = x, 16n), únicamente dos no lograron determinarlo. Los demás lo lograron y obtuvieron el resultado del problema, pero no todos por el mismo camino: dos lo hicieron siguiendo el método clásico del valor unitario: iteraron 16 veces la porción por niño (1/4 o 3/4), y así determinaron que se necesitaban 12 pasteles. Otros dos, en cambio, una vez que tuvieron el valor unitario, al abordar la cuestión de cuántos pasteles dar para 16 niños, identificaron, de alguna manera, la razón interna entre las dos cantidades de niños (4 veces). Ya vimos estos procedimientos en el apartado anterior.

*Los problemas de conmensuración: búsqueda de un factor*

A diferencia de los problemas anteriores, estos no sugieren la idea de “repartir varas entre saltos”, sino más bien, propician la búsqueda de la cantidad de varas que repetida 3 veces dé 5 varas, en el problema 15, o la búsqueda de la cantidad de varas que repetida 4 veces dé 6 varas, en el problema 16. Esta diferencia implica que en estos últimos problemas, el valor unitario (cantidad de varas por salto) no puede ser construido poco a poco mediante la partición progresiva de unidades, como lo fue en los problemas de reparto. Con ello se pierde la posibilidad de obtener primero fracciones unitarias, y después considerar la unión de las partes.

Así, los problemas de saltos que se miden con varas llevan a buscar los valores unitarios de una manera cualitativamente distinta: se debe determinar una medida que satisfaga una ecuación multiplicativa: *a* veces $x$ varas = *b* varas.

Los niños que decidieron obtener el valor unitario optaron por uno de dos caminos: el menos complejo consistió en recurrir al algoritmo de la división con cociente decimal (5 varas entre 3 y 6 varas entre 4). Se enfrentaron entonces con dos dificultades: una, porque la división 5:3 no tiene un cociente exacto. Recordemos el caso de Arturo que mostramos en otro apartado, quien procede mediante aproximaciones sucesivas y después de enmarcar el resultado entre 1.66 y 1.67 llega a:

1.66.7
X3
5.00.1

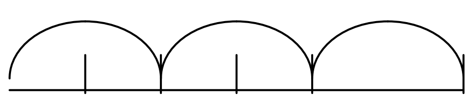
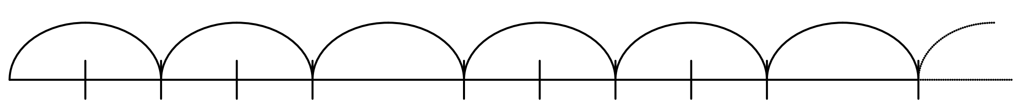
Esta resolución refleja, por cierto, una buena comprensión de la densidad los decimales[3].

La otra dificultad fue interpretar un cociente decimal aplicado a la unidad “varas”. Algunos niños asociaron la parte decimal con centímetros. Al introducir esta tercera unidad, el problema se volvió confuso, por ejemplo, Alberto divide 5 varas entre 3, comete un error de cálculo y obtiene como cociente 1.8. Dice entonces:

> *Alb. (...) o sea, yo saqué esto (1.8) sería lo que cada salto midió, o sea, una vara midió 1.8 cm. O sea una vara, por ejemplo aquí está el camino y luego va a avanzar 1.8 (dibuja una línea como de 2cm).*

Veamos ahora el segundo camino: los alumnos se proponen encontrar, mediante ensayo y error, la cantidad (fraccionaria) de varas por salto tal que 3 saltos den 5 varas, o tal que 4 saltos den 6 varas. Los niños que lo intentan muestran que consideran que el número de varas por salto debe ser entero: prueban una, dos o tres varas por salto. Al constatar que esto no corresponde al cociente (puesto que, por ejemplo, con 2 varas por salto, a 3 saltos corresponden 6 varas y no 5), tienden a concluir que los saltos NO pueden ser del mismo tamaño. La posibilidad de que exista un salto que mida una cantidad no entera de varas, queda completamente descartada. Ciertamente, determinar estas fracciones no es sencillo. Veamos algunos ejemplos.

Itzel (4º grado) para 3 saltos, 5 varas = 12 saltos, x:

> *Itz: (Dibuja 3 saltos y en seguida, una línea que va de principio a fin de los saltos; divide la línea para marcar las varas de la siguiente manera:*
>
> 
>
> *Itz: (Observa sus resultados por un momento y repite el dibujo anterior 4 veces)*
>
> 
>
> *Itz: (Cuenta las varas y escribe como resultado) “20 varas”.*

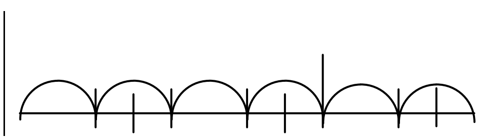
[3] En otra experiencia con un grupo de 5º grado (Solares, 1999), frente a un problema similar, observamos que los niños se desconciertan al observar que, por ejemplo, el producto por 1.66 resulta chico, mientras que por 1.67 resulta grande. No consideran la posibilidad de utilizar milésimos.

> *E: 20 varas. ¿Me explicas por qué?*
>
> *Itz: <u>Como 5 no es un número par</u> (señala las 5 varas de la redacción del problema) <u>no puede saltar igual</u>, entonces aquí da saltos nada más serían 4 (señala las varas que están en los dos saltos de su primer dibujo)*
>
> *E: ¿En dos saltos avanzó 4 varas?*
>
> *Itz: ¡Sí! y como no es número par, entonces aquí nada más puede ser una. (señala la vara del salto 3 de su primer dibujo) Entonces aquí (señala las varas de su segundo dibujo y comienza a contarlas) 1, 2, 3, 4...19, 20.*

Itzel logra identificar la relación constante "por cada 3 saltos, 5 varas" y, gracias a que la razón interna es entera, puede llegar a un resultado correcto. Para ella la constante no puede ser el valor correspondiente a un salto, pero sí puede ser el valor correspondiente a 3 saltos.

- Itzel (4º grado) para 4 saltos, 6 varas = 6 saltos, x

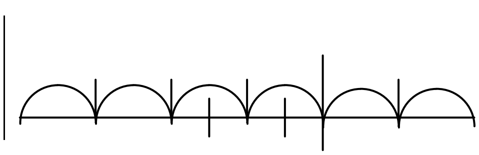
Dibuja 4 saltos, luego marca dos varas por salto y obtiene 8 varas y no seis. Opta entonces por hacer la división numérica 6:4 probablemente para encontrar el número de varas por salto, pero la abandona debido a que no sabe que hacer con el primer residuo. Concluye: "*Seis entre cuatro no se puede, porque si aquí le pongo dos (dos varas por salto) tendría que ser ocho*" Termina con una solución gráfica en la que nuevamente hay dos tamaños de unidad y, gracias a la distribución regular de varas chicas y grandes, logra llegar al resultado correcto: seis saltos, nueve varas:



- Miguel (4º grado), para 4 saltos 6 varas

Dibuja 4 saltos, luego, divide cada salto en dos y obtiene 8 varas y no 6, como él desea. Opta entonces por poner varas chicas y grandes, pero no los distribuye como Itzel: le quedan dos saltos juntos de una vara cada uno y dos saltos de dos varas chicas cada uno, con lo cual ya tiene 6 varas.

Añade entonces dos saltos, del tamaño de los dos primeros, de una vara cada uno.



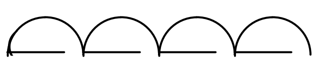
Al hacerle ver que los saltos deben ser del mismo tamaño, al igual que las varas, Miguel regresa al primer estado (4s, 6v) y exclama *"¡pero, ¿cómo logró seis varillas?!"*. Muestra en seguida que partiendo cada salto en dos, se obtienen 8 varas, y que si se quieren 6 varas, "tendrían que ser sólo tres saltos", es decir, los saltos pueden medir una vara, o dos varas, pero no una vara y media.

Miguel e Itzel, buscan de entrada un tamaño de vara que sea una fracción unitaria del salto, es decir que quepa un número entero de veces en cada salto. Después de constatar que dicho tamaño no existe, ambos encuentran la salida de usar unidades de distinto tamaño, pero únicamente Itzel logra identificar, a nivel gráfico las razones "por cada 3 saltos, 5 varas" y "por cada 2 saltos, 3 varas".

Veamos ahora el caso de dos niños que, no sin dificultad, logran lo que Miguel e Itzel consideraron imposible: determinar gráficamente un tamaño de vara mayor que medio salto pero menor que un salto.

- Francisco (6º grado) para 4 saltos, 6 varas

Usó al inicio una estrategia aditiva y encontró como resultado 8 varas para seis saltos. Cuando le pedimos que hiciera una representación gráfica de la situación, se dio a la tarea de determinar las varas que corresponden a un salto, y, al igual que Miguel e Itzel, dividió cada uno de los 4 saltos en dos, obteniendo 8 varas en lugar de 6. Él también expresó que no era posible obtener seis varas, pero, al insistirle que lo intentara, hizo ajustes, aumentó el tamaño de las varas y logró una aproximación gráfica al valor unitario:

> *(...)*
>
> 
>
> *(Cuenta las cuatro varas, y cuenta los tramos que faltan para completar cada salto a razón de dos por una vara, de manera que obtiene 6 varas.*

Esta representación gráfica permite a Francisco aumentar dos saltos más con sus varas respectivas con lo que obtiene sin dificultad 9 varas en total. Francisco logró determinar el valor unitario, el número de varas por salto, a nivel gráfico. No necesitó expresar este valor con una fracción. El tamaño de sus saltos se expresa con números enteros, es de una vara, más *una vara por cada dos saltos*.

El desenlace llama la atención: recuerda su primer resultado (8 varas) obtenido mediante estrategia aditiva, y decide entonces modificar la forma en que contó los pedacitos de vara para obtener nuevamente el resultado de ocho varas.

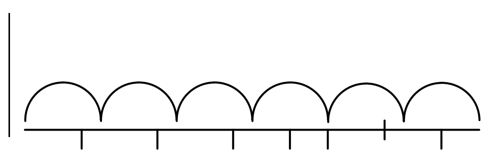
- Alberto (5º grado) para 4 varas, 6 saltos

Alberto ha tendido a calcular el valor unitario mediante la división de los términos, obteniendo un número decimal. Lo hizo en el problema 13 de reparto de pasteles (3 pasteles, 4 niños) en el que invirtió los términos de la división, no pudo interpretar el resultado y cambió de procedimiento. Lo hizo también en el problema sobre saltos y varas (3s, 5v) en el que encontró el valor de 1.8, y tuvo dificultad para interpretar ese número en el contexto.

Lo hace ahora nuevamente: divide 6 entre 4, encuentra 1.5. Después multiplica ese valor por 6, obtiene 9, incluso verifica que 1.5 por 4 dé 6. Aparentemente hay aquí un buen manejo del valor unitario "un salto = 1.5 varas"

Sin embargo, cuando le pedimos que hiciera una representación gráfica de la situación muestra que, nuevamente, no logra interpretar su medida de 1.5 varas por salto. De hecho, inicia la búsqueda como lo hicieron Itzel, Miguel y Francisco: prueba varas del tamaño de un salto, salen 4 varas para 4 saltos, prueba varas del tamaño de medio salto, salen 8 varas. Finalmente, recuerda que en el reparto de 3 pasteles entre 4 niños tocaba más de la mitad, pero menos del entero e intenta dibujar varas de más de la mitad de un salto, pero menos de un salto completo.

A diferencia de Francisco, Alberto sí yuxtapone sus varas, pero, al hacerlo, va modificando su tamaño sin darse cuenta de la manera que obtiene 8 varas para seis saltos:



Entonces, observa que 8 varas es el resultado de sumar 2 varas a 6 varas, y justifica su nuevo resultado mediante un razonamiento aditivo: como hay dos saltos más, pues dos varas más.

*Comentario*

Los procedimientos que hemos analizado aquí ponen de manifiesto la influencia, que ya habíamos señalado[4], del contexto y de las magnitudes, sobre la forma de determinar un valor unitario fraccionario. Se registran dos formas de aproximarse a dicho valor, mediante particiones de las que se desprenden fracciones unitarias que después son sumadas; o mediante la búsqueda de una medida $x$ que satisfaga la ecuación multiplicativa *n veces* $x$ *unidades = m unidades*. Ésta última tarea resultó difícil para los alumnos, quienes tendieron a considerar que dicho valor no existe, o, en el mejor de los casos, lo aproximaron a nivel gráfico, pero no lo expresaron con fracciones[5]. En este último caso, pudo identificarse, nuevamente, cierta tendencia a utilizar razones del tipo *n* por cada *m*, con *n* y *m* enteros.

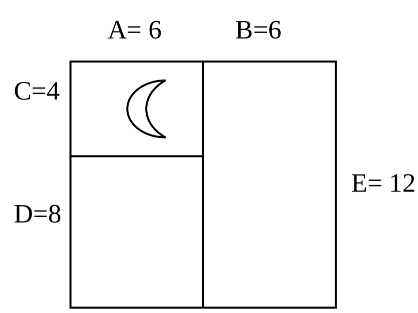
### 2.3.4) La dificultad particular de los problemas de escala

**Problema 22**
Razón externa entera

(4→8; 6→x; 8→y; 12→z)

**Problema 23**
Razón externa no entera

(4→6; 6→x; 8→y; 12→z)




En estos problemas, a diferencia de los anteriores, las magnitudes en relación son del mismo tipo, la relación expresa esta vez una transformación, un agrandamiento. Este cambio en la variable magnitudes dio lugar a procedimientos y a dificultades de índole distinta a los de los problemas anteriores.

En el problema 22, la razón externa entera es la más simple posible (4→8), no obstante, resultó uno de los problemas más difíciles del grupo 1 (razón externa entera), después del de la receta. El problema 23, con una razón externa racional (4→6) fue el problema más difícil del conjunto de problemas, y en particular fue más difícil que el problema 16, de los saltos, en el que la razón externa también es 4→6. Veamos ahora cuáles fueron los procedimientos.

[4] En el capítulo 1, apartado 4, condición 2.1 y apartado 5.3.2, condición 2.2.
[5] Estos resultados motivaron el estudio de Solares (1999) que ya comentamos en el capítulo 1.

| | | VU | E | I | R | AD | Total Aciertos | Total errores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RE: E | 22<br>4cm→8cm<br>6cm→x<br>8cm,→y<br>12cm→z | | **9/13** | | | 4/13 | 9/13 | 4/13 |
| RE: NE | 23<br>4cm→6cm<br>6cm→x<br>8cm,→y<br>12cm→z | | 2/9 | | | **7/9** | 2/9 | 7/9 |

*El problema 22, con razón externa entera (grupo 1) .*

Las distintas resoluciones que se obtuvieron para este problema pueden jerarquizarse a partir de las condiciones de la linealidad que los niños van logrando asumir:

Itzel (4º grado) no determina previamente las medidas, las va estimando conforme va haciendo la figura. Algunas, las que corresponden a los últimos segmentos, las infiere. Al hacer estas estimaciones no se fija en las relaciones internas entre los lados de la figura original, de manera que a dos lados iguales les corresponden lados desiguales (A' medirá 7cm mientras que B' medirá 8cm), un lado mayor que otro en la figura original, será menor en la copia (C' = 8cm y A' = 7cm), un lado permanecerá del mismo tamaño (D' = 8cm).

Al hacerle ver algunos de estos problemas, Itzel no identifica contradicciones, dice que lo hizo así para que le quedara bien la figura y, al preguntarle si su copia podría ser una fotografía del original, afirma que sí.

Si bien Itzel tuvo cierta dificultad en los cuatro problemas anteriores del grupo 1, logró resolver tres de ellos con apoyo en representaciones (no logra resolver el de la receta, en el que por cierto, aplica la razón externa "por 2", misma que aquí no aplica).

Así, para Itzel (4º grado), las medidas de la figura ampliada deben aumentar, pero los aumentos son estimados, la relación no es creciente puesto que a una medida mayor que otra le corresponde un aumento menor, no hay una relación funcional desde el momento en el que a una misma medida le corresponden dos distintas.

Miguel (4º grado) suma 8cm a todas la medidas de la figura original y, al observar que la figura se deforma, no se muestra desconcertado, hace algunos ajustes para que la figura pueda cerrarse. De los problemas anteriores del grupo 1, Miguel sólo tuvo dificultad en el de la receta, en el que consideró los valores dados como unitarios. También para él éste fue el problema más complejo, pero, a diferencia de Itzel, él ya identifica la necesidad de una relación constante entre los dos conjuntos de medidas, la relación que obtiene es funcional y creciente, pero usa una constante aditiva.

En los procedimientos de los demás alumnos se asume una constante multiplicativa, pero de distintas maneras. Mariana (6º grado) y Julio (5º grado) consideran, implícitamente, que las razones <u>internas</u> deben conservarse y es únicamente cuando éstas no son enteras que conservan la diferencia.

Mariana propone A' = 10cm como imagen de A = 6 cm, y explica que, como A (6cm) es mayor que C (4cm) por 2 cm, entonces, A' debe ser mayor que C' (8cm) por 2 cm, es decir, debe medir 10cm.

| | Fig 1 | Fig 2 |
|---|---|---|
| C | 4 cm | 8 cm |
| | + 2 cm | +2 cm |
| A | 6 cm | 10 cm |

Sin embargo, propone D' = 16cm, porque D (8cm) es igual a C + C (4cm + 4cm), entonces D' debe ser C' + C' (8cm + 8cm)

| | Fig 1 | Fig 2 |
|---|---|---|
| C | 4 cm | 8 cm |
| | + 4 cm | + 8 cm |
| D | 8 cm | 16 cm |

Y también propone E' = 20cm, porque E (12 cm) es igual a dos veces A (6 cm), y como para ella A' = 10cm, y E' debe ser A' más A', es decir, 20cm.

Es decir, cuando la razón interna no es entera, conserva la diferencia interna, y cuando la razón interna es "por 2", la conserva. Cuando hace la figura ampliada, las medidas no ajustan, por ejemplo, un lado del cuadrado, C' + D', mide 8 + 16 = 24cm, mientras que el otro lado, E', mide 20cm. Sin embargo, no cuestiona su procedimiento, simplemente ajusta las medidas para poder cerrar la figura. Mariana ha identificado al operador en algunos de los problemas anteriores, en los que éste conlleva un cambio de magnitud y por lo tanto su uso, sin abandonar el contexto, es más difícil. Resulta sorprendente que no lo utilice en este problema en el que el operador es sin dimensión (hacer dos veces más grande) y es además extremadamente simple (doble).

Julio (5º grado) hace exactamente lo mismo y, a diferencia de Mariana, se muestra muy desconcertado cuando ve que la ampliación se deforma, sin embargo, él también se limita a ajustar las medidas (este es el único problema de este grupo en el que Julio comete un error de procedimiento).

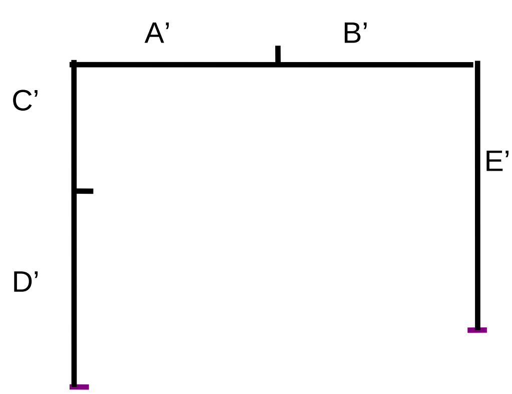
Finalmente, los nueve (de trece) niños que resuelven el problema identifican y aplican este operador aunque no todos usan explícitamente la multiplicación por dos. Para tres de ellos, Verónica (4º grado), Adriana (5º grado) y Francisco (6º grado), se trata más bien de *sumar* las medidas consigo mismas.

*El problema 23: razón externa racional*

Este problema se planteó únicamente a los nueve alumnos que pudieron resolver el anterior. De éstos, siete sumaron dos centímetros a todas las medidas. Los otros dos, ya lo vimos en el apartado 2.1, utilizaron el operador externo, uno lo descompuso en 4→2→6, el otro logró determinar su valor decimal: X1.5

Una diferencia entre los niños que no lograron resolver el problema anterior de escala con los que no pudieron resolver éste, fue la reacción que manifestaron al constatar que la figura obtenida se deforma: los alumnos que en el problema 22 usaron una estrategia incorrecta, por lo general aditiva, en el momento de trazar la figura y observar que las partes no embonaban, después de revisar sus mediciones, tendieron a ajustar las longitudes para lograr cerrar el "cuadrado". A diferencia de ellos, los que resolvieron bien aquel problema pero que en el 23 usaron una estrategia aditiva, se muestran, casi todos, muy desconcertados al observar que las partes no embonan. Estos niños manifiestan una necesidad que aún no lo es para los otros: la estrategia escogida *tendría que* producir una figura en la que las partes embonen, y si esto último no sucede es porque posiblemente algo anda mal en la estrategia. Veamos un ejemplo:

Nancy (6º grado) aumenta 2cm a las medidas. Traza las líneas en el siguiente orden: A', B', E', C', D' y obtiene la siguiente figura:



> *Nancy: "Es que aquí …(línea **E'**)… aumentó más que éste …(líneas **C'** y **D'**)… entonces no se puede hacer bien la línea recta" (...)*
>
> *E: "¿Tú qué crees que esté pasando?"*
>
> *Nancy: "Aquí en la foto del libro la línea **E** mide 12 y entonces se amplía a 14… y… la línea **C** mide 4 y se amplía a 6 y la línea **D** mide 8 y se amplía a 10, entonces las dos juntas, la **C** y la **D** serían 16 centímetros en la otra bandera y en la línea **E** solamente tenemos 12 centímetros y como se le aumentan 2, serían 14 y no alcanzaría"*

Nancy identifica de manera implícita que su regla, aumentar 2cm, no conserva la suma, es decir, $f(4) + f(8) \neq f(12)$. La estructura de la figura ayuda a ello. En seguida, le propusimos que comparara su solución con la que propuso para el problema anterior, en donde duplicó las medidas:

> *(...)*
>
> *E: "Está raro ¿verdad?, porque las medidas ya las verificaste y están bien. La otra sí nos salió pero ésta no (…) (le muestra el dibujo que hizo para el problema 22)… Vamos a ver si hiciste lo mismo acá. Acá la línea **C** debe medir 8 centímetros, o sea ¿cuántos más que la original? Cuatro más, ¿cierto?"*
>
> *Nancy: (Asiente)*
>
> *E: (Le muestro la línea **A**) "¿Acá le sumaste cuatro?, a seis le sumaste 4?"*
>
> *Nancy: "No (...) porque como acá en la línea **C** se doblaba, entonces las demás líneas también las doblé y… los centímetros" (expresa preocupación) (...)*

Posiblemente es hasta que los alumnos consideran que las piezas *tendrían que* embonar, que un problema de escala, diseñado de manera que permita poner en evidencia los errores, puede ser fecundo para propiciar la puesta en duda de las estrategias aditivas, y la búsqueda de una nueva estrategia.

*Comentario*

En varios estudios realizados con adolescentes se ha identificado la mayor complejidad de los problemas de escala en comparación con otros. Hart (1988) menciona como uno de los motivos de la dificultad, la petición misma de hacer una figura "con la misma forma", y más específicamente, un rectángulo con la misma forma. Al parecer esta consigna no resulta del todo clara para los estudiantes, puesto que un rectángulo siempre tiene la misma forma que otro, en el sentido de ser ambos rectángulos...

Kukelmann relaciona la complejidad de la escala con el hecho de que en estos problemas es más difícil realizar procedimientos llamados "building up strategies" (por ejemplo, pasar de 4cm a 6 cm, obteniendo la imagen de 2 cm y después sumándola a la de 4cm) que en problemas en los que se relacionan dos magnitudes distintas como los de recetas.

Las resoluciones de los niños que entrevistamos permiten entrever otros factores que probablemente también intervienen en esta mayor dificultad.

En primer lugar, ya lo vimos, en este problema no aparece una sola vez el procedimiento del valor unitario, procedimiento que, sin embargo, se revela eficiente en los otros problemas. Probablemente esta ausencia se debe a algunas de las mismas características que vuelven difícil al problema de la receta: a diferencia de una relación como 4 cajas→8 chocolates, la relación 4cm→ 8cm no sugiere, en alguna parte, o en algún momento, que los 8 cm se *distribuyan* entre los 4 cm, es decir, esta relación no cuenta con el soporte físico, con la existencia supuesta del valor unitario que encontramos en algunos problemas. Ni siquiera se puede pensar que la figura en la que C mide 4cm está hecha por “cuatro figuritas”, como el pastel para 4 que Verónica se representó como formado por 4 rebanadas. Esta observación confirma y ayuda a explicar el factor de dificultad identificado por Kukelmann.

A lo anterior se suma el hecho de que las magnitudes y las unidades sean del mismo tipo, lo cual facilita la idea de *agregar*. En el problema de la receta algunos niños descartaron explícitamente la idea de sumar 2 a todos los ingredientes por el hecho de que unos fueran tazas y otros fueran gramos, además de que las cantidades eran muy distintas entre sí.

Así, identificar la pertinencia de un valor unitario constante es más difícil en este problema que en cualquiera de los otros y esto puede explicar en parte su dificultad.

Por otra parte, el hecho de que varios alumnos, en el problema 22, no hayan recurrido tampoco al operador externo que es muy simple (4→8 = X2) pone de manifiesto la complejidad conceptual de este recurso.

Recordemos que dos alumnos, Mariana (6º grado) y Julio (5º grado), recurrieron a la conservación de las razones internas cuando éstas fueron enteras y más específicamente, cuando fueron “el doble”. Considerando que la relación externa también es “el doble”, al menos para estos niños es más natural pensar en la conservación de las razones internas que en el operador que transforma. El propósito de preservar la forma pasa primero por atender a las relaciones internas que a la externa. Esta preferencia puede estar propiciada por el hecho de que la figura que va a ser ampliada constituye una configuración, o un “constructo”, en el sentido de Freudenthal, una totalidad definida por sus relaciones internas. En los problemas anteriores, los dos valores de una misma magnitud existen independientemente uno del otro, (4 cajas y 7 cajas, 3 saltos y 5 saltos; 4 personas y 6 personas), mientras que en éste, las medidas 4cm, 6cm, 8cm, etc. *forman parte* de una figura.

G. Ricco (1982), afirma, refiriéndose al contexto de magnitudes distintas:

> *“(...) la posibilidad de despejar el operador función, que se presenta como la segunda eventualidad para los pequeños para establecer la constante, lleva una puesta en relación de los datos mucho más compleja (...). En efecto, la utilización de cualquier operador multiplicativo implica ya no razonar sobre las diferencias entre los pares, sino darse el operador que genera los pares”.*

Los resultados obtenidos en el problema 22 sugieren que esta dificultad se manifiesta incluso en el caso más favorable para el uso de un operador externo, aquél en el que las magnitudes son de la misma naturaleza.

Cabe señalar que en el trabajo sobre la multiplicación en la escuela primaria, sobre todo en los grados intermedios en los que se estudia la multiplicación y la división, es raro encontrar situaciones en las que dos conjuntos de cantidades de la misma naturaleza se relacionen por un número de veces constante. Considerando el difícil proceso para identificar el operador constante en una situación de proporcionalidad, parece conveniente revisar este desequilibrio en los problemas que se plantean. En el capítulo III estudiamos una situación de este tipo (reglas de cambio) en tercer grado de primaria.

## *2.4 Comentario sobre las resoluciones a los problemas de valor faltante.*

Hemos destacado la influencia de ciertas variables de los problemas de valor faltante sobre el tipo de procedimiento utilizado por los alumnos y hemos identificado circunstancias en las que los alumnos manejan razones entre cantidades enteras, para dar cuenta de valores unitarios o de operadores fraccionarios que aun no pueden expresar. A continuación, comentamos brevemente algunos de estos resultados.

*1) Algunas consideraciones de orden didáctico*

- Acerca los procedimientos internos (CS y CRI)

El bajo grado de dificultad que mostraron los problemas en los que la razón interna es entera y en los que se plantea una regla de correspondencia (7 y 21), sugiere que estos problemas podrían introducirse relativamente pronto en la enseñanza, en segundo o tercer grado de primaria. Estos problemas favorecen la utilización de unidades compuestas y pueden ser adecuados para propiciar el paso de la conservación de la suma (CS) a la conservación de las razones internas (CRI). Las variables razón externa entera o no y magnitudes de misma naturaleza o no, no afectaron, en estos casos, el grado de dificultad.

Por otra parte, cuando la razón interna fue entera, pero la formulación de la constancia evocó valores unitarios iguales (problemas 12, 13 y 15), la dificultad que demostraron los alumnos que intentaron determinar valores unitarios fraccionarios, contrastó con la facilidad con que resolvieron quienes recurrieron a los procedimientos internos (conservación de la suma o de las razones internas) . Entre ambos extremos, algunos alumnos lograron identificar, en el registro gráfico, razones entre cantidades enteras, y las utilizaron para encontrar el valor faltante, evitando la determinación de un valor unitario fraccionario. Con ello, lograron anticipar que el cociente de ***a:b*** es igual al de ***na:nb*** (con *n* número natural distinto de cero), sin necesidad de calcular dichos cocientes. Esta última es una propiedad de las razones.

En estas resoluciones podemos ver los primeros indicios de una razón funcionando como precursora de los números fraccionarios en su papel de valores unitarios. Cabe preguntarse si al propiciar en mayor medida procedimientos internos para la resolución de problemas como los anteriores y si, incluso, al hacer explícita en su momento la propiedad en cuestión, se facilitaría no únicamente la resolución de estos problemas, sino también, más adelante, la comprensión de ciertas propiedades de las fracciones.

- Acerca del procedimiento VU

Asumir al valor unitario como la constante de una relación de proporcionalidad constituye un procedimiento importante en el nivel de la escuela primaria, debido a su aplicabilidad general (no depende, por ejemplo, de que las razones internas sean enteras, como los anteriores), ya que es menos difícil de comprender y de propiciar que otros procedimientos generales, en particular menos difícil que el que consiste en igualar los productos “cruzados” y, finalmente, a que posiblemente constituye un antecedente de la noción de operador multiplicativo constante.

En las resoluciones de los alumnos hemos visto que, aun cuando el valor unitario es entero, el grado de dificultad para decidir determinarlo se manifiesta muy sensible a diversas variables no numéricas, tales como: la forma de redacción del problema, la familiaridad con el contexto, el carácter discreto o continuo de la magnitudes, y sobre todo, el grado en que el valor unitario es evocado o no en el contexto.

La variante en la que el conjunto final es de dimensión mayor que uno demostró ser adecuada para disuadir la utilización de procedimientos aditivos “puros”. Si bien el único problema que incluimos con esta característica (problema de la receta) resultó difícil, comentamos ya la posibilidad de diseñar problemas más sencillos.

Cuando se trata de determinar valor unitario racional, más allá de dificultades previsibles (para repartir, para cuantificar las partes de unidad, para dividir con cociente decimal y para interpretar dicho cociente) comprobamos el efecto significativo de un cambio en el tipo de relación, de reparto a conmensuración, sobre la forma de obtener el valor unitario: mientras la primera relación favorece una determinación del cociente mediante la suma de fracciones unitarias, la segunda favorece la búsqueda del valor que satisface una ecuación multiplicativa. Estas dos variantes parecen propiciar *concepciones* distintas de la fracción, la fracción como partes de unidad, y como cociente.

- Acerca del procedimiento OP

Se confirmó la mayor dificultad conceptual intrínseca a este procedimiento. Observamos que aún los problemas que le son favorables, cuando la razón externa es homogénea, como el de la escala, el procedimiento del operador no fue frecuente. Tampoco se utilizó con la frecuencia que podría esperarse cuando el factor en juego fue el más simple posible: el doble.

Con respecto al operador racional, estudiamos en el capítulo 1 la complejidad que subyace y analizamos, así mismo, alternativas didácticas para introducirlo. Una de las que pareció mejor sustentada consiste en favorecer primero el recurso al valor unitario (1→b/a) y después definir al operador a partir de este: Xb/a con el sentido de la relación 1→b/a. Sin embargo, como pudimos observar en los resultados obtenidos aquí, en los problemas de escala ningún alumno recurrió al valor unitario: los pocos alumnos que lograron resolver, trabajaron directamente con los operadores.

Señalamos en otro lugar la necesidad de considerar en mayor medida problemas favorables al uso de un operador constante en la enseñanza que se imparte en la escuela primaria. Es probable también que, por lo menos para algunos alumnos, la solución que pasa por obtener el valor unitario sea más accesible y constituya una estrategia de base para establecer, más adelante, un operador externo constante, tanto si es natural como si es fraccionario. En la experiencia didáctica “Reglas de cambio” que reportamos en el tercer capítulo, volveremos a encontrar indicios de esta necesidad, para el caso de un operador natural.

- Acerca de los procedimientos aditivos

Algunos investigadores[1] han señalado que las estrategias aditivas no son únicamente características de un proceso evolutivo del razonamiento proporcional, sino que parecen estar latentes al mismo tiempo que los alumnos desarrollan procedimientos que asumen la proporcionalidad, y se manifiestan de manera reiterada cuando aparece una dificultad. En los resultados que hemos analizado pudimos comprobar en varias ocasiones lo anterior, al observar la facilidad con la que los alumnos optan en ciertas circunstancias por una estrategia aditiva, y también al identificar rasgos de esta estrategia en la variante del procedimiento del valor unitario que llamamos VU+DA (valor unitario con descomposición aditiva). Este hecho sugiere que no es suficiente con apoyar el desarrollo de

[1] Ver apartado ocho del capítulo 1.

procedimientos adecuados, es necesario ayudar a poner en evidencia, una y otra vez, la no pertinencia de los procedimientos aditivos en problemas de proporcionalidad.

*2) Efectos de las variables en los procedimientos.*

En el siguiente cuadro resumimos algunas de las relaciones que se observaron.

| Procedimiento | Se facilita si: | Con dificultades si | No aparece si |
|---|---|---|---|
| CS y CRI<br>(a, b) = (ka, kb) | La formulación es una regla de correspondencia<br>(x por cada y) **y**<br>la razón interna es entera | La razón interna es entera pero<br>No hay formulación como regla de correspondencia. | La razón interna es racional |
| VU<br>(a, b) = (1, b/a) | La formulación evoca igualdad de valores unitarios **y**<br>la razón externa es entera. | No hay formulación que evoque valores unitarios iguales **ó** las magnitudes son continuas **ó**:<br>la razón externa es racional (especialmente el caso de conmensuración) | No hay formulación que evoque valores unitarios iguales **y**<br>las magnitudes son de misma naturaleza. |
| OP<br>(a, b) = X b/a | Las magnitudes son de misma naturaleza<br>**y**:<br>el operador es entero<br>(se facilita sólo relativamente) | Las magnitudes son de misma naturaleza **y**<br>el operador es racional (3/2)<br>(muy pocos lo logran) | Las magnitudes son de distinta naturaleza |

## 3) Los problemas de comparación

En estos problemas las principales variables que hemos considerado (carácter numérico de las razones, naturaleza de las magnitudes y formulación de la constancia de la razón), influyen en la elección de un procedimiento determinado, de manera similar a como influyen en los de valor faltante. En un primer apartado destacaremos brevemente estas relaciones. Después, analizaremos las modalidades específicas que asume cada tipo de procedimiento en los problemas de comparación, destacando las relaciones entre los procedimientos. El subcapítulo se organiza en los siguientes apartados:

1. Tendencias generales
2. Problemas que plantean una regla de correspondencia "x por cada y".
   Procedimientos dominantes I
3. Problemas que apelan a la comparación de valores unitarios.
   Procedimientos I y VU
4. Problemas en los que las magnitudes son de misma naturaleza.
   Espacio para los procedimientos OP

### *3.1) Tendencias generales*

#### 3.1.1) Los problemas especiales

En los dos primeros problemas, ambos del contexto "reparto de pasteles" la comparación solicitada podía hacerse sin realizar operaciones numéricas (ver tabla 3.1).

En el problema 9 (3n, 1p) vs (5n, 1p) el número de pasteles es constante, varía la cantidad de niños. Doce de los trece alumnos contestaron bien, asumiendo que entre más niños hay, más pequeño es el pedazo de pastel. Un solo niño (Miguel, 4º grado) hace una representación gráfica y contesta a partir de ésta.

tabla 3.1
Problemas especiales

| | | Mental | VU | Aciertos |
|---|---|---|---|---|
| Especiales | 9<br>Niños pasteles<br>(3n, 1p) vs (5n, 1p) | 12<br>(12a) | 1<br>(1a) | 13/·13 |
| | 10<br>Niños pasteles<br>(3n, 4p) vs (4n, 3p) | 12<br>(12a) | 1<br>(0a 1e) | 12/13 |

En el problema 10 (3n, 4p) vs (3p, 4n), los mismos 12 alumnos contestan rápidamente. La mayoría argumenta que en un caso hay más pasteles y menos niños que en el otro (atienden a las relaciones internas entre cantidades enteras), mientras que otros argumentan que en un caso les toca menos de un pastel y en el otro más de un pastel. Sólo dos de estos niños cuantifican además el valor unitario: ¾ vs 4/3.

Miguel (4º grado), por su parte, vuelve a la representación gráfica y, con un poco de dificultad en el reparto de 4 entre 3, logra cuantificar los valores unitarios, ¾ vs 4/3. Sorprendentemente, concluye que “les toca lo mismo” por que “son los mismos números”. Pareciera que en cuanto obtiene las fracciones, estas devienen objeto de una lógica propia que no guarda ya relación con el contexto que las origina.

En cuanto a los demás, puede decirse que prestaron atención a las relaciones implicadas y que los problemas fueron muy simples.

### 3.1.2) Los demás problemas

En la tabla 3.2 se presentan las frecuencias de cada tipo de procedimiento, en cada uno de los once problemas restantes. Los procedimientos son los siguientes:

**I**: apelan a la conservación de la suma o de las razones internas para generar pares equivalentes.

**VU**: Se calculan y comparan los valores unitarios.

**OP**: se cuantifican las razones externas y se comparan.

**Estima:** Comparan estimando, sin cálculos.

**N**: Se centran en una sola variable.

**Ad**: Comparan considerando las diferencias.

El primer número que aparece en cada cuadro corresponde al total de alumnos que usó, en el problema correspondiente, alguna modalidad del procedimiento indicado. Los números que aparecen debajo de éste, indican el total de aciertos y de errores.

Aunque fueron 13 los niños entrevistados, en algunos problemas los totales de respuestas son mayores a 13 debido a que algunos niños usaron dos procedimientos para un mismo problema. Las preguntas 20b y 11c sólo se plantearon a 11 de los 13 niños entrevistados (son preguntas que se añadieron después de las dos primeras entrevistas).

Pueden observarse las siguientes tendencias generales:

1) Procedimientos tipo **I**: muy frecuentes
Los procedimientos de la categoría **I** son ahora muy frecuentes en casi todos los problemas, aún cuando las razones internas no son enteras. Esto tiene dos causas: la primera es que ahora no es necesario que una razón interna sea entera para poder usar estos procedimientos, por ejemplo, en el problema 6 (5c, $3) vs (3c, $2), en el que ninguna razón interna es entera, pueden generarse pares equivalentes a cada pareja mediante conservación de las razones internas para obtener (15c, $9) vs (15c, $10); segunda, en todos los problemas, excepto en los de reparto, la constancia de la razón externa se hace explícita mediante la expresión “x por cada y”.

En particular, en los problemas 4 (20c, 5p) vs (100c, 25p) y 18 (5n, 2n) vs (20n, 6n), en los que por lo menos una razón interna es entera y que además se formulan mediante la expresión “por cada...”, prácticamente todos los niños utilizan procedimientos tipo **I**.

2) Procedimientos tipo **VU**: dificultades
Al igual que en los problemas de valor faltante, en los problemas de reparto (11, 11b y 11c), en los que se evoca la igualdad de valores unitarios, hay un aumento de procedimientos que apelan al valor unitario (**VU**), incluso cuando las razones internas son enteras (11 y 11c). Hay también una disminución del número de respuestas correctas, lo cual, como veremos, es consecuencia de lo anterior.

En el problema 11b (6n, 2p) vs (10n, 5p), en el que las razones internas no son enteras, casi todos los alumnos recurren al valor unitario. Debido a que los valores unitarios son fracciones unitarias, la mayoría tiene éxito (11/13).

**Tabla 3.2**
**Procedimientos por problema**
**Grupo de niños entrevistados (4º, 5º y 6º)**

| RE | RI | Problema | PROCEDIMIENTOS I | VU | OP | Estima | N | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | NE | 8<br>Pelotas Pesos<br>(2p, $10) vs (7p, $28) | 8<br>(8a) | 5<br>(5 a) | | | | | 13 /13 |
| | | 20b<br>Estampas estampas<br>(2, 6) vs (5, 10) | 7<br>(6a 1e) | 1<br>(1 a) | 3<br>(3a) | | | | 10 /11 |
| 1/E | E | 4<br>canicas- pesos<br>(20c, 5)p vs (100c, 25p) | 12<br>(11a 1e) | 1<br>(1a) | | | | | 12 /13 |
| | | 11<br>Niños pasteles<br>(3n, 1p) vs (7n, 2p) | 7<br>(7a) | 6<br>(2a 4e) | | | | | 9/13 |
| | NE | 11-b<br>niños- pasteles<br>(6n, 2p) vs (10n, 5p) | 2<br>(2a) | 11<br>(9a 2 e) | | | | | 11/13 |
| | | 19<br>naranjas- naranjas<br>(10n, 5n) vs (6n, 2n) | 8<br>(8a) | | 7<br>(7a) | | | | 15 /15 |
| NE | E | 11-c<br>niños pasteles<br>(3n, 2p) vs (9n, 6p) | 4<br>(4a) | 6<br>(1a 5e) | | | 1<br>(0a 1e) | | 5/11 |
| | | 18<br>naranjas naranjas<br>(5n, 2n) vs (20n, 6n) | 12<br>(10a 2e) | | | 1<br>(1a) | | | 11/13 |
| | NE | 5<br>Canicas pesos<br>(20c, 6p) vs (30c, 8p) | 6<br>(6a) | 4<br>(2a 2e) | | 4<br>(2a 2e) | | 1<br>(0a 1e) | 10/ 15 |
| | | 6<br>canicas pesos<br>(5c, 3p) vs (3c, 2p) | 9<br>(8a 1e) | 4<br>(3a 1e) | | 1<br>(1a) | | 1<br>(0a 1e) | 12/15 |
| | | 20<br>naranjas naranjas<br>(3n, 2n) vs (10n, 9n) | 9<br>(7a 2e) | | 1<br>(1a) | | 1<br>(0a 1e) | 3<br>(0a 3e) | 9/14 |

En los problemas 11 (3n, 1p) vs (7n, 2p) y 11c (3n, 2p) vs (9n, 6p) en los que los valores unitarios no son todos fracciones unitarias pero por lo menos una razón interna es entera, las resoluciones se dividen entre valor unitario y razones internas. En estos problemas es notorio que quienes recurren al valor unitario tienden a fracasar mientras que quienes recurren a las razones internas tienen éxito. En particular, el problema 11c, (3n, 2p) vs (9n, 6p), resultó ser el más difícil de los problemas de comparación.

En los problemas 5, (20c, 6p) vs (30c, 8p), y 6, (5c, 3p) vs (3c, 2p), de compra venta de canicas, ambos con razones externas e internas no enteras, los procedimientos se dividen también entre **VU** (en este caso decimal), e **I,** y también expresan la tendencia anterior: errores en la determinación del valor unitario, éxito cuando se recurre a la conservación de la suma o de las razones internas.

3) El procedimiento OP

También en este caso se confirma una tendencia ya identificada en los problemas de valor faltante: este procedimiento aparece relativamente poco y únicamente cuando las magnitudes son de misma naturaleza.

En el problema 20b de intercambio de estampas nuevas por viejas (relación parte parte), (2n, 6v) vs (5n, 10v), en el que ambas razones externas son enteras, triple vs doble, extrañamente, el procedimiento OP se utiliza relativamente poco: 3 niños de 13.

En el problema 19 sobre tratos (relación parte todo) (10n, 5n) vs (6n, 2n), en el que las razones son fracciones unitarias, ½ vs 1/3, el procedimiento OP es más frecuente (7 resoluciones de 15).

Finalmente, en el problema 20 (3n, 2n) vs (10n, 9n) también de tratos, con razones externas no enteras ni fracción unitaria, sólo un alumno logra cuantificar y comparar las fracciones en juego, 2/3 vs 9/10.

4) Procedimientos erróneos: centramiento en una variable (N) y aditivo (Ad)

En los problemas de comparación estos procedimientos son menos frecuentes que en los de valor faltante. Aparecen en los casos en que ninguna razón es entera, y especialmente en el problema 20 (3n, 2n) vs (10n, 9n) que sugiere fuertemente considerar la diferencia común en los dos tratos.

El hecho de que ahora los alumnos pueden recurrir a la familia de procedimientos **I** aun cuando ninguna de las razones sea entera puede explicar que, en los problemas de comparación, las estrategias erróneas sean menos frecuentes y los resultados, en general, sean mejores que en los de valor faltante.

En síntesis, se observan las siguientes relaciones:

| Variable principal → | Formulación mediante una regla de correspondencia<br>“x por cada y” | | Formulación que evoca valores unitarios iguales |
|---|---|---|---|
| Procedimientos dominantes → | I | | VU |
| Otras variables → | las magnitudes son de distinta naturaleza | las magnitudes son de misma naturaleza | la razón interna es entera |
| Otros procedimientos, menos frecuentes que los anteriores → | VU: | OP: | I |

Estas tendencias se observan también, aunque de manera menos pronunciada, en el conjunto de problemas que se aplicó a un grupo de sexto grado de primaria (cuadro 3b). Estos últimos datos son, sin embargo, menos confiables debido a que, en problemas de comparación, sucedió con cierta frecuencia que los niños no dejaron rastros del procedimiento que los llevó a escoger una respuesta (categoría “otros”).

Más allá de las tendencias señaladas, el análisis de los procedimientos permite identificar ciertas variantes específicas de cada procedimiento, y, sobre todo, relaciones entre los procedimientos que presentan un interés desde el punto de visa didáctico.

**Tabla 3.3**
**Procedimientos por problema**
**Aplicación en sexto grado (36 alumnos)**

| RE | RI | Problema | I | VU | OP | Estima | N | Ad | Otro | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | PROCEDIMIENTOS | | | | | | | |
| E | NE | 8 Pelotas Pesos (2p, $10) vs (7p, $28) | 17% | **67%** | | 3% | 3% | | | 92% |
| | | 20b Estampas estampas (2, 6) vs (5, 10) | **28%** | 16% | 9% | 16% | 3% | 3% | 25% | 66% |
| 1/E | E | 4 canicas- pesos (20c, 5)p vs (100c, 25p) | **58%** | 18% | 3% | 8% | 3% | 3% | 3% | 68% |
| | | 11 Niños pasteles (3n, 1p) vs (7n, 2p) | 6% | **53%** | | 19% | 6% | | 16% | 77% |
| | NE | 11-b niños- pasteles (6n, 2p) vs (10n, 5p) | | **61%** | 3% | 19% | | | 16% | 83% |
| | | 19 naranjas- naranjas (10n, 5n) vs (6n, 2n) | 31% | | **44%** | 9% | 6% | | 9% | 94% |
| NE | E | 11-c niños pasteles (3n, 2p) vs (9n, 6p) | 6% | **66%** | | 21% | | 3% | 6% | 27% |
| | | 18 naranjas naranjas (5n, 2n) vs (20n, 6n) | **48%** | 6% | | 27% | 3% | 3% | 12% | 62% |
| | NE | 5 Canicas pesos (20c, 6p) vs (30c, 8p) | **36%** | 28% | | 11% | 3% | | 22% | 53% |
| | | 6 canicas pesos (5c, 3p) vs (3c, 2p) | **32%** | 24% | | 16% | 3% | 3% | 21% | 66% |
| | | 20 naranjas naranjas (3n, 2n) vs (10n, 9n) | 28% | | 9% | **41%** | 3% | 3% | 16% | 88% |

### ***3.2) Problemas que plantean una regla de correspondencia.*** *Procedimientos dominantes "I"*

> *"Aquí es un problema de razonamiento... el que vende las pelotas a 2 por 10 pesos las vende más baratas (que el que las vende a 7 por 28 pesos), porque el primero, por 6 pelotas ya te está cobrando 30 pesos" (Pedro, 6º grado).*

Los procedimientos internos (I) consisten en realizar las comparaciones solicitadas sin resolver las divisiones que conducen a los valores unitarios, generando razones externas equivalentes mediante la conservación de la suma o de las razones internas. Los problemas que plantean una regla de correspondencia del tipo "x por cada y" son los que más propiciaron estos procedimientos.

El recurso a las razones internas en estos problemas no consistió nunca en comparar dos razones internas, por ejemplo, en el problema 8: (2p, $10) vs (7p, $28), los alumnos no compararon la razón interna entre 7p y 2p (más del triple) con la segunda, entre $28 y $10 (menos del triple). Más bien, se dieron a la tarea de generar parejas de cantidades equivalentes a una de los parejas dadas, o a ambas, mediante conservación de la suma o de las razones internas, para igualar un término y poder comparar.

Cuando hay por lo menos una razón interna entera, basta con modificar una de las parejas para igualar un término con el que le corresponde en la otra pareja. Cuando no hay ninguna razón interna entera, en cambio, puede ser necesario modificar las dos parejas, por ejemplo:

> El problema 4 (20c, $5) vs (100c, $25) puede resolverse considerando que en el puesto de (20c, $5) se venden 100 canicas. Llamaremos a este procedimiento $I_1$.
>
> En cambio, en el problema 6 (5c, $3) vs (3c, $2), para igualar un término, es necesario modificar ambas parejas: en el primer puesto se puede tener (15c, $9) y en el segundo (15c, $10). Llamaremos a este procedimiento $I_2$.

Algunos de los niños que iteraron un par o los dos, no tomaron siempre esta decisión basándose en el hecho de que hay o no hay una razón interna entera. Frecuentemente ellos iteran un solo par con la expectativa de igualar un término, pero sin la certeza, o la anticipación de que lo pueden lograr. También sucede, aunque es menos frecuente, que iteran de entrada los dos pares, a pesar de haber una razón interna entera (que no identifican) y por lo tanto, sin darse cuenta de que era suficiente con iterar un solo par. Por lo tanto, los problemas con una razón interna entera fueron más fáciles que los otros cuando se decidió iterar un par con la expectativa de igualar un término y esto se logró fortuitamente sobre la marcha o cuando se anticipó que una razón interna era entera. En cambio, no fueron más fáciles cuando no se identificó la razón interna, y se decidió de entrada iterar los dos pares.

Algunos de los problemas en los que ninguna razón interna es entera, fueron resueltos iterando un solo par, es decir mediante $I_1$: dado (a, b) y (c, d), se obtiene un par (na, nb) en el que na > c, mientras que nb < d, es decir, se obtiene una razón interna mayor que uno y otra menor (R<1<R'). En este caso están los problemas 8, 19, 20b y 20. Por supuesto, esto tampoco lo previeron los niños, no al menos las primeras veces. Fue al iterar un par con el propósito de igualar o aproximar términos homólogos que lo descubrieron. Después de resolver varios problemas, algunos niños mostraron buscar conscientemente esta posibilidad.

En la tabla 3.4 se desglosan los procedimientos I en $I_1$ e $I_2$ (sólo para los problemas que plantean una regla de correspondencia). Puede observarse lo siguiente:

- Los procedimientos $I_1$ son más frecuentes que los $I_2$, cuando una razón interna es entera (problemas 4 y 18).
- Los procedimientos $I_2$ son más frecuentes que los $I_1$ cuando no hay razones internas enteras (problemas 20b, 19, 5, 6 y 20), con una excepción: el problema 8. No obstante, no son tan frecuentes como los $I_1$ en el caso anterior.
- En los problemas 8, 20b, 19 y 20 en los que no hay razones internas enteras pero que pueden resolverse mediante $I_{1,}$ hay cierta incidencia de este procedimiento

En síntesis, las formas de uso de los procedimientos "I" fueron las siguientes:

Hay una razón interna entera ➔
- Se genera un par con término común y se compara mediante $I_1$
- Si no se identifica la razón interna entera, se aplica $I_2$ u otro.

No hay una razón interna entera
- Es posible comparar mediante iteraciones de un par ➔
  - Se genera una razón interna mayor que uno y una menor mediante $I_1$
  - Se aplica $I_2$ u otro
- No es posible comparar mediante iteraciones de un par ➔
  - Se genera un par que ayuda a estimar ($I_1$+C)
  - Si la razón es n/2, se descompone
  - Se aplica $I_2$ u otro

**Tabla 3.4**
**Frecuencia de procedimientos en los problemas de comparación**

| | | I | | VU | OP | Estima | N | Ad | Acierto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **$I_1$** | **$I_2$** | | | | | | |
| RI: E<br>Se puede comparar iterando un par | 4<br>canicas- pesos<br>(20c, 5p vs (100c, 25p) | **12**<br>**(11a 1e)** | | 1<br>(1a) | | | | | 12 /13 |
| | 18<br>naranjas naranjas<br>(5n, 2n) vs (20n, 6n) | **9**<br>**(7a 2e)** | **3**<br>**(2a-1e)** | | | 1<br>(1a) | | | 11/13 |
| RI: NE<br>Se puede comparar iterando un par | 8<br>Pelotas Pesos<br>(2p, $10) vs (7p, $28) | **5**<br>**(5a)** | **3**<br>**(3a)** | 5<br>(5 a) | | | | | 13 /13 |
| | 20b<br>Estampas estampas<br>(2, 6) vs (5, 10) | **2**<br>**(2a)** | **5**<br>**(4a, 1e)** | 1<br>(1a) | 3<br>(3a) | | | | 10 /11 |
| | 19<br>naranjas- naranjas<br>(10n, 5n) vs (6n, 2n) | **2**<br>**(2a)** | **6**<br>**(6a)** | | 7<br>(7a) | | | | 15 /15 |
| | 20<br>naranjas naranjas<br>(3n, 2n) vs (10n, 9n) | **3**<br>**(3a)** | **6**<br>**(4a 2e)** | | 1<br>(1a) | | 1<br>(0a 1e) | 3<br>(0a 3e) | 9/14 |
| RI: NE<br>No se puede comparar iterando un par | 5<br>Canicas pesos<br>(20c, 6p) vs (30c, 8p) | **2**<br>**(2a)** | **4**<br>**(4a)** | 4<br>(2a 2e) | | 4<br>(2a 2e) | | 1<br>(0a 1e) | 10/ 15 |
| | 6<br>canicas pesos<br>(5c, 3p) vs (3c, 2p) | **1**<br>**(1a)** | **8**<br>**(7a 1e)** | 4<br>(3a 1e) | | 1<br>(1a) | | 1<br>(0a 1e) | 12/15 |

A continuación veremos de más cerca las modalidades en que se usaron estos procedimientos.

### *3.2.1) Se itera un solo par (procedimientos $I_1$)*

#### 3.2.1.1) Cuando por lo menos una razón es entera (problemas 4 y 18)

Ya sea porque se identifica la razón interna entera, o porque simplemente se decide iterar el par cuyas cantidades son menores para acercarlas a las del otro par, en estos problemas los procedimientos $I_1$ son muy frecuentes.

- Problema 4:

  Las canicas Diamante:
  Doña Inés las vende a 20 canicas por 5 pesos.
  Jacinto las vende a 100 canicas por 25 pesos.
  ¿Quién las vende más baratas? ¿Cómo lo supiste?

| RE | RI | | I | | VU | OP | Estima | Reduce (N) | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $I_1$ | $I_2$ | | | | | | |
| 1/E | E | 4 canicas- pesos (20c, 5p) vs (100c, 25p) | **12** (11a 1e) | 0 | 1 (1a) | | | | | 12 /13 |

Las magnitudes son de distinta naturaleza, ambas razones internas son enteras, de hecho son iguales y la formulación del problema sugiere la iteración de los pares. Todos los alumnos, excepto uno, utilizan el procedimiento $I_1$ (la alumna que no lo utiliza, Brenda, de 6º grado, fue la única que nunca usó procedimientos de este tipo). Veamos algunos ejemplos

Itzel, de 4º grado, después de un momento de confusión en el que toma los valores dados como unitarios, conserva la suma:

> *Itz: (Se detiene para volver a pensar en silencio y después escribe)*
>
> *20 40 60 80 100*
>
> *5 10 15 20 25*
>
> *(escribe como resultado) Son los mismos precios*

Arturo (4º grado) acude directamente a las razones internas:

> *Art.: O sea, doña Inés vende 5 canicas por 20 pesos. Jacinto vende 100 las canicas por 25 pesos. Aquí (Doña Inés) si fueran 100 también serían 25 pesos, porque por 20 son 5. Ahora 5 veces 20 son 100, entonces 20 por 25. Este... (se queda pensando)*

Varios niños explican el procedimiento anterior haciendo referencia a las canicas que podría vender doña Inés: "si vendiera 100 (igualan un término), entonces..."

Sólo un alumno, Julio (5º grado) partió de las cantidades mayores para ir a las menores mediante división de ambos términos por un mismo número:

> *Jul: (Rápidamente dice) Pues, igual (...) porque aquí (Jacinto) es como si se estuvieran vendiendo 20 por 5 (...) porque ... 100, lo divido entre 5 y 25 también me tocan a 20 canicas a 5 pesos.*

Julio identifica en la pareja (100 canicas, 25 pesos) la razón constante "por cada 25 canicas, 5 pesos".

### *Dificultades*

Si bien estos problemas fueron fáciles para la mayoría (12 aciertos de 13 en el problema 4 y 11 de 13 en el problema 18), y ningún alumno se centró en una sola variable para contestar (algunos lo hicieron en un primer momento, pero rectificaron), dos de ellos mostraron cierta dificultad para trabajar con los tratos en tanto relaciones, independientemente de las cantidades.

Arturo y Miguel, de 4º grado encuentran, para el problema 18 (5n→2n vs 20n→6n), que en la huerta el Río, si de 5 naranjas dan 2, entonces de 20 naranjas dan 6. Ambos cometen el mismo error al intentar igualar un término del par:

$$\begin{array}{l} 5 \rightarrow 2 \\ \left.\begin{array}{l} 5 \rightarrow 2 \\ 5 \rightarrow 2 \\ \underline{5} \rightarrow 2 \end{array}\right\} 6, \text{ entonces, } (20, 6) \\ 20 \end{array}$$

A partir de este resultado erróneo podrían concluir que los tratos son igualmente ventajosos, pero no sucede así. Para Miguel, “es lo mismo”, pero los de la huerta El Naranjo (20n, 6n), “van a trabajar más”, y para Arturo, conviene más el trato de la huerta El Naranjo (20, 6), porque tendrán más naranjas.

Estos dos alumnos oscilan entre ver los tratos como relaciones constantes entre cantidades variables y verlos como estado único. Cabe señalar que algunos niños, en las primeras preguntas sobre tratos o sobre la venta de canicas preguntaban por las cantidades a las que se aplican las razones: ¿Cuántas canicas va a comprar? ¿cuántas naranjas recogieron?, ante lo cual se les contestó: “eso no lo sabemos”, o bien “muchas”

Otros tres niños resolvieron estos dos problemas (4 y 18) como si no hubiera razones internas, generaron pares equivalentes a cada uno de los dos pares dados. Veremos sus resoluciones más adelante.

### 3.2.1.2) Los procedimientos $I_1$ cuando ninguna razón interna es entera pero es posible generar una razón mayor que uno y una menor (problemas 8, 19, 20, 20b)

Cuando no hay una razón interna entera, la iteración de un solo par (procedimiento $I_1$) no permite igualar un término pero en ciertos casos permite comparar.

La comparación mediante este procedimiento (obtener, mediante iteración de un par, una razón mayor que uno y una menor) es claramente más compleja que la que vimos anteriormente, en la que se logra igualar un término. En este último caso, al tener por ejemplo, un mismo número de pelotas en los dos puestos, basta con ver en cuál se cobra menos dinero. En cambio, al obtener una razón interna mayor que uno y otras menor, por ejemplo, 7p, $28 contra 6p, $30 es necesario considerar dos desigualdades simultáneamente: menos pelotas por más pesos.

El hecho de que los alumnos que tuvieron mayores dificultades en general a lo largo del conjunto de problemas, principalmente los de 4º grado, tienden a no usar el procedimiento $I_1$ en estos problemas expresa también esta mayor dificultad (tabla 3.5).

**Tabla 3.5**

| | Procedimientos $I_1$ | | |
|---|---|---|---|
| | 4º (4 als) | 5º (3 als) º | 6º (6 als)º |
| Probl 8 | 0 de 4 | 2 de 3 | 3 de 6 |
| Probl 19 | 1 de 4 | 0 de 3 | 1 de 6 |
| Probl 20b | 0 de 4 | 1 de 3 | 2 de 6 |
| Probl 20 | 1 de 4 | 0 de 3 | 3 de 6 |
| | 2/16 = 1/8 | 3/12 = ¼ | 9/36= ¼ |

- Problema 8: Ernestina (2p, \$10) vs Don Polo (7p, \$28)

| RE | RI | | I | | VU | OP | Estima (N) | Reduce | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $I_1$ | $I_2$ | | | | | | |
| E | NE | 8<br>Pelotas Pesos<br>(2p, \$10) vs (7p, \$28) | 5<br>(5a) | 3<br>(3a) | 5<br>(5 a) | | | | | 13 /13 |

Cuatro alumnos iteran el par (2p, \$10) tres veces, obtienen (6p, \$30), el cual pueden comparar con (7p, \$28): en un caso, por menos pelotas que en el otro, se cobra más. Julio (5º grado) lo explica así:

> *Jul: (Rápidamente contesta) Don Polo (es más barato).*
>
> *E: ¿Por qué?*
>
> *Jul: Por que Ernestina por 30 pesos te da 6 (...) Entonces es de Don Polo te da más pelotas y le baja 2 pesos.*

Un alumno más, Manuel (6º grado) después de estimar erróneamente que (2p, \$10) sale más barato, intenta igualar un término iterando un solo par. No lo logra y tampoco logra obtener una razón interna mayor que uno y la otra menor, pero los datos que obtiene le permiten comparar: (2p, \$10) = (8p, \$40) y, en comparación con (7p, \$28), puede estimarse que en éste último las pelotas son más baratas: (procedimiento $I_1$+ C):

> *Man: (...) (Ernestina, porque )… nada más te da una pelota de más, y aquí (con Don Polo)… es 28 pesos (con) una pelota menos. Sería 40 pesos por 8 pelotas y 28 pesos por 7, …(alza los hombros)…¿no verdad?, no conviene" (no conviene Ernestina)*

- Problema 20: Huerta Sonora (3n, 2n) vs Huerta Vista hermosa (10n, 9n)

| RE | RI | | I | | VU | OP | Estima (N) | Reduce | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $I_1$ | $I_2$ | | | | | | |
| NE | NE | 20 naranjas naranjas (3n, 2n) vs (10n, 9n) | 3 (3a) | 6 (4a 2e) | | 1 (1a) | | 1 (0a 1e) | 3 (0a 3e) | 9/15 |

En este problema hacen falta cuatro iteraciones del primer par para poder comparar: "por 12 naranjas dan 8 naranjas" contra "por 10 naranjas dan 9 naranjas".

Tres alumnos iteran el par (3n, 2n), pero únicamente uno de ellos, Manuel (6º grado), lo hace cuatro veces: estimó primero correctamente, después cambió de opinión y finalmente, optó por iterar un par:

> *Man: (...) "Porque ve, el 2 debe superar al 9 ...(señala las dos naranjas que se ganan en la huerta "Sonora" y las 9 naranjas que se ganan en la huerta "Vista Hermosa")... o bueno 3 para superar al 10 ...(las 3 y 10 naranjas de cada trato)... serían... por aich, por... 4, que serían 12 naranjas y con las que se quedan con 2, también lo multiplico por 4 y serían 8"*

Notemos que Manuel expresa bastante explícitamente una parte de la estrategia que utiliza, posiblemente porque ya la ha utilizado en problemas anteriores: se trata de que un término supere, y no necesariamente iguale, a su homologo. Lo que no dice, porque aún no lo sabe, es que la comparación se podrá hacer si cuando un término supera a su homólogo, el otro término no supera a su homólogo.

Los otros dos niños no llegan tan lejos. Iteran tres veces el primer par con el afán de igualar o aproximar el primer término a su homólogo: (3n, 2n) = (9n, 6n). Esto les permite hacer una buena estimación: si por 10n me dan 9n, conviene más que si por cada 9n dan 6n (procedimiento $I_1$+C). El que no hagan la cuarta iteración expresa que, a diferencia de Manuel, ellos no tienen prevista aún la posibilidad de obtener el caso de una razón mayor y una menor.

### 3.2.1.3) Los procedimientos $I_1$ + C cuando no es posible obtener una razón mayor que uno y una menor (problemas 5 y 6)

| RE | RI | | I | | U | OP | Estima (N) | Reduc | Ad | Acierto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **$I_1$** | **$I_2$** | | | | | | |
| NE | NE | 5 Canicas pesos (20c, 6p) vs (30c, 8p) | **2 (2a)** | **4 (4a)** | 4 (2a 2e) | | 4 (2a 2e) | | 1 (0a 1e) | 10/ 15 |
| | | 6 canicas pesos (5c, 3p) vs (3c, 2p) | **1 (1a)** | **8 (7a 1e)** | 4 (3a 1e) | | 1 (1a) | | 1 (0a 1e) | 12/15 |

En estos problemas la iteración de un solo par no permite hacer la comparación (no permite obtener una razón interna mayor que uno y una menor). No obstante, algunos niños, pocos, lo intentaron y terminaron haciendo una estimación ($I_1$+c)

Por ejemplo, en el problema 6 (5c, $3) vs (3c, $2), Alberto empieza por estimar que el precio en (5c, $3) "es casi lo mismo" que en (3c, $2). Después, itera el segundo par y confirma su apreciación: (5c, $3) y (6c, $4) es, nuevamente, "casi lo mismo" (procedimiento $I_1$ + C).

En el problema 5 (20c, $6) vs (30c, $8) únicamente dos alumnos, Nancy (6º grado) y Alberto (5º grado), lograron comparar modificando un par mediante la descomposición de la razón interna.

20c → $6
:2
10c → $3
X3
30c → $9

Notemos que la descomposición de la razón interna amplifica de manera notoria el alcance de los procedimientos internos.

### *3.2.2) La iteración de los dos pares (procedimiento $I_2$)*

#### 3.2.2.1) Modalidades del procedimiento $I_2$ y dificultades específicas

La iteración de los dos pares obedece, en principio, al propósito de igualar dos términos homólogos. Las dificultades que varios niños tuvieron al intentar utilizar este procedimiento ponen en evidencia ciertas condiciones, de orden técnico o conceptual, que deben asumirse para que el procedimiento cumpla esta función.

El término común que se busca para poder comparar es un múltiplo común de los dos términos que se desean igualar, en última instancia, el producto de éstos:
(a, b) = (**ca**, cb) y (c, d) = (**ac**, ad). Sin embargo, ninguno de los niños que recurrió a este procedimiento anticipó lo anterior y esto dio lugar a una primera dificultad de orden técnico: se dieron a la tarea de iterar los pares con la expectativa de que en algún momento los términos coincidirían, pero sin la certeza de que esto fuera a ocurrir realmente. Algunas veces, sobre la marcha encontraron un múltiplo común ($I_{2\ TC}$), sobre todo cuando procedieron sistemáticamente, multiplicando sucesivamente por 2, por 3, por 4, etc. (por lo general los números son relativamente pequeños por lo que con pocas iteraciones pueden encontrar el múltiplo común), o bien, sobre la marcha encontraron dos

pares en los que una razón interna es mayor que uno y la otra menor, con lo cual pudieron comparar ($I_{2\ R<1<R'}$). Veamos un par de ejemplos.

Adriana (5º grado) en el problema 20 (por cada 3 naranjas que recojan les dan 2) vs (por cada 10 les dan 9), pretendió igualar lo primeros términos (3 y 10) a 12, se dio cuenta de que no era posible, entonces intentó igualarlos a 20. Finalmente con dificultad obtuvo (21, 14) vs (20, 18) con lo cual logró concluir.

> *"De todas maneras está bien, porque si recoges 21 y sólo te dan 14, entonces te conviene más Vista Hermosa. El señor se queda sólo con una y tú te quedas con 9"*

En el problema 20b (Miguel ofrece 6 estampas viejas a cambio de 2 nuevas y Armando ofrece 10 viejas a cambio de 5 nuevas) empieza por estimar que el mejor trato para la niña que quiere cambiar sus estampas nuevas por viejas es el de Miguel porque la niña "sólo va a perder dos estampas, pero va a tener 6" mientras que con el otro trato "pierde mucho más estampas, que serían 5". Hay pues una estimación, centrándose en las estampas que se pierden.

Sin embargo, para argumentar mejor, Adriana itera una vez los dos pares y obtiene que Miguel ofrece 4n por 12v mientras que Armando ofrece 10n, por 20v. El número 20, ahora grande, atrae su atención y cambia de opinión:

> *Adr: "Pero, por ejemplo si da 10 estampas nuevas le van a dar 20, entonces sería Armando, porque acá …(con Miguel)… si ella da 4 estampas, ella va a recibir 12" (Anota lo siguiente en la hoja)*
>
> *10 = 20*
> *4 = 12*

No obstante, no se siente convencida y decide iterar más veces el trato de Miguel. Con un error de cálculo llega a (2n, 6v) = (10n, 38v) y logra concluir:

> *Adr: "(...) si ella le da 10 estampas nuevas, Armando le va a dar 20 viejas, ay… entonces sería Miguel, porque aquí le da 10 nuevas y Miguel le da 38… entonces sería Miguel."*

La dificultad en juego aquí, determinar un múltiplo común de los términos homólogos que se desean igualar es también conceptual, puesto que los niños no muestran ninguna seguridad de que dicho múltiplo pueda existir. Para ellos el problema se presenta como si las cantidades pudieran ser inconmensurables (dadas las cantidades a y c, no existen n y m enteros tales que ma = nc), y por ello acaban utilizando con frecuencia el antiguo postulado griego para comparar magnitudes inconmensurables: (a, b) > (c, d) si existen n y m enteros tales que na> mc y nb < nd (ver Capítulo 1, apartado 6.4), es decir, comparan cuando encuentran una razón interna mayor que uno y una menor. Notemos que esta dificultad a su vez descubre el interés de estos problemas para trabajar con la noción de múltiplo común de manera funcional.

Por otra parte, antes que la dificultad anterior, varios de los niños que utilizan el procedimiento $I_2$ enfrentan otra, esta vez ligada a la noción misma de razón: para lograr igualar un término, es necesario iterar los pares *distinto* número de veces. Pero los niños en general no empiezan considerando *una* cantidad común hipotética, empiezan iterando los pares. Algunos de ellos tienden entonces a comparar pares obtenidos con un mismo número de iteraciones (procedimiento $I_{2(=)}$). Cuando justifican explícitamente esta manera de proceder, aluden a una especie de condición en términos de “hacer el mismo número de compras en los dos puestos”.

De esta manera algunos alumnos no logran ni identificar pares con un término común ni pares con una razón interna mayor que uno y la otra menor. Terminan por hacer una estimación, frecuentemente basada en el cálculo de las diferencias: “por *x* cantidad más, *y* cantidad más” (procedimiento $I_{2(=)}$ + C), o por cambiar de procedimiento. Veamos algunos ejemplos.

Verónica (4º grado) iteró siempre una sola vez los dos pares, incluso cuando una razón interna era entera (problema 18). Después de iterar, al obtener cantidades más grandes, tiende a centrarse en una variable, comparando los dos términos.
En el problema 5 (no hay razones internas enteras), Doña Inés (20c, $6) vs. Don Jacinto (30c, $8), empieza por estimar que Doña Inés da más barato, pero al argumentar, pareciera que considera que si 20 canicas cuestan 6 pesos, 30 canicas costarían en ese mismo puesto más de 8 pesos, por lo que cambia de opinión.

> *Ver: (Se queda en silencio y dice) “Con Doña Inés”*
> *E: “¿Con Doña Inés? ¿Por qué?”*
> *Ver: “Porque son 20 canicas por 6 pesos y acá …(Señala a Don Jacinto y, de pronto, comienza a bajar la voz)… 30 cani…casi por 8 pesos … …(vuelve a subir la voz y dice)…* ***NO****, con Don Jacinto*

No obstante, no logra explicarlo y parece dudar:

> *E: “¿Con Don Jacinto, mejor? ¿Por qué?”*
> *Ver: “Porque son 30 canicas por 8 pesos y acá …(Doña Inés)… son menos… Acá son menos canicas y menos dinero, pero acá …(don Jacinto)… son más canicas y más dinero”*

Opta entonces por hacer una iteración en cada par. Las nuevas cantidades que obtiene amplifican las diferencias entre las cantidades y esto parece ayudarle a confirmar su estimación:

> *Ver: "Aunque si la maestra comprara 40 canicas serían 12 pesos (con Doña Inés)... y acá (señala a Don Jacinto) 60 canicas 16 pesos… con Don Jacinto"*

Lo mismo sucede en todos los problemas en los que se plantea una regla de correspondencia. Una vez iterados los dos pares, escoge aquél en el que el número de canicas, o de naranjas que se dan a los recolectores, es mayor. Cabe señalar que en situación de compra venta, efectivamente, suele suceder que en la compra de una cantidad mayor se obtiene un mejor precio por unidad. No obstante, este criterio no siempre permitió a Verónica acertar, por ejemplo, en el problema 20b.

Itzel (4º grado), en el problema 5, Doña Inés (20c, $6) vs Don Jacinto (30c, $8) piensa un rato antes de escribir, después itera una vez los dos pares, hace las sumas por escrito y obtiene: Doña Inés 40c, $12 y Don Jacinto 60c, $16. Vuelve a pensar un rato y concluye que Don Jacinto las vende más baratas "porque son más canicas". Le hacemos ver que Don Jacinto también cobra más dinero frente a lo cual cambia de opinión dos veces, como si optara por puntos de vista distintos, el de la cantidad de canicas y el de la cantidad de dinero, sin lograrlos conciliar. Finalmente estima basándose en las diferencias: por 4 pesos más, Jacinto da 20 canicas más.

Mariana (6º grado) utilizó procedimientos tipo $I_2$ en cinco de los seis problemas que aquí consideramos . Como en otras ocasiones, al iterar los pares, prestó atención a las diferencias entre los términos que iba obteniendo. Además, hizo explícita la propiedad que pareció regir las resoluciones de las alumnas anteriores: los pares se deben iterar un mismo número de veces.

En el problema 6, Doña Inés (5c, $3) vs Don Jacinto (3c, $2), multiplicó los términos de cada par por 2, por 3, por 4 y por 5, y observó lo que sucedía con las diferencias (por 2 canicas más, un peso más, etc.). Sin embargo, no logró controlar bien el número de veces por el que multiplicó los términos de un par y del otro y terminó comparando, con base en las diferencias, un par obtenido mediante la multiplicación por cuatro, con otro obtenido mediante la multiplicación por 5: (15c, $10) vs (20c, $12):

> *"20 pesos por 12 y 15 pesos por 10, de pesos se llevan 5 y de cantidad 2, ahá, entonces... es menor cantidad y más precio (invirtió las unidades).*

Se le ayudó entonces a ver que, entre los pares que obtuvo, tenía 15 canicas por 10 pesos y 15 canicas por 9 pesos. De momento no reaccionó, después:

> *Mar: Pero aquí fueron 3 veces y aquí 4 veces*
> *E: Sí, aquí fueron 3 veces y aquí 4 veces, pero el hecho es que aquí te dan 15 canicas por 9 pesos y aquí 15 canicas por 10 pesos,*
> *Mar: Ahhh, sí!... te dije que era Inés (5c, 3p)...pero ya estaba cerca.*

Al escribir el resultado en la hoja, dudó nuevamente:

> *Mar: ¿estamos bien?, ¿pero tomamos en cuenta esto? (...). No entiendo todavía, porque aquí estamos haciendo la tercera compra de Inés y la estamos comparando con la cuarta compra de Jacinto y no con la tercera compra de Jacinto... ¡vaya que necesito concentrarme! En la tercera compra tú compras 15 canicas y pagas 9 pesos y... ¡ah, sí!, estamos bien.*

En los problemas que siguieron, la duda con respecto al número de iteraciones no apareció más. La estrategia que consiste en igualar un término se fue estableciendo con claridad. La dificultad que permaneció fue únicamente de orden técnico, para encontrar múltiplos comunes. Así, en el problema 18, con una razón interna entera, El Río (5n, 2n) vs El Naranjo (20n, 6n), hace lo siguiente:

> *Mar: (...) "Si ellos (El Naranjo) recogieran 100, se quedan con 30, y <u>cuántas tendrían que recoger ellos (5, 2) para quedarse con 30</u>... ah, muy fácil, ya tengo la solución (...)Entonces, por 75 manzanas que ellos recogen les dan 30 manzanas, y aquí, por 100 manzanas que ellos recogen les dan 30 manzanas y les conviene más recoger 75 que 100 ¿verdad?, lógico. No estaba tan difícil".*

Y en el problema 20, Sonora (3n, 2n) vs Vista Hermosa (10n, 9n):

> *(...) Por 9 que recojan, por 3 veces que recojan 3 naranjas, se ganarían 6, por 3 veces que lo hagan se ganarían 6 naranjas y en el otro, por 30 que recojan les van a dar 27, <u>hay que buscar la forma de que sea por cada 30</u> porque yo busqué el truco...*

La dificultad relativa al número de veces que se itera cada par se origina en el hecho de que se trabaja con relaciones antes que con cantidades. Ya comentamos que dos niños tendieron a preguntar por las cantidades: ¿cuántas canicas se van a comprar? ¿cuántas naranjas recogieron? ¿Cuántas estampas va a cambiar la niña?

Una primera explicación de este apego a un mismo número de iteraciones es la dificultad para "ponerse en situación": cuando un precio (o un trato) se expresa en términos de "*a* por cada *b*", no significa que hay que comprar de *a* en *a*. El número de veces que *a* se itera no le interesa al comprador, excepto para calcular el precio[1].

[1] A diferencia de lo que sucede aquí, en la experiencia "Reglas de cambio" que presentamos en capítulo 3, el contexto favoreció que los niños pensaran de entrada en cantidades hipotéticas.

Pero con esto, el problema enfrenta a los niños, desde el punto de vista numérico, a un hecho poco habitual en la aritmética escolar que conocen hasta ahora, por ejemplo: si se va a comparar el contenido de dos tipos de caja de galletas, A y B, no resultaría sensato comparar el contenido de tres cajas A contra el contenido de cuatro cajas B. En la comparación de cantidades, el número de iteraciones juega un papel determinante.

En los problemas que ahora nos ocupan, en los que se comparan *relaciones*, parecería que los niños que iteran un mismo número de veces, obedecen a este principio, vigente en la comparación de cantidades.

La tendencia de algunos niños a iterar un mismo número de veces pone al descubierto una característica esencial de la noción de razón, que logran asumir los niños que no se sujetan a esta condición: cualquier par generado mediante procedimientos tipo I (conservación de la suma, o de las razones internas) expresa la razón que interesa comparar.

En la tabla 3.6 se muestran las parejas de cantidades que generaron los niños con el procedimiento tipo $I_2$, y se especifica la modalidad utilizada: logran un término común (TC), logran una razón interna mayor que uno y una menor (R<1<R'), o iteran los pares un mismo número de veces y estiman ($I_{2=}$ + C).

Con respecto a los alumnos que emplean el procedimiento $I_{2(=)}$ + C puede observarse que dos de ellos lo emplean sistemáticamente (Itzel y Verónica, de 4º grado), mientras que cuatro de ellos (Julio y Adriana de 5º, Mariana y Francisco de 6º) lo emplean sólo en uno de los problemas, en los demás logran igualar un término o logran una razón mayor y una menor que uno, o bien usan otro procedimiento.

**Tabla 3.6**
**Procedimientos $I_2$ en problemas que plantean una regla de correspondencia y con razón interna no entera**

| Probl. 8 | 2p, $10 | 7p, $28 | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Mig (4º) | 26, 130 | 28, 122 | | X | |
| Itz (4º) | 6, 30 | 21, 83 | | | X |
| Ver (4º) | 4, 20 | 14, 56 | | | X |

| Probl. 20b | 2n, 6v | 5n, 10v | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Fco (6º) | 10, 30 | 15, 30 | X | | |
| Adr (5º) | 10, 38 (sic) | 10, 20 | X | | |
| Art (4º) | 10, 60 (sic) | 10, 20 | X | | |
| Jul (5º) | 16, 48 | 20, 40 | | X | |
| Ver (4º) | 4, 12 | 10, 20 | | | X |

| Probl. 19 | 10n, 5n | 6n, 2n | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Mar (6º) | 50, 25 | 54, 18 | | X | |
| Fco (6º) | 40, 20 | 42, 14 | | X | |
| Jul (5º) | 20, 10 | 24, 8 | | X | |
| Adr (5º) | 20, 10 | 12, 4 | | | X |
| Itz (4º) | 20, 10 | 12, 4 | | | X |
| Ver (4º) | 20, 10 | 12, 4 | | | X |

| Probl. 20 | 3n, 2n | 10n, 9n | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Mar (6º) | 30, 20 | 30, 27 | X | | |
| Fco (6º) | 40, 36 (sic) | 40, 36 | X | | |
| Jul (5º) | 24, 16 | 20, 18 | | X | |
| Adr (5º) | 21, 14 | 20, 18 | | X | |
| Itz (4º) | 12, 8 | 40, 36 | | | X |
| Ver (4º) | 6, 4 | 20, 18 | | | X |

| Probl. 6 | 5c, $3 | 3c, $2 | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Mar (6º) | 30, 20 | 30, 27 | X | | |
| Nan (6º) | 10, 6 | 9, 6 | X | | |
| Jul (5º) | 10, 6 | 9, 6 | X | | |
| Mig (4º) | 50, 30 | 48, 32 | | X | |
| Fco (6º) | 25, 15 | 15, 10 | | | X |
| Itz (4º) | 10, 6 | 6, 4 | | | X |
| Ver (4º) | 10, 6 | 6, 4 | | | X |

| Probl. 5 | 20c, $6 | 30c, $8 | TC | R<1<R' | $I_{2(=)}$ + C |
|---|---|---|---|---|---|
| Mar (6º) | 40, 12 | 60, 16 | | | X |
| Itz (4º) | 40, 12 | 60, 16 | | | X |
| Ver (4º) | 40, 12 | 60, 16 | | | X |

**TC:** Se logra obtener un término común
**R<1< R':** Se obtiene una razón interna mayor que uno y una menor
**$I_{2(=)}$ + C:** Se itera un mismo número de veces y se estima

Por último, detengámonos un momento en la estimación basada en una comparación de las diferencias que varios niños tendieron a hacer en distintos problemas (ver los ejemplos anteriores de Itzel, Verónica y Mariana). El razonamiento es el siguiente: si, por ejemplo, en un puesto dan cierta cantidad de canicas más que en otro, y esa cantidad es mayor que los pesos de más que se cobran, entonces en ese puesto las canicas son más baratas. Es decir: si en un puesto se venden *a* canicas por *b* pesos y en el otro *a+a'* canicas por *b+b'* pesos, se cumple que:

$$a' > b' \Rightarrow b /a > b+b' /a+a'$$

Cabe señalar que este teorema es correcto cuando la fracción b/a es mayor que uno (b>a)[2]. No funciona, por ejemplo, en: 20 canicas por 10 pesos ($0.50 por canica) contra 26 canicas por 15 pesos ($0.57 por canica). Por supuesto, los niños no tiene manera de saber esto.

### 3.2.2.2) Frecuencias relativas de uso de los procedimientos $I_2$

Los porcentajes de la siguiente tabla se calcularon dividiendo el número de veces que se utiliza un procedimiento tipo $I_2$ (incluyendo los casos en los que un alumno usó un procedimiento $I_2$ además de otro procedimiento) entre el total de resoluciones. El conteo se hizo considerando los seis problemas que plantean una regla de correspondencia y que no tienen razones internas enteras (8, 20b, 19, 20, 5 y 6). Debido a que el número de alumnos es muy pequeño, los porcentajes solo nos permiten sugerir tendencias.

**Tabla 3.7**
**Porcentajes de uso de $I_2$ por grado escolar, en problemas que plantean una regla de correspondencia y con la razón interna no entera**

| | $I_2$ ó $I_2$ y otro procedimiento | No usan $I_2$ |
|---|---|---|
| 4º grado (4 alumnos) | 14/23 = 60% | 9/23 = 40% |
| 5º grado (3 alumnos) | 7/21 = 33% | 14/21= 66% |
| 6º grado (6 alumnos) | 9/35 = 26% | 26/35 = 74% |

Desde el punto de vista de los alumnos que utilizan estos procedimientos llama la atención que los de sexto grado (seis en total) los utilizan relativamente poco. En particular tres alumnos de 6º grado que tuvieron un nivel de desempeño alto en el

[2] Si b>a y a'>b' (todos positivos), entonces:
a'b > ab'
ab + a'b > ab + ab'
b(a + a') > a(b+b')
b/a > (b+b'/a+a')

conjunto de problemas (Manuel, Pedro, Nancy), no los utilizan o los utilizan muy poco. En contra parte, los alumnos de 4º (cuatro en total) los utilizan con más frecuencia.

Esta distribución puede obedecer al hecho de que los alumnos de sexto grado conocen un poco más otros procedimientos:

- aplican con más frecuencia los procedimientos $I_1$ (se modifica sólo un par) en los problemas en los que este procedimiento permite obtener una razón mayor que uno y una menor (8, 20b, 19, 20).
- en los problemas 5 y 6 en los que lo anterior no es posible o es más difícil, aplican, no siempre con éxito, el procedimiento del valor unitario (decimal).
- en el problema 19 en el que se relacionan cantidades de la misma naturaleza y los operadores externos son fracciones unitarias, algunos los determinan.

Aunado a lo anterior, debemos considerar que los procedimientos tipo I no suelen ser objeto de enseñanza en la escuela, son procedimientos espontáneos.

### *3.2.3) Otros procedimientos*

Dentro del grupo de problemas que plantean una regla de correspondencia (x de cada y) hay cuatro problemas en los que las magnitudes son de la misma naturaleza (18, 19, 20, 20b) y cuatro en los que las magnitudes son de distinta naturaleza (4, 5, 6 y 8). En los primeros, algunos alumnos utilizaron el procedimiento OP. Analizaremos estas resoluciones en otro apartado (3.4).

Con respecto a los segundos, además de los procedimientos tipo I, aparecen también, aunque con menor frecuencia, procedimientos VU (ver tabla 3.4). Comentaremos aquí únicamente un error frecuente en las resoluciones a los problemas 5 y 6 en los que el valor unitario es menor que uno.

Algunos de los alumnos que optaron por el cálculo de los valores unitarios tendieron a invertir los términos de la división. Por ejemplo, para 20 canicas, 6 pesos, dividen el mayor entre el menor, 20:6 = 3.3, y consideran que han obtenido el precio por canica (y no las canicas por un peso).

La inversión de los términos de la división ocurre, en general, por el hecho de que en el algoritmo de la división que se enseña en México y en otros países, el divisor se pone a la izquierda del dividendo, rompiendo el orden acostumbrado:

$$a:b \rightarrow b\overline{)\,a}$$

Sin embargo, éste no parecer ser el motivo del error aquí puesto que algunos de los niños que lo cometieron, plantearon correctamente la división en otros casos. El error parece provenir del hecho de que el dividendo es menor que el divisor, lo que produce una división todavía poco familiar para los niños. Es probable que los alumnos no hayan tenido experiencias en las que tengan que *decidir* qué dividir entre qué, debido a que en casi todos los problemas que resuelven, se divide el número mayor entre el menor.

Cuando es necesario tomar esta decisión, posiblemente el esquema que destaca que la división juega como razón interna, ayude a distinguir las dos divisiones posibles, y lo que éstas representan:

El precio por canica

| | Canicas | Pesos |
|---|---|---|
| | 20 | 6 |
| **:20** | | |
| | 1 | 6:20 |

El número de canicas por un peso

| | Canicas | pesos |
|---|---|---|
| | 20 | 6 |
| **:6** | | |
| | 20:6 | 1 |

### *3.2.4) Comentario.*

El conjunto de problemas de comparación de razones que hemos revisado aquí, en los que la constancia de la razón externa se expresa mediante una regla de correspondencia "x por cada y", con cantidades discretas relativamente pequeñas, favorecen efectivamente la puesta en marcha de los procedimientos internos (I), procedimientos que consisten en generar conjuntos de pares de cantidades cuya razón es constante, para igualar un término y poder comparar.

Al utilizar estos procedimientos, los alumnos realizan un trabajo en el nivel de las *relaciones* entre cantidades, previamente a su expresión con un número racional. Tanto los valores unitarios como los operadores externos, naturales o racionales, permanecen implícitos. Las razones funcionan como *descriptores* de estos números y, en particular, de los racionales.

Hemos identificado algunas características específicas de este trabajo: iterar una pareja de cantidades supone, en primer lugar, desechar la idea de comparar directamente las cantidades que se dan, para considerar las *relaciones* entre las cantidades, las cantidades *relativas*: "tanto de A por cada tanto de B". En los problemas planteados, la mayoría de los alumnos logró asumir esta primera condición, si bien no siempre desde el primer momento.

Otras dos dificultades fueron: 1) considerar que el número de veces que se itera cada pareja de cantidades para igualar un término, no tiene porqué ser el mismo y 2) determinar una cantidad múltiplo común de las dos cantidades que se desean igualar.

Estas mismas dificultades manifiestan el interés de los problemas desde el punto de vista del desarrollo de la noción de razón: el número de veces que se iteran las cantidades de un par, altera las cantidades, pero no la razón que éstas guardan, y esto es lo que se está comparando: el precio por canica no se altera porque se compren más o menos canicas (en principio), la fracción de las naranjas recogidas que nos dan no se altera si recogemos muchas o pocas.

Así mismo, el problema específico de determinar previamente la cantidad común para realizar la comparación constituye una buena ocasión para estudiar la noción de “múltiplo común”, desde una perspectiva inusual e interesante por el hecho de que problematiza la existencia misma de estos números.

En los apartados siguientes, al analizar los otros procedimientos que los niños utilizaron en estos mismos problemas y al analizar el uso de los procedimientos internos en otros problemas, podremos apreciar formas en que el trabajo con razones como conjuntos de parejas de cantidades, se integra en la tarea de cuantificar un valor unitario o una razón externa con una fracción.

### *3.3) Problemas que evocan valores unitarios*
*Procedimientos I y VU*

*En (1p, 3n) les dan 1/3 de pastel, y en (2p, 7n) les dan 2/7 ¿es 1/3 mayor que 2/7? (Arturo, 4º grado)*

*En (1p, 3n) les toca más pastel que en (2p, 7n) "porque si aquí (2 pasteles) hubieran 2 y aquí (7 niños) hubieran 6, les tocaría igual (pero) hay otro niño que ya sería el número 7 y tendría que ser más grande el pastel para que se lo compartieran." (Adriana, 5º grado)*

En los tres problemas del contexto "reparto de pasteles" se apela a la comparación de valores unitarios: *¿en cuál de las dos mesas le va tocar más pastel a cada niño?* Además, no se sugiere, como en los problemas anteriores, que las cantidades puedan variar, no se dice, por ejemplo, "por cada 3 niños habrá un pastel", sino "hay tres niños y un pastel".

La variación, en caso de ser considerada, debe ser establecida por los niños como un medio para resolver y esto implica, como ya vimos en los problemas de valor faltante, movilizar la propiedad fundamental de la noción de razón: a:a' = na: na'

Por ello, en estos problemas, comparar sin hacer las divisiones que llevan a los valores unitarios, multiplicando o iterando ambos términos de un par para obtener pares equivalentes (procedimientos I), es más difícil que en los anteriores. En el apartado 2.2.2 de este capítulo ("Efectos de la variable "manera de formular la constancia") comentamos que en estos problemas se registra una disminución de los procedimientos I a favor de los que consisten en determinar los valores unitarios (VU) (ver tablas 1.1 y 1.2 del apartado 1).

En la tabla que se presenta a continuación puede apreciarse, además, que la frecuencia de procedimientos I disminuye (del problema 11 al 11-c y luego al 11-b) al mismo tiempo que la de procedimientos VU aumenta, lo que puede explicarse por la dificultad que imprime el valor numérico de la razón interna a los procedimientos I, éste es el "el doble" en el problema 11, mientras que es "el triple" en el 11-c, y, finalmente, no es entero en el problema 11-b, a la vez que los valores unitarios más fáciles de calcular son los del problema 11-b.

En el conjunto de resoluciones de los niños volvemos a verificar dos hechos que ya habíamos observado en los problemas de cuarta proporcional (SFR-2): el contraste entre la dificultad del procedimiento VU (racional) con la facilidad con la que resuelven quienes recurren a procedimientos I, y sobre todo, determinadas interrelaciones entre los procedimientos I y VU. Estas últimas no se expresan en la tabla debido a que dichos procedimientos fueron clasificados como VU.

**Tabla 3.8**
**Resoluciones a los problemas de reparto**
**Grupo de niños entrevistados (4º, 5º y 6º)**

| RI | | I | **VU** | OP | Estima | Reduce (N) | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | 11<br>Niños - pasteles<br>(3n, 1p) vs (7n, 2p) | 7<br>(**7a**) | **6**<br>**(2a 4e)** | | | | | 9/13 |
| | 11-c<br>niños - pasteles<br>(3n, 2p) vs (9n, 6p) | 4<br>(**4a**) | **6**<br>**(1a 5e)** | | | 1<br>(0a 1e) | | 6/11 |
| NE | 11-b<br>niños - pasteles<br>(6n, 2p) vs (10n, 5p) | 2<br>(2a) | **11**<br>**(9a 2 e)** | | | | | 11/13 |

A continuación revisaremos las resoluciones a los problemas con una razón interna entera (11 y 11-c) y, por separado, al problema sin razones internas enteras (11-b). En ambos casos, clasificaremos los procedimientos en función de la forma en que integran un trabajo en el nivel de las razones entre cantidades enteras:

a) Se busca el valor unitario sin recurrir a procedimientos I

b) Se registra una forma de integración entre los procedimientos I y VU

c) Se utilizan procedimientos I sin determinar el valor unitario.

### 3.3.1) Problemas con una razón interna entera (11 y 11c)

La relativa sencillez de las razones internas (el doble y el triple), aunada al hecho de que los valores unitarios ahora son fracciones “difíciles” (1/3, 2/7, 2/3, 6/9) provoca un contraste nítido en el grado de éxito entre quienes acuden a un procedimiento o a otro. Considerando los dos problemas juntos, la distribución de procedimientos por grado es la siguiente:

| | I | U |
|---|---|---|
| 4º (4 als.) | 1/7 (0 errores) | 5/7 (4 errores) |
| 5º (3 als.) | 5/6 (0 errores) | 1/6 (1 error) |
| 6º (6 als.) | 5/11 (0 errores ) | 6/11 (3 errores) |

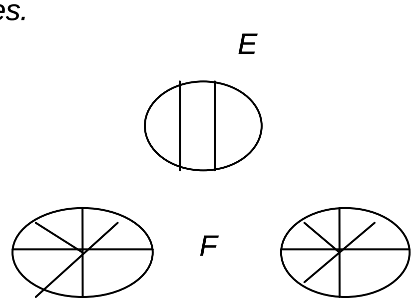
Puede observarse que los alumnos de 4 º grado fueron los más sensibles al cambio de formulación de la razón externa: ahora prácticamente no recurren al procedimiento $I_1$, tienden a buscar, sin éxito, el valor unitario. Veamos algunos ejemplos representativos de estos procedimientos.

*a) Se busca el valor unitario sin recurir a procedimientos I*

Veamos algunos ejemplos en los que los alumnos no utilizan en ningún momento las relaciones internas entre los datos que se dan. Intentan determinar por separado cada valor unitario.

Itzel (4º grado) en el problema 11, E (1p, 3n) vs F (2p, 7n), determina los valores unitarios mediante dibujos. Dado que éstos no permiten apreciar visualmente la diferencia, parece entonces centrarse en la variable "número de niños":

> *It: (Primero dibuja el pastel E y abajo de éste los dos pasteles de la mesa F. Después divide los dos últimos pasteles en 7 partes cada uno y el pastel de la mesa E en 3 partes.*




> *Itz: "La mesa E, porque aquí les va a tocar un cacho más grande, porque son menos niños y en la F les va a tocar menos porque son más niños (...)"*

En el problema 11-c, R (2p, 3n) vs S (6p, 9n), procede de la misma manera. Después de obtener los valores unitarios mediante dibujos, escoge (2p, 3n) porque:

> *It: "Porque son 3 niños nada más y dos pasteles y aquí (señala los dibujos de la letra R) les tocaría un cacho más grande que aquí (señala los dibujos de la letra S) porque aquí son más niños y entonces cómo son más niños tendrían que partir pasteles en cachos más chiquitos y les tocaría menos".*

Arturo (4º grado) en el problema 11: E (1p 3n) y F (2p, 7n) logra obtener los valores unitarios numéricos con facilidad, 1/3 y 2/7. Concluye que 1/3 es mayor, porque los séptimos son más chicos, pero demuestra que no está seguro:

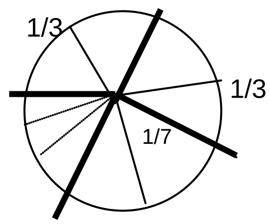
> *Art: (Inmediatamente responde) En la mesa E (...) por que aquí (E) es un pastel y nada más le toca un tercio. Y aquí en la F hay 2 pasteles para 7 niños y sería, esté 2 séptimos (...) dos séptimos es más. ¡Ah no!, entonces es la F, porque dos*

> *séptimos es más grande que un tercio (...)¡Sí es en la E! (...) porque se parte en 3 y no en 7 que son más cortas las rebanadas.*

Decide entonces hacer una representación con dibujos.

> *Art: Estos dos pedazos (señala los séptimos) apenas igualan, no lo igualan a uno de estos (1/3) (...) Es que aquí (1/3) se parte en tercio y aquí (1/7) lo estamos partiendo en más*

Finalmente, opta por comparar 1/3 con 2/7 de una manera original:




Divide un pastel en séptimos; encima, marca los tercios, considerando dos séptimos por cada tercio. Le sobra un séptimo, el cual divide en tres para asignar cada $21^{avo}$ (al que llama "punto decimal") a cada uno de los tercios. Encuentra, con dibujos, que 1/3 = 2/7 + (1/3 de 1/7), pero interpreta de manera errónea este hallazgo y concluye que 2/7 es mayor que un tercio.

Brenda (6º grado) en ningún problema utilizó las razones internas. En el problema 11, E (1p, 3n) vs F (2p, 7n) determina los valores unitarios con dibujos, no cuantifica con fracciones, y se equivoca al estimar:

> *Bren: (hay más pastel en la mesa **F**) "Porque son 2 pasteles para 7 niños y si dividimos 2 entre 7, nos va a quedar más que si dividimos uno entre 3"*

### *b) Se registra una forma de integración entre los procedimientos I y VU*

Adriana (5º grado), en el problema 11-c, R (2p, 3n) vs S (6p, 9n) tiene la intuición de que "les toca lo mismo" y muestra que basó su intuición en la iteración de (2p, 3n), pero no logra ver en eso un argumento convincente de que las porciones serán del mismo tamaño (lo logró en el problema anterior).

> *Ad: (responde inmediatamente) Mm. En la mesa S (...)¡No!. En la mesa R.(...) ¡No!... ¡Ay!,.. me gustaría estar en las dos. Porque te toca casi la misma parte.*

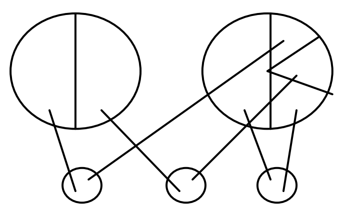
Se da entonces a la tarea, difícil para ella, de obtener los valores unitarios con dibujos:

*Ad: Los partes, los 6 pasteles (se queda pensando y después dibuja 6 pasteles) Se los vas a repartir a cada niño (dibuja 9 niños abajo de los pasteles) y a cada quien le tocaría (trata de dividirlos) Es que si lo partimos en 2 sobrarían pasteles...*

Explica su intuición:

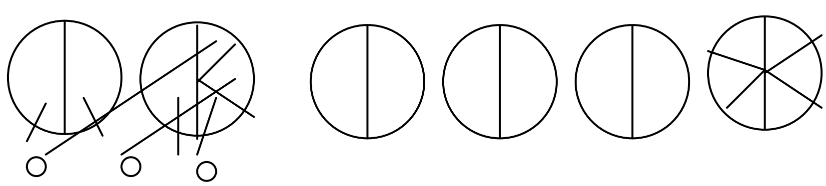
*E: Y sin embargo, antes de partirlos tú supiste o tú pensaste que les iba a tocar lo mismo (...)*
*Ad: Porque aquí (2 pasteles) fui sumando 2+2 y aquí (3 niños) de 3 en 3 hasta que me saliera el resultado.*
*E: A ver...*
*Ad: 2 más 2, 4 más 2, 6 y es lo que tenemos (señala los 6 pasteles de la mesa S) y aquí (3 niños) sería 3 mas 3, 6 más 3, 9.*
*E: Esto está interesante. ¿Qué quiere decir eso que encontraste?*
*Ad: Pues... (vuelve a callar) (...) Ahí es donde me quedé. La verdad no puedo partir los 6 pasteles para que le toquen lo mismo a los 9 niños (...)*

Después de un momento, logra obtener el valor unitario correspondiente a (2p, 3n): “la mitad y un cacho”:



Para repartir 6 pasteles entre 9 niños, recupera su intuición inicial: 6 pasteles entre nueve niños se pueden repartir dando 2 pasteles a cada 3 niños:

*(...)*
*Ad: Lo partiríamos igual (...)*



*Ad: Le toca a cada uno lo mismo.*

Como vimos en los problemas de valor faltante, para algunos alumnos considerar una razón no unitaria constante (2 por cada 3) se facilita cuando ya se conoce el valor unitario, es decir, considerar la igualdad a: a’ = na: na’ se facilita cuando se conoce el cociente de la primera división. El procedimiento I surge como una forma práctica de organizar un reparto.

Julio (5º grado), en el problema 11, E (1p, 3n) vs F (2p, 7n), al igual que Adriana en el problema anterior, se muestra convencido de que en (1p, 3n) les toca más pastel. Por lo que dice, puede suponerse que percibe que en (2p, 7n), con un niño menos, les tocaría lo mismo, es decir, su primera intuición se basa en una consideración de las razones:

> *Jul: (Dice inmediatamente) En la E.(...) Porque un pastel está divido entre 3 y en la F, nada más hay 2 pasteles y hay 7 niños. (...) O sea, que más o menos por cada pastel, en la F, le tocaría a cada niño como un... (se queda pensando por un momento) un... (vuelve a callar, por un lapso más grande que el anterior)*

No logra hacer explícito el razonamiento anterior y para explicar, termina cuantificando con fracciones. Pero comparar 1/3 contra 2/7 no es sencillo por lo que en realidad Julio termina comparando en base a su primer razonamiento:

> *Jul: (En la E porque) les tocaría de un tercio.*
> *E: ¿Y en la F?*
> *Jul: Les tocaría menos de un tercio (...) porque un pastel lo divido entre 7 y otro entre 7 y le tocaría de 1/7. Un pastel lo divido entre 7 y otro entre 7 y los pedazos los junto y serían 2/7 a cada niño, eso es menos de 1/3.*
> *E: ¿Cómo sabes?*
> *Jul: Porque, (se queda callado) Sí, le tocaría más a éste (E)*
> *E: ¿Sí?. ¿En qué pensaste?*
> *Jul: Que éste (F) iba a tener aunque sea un pedacito menos.*

El ejemplo es ilustrativo de la forma en que un trabajo a nivel de las relaciones entre las cantidades aun no cuantificadas con fracciones, proporciona una forma de comparar fracciones, cuando no se dispone del algoritmo correspondiente.

En el problema 11-c, R (2p, 3n) vs S (6p, 9n), Julio logra aplicar con certeza la conservación de las razones internas, dividiendo ambos términos del par (6p, 9n) entre 3. Nuevamente, la posibilidad de dividir los dos términos entre un mismo número parece provenir de una forma práctica de organizar el reparto, y no de la regla para obtener fracciones equivalentes:

> *Jul: (Responde rápidamente) En la S (...) porque... (se queda callado y luego cambia de opinión) Es lo mismo,. porque aquí (mesa S) cada uno lo dividiría entre 3 y sería de 3 (niños) y aquí (6 pasteles) sería 2 (...) aquí (S) le tocaría de 2/3.*

### *c) Se utilizan procedimientos I sin determinar el valor unitario*

- Nancy (6º grado), en el problema 11, E (1p, 3n) vs F (2p, 7n):

> *Nan: En la mesa **E** (...) Porque si tuviéramos 2 pasteles en la mesa **E** serían 2 pasteles para 6 niños y en la mesa **F** hay 2 pasteles para 7 niños*

Y en el problema 11-c, R (2p, 3n) vs S (6p, 9n):

> *Nan: (Se queda pensando 15 segundos) "En la **S**" (...) "Porque… ah no, igual" (...) "En la mesa **R** tenemos 2 pasteles para 3 niños …(anota en su hoja un 2 y al lado un 3).. y si tuviéramos 6 pasteles serían para 9 niños, porque 2, 4 y 6 pasteles …(anota en columna 2,4 y 6)… entonces también va aumentando los niños. Para estos 3 …(señala 2 que escribió y anota a la derecha un 3)… tenemos 3 niños, para 4 pasteles tenemos 6 niños y para 6 pasteles tenemos 9 niños"*
> *(En su explicación anotó lo siguiente)*
>
> | | |
> |---|---|
> | *2* | *3* |
> | *4* | *6* |
> | *6* | *9* |

- Adriana (5º grado), en el problema 11, E (1p, 3n) F (2p, 7n):

> *Ad: (Contesta inmediatamente) En la E (...) porque aquí (E) sólo te lo vas a repartir en 3 niños un pastel y aquí (F) te lo vas a repartir en 7 y te quitarían otro pedazo para, por ejemplo, si aquí (2 pasteles) hubieran 2 y aquí (7 niños) hubieran 6, les tocaría igual y se lo van a repartir porque hay otro niño que ya sería el número 7 y tendría que ser más grande el pastel para que se lo compartieran.*

Es decir, (1p, 3n ) = (2p, 6n) > (2p, 7n)

Tenemos aquí, nuevamente, ejemplos muy claros de la utilización de razones entre cantidades enteras para realizar anticipaciones sobre valores unitarios fraccionarios que aun no se saben cuantificar.

### 3.3.2) El problema sin razones internas enteras (11b) (6n, 2p) vs(10n, 5p):

En este problema las razones internas (6 niños a 10 niños y 2 pasteles a 5 pasteles) no son enteras, lo que explica la disminución de procedimientos **I**, en los que se iguala un término iterando un par. Casi todos los alumnos se dan a la tarea de determinar uno o los dos valores unitarios. Sin embargo, las razones externas pueden simplificarse: (10 niños, 5 pasteles) = (2 niños, 1 pastel) y (6 niños, 2 pasteles) = (3 niños, 1 pastel) lo que permite reducir la dificultad de determinar los valores unitarios.

Únicamente tres alumnos trabajan con los datos sin simplificar. Lo interesante es que varios niños simplifican antes de determinar las fracciones y para ello trabajan, de manera implícita, con las razones externas o internas.

*a) Se busca el valor unitario sin el recurso a procedimientos I*

Francisco (6º grado) no simplificó: dibujó 2 pasteles, y dividió cada uno en sextos. Anotó debajo de los pasteles “seis niños”; enseguida dibujó 5 pasteles, los dividió en décimos. Estimó entonces que en ambos se obtienen “dos pedacitos a cada niño” (2/6 y 2/10 respectivamente) y que, por lo tanto, les toca lo mismo. Enseguida se dio cuenta de que la porción no era igual a dos décimos y se dio la tarea de averiguar cuántos décimos corresponden a cada niño. Probó con tres (agrupa los décimos de tres en tres), luego con cuatro hasta que encontró que eran 5. Es hasta ese momento que observó que la porción es igual a medio pastel y la comparó visualmente contra “dos pastelitos” (de 1/6).

En el otro extremo, algunos alumnos obtuvieron las fracciones correspondientes a los valores unitarios y después aplicaron la técnica de simplificación de fracciones: 5/10 = ½ y 2/6 = 1/3. Pocos niños hicieron esto (dos alumnos de sexto y uno de quinto), lo cual se explica por el escaso dominio que, en general, tienen de las fracciones y sobre todo porque existen otros caminos para simplificar.

*b) Se registra una forma de integración entre los procedimientos I y VU*

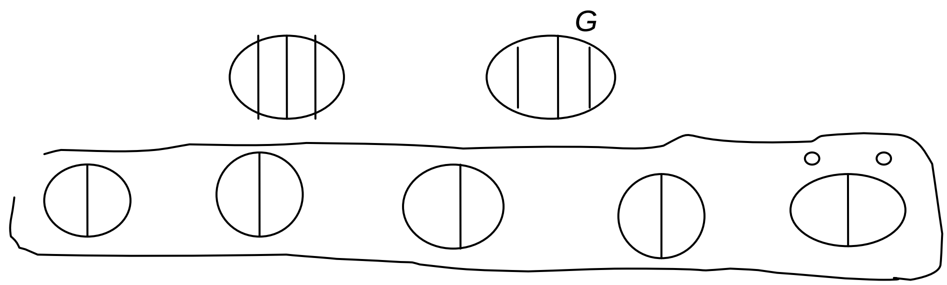
Varios alumnos, para hallar a nivel gráfico el valor unitario que corresponde a 5 pasteles entre 10 niños, dibujan los cinco pasteles y los dividen de entrada entre dos (no entre 10). Anticipan entonces que a 5 pasteles entre 10 niños corresponde la mitad de pastel por niño. En el caso de 2 pasteles para 6 niños, dibujan 2 pasteles y directamente parten cada uno de tres (y no en seis), y asignan un tercio a cada niño.

Estas simplificaciones ocurren en el momento mismo de intentar repartir, nuevamente como una forma práctica de organizar el reparto: dados cinco pasteles, para obtener 10 porciones, se anticipa que puede partirse cada pastel en dos, puesto que 10 es el doble de 5 (razón externa X2); y, en el otro caso, dados dos pasteles, para obtener 6 porciones se anticipa que de cada pastel se pueden obtener tres porciones (razón interna **:**2).

Seis de los trece alumnos hacen estas simplificaciones, dos de ellos sólo simplifican en el caso de 5p, 10n, obtienen el valor unitario ½ pastel, y comparan éste visualmente contra la porción que corresponde a 2p, 6n: en este último toca “menos de ½ pastel”. Los otros cuatro simplifican ambos pares y terminan por comparar, en el nivel de dibujo y, eventualmente, también con fracciones, ½ contra 1/3. Veamos algunos ejemplos:

Itzel (4º grado): simplifica, no usa fracciones.

> *It: (Inmediatamente contesta) en la L (5p, 10n) (...) Porque, haz de cuenta que aquí están los 10 pasteles (dibuja 10 pasteles) y son 5 niños. Entonces aquí nada más se repartiría en dos (divide cada pastel en 2) aquí ya quedarían 20. ¡Ah, no son 5 pasteles!. 5 pasteles. Nada más estos (encierra en un rectángulo los 5 pasteles) y quedaría 10. Entonces a cada uno les tocaría..., a 2 les tocaría un pastel (dibuja en cada lado de un pastel un muñequito que representa a los niños). En cambio en la mesa G que son 2 pasteles para 6 niños  les tocaría menos (dibuja los dos pasteles y para dividir cada pastel entre 3 hace tres divisiones en cada uno, obtiene 4 partes pero no repara en ello)*




Itzel no utiliza fracciones en ningún momento, rápidamente logra identificar las razones simplificadas “por cada pastel dos niños” y , “por cada pastel tres niños”, para organizar los repartos.

Julio (5º grado): simplifica y después cuantifica con fracciones:

> *Jul: (Inmediatamente dice) En la **L** (10n, 5p) (...) Porque le tocaría... A cada pastel lo tendría que dividir entre 2 y en la **G** (6n, 2p) cada pastel lo tendría que dividir entre 3, le tocaría 1/3. Y a cada niño en la **L** le tocaría de 1/2.*

*c) Se utilizan procedimientos I sin determinar el valor unitario.*

Por último, veamos dos resoluciones en las que las alumnas trabajan a nivel de razones entre cantidades enteras, sin determinar los valores unitarios fraccionarios.

- Nancy (6º grado)

> *Nan (Se queda pensando unos segundos y dice) En la mesa **L** (...) Porque en la **G** hay 2 pasteles para 6 niños y en la **L** hay 5 para 10 niños, entonces si tuviéramos 3 pasteles en la mesa **G** serían 3 pasteles para… para 9 niños y en la mesa **L** hay 5 pasteles para 10 niños*

En su explicación, Nancy intentó acercar dos términos modificando un solo par. Para encontrar que (2p, 6n) es equivalente a (3p, 9n) tuvo que pasar por el par (1p, 3n), es decir, estableció las siguientes relaciones:

(2p, 6n) = (1p, 3n) = (3p, 9n) < (5p, 10n)

Mariana (6º grado)

> *"Si aquí en la mesa G (2 pasteles, 6 niños) hubiera 4 niños les tocaría igual, pero como hay 6 niños les toca más en la otra mesa"*

El par (2p, 4n), equivalente a (5p, 10n), no proviene de aplicar razones internas puesto que no son enteras, sino de saber que, en (5p, 10n), a cada niño le toca ½ de pastel (o 1 pastel por cada 2 niños). En un juego entre razones expresadas como pares y cuantificadas con un número, hace el siguiente recorrido:

(5p, 10n) **= (**1p, 2n) ó (½ p, 1n) **=** 2p, 4n **>** 2p, 6n

### 3.3.3) Comentario.

En estos problemas las fracciones juegan el papel de valores unitarios, resultado de una división partición: ***a*** pasteles entre ***b*** = ***a/b*** de pastel. Hemos identificado nuevamente un conjunto de resoluciones de los niños en el que el cociente fraccionario queda implícito, las comparaciones se realizan a partir de un trabajo con razones y también un conjunto de resoluciones en el que el trabajo con fracciones integra razonamientos en el nivel de las razones.

(2p, 3n) = (6p, 9n)

(1p, 3n) = (2p, 6n) >(2p, 7n)

(5p, 10n) = (1p, 2n) = ½ = (2p, 4n)

(2p, 6n) = (1p, 3n) = (3p, 9n) = 1/3, entre otras.

Se trata, unas veces, de un recurso pragmático e implícito a la razón, que funciona como medio para realizar los repartos de manera más económica[1], mientras que otras veces es totalmente explícito. La equivalencia y el orden se sustentan en propiedades de las razones (que son a su vez propiedades de la división):

(a, b) = (na, nb) y

(b>d) $\Rightarrow$ (a, b) < (a, d)

Es más difícil comprender estas mismas propiedades en el nivel de los números fraccionarios. Para comparar, por ejemplo, 1/3 con 2/7, normalmente se enseña a los niños a obtener fracciones equivalentes multiplicando por un mismo factor el numerador y el denominador: 7/21 vs 6/21 (o, haciendo productos en cruz). En este punto del trabajo

[1] Valdría la pena estudiar un poco el uso de la noción de equivalencia en realización de repartos a partir de datos "simplificables". Esta variante no ha sido considerada en los diversos trabajos sobre las fracciones en problemas de reparto (ver Streefland, Lerner, Block, Dávila, De León, entre otros).

aritmético, hay ya poco lugar para una reflexión en el nivel de las relaciones que subyacen a estas fracciones. Las fracciones son difíciles de comprender y en su estudio se tiende a centrar la atención en las técnicas para el cálculo.

Por su parte, la simplificación y la comparación de razones no se realiza siguiendo una regla preestablecida sino a partir de razonamientos diversos: por ejemplo, (5p, 10n) equivalente a (1p, 2n) o a (½ p, 1n) porque "hay el doble de niños que de pasteles" mientras que (2p, 6n) es equivalente a (1p, 3n) porque el reparto 2 entre 6 se puede realizar en dos repartos de 1 entre 3.

En resumen, en las resoluciones que hemos revisado en este apartado puede inferirse nuevamente la presencia de un conocimiento intuitivo, no formalizado, en el nivel de las razones que opera de manera previa y también simultánea, al trabajo que se realiza con fracciones.

Esta observación sugiere que favorecer previamente, y también simultáneamente, una reflexión sobre el orden y la equivalencia de razones puede beneficiar la comprensión de la noción de fracción: establecer que los repartos na:nb son equivalentes, cualquiera sea el número natural n, puede ayudar a comprender que en todos ellos la porción por niño es a/b, y que las fracciones a/b y na/nb son equivalentes. El trabajo con razones puede proporcionar además un medio de control adicional para los resultados de las divisiones, así como una forma de simplificarlas.

Sin embargo, recordemos que en estos problemas, sobre todo para los alumnos de cuarto grado, no fue fácil recurrir a las razones internas. Para algunos de ellos, la relación entre valor unitario fraccionario y equivalencia de razones pareció obrar en sentido inverso al que hemos destacado: sólo pudieron considerar la relación "a por cada b", cuando conocieron, en el nivel de la representación gráfica, la relación "a/b para cada uno". Para otros, ambos caminos se revelaron muy difíciles.

En la tabla 3.9 se muestran las elecciones que hicieron los alumnos entre los procedimientos I y VU en cuatro problemas que apelan a la igualdad de valores unitarios, con razón interna entera, dos de valor faltante y dos de comparación. Se confirma nuevamente la tendencia de los niños menores por los procedimientos VU (la mayoría, sin lograr tener éxito).

Esta segunda observación es más difícil de interpretar de manera unívoca: posiblemente un trabajo dirigido expresamente al desarrollo de procedimientos internos daría mayores posibilidades a los alumnos de cuarto grado para utilizarlos en problemas como los que aquí estudiamos, y de integrarlos en su aprendizaje de las fracciones. Pero también sugiere que esta integración, y por lo tanto el estudio más profundo de la equivalencia y el orden entre fracciones, debe realizarse hacia el final de la escuela primaria. Nuestra muestra de niños es demasiado pequeña para ser conclusivos, nos permite únicamente plantear las preguntas.

**Tabla 3.9**
**Uso de los procedimientos *I, U, Otro* en problemas con razón interna entera, que evocan valores unitarios iguales**

| | | Problemas de valor faltante | | Problemas de comparación | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 13<br>3p, 4n = x, 16n | 15<br>3s, 5v =12s, x | 11<br>(1p, 3n) vs (2p, 7n) | 11-c<br>(2p, 3n) vs (6p, 9n) | Mismo procedimiento en : |
| 4º | Itz | I | U | U | U | 3 de 4 (U) |
| | Art | U | U | U | U | 4 de 4 (U) |
| | Mig | U | U | U | --- | 3 de 3 (U) |
| | Ver | Otro | I | U | Otro | 0 de 4 |
| 5º | Jul | I | I | I | I | 4 de 4 (I) |
| | Alb | I | I | I | U | 3 de 4 (I) |
| | Adr | U | I | I | I | 3 de 4 (I) |
| 6º | Mar | Otro | I | I | --- | 2 de 3 (I) |
| | Man | I | I | U | U | 2 de 4 |
| | Bren | I | I | U | U | 2 de 4 |
| | Ped | I | I | I | I | 4 de 4 (I) |
| | Fco | I | Otro | U | U | 2 de 4 |
| | Nan | Otro | I | I | I | 3 de 4 (I) |

### *3.4) Los procedimientos OP, cuando las magnitudes son de misma naturaleza*

> *"Por cada 10 naranjas que recojan les ofrecen 5, o sea, la mitad. Y aquí, por cada 6 naranjas que recojan se quedan con 2, o sea, un tercio. Entonces conviene más aquí (10, 5)"*
> *(Manuel, 6º grado)*

En el apartado 3.2, al analizar las resoluciones a los problemas que se formulan con una regla de correspondencia del tipo "x por cada y", vimos cómo la noción de razón constante se expresó de manera implícita en la obtención más o menos laboriosa de parejas de cantidades. Ahora veremos los casos en los que esta noción se expresa de manera explícita mediante la determinación de un operador constante, entero o fraccionario (procedimiento OP). Este procedimiento fue poco frecuente y ocurrió únicamente en los problemas en los que las magnitudes son de misma naturaleza.

**Procedimiento "determinación del operador"**
**Grupo de niños entrevistados (4º, 5º y 6º)**

| RE | RI | | I | VU | OP | Estima | Reduce (N) | Ad | Aciertos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | NE | 20b<br>Estampas - estampas<br>(2, 6) vs (5, 10) | 8<br>(7a 1e) | 1<br>(1 a) | **3**<br>**(3a)** | | | | 11 /12 |
| 1/E | NE | 19<br>naranjas- naranjas<br>(10n, 5n) vs (6n, 2n) | 8<br>(8a) | | **7**<br>**(7a)** | | | | 15 /15 |
| NE | E | 18<br>naranjas - naranjas<br>(5n, 2n) vs (20n, 6n) | 12<br>(8a 4e) | | **0** | 1<br>(1a) | | | 9/13 |
| | NE | 20<br>naranjas - naranjas<br>(3n, 2n) vs (10n, 9n) | 9<br>(7a 2e) | | **1**<br>**(1a)** | | 1<br>(0a 1e) | 3<br>(0a 3e) | 9/14 |

En la tabla puede observarse que el uso del operador alcanza la frecuencia más alta en el problema 19, en el que las relaciones en juego son de tipo "parte todo" y, además, les corresponden fracciones unitarias, las más pequeñas (½ y 1/3). La frecuencia es incluso mayor que en el problema 20b en el que los operadores son enteros (X3 y X2), pero las relaciones son de tipo "parte - parte". Esto puede deberse a que el tipo de situación más común en el que se utilizan operadores externos, en la escuela y en la vida cotidiana, es el de la relación parte todo. Por otra parte, también puede influir el hecho de que los objetos que se intercambian en el problema 20b, si bien constituyen cantidades de la misma naturaleza (estampas), no son objetos idénticos, hay estampas nuevas y estampas viejas, y por lo tanto expresar una razón externa con un operador sin dimensión, es decir, ver a una cantidad de estampas viejas como dos veces o tres veces una cantidad de estampas nuevas, requiere dejar de lado esta diferencia material.

Por otra parte, cuando la razón externa no es entera ni fracción unitaria, el uso del operador prácticamente desaparece (problemas 18 y 20).

A continuación analizaremos algunos ejemplos por problema. Nuevamente, prestaremos especial atención a la vinculación que los niños establecen entre dos acepciones de la noción de razón constante: como conjunto de parejas de cantidades y como un número.

*El problema 19:*
*El Paraíso (10n, 5n) vs El Paso (6n, 2n)*

Se trata de relaciones parte todo a las que corresponden fracciones unitarias. Siete alumnos de 13 encuentran que en una huerta dan a los niños *la mitad* de las naranjas que recogen mientras que en la otra les dan *menos*. Cuatro de ellos encuentran también que en ésta última dan *la tercera* parte. Los demás usan procedimientos tipo I.

- Alberto (5º grado)

> *Al: O sea, en éste (10 naranjas, 5 naranjas) te da la mitad de lo que recoges y en ésta no (6 naranjas, 2 naranjas), te debería de dar 3, (y da) una naranja menos.*

Es decir, establece las siguientes relaciones:

(10, 5) = "½ de" = (6, 3) > (6, 2).

Como para confirmar, identifica además una relación no pertinente en (6, 2): 2 es igual a la mitad de 6 *menos* uno, y por lo tanto, (6, 2) = (10, 4) y
(10, 4) < (10, 5)

> *Al: En ésta (El paraíso) te ofrecen más porque por cada 10 naranjas que recojas, se quedan con la mitad que recogieron y en ésta (El paso) no, por cada 6 naranjas que recojan... O sea, es como si en ésta (10, 5) recogieran 10 naranjas y sólo les dieran 4 naranjas.*

- Adriana (5º grado), determina un sólo operador (1/2) y lo compara contra la razón

(6n, 2n). Para confirmar, obtiene dos pares equivalentes mediante una iteración:

> *Adr: (Contesta de inmediato) "El paraíso" (...) porque aquí (El Paraíso)… el que les está ofreciendo se queda con la mitad de uno, y aquí (El paso)… se queda el señor con más y el pobre niño sólo se queda con 2" (...)*

> *"aquí (El Paraíso)... recogen 20 y les dan 10, acá (El Paso)… recogen 12 y les dan 4" (...) pues siempre va a ganar más este niño …(en el Paraíso).. que el otro …(en el Paso)…"*

En otras palabras, las parejas de cantidades que se obtienen iterando (5, 10) serán *siempre* equivalentes a ½, y convendrán más que las que se obtienen iterando (6, 2), las cuales aún no corresponden a un número (un tercio).

- Mariana (6º grado) también determina un solo operador:

> *Mar: Ay, es lógico, está bien fácil (relee) ...pues les conviene más "El Paraíso" (10, 5) porque por cada 10 naranjas que recojan, les están dando la mitad de las naranjas y por cada 6 naranjas que recojan, les están dando dos y no es la mitad.*

- Manuel (6º grado) determina y compara los dos operadores:

> *Man: "En El Paraíso les ofrecen por cada 10 naranjas que recojan les ofrecen 5, o sea, la mitad. Y aquí ...("El Paso")... por cada 6 naranjas que recojan se quedan con 2, o sea un tercio. Entonces conviene más aquí (señala "El Paraíso")..."*

*El Problema 20b*
*Miguel ofrece a Laura 6 estampas viejas por cada 2 nuevas; Armando le ofrece 10 estampas viejas por cada 5 nuevas.*

En este problema los operadores son enteros (doble y triple). Ya vimos que hay una incidencia menor del procedimiento OP que en el problema anterior: sólo tres alumnos de 12 encuentran que, en un caso, la niña recibe *el doble* de las estampas que ella da, mientras que, en el otro, recibe *el triple*. Notemos que las razones internas no son enteras, por lo cual el procedimiento alternativo a OP es $I_2$, y éste es claramente más largo y laborioso.

- Itzel (4º grado) empieza haciendo una estimación correcta, considerando las dos variables. Es cuando cuestionamos su argumento que concluye cuando determina los dos operadores *doble* y *triple*. Estos emergen con dificultad, como un hallazgo que aclara de una vez por todas la situación:

> *(...)*
> *It: (Se queda un rato pensando en silencio y después escribe el resultado) Miguel (...) porque con Miguel no tiene que perder tantas estampas y le dan 6 y aquí (Armando) sí tiene que perder más estampas y le dan 10*
> *(...)*
> *E: Y si aquí (señala en la redacción del problema el trato con Miguel) le dijeran por cada 2 de tus estampas nuevas te doy 4 en vez de 6 ¿le seguiría conviniendo más? (tacha el 6 y escribe 4)*
> *It: ¡No!*

> *E: Igual sigue perdiendo menos, ¿no?*
> *It: ¡Sí, pero no le darían más!*
> *E: Y si fuera aquí 4, ¿cuál le convendría más?*
> *It: Armando (10, 5).*
> *E: ¿por qué?*
> *It: Porque aquí le dan más estampas.*
> *E: Pero ella da poquitas, y aquí (Armando) ella da más.*
> *It: (Se queda un rato pensativa) ¡No!, aquí, si le dieran 4 sería lo mismo porque en las dos le dan el doble (...)*
> *It: (vuelve al problema original) "le conviene más aquí (Miguel) porque le dan el triple y aquí (Armando) le dan el doble".*

Así, no importa cuántas estampas se estén intercambiando, 2 nuevas por 4 viejas, o 5 nuevas, por 10 viejas, en todos esos tratos se está dando *el doble*. La cuantificación de la relación con "el doble" hace explícita la idea de razón constante.

- Brenda (6º grado) cuantifica las dos razones:

> *Bren: (Se queda en silencio leyendo el problema y luego anota: Miguel) (...) porque Miguel le ofrece más del doble… le ofrece el triple de las estampas que le da, y Armando nada más le ofrece el doble".*

*El problema 18*
*El Río (5n, 2n) vs El Naranjo (20n, 6n)*

Las razones externas no son enteras pero las dos razones internas son enteras, por lo que prácticamente todos los alumnos utilizaron procedimientos tipo I. No obstante, dos alumnas trabajaron con los operadores. Sus resoluciones revelan ciertas dificultades en el proceso de cuantificar una razón.

- Para Brenda (6º grado), este problema resultó difícil (ella nunca recurre a las razones internas). Después de un rato, hace lo siguiente:

> *Bren: (En silencio hace las siguientes operaciones)*
> *<u>  3</u>      <u>2</u>*
> *6/20    2/5*
> *<u>18</u>      <u>4</u>*
> *02       1*
> *Bren: (Anota después de un momento de silencio: "El naranjo")*

Brenda determinó los operadores recíprocos, mediante la división de los términos: en (20, 6), el número de naranjas recogidas es aproximadamente tres veces el número de naranjas que se reciben y en (5, 2) es el doble:

(20:6)
Tres veces

Naranjas recogidas 20 — Naranjas que se reciben 6

Sin embargo, por su conclusión, se puede ver que ella no da este sentido a sus divisiones. Ya vimos anteriormente que Brenda, al igual que otros niños, tendió a invertir las divisiones en el caso menos complejo en el que se trata de calcular valores unitarios menores que uno. No es difícil comprender que lo haga ahora en donde el cociente menor que uno es un operador, lo que exige comprender una expresión como "se dan 0.3 de las naranjas que se reciben"

Brenda termina por desechar sus operaciones, hace una estimación, y escoge la huerta El Río (5, 2): 6 de 20 es *mucho menos* que 2 de 5:

> *Bren: "...es que aquí …(El Río: 5, 2)… tú recoges menos y te quedas con nada más 2 y él se queda con 3. Aquí …(El naranjo), tú recoges 20 y te quedas con 6 y él se queda con 14… y te quedas con mucho menos… tienes que recoger más que con éste"*

- Mariana (6º grado), antes de lanzarse a la búsqueda de pares equivalentes con un término común ($I_2$), hizo una comparación de las razones externas contra ½: Veremos aquí esta parte de su resolución por el interés que presenta su trabajo con razones y fracciones:

> *Mar: Ah... creo que estoy descubriendo un tip... se trata de que aquí... si recogen 5, se quedan con 2 (...), se quedan con casi la mitad, y los otros, recogen 20 y ustedes se quedan con 6, pero están recogiendo más naranjas, por eso les dan más, pero aquí no les están dando algo que se parezca a la mitad, 7 u 8 naranjas. Por eso aquí es más justo (el 5, 2).*

Estima que (5, 2) es "casi la mitad" y que si se recogen 20 naranjas, "casi la mitad" serían 7 u 8. En seguida, con la iteración del par (5, 2) obtiene (10, 4) y surge la duda de si éste sigue correspondiendo a "casi la mitad":

> *Mar: Aquí (5, 2), si recogen 10 naranjas, si pensamos en la segunda vuelta, recogen 10 naranjas, se quedan con 4 y allí ya no es la mitad.*
> *E: ¿cuál es la mitad de 10?*
> *Mar: 5, ah..., no... (rectifica), a mí se me hace que les conviene más el otro, el primero, el de 5 y les dan 2, porque siempre les están dando casi la mitad de las naranjas, y en el otro les dan más naranjas, pero no les dan casi la mitad.*

No obstante, opta por generar otras parejas. Sobre la marcha encuentra que 6 de 20 es equivalente 30 de 100 y logra aproximar esta relación con 1/3:

> *M: (...) supongamos que recogen 25 (pide una hoja; pone 25 rayas, separa cada 5 con una raya más grande) por cada 5, dos (anota un 2 debajo de cada 5 rayas) 2, 4, 6, 8, 10, por 25 son 10. Y supongamos que aquí... ¿qué era? Ah, 20 y 6 (anota 5 veces 20 y abajo de cada 20, un 6; suma de 20 en 20, obtiene 100, luego de 6 en 6, obtiene 30)*
>
> *30 y 30, 60, 90, <u>serían tercios</u> (dibuja un círculo pequeño, lo divide en tres partes, como un pastel, en cada parte anota 30) entonces aquí le está dando casi la mitad y aquí un tercio, así, el tres tercios tiene tres tercios y nada más le está dando 1/3, y ese vale por 30 y esta mitad vale por 10.*

En esta resolución, Mariana combina dos expresiones de la razón, como conjunto de pares y como número:

(5, 2) = (10, 4) = (25, 10) ≈ ½, (casi la mitad vale por 10)

(20, 6) = (100, 30) ≈(90, 30) = 1/3 (la tercera parte vale por 30).

Las fracciones ½ y 1/3 representan así, de manera aproximada, conjuntos de pares en los que las cantidades varían. Estas fracciones le ayudan a identificar y comparar las razones en juego. Las fracciones asumen claramente el papel de expresiones de una razón constante. Sin embargo, Mariana muestra también algunas de las dificultades de este proceso: si de cada 5 naranjas, me dan 2, me dan casi la mitad, pero, si de cada 10 naranjas me dan 4 ¿sigue siendo “casi la mitad”? Es decir, ¿la relación parte todo “casi la mitad” se mantiene para todos los pares que se generen por iteración? La dificultad del caso tiene que ver por supuesto con el hecho de que no es exactamente la mitad, sino casi...

Luego: el trato “por cada 25 naranjas, me dan 10” , es casi la mitad, mientras que el trato “por cada 100 naranjas, me dan 30”, es casi la tercera parte. Pero la mitad del primer trato corresponde a 10 naranjas, mientras que la tercera parte del segundo corresponde a 30 naranjas, ¿es de todas maneras mejor el primero?

Plantearse estas preguntas y resolverlas, forma parte del proceso que da pleno sentido a la noción de fracción como expresión de una razón. Las preguntas manifiestan explícitamente el contraste entre la variación de las cantidades y la constancia de la razón, contraste que define a la noción misma de razón. Estas preguntas difícilmente se originarían en un trabajo directo con fracciones.

*El problema 20*
*Sonora (3n, 2n) vs Vista Hermosa (10n, 9n)*

Ninguna razón es entera ni fracción unitaria, esta vez la razón ½ no permite comparar, las diferencias entre las dos cantidades de cada pareja son iguales, lo cual favorece una comparación aditiva. En este problema, difícil para todos los niños, el procedimiento correcto utilizado por todos fue la iteración de los pares (procedimientos I), excepto por dos niños de sexto grado, con un nivel de desempeño alto, quienes logran determinar los operadores externos:

- Manuel (6º grado), logra determinar el primer operador: se dan 2/3 de las naranjas, pero, antes de intentar determinar el segundo, opta por iterar los pares (procedimiento I).

- Pedro (6º grado) empieza por hacer una estimación correcta, pero no se muestra seguro; genera entonces algunas parejas, (3, 2) = (6, 4) = (9, 6), y sobre la marcha, como, si quisiera destacar aquello que es constante, opta por determinar los operadores: 2/3 contra 9/10.

> *Pedro: (Se queda pensativo) "Ésta está más de pensar… Bueno yo me quedaría con Vista Hermosa, porque yo, al multiplicar, multiplico 2x3, me da 9 …(señala el 3 naranjas de Sonora, así que quiso decir 3x3=9)…y 2x3 me dan 6 …(señala el 2 de Sonora)…, por eso me quedo con Villa Hermosa, porque en sí la cantidad que se separa aquí es uno …(señala el 3 y el 2) …aquí es lo mismo …(señala el 10 y el 9 de Vista Hermosa)…, la cantidad que se separa es uno, pero no va a ser… por ejemplo ..."*
> *"Aquí …(en Sonora)…, por cada 6 naranjas que recoja, me van a dar 4, o sea, lo que me están dando son dos tercios, y aquí …(en Vista Hermosa)… lo que me están dando son nueve décimos y nueve décimos es mayor que dos tercios "*

*Comentario*

Con cierta dificultad, algunos alumnos logran cuantificar una razón externa constante en un operador, para entonces comparar directamente los operadores.

La fracción ½, en la relación parte todo, es claramente la que mejor se domina, frecuentemente la única. La fracción 1/3 aparece con menos frecuencia y solamente dos alumnos muestran poder determinar fracciones no unitarias. Por su parte, los operadores enteros "doble" y "triple" fueron utilizados relativamente poco en una relación "parte-parte", en el contexto del intercambio.

En el apartado anterior (3.3) pudimos apreciar algunas formas en que la equivalencia de *razones* se integró funcionalmente en la determinación de valores unitarios fraccionarios.

Ahora, nuevamente, el hecho más destacado en las resoluciones de los alumnos es la forma en que integran el trabajo con razones a la determinación de operadores:

(5n→10v) = (10n, 20v) = el doble
(2n→ 6v) = (4n→ 12v) = el triple
el triple > el doble

(10n→5n) = ½ = (6n→ 3n)
(6n→ 3n) > (6n→ 2n).

(5n→ 2n) = (10n→ 4n) = (25n→ 10n) ≈ ½ y,
(20n→ 6n) = (100n→ 30n) ≈(90n→ 30n) ≈ 1/3
½ > 1/3

(3n→ 2n) = (6n→ 4n) = (9n→ 6n)
(9n→ 6n) < (10n→ 9n). Además,
2/3 < 9/10

Las fracciones emergen en estas situaciones con el sentido pleno de representantes de una relación, de un conjunto de parejas de cantidades enteras. Es probable que estas dos expresiones de la razón, como conjunto de parejas y como operador, se apoyen mutuamente en el desarrollo de la noción de razón. El trabajo con pares de cantidades es primero, surge espontáneamente, en este caso, motivado por la regla de correspondencia “x por cada y”. Este trabajo puede ser la base a partir de la cual cobre sentido la utilización de un solo número, natural primero, no natural después, para expresar la constancia de la razón. Pero, a su vez, la expresión de las razones con un solo número, contribuye a la construcción de esta noción de constancia al cuantificarla, de hecho, constituyen su culminación.

# 4) CONCLUSIONES

La exploración empírica que realizamos en esta segunda parte del estudio buscó elementos para responder a dos preguntas:

1. Las variables en los problemas de valor faltante y de comparación:
   - naturaleza entera o no entera de las razones internas y externas;
   - naturaleza igual o distinta de las magnitudes en relación;
   - formulación de la constancia de la razón externa, mediante una regla de correspondencia “x por cada y”, mediante la evocación de valores unitarios iguales, o de ninguna,

   ¿afectan a los procedimientos de resolución de la manera prevista en el análisis de situaciones? y, más precisamente, ¿propician formas distintas de utilizar la noción de razón, como conjunto de parejas ordenadas de cantidades (I), como valor unitario (VU) constante, y como factor constante (OP)?

2. La noción de razón constante entre dos conjuntos de cantidades, expresada mediante un conjunto de pares de cantidades, ¿puede constituir para los alumnos una “estrategia de base” para manejar relaciones racionales previa a la utilización de números no enteros?

En primer término, haremos una síntesis de las relaciones entre las variables y los procedimientos que hemos encontrado, considerando los dos conjuntos de problemas, de valor faltante y de comparación. Enseguida, destacaremos las relaciones entre los procedimientos y las interpretaremos en términos del desarrollo de la noción de razón y de número racional.

## 4.1) Efecto de las variables de los problemas sobre los procedimientos. Distintas acepciones de la noción de razón

La influencia de las variables consideradas fue similar en ambos tipos de problemas, búsqueda de un valor faltante y comparación. A continuación destacamos las correlaciones que identificamos y presentamos, para cada procedimiento, una tabla con las frecuencias en que aparece en los distintos problemas.

- *Los procedimientos internos*

Se utilizaron sobre todo cuando hay una razón <u>interna</u> entera, aunque esta variable fue determinante sólo en los problemas de valor faltante, no en los de comparación. En estos últimos, aun cuando <u>no</u> hay razones internas enteras, los procedimientos **I** se utilizaron con cierta frecuencia (procedimientos $I_1$ e $I_2$).

La variable “manera de formular la constancia de la razón externa” mostró una influencia significativa : cuando la constancia se formula mediante una regla de correspondencia explícita del tipo “x de cada y”, se favoreció de manera notoria el recurso a estos procedimientos, mientras que la frecuencia de los mismos disminuye cuando la constancia de la razón externa evoca valores unitarios iguales.

En los cuatro problemas que reúnen las dos condiciones favorables, el uso de procedimientos de tipo **I** fue sistemático. Fueron también los problemas más fáciles del conjunto. Cuando sólo se cumple una de las dos condiciones anteriores, los procedimientos **I** son menos frecuentes, y cuando no se cumple ninguna de las dos, prácticamente no aparecen:

**Frecuencia de uso de procedimientos *I***

| | | Razón interna entera | |
|---|---|---|---|
| | | SI | NO |
| Regla de correspondencia “por cada x, y” | SI | Frecuencia **alta**<br>(más de 11/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 7; 21<br>de comparación: 4, 18 | Frecuencia media<br>(entre 6/13 y 9/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: no hay<br>de comparación: 5, 6, 8, 20b, 19 |
| | NO | Frecuencia media<br>(entre 4/13 y 7/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: (3b), 12, 13, 15<br>de comparación: 11, 11c | frecuencia **baja**<br>(hasta 2/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 3, 14, 16, 17, 22, 23<br>de comparación: 11b |

**Frecuencia**: número de alumnos que utilizan el procedimiento en los problemas indicados, entre número alumnos que resolvieron esos problemas.
(3b) no entra en la frecuencia indicada.

En síntesis:

| | |
|---|---|
| • *Formulación "x por cada y"*<br>• *Razón Interna entera (sólo en problemas de cuarta proporcional)* | → *Procedimientos I* |

En los problemas de comparación en los que no hubo razones internas enteras, los alumnos que utilizaron estos procedimientos, extendiendo nuevamente el alcance de sus herramientas aritméticas con números naturales, enfrentaron dos dificultades:

- comprender que el número de veces que se itera cada uno de los dos pares (las dos razones internas en juego) no tiene porqué ser el mismo, cualquier par expresa la razón externa que guarda toda la clase así obtenida.
- saber que, dados dos números naturales, existen siempre múltiplos comunes, uno de los cuales es el producto de los dos términos.

La primera dificultad llevó a algunos niños a intentar comparar pares obtenidos mediante un mismo número de iteraciones, y la segunda dio lugar, en varias ocasiones, a la comparación de razones sin un término común, una mayor que uno, otra menor, tal y como se procedería si se tratara de cantidades inconmensurables.

La superación de ambas dificultades parece factible y conveniente en el nivel en el que hemos trabajado (4º a 6º de primaria): la primera implica inferir de una pareja de cantidades la idea de relación como algo independiente de las cantidades específicas, aunque se exprese a través de éstas. La segunda implica un conocimiento de la noción de múltiplo común.

- *El procedimiento de reducción a la unidad (VU)*

Se utilizó únicamente cuando las magnitudes en relación son de distinta naturaleza; fue más frecuente cuando la constancia de la razón externa apela a valores unitarios iguales que cuando se plantea una regla de correspondencia "x por cada y", o que cuando no se hace ninguna mención de aquello que es invariante.

**Frecuencia de uso de procedimientos *VU***

| | | Razón interna entera: | |
|---|---|---|---|
| Magnitudes de distinta naturaleza | Evoca valores unitarios iguales | No | Sí |
| Sí | Sí | **Alta**: (más de 11/13)<br>de valor faltante: 3; 14<br>de comparación: 11b | Media (entre 3/13 y 7/13)<br>de valor faltante: 3b, 12; 13, 15, 16<br>de comparación: 11, 11c |
| Sí | No | Media (entre 4/13 y 7/13)<br>de valor faltante 17<br>de comparación: 5, 6, 8 | **Baja** (hasta: 1/13)<br>de valor faltante: 7, 21<br>de comparación: 4 |
| No | No | **Baja** (hasta 1/13)<br>de valor faltante: 22,23<br>de comparación: 19,20,20b | **Baja** (hasta 1/13)<br>de valor faltante 21<br>de comparación: 18 |

En síntesis:

| | | |
|---|---|---|
| • *Magnitudes de distinta naturaleza*<br>• *Formulación que evoca valores unitarios iguales*<br>• *Razón interna no entera* | } → | *Procedimiento VU* |

Otras variables que mostraron un efecto en la dificultad para obtener un valor unitario entero o no entero, y también en la forma de obtenerlo son:

magnitudes discretas o continuas;
existencia o no del valor unitario en el contexto;
conjunto final de dimensión 1 o mayor que 1;
relación de reparto o relación de conmensuración;

- *El procedimiento del operador constante (OP)*

Aparece casi únicamente cuando las magnitudes son de misma naturaleza[1] (sobre todo relaciones parte todo) y cuando la razón externa es entera o fracción unitaria, o también, en problemas de comparación, cuando la fracción ½ permite comparar. No obstante, aún en los problemas que satisfacen las condiciones anteriores, la utilización de este tipo de procedimiento nunca fue alta.

**Frecuencia de uso de procedimientos OP**

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Razón externa entera o fracción unitaria<br>(o comparable contra ½)</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Magnitudes de misma naturaleza</td><td>SI</td><td>Frecuencia media<br>(entre 3/13 y 9 /13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 22<br>de comparación: 20b, 19</td><td>frecuencia baja<br>(hasta 2/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 21, 23<br>de comparación: 18, 20</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>Frecuencia baja<br>(hasta 1/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 3, 3b, 14, 17<br>de comparación: 4, 8, 11b</td><td>frecuencia nula<br>(0/13)<br>Problemas:<br>de valor faltante: 12, 13, 15, 7, 16<br>de comparación: 5, 6, 11, 11c</td></tr>
</table>

**P**: problemas de valor faltante; **C**: problemas de comparación;

En síntesis:

| | |
|---|---|
| • *Magnitudes de misma naturaleza*<br>• *Razón externa entera o fracción unitaria* | } → *Procedimientos OP* |

Es un hecho notorio que el papel que juega el "número de veces" sea tan determinante en su complejidad conceptual: cuando es entero, los niños lo utilizan con relativa facilidad en calidad de razón interna, en donde expresa la variación de los valores al interior de un mismo conjunto, pero les resulta claramente más difícil identificarlo en su papel de razón externa en donde expresa la relación constante entre dos *conjuntos* de cantidades.

[1] Al analizar los problemas de valor faltante con magnitudes de distinta naturaleza, vimos que algunos alumnos cuantificaron en algún momento una razón externa e intentaron utilizarla como operador, pero en todos los casos mostraron dificultad para interpretar su sentido y abandonaron el procedimiento.

- *Las diferencias entre los alumnos*

Aunque la mayoría de los alumnos entrevistados se mostró sensible a las características de los 25 problemas que se plantearon, en algunos casos fue posible entrever que algunos alumnos, por lo general entre los más grandes y con buen nivel de desempeño, mostraron menor sensibilidad a algunas variables contextuales que otros. Aplicaron un mismo procedimiento independientemente de los valores de dichas variables, atendiendo más a las variables de tipo numérico. Por ejemplo, recurrieron a la conservación de las razones internas cuando éstas eran enteras, u optaron por otro procedimiento cuando no lo fueron, independientemente de si la constancia de la razón evocó la igualdad de valores unitarios o se expresó mediante una regla de correspondencia. Esto puede indicar un avance en el proceso de descontextualización de las herramientas que han construido. Pueden identificar con mayor facilidad ciertas características estructurales de las situaciones y, por ende, pueden reconocer la pertinencia de los procedimientos en un mayor número de situaciones.

## 4.2) Relaciones entre los procedimientos; Desarrollo de las nociones de razón, valor unitario y operador.

Hemos identificado en las resoluciones de los alumnos formas en que un tipo de procedimiento funciona como una estrategia de base para el desarrollo de otro, incluyendo el caso en que se integran dos procedimientos. Estas relaciones *constructivas* entre los procedimientos constituyen datos relevantes para la tesis central del presente estudio: en el aprendizaje, las razones juegan un papel como precursoras de los números, en particular de los racionales.

### *Las razones (na, nb), y el valor unitario fraccionario (1, b/a)*

Cuando la constancia de la razón externa evoca valores unitarios iguales (*que a cada uno le toque lo mismo...*) la idea de que las cantidades que componen cada razón pueden variar no está sugerida, por lo que es más difícil decidir obtener nuevas parejas de cantidades mediante sumas repetidas o multiplicación de los términos de la razón por un mismo factor. Quienes lograron considerar esta variación establecieron equivalencias entre cocientes “indicados”:

$$b:a = nb: na$$

Podemos decir que los alumnos manejaron valores unitarios fraccionarios implícitos, pudieron determinar, por ejemplo, que el precio por canica en “20 canicas por 6 pesos” es mayor que el precio por canica en “30 canicas por 8 pesos”, sin conocer dichos precios unitarios; pudieron saber que, en el reparto de “2 pasteles entre siete niños”, el pedazo por niño es menor que en el reparto de “un pastel entre tres niños”, sin conocer el tamaño de cada una de las porciones, etc.

El cociente desconocido ***b:a*** es igual a todos los cocientes en los que “por cada ***a***, hay ***b***”. Está en juego de manera implícita la equivalencia de fracciones, con la particularidad de que aquí se establece mediante razonamientos que apelan a la noción de razón, razón no entera que se maneja desde los números naturales. Subrayemos, no obstante, que esta equivalencia no se traduce espontáneamente en una equivalencia explícita de fracciones. Recordemos que, en general, para los alumnos de primaria un cociente ***b:a*** no es, de entrada, equivalente a la fracción ***a/b*** (capítulo 1, apartado 5.3.2, condición 2.2).

Algunos alumnos mostraron otras formas particulares de relación entre los procedimientos I (conservación de la suma o de las razones internas) y la determinación de un valor unitario: en problemas que sugieren calcular un valor unitario ***b:a***, pudieron considerar la relación “**por cada a, b**”, sólo hasta que conocieron, en el nivel gráfico, al valor unitario b/a. O bien, para realizar un reparto del tipo nb: na, simplificaron la razón con el fin de simplificar el reparto mismo: nb : na = b: a = b/a.

### *Las razones (na, nb), forma implícita del operador Xb/a*

En los problemas en los que las magnitudes en relación son de misma naturaleza hay un operador multiplicativo implícito que transforma las cantidades del primer conjunto en las del segundo. Los problemas, sobre todo los de comparación, fueron resueltos, principalmente, generando razones equivalentes a las razones dadas mediante procedimientos internos. En estos casos, el operador Xb/a, natural o racional, permaneció implícito en el conjunto de razones (na, nb). En los casos, poco frecuentes, en que algunos niños determinaron un operador, natural o racional, este emergió con el sentido muy definido de “expresión de aquello que es invariante en las diversas razones obtenidas”.

Es posible suponer que el conjunto de razones equivalentes que se genera mediante procedimientos internos constituye la base a partir de la cual el operador puede construirse con el sentido de razón constante, en un proceso de volver explícito, mediante un número, aquello que es invariante en la relación entre los conjuntos.

Al igual que en la determinación de un valor unitario, en la de un operador externo, las resoluciones de algunos alumnos nos permitieron ver relaciones entre las dos expresiones de la razón constante, como conjunto de pares de cantidades y como operador: a) identifican el operador sólo después de haber generado varias parejas de cantidades (2→6 = 4→12 = el triple); b) a la inversa, identifican un operador (cuando es muy simple), y con este generan otras parejas de cantidades que guardan la misma razón (10→5 = ½ = 6→3) ; c) comparan un operador contra una razón expresada mediante dos cantidades (10→5 es la mitad mientras que 6→2 es menos de la mitad).

Recordemos aquí las preguntas de una alumna que aciertan en la naturaleza misma de la noción de operador como expresión de una razón: estima que la razón (5n, 2n) es casi un medio mientras que la razón (20n, 6n) es mucho menos que un medio. Sin embargo, después se pregunta si la razón (10n, 4n), equivalente a (5n, 2n), sigue siendo "casi la mitad". Es decir, el valor (aproximado) de la razón externa ¿se conserva para todos los pares de la clase de equivalencia?. Más adelante obtiene la razón (100n, 30n) equivalente a (20n, 6n) y observa que es casi un tercio. Sabe que ½ es mayor que 1/3, pero algo la hace dudar: 1/3 representó en cierto momento a 30 naranjas, mientras que ½ representó a 10 y se pregunta si ½ es de todas maneras mejor trato que 1/3, perdiendo de vista momentáneamente que está comparando fracciones en el papel de razones, y no de cantidades. Estas preguntas sobre lo que representan las fracciones ½ y 1/3 no se formularían si no hubiera en juego cantidades que varían, si las condiciones de trabajo no dieran lugar al desarrollo de conjuntos de parejas de cantidades.

Notemos, por último, que el hecho de que la fracción que sustituye a la razón intervenga como un valor unitario o como un operador está determinado por la variable "magnitudes de misma naturaleza o de distinta naturaleza":

| | Magnitudes distintas | Magnitudes iguales |
|---|---|---|
| Razón (fracción implícita) | 2 pasteles, 7 niños | 2 naranjas por cada 6 naranjas |
| Fracción explícita | Cada porción es de **2/7** | Se da **1/3** de las naranjas |

### *La razón (1, b/a), ¿forma previa del operador Xb/a?*

El problema 23, de escala con una razón externa no entera (4→6), fue el problema más difícil del conjunto. Las magnitudes en relación son de la misma naturaleza, la constancia de la razón externa no se expresa de ningún modo, ni como regla de correspondencia "x por cada y", ni evocando valores unitarios iguales, debe ser inferida del contexto. De los nueve niños a quienes se planteó este problema, 7 usaron procedimientos aditivos que los llevaron a soluciones incorrectas. Los dos que lograron resolverlo, pudieron trabajar con la razón externa no natural, uno la cuantificó (x1.5) y el otro la descompuso en (:2) (x3).

Ningún alumno optó por el procedimiento del valor unitario: 1→ 1.5, a pesar de que se puede obtener fácilmente, sacando dos veces la mitad, lo cual confirma la tendencia observada de no usar este procedimiento cuando las magnitudes son de misma naturaleza.

Hemos comentado, sin embargo, que este procedimiento podría constituir una de las formas menos complejas tanto para resolver este tipo de problemas, como para introducir, en situación de enseñanza, la equivalencia formal entre el valor unitario 1→ b/a y la multiplicación Xb/a. Dado que los niños no recurren espontáneamente a la búsqueda del valor unitario en estos problemas, es posible que este recurso deba ser propuesto directamente, en cierto momento.

En la experiencia de ingeniería didáctica “Las reglas de cambio” que presentamos en el capítulo 3 podremos observar nuevamente la gran dificultad para los niños pequeños de tercer grado de primaria para identificar un operador, esta vez entero y pequeño (X2, X3, etc). En ese caso, sin embargo, pudo observarse que hay un poco de menos dificultad cuando la relación entre las cantidades se expresa mediante un valor unitario (por cada ficha, se dan x estampas).

Por último, notemos que el contexto en el que más alumnos llegaron a identificar un operador (muy simple) fue el de la relación parte todo (naranjas que se recogen/naranjas que se reciben). Es probable que en este contexto el camino más accesible para determinar al operador no sea el del paso previo por el valor unitario (se enfrentaría además a un problema de significado, por ejemplo “se recibe 2/3 de naranja por naranja”) sino directamente la determinación de la fracción: ¿qué parte de **a** representa **b**?. Este contexto presenta la ventaja, para el uso de fracciones como operadores, de que las fracciones suelen enseñarse en la escuela justamente como partes de un entero.

### *En conclusión: el papel central de los procedimientos internos*

El desarrollo de los procedimientos internos, conservación de la suma, o de las razones internas, se revela importante en el proceso de adquisición de la noción de razón constante, así como en la construcción de la noción de valor unitario y de operador. Estos procedimientos:

- propician la obtención de pares de cantidades que guardan una misma razón, mediante dos propiedades fundamentales de la linealidad: la conservación de la suma o de las razones internas;
- propician el paso de la suma iterada a la multiplicación, al sustituir la conservación de la suma por la conservación de las razones internas. Así mismo, pueden dar lugar, en los problemas de comparación, al estudio de la noción de múltiplo común de dos números, de manera funcional;
- permiten introducir relaciones racionales en el campo de estudio de los alumnos, y estudiar algunas de sus propiedades, antes de que los alumnos utilicen fracciones;
- constituyen estrategias de base para la construcción de las nociones de valor unitario y de operador, natural y racional.

Puede ser conveniente, en la primaria, multiplicar las experiencias de resolución de problemas de valor faltante y de comparación que favorezcan la utilización de los procedimientos internos y el estudio explícito de la propiedad fundamental
$a: b = na: nb$, en distintos contextos. Pero igualmente importante es articular estos procedimientos con la introducción de los otros, la reducción a la unidad y el operador, en los momentos adecuados. De lo contrario, los procedimientos internos podrían obstaculizar después la adquisición de estos últimos.

Hay elementos para considerar conveniente el desarrollo, en la escuela primaria, de los tres procedimientos que hemos estudiado (conservación de la suma o de las razones internas; cálculo del valor unitario; determinación del operador externo). Por una parte, cada uno permite aprehender la noción de constancia en una relación lineal de manera distinta, lo cual redunda en un conocimiento más amplio, aunque implícito, de este tipo fundamental de relación. Por otra parte, durante el proceso, que abarca finalmente a toda la primaria, en el que los alumnos son sensibles a las variables numéricas y contextuales, disponer de más procedimientos de resolución aumenta las posibilidades de resolución exitosa en los problemas de proporcionalidad. Finalmente, y sobre todo, por las formas en que un procedimiento apoya el desarrollo de los otros.

# 1) Introducción

## *1.1) La ingeniería didáctica*

El concepto de “ingeniería didáctica” se empieza a utilizar, a principios de los años ochenta, con dos sentidos: refiere, por una parte, a la vinculación entre la investigación en didáctica y las acciones encaminadas a intervenir en el sistema de enseñanza; por otra parte, constituye una metodología característica de la investigación didáctica.

Con el primer sentido, se buscó diferenciar el trabajo de investigación en didáctica del trabajo de intervención: un ingeniero debe proporcionar soluciones adecuadas a determinados problemas que se presentan en la sociedad, cuya complejidad rebasa, por lo general, el ámbito de competencia del investigador. Se espera que el ingeniero disponga de los conocimientos de las disciplinas vinculadas con el problema del que se ocupa, pero, a la vez, que pueda enfrentar numerosas cuestiones que rebasan los ámbitos restringidos de éstas. Eventualmente, frente a un proyecto determinado, el ingeniero en didáctica trabaja en colaboración con especialistas de otras disciplinas.

Esta connotación surgió en el contexto de un cuestionamiento a otras dos categorías:

- la de “investigación acción”, la cual, a decir de Chevallard (1982), permite eludir las exigencias que son propias tanto de la investigación (la exigencia fuerte de fundamento y de control cede por la presencia de la acción) como de la acción (los compromisos con los resultados a los que normalmente se sujeta una acción, aflojan por el hecho de que se hace investigación).
- y la de “innovación didáctica”, noción en la que lo “novedoso”, definido por oposición a “lo conocido”, “lo tradicional”, es considerado como un atributo por sí mismo. La distinción entre ingeniería e innovación supone también que los conocimientos más avanzados dentro de una disciplina no son, necesariamente, los que aportan las soluciones más adecuadas a un problema específico, en un momento dado. La recuperación de una vieja solución puede ser, en ciertas circunstancias, pertinente, incluso innovadora, por la forma práctica, económica y adaptada a las circunstancias, en que resuelve un problema.

  Pero además, las “innovaciones didácticas” frecuentemente tampoco se fundamentan en los avances de las disciplinas, “no tienen historia”, dice Chevallard, parten una y otra vez de cero, sin sujetarse al control de una memoria que justifique los cambios mediante una evaluación sistemática de lo que hay, y de lo que ha habido.

Más allá de la discusión metodológica, una virtud de esta connotación de *ingeniería didáctica* es el hecho mismo de poner el acento en las diferencias cualitativas entre el trabajo de investigación y el que es requerido por la intervención, considerando las relaciones recíprocas que se registran entre las dos (la ingeniería constituye a la vez una fuente de problemáticas para la investigación). En la práctica, la distinción suele ser menos nítida debido a que, con frecuencia, son las mismas personas las que participan en los dos niveles, sin que "el cambio de gorra" permita necesariamente un cambio suficiente de perspectiva y, sobre todo, debido a que las condiciones que deben ser consideradas para realizar una intervención distan mucho de haber sido dilucidadas. Al respecto, cabe hacer mención del programa de desarrollo curricular "Dialogar y Descubrir"[1] que se llevó a cabo en México hace algunos años, cuya metodología constituye una aportación a esta problemática (Rockwell, et.al., 1991) (Block y Fuenlabrada, 1999).

Centrémonos ahora en la segunda connotación de ingeniería didáctica, como metodología de investigación, que es de la que tratará este capítulo. La realización de experiencias didácticas en el salón de clase, con fines de investigación, abre a la didáctica la posibilidad de estudiar, empíricamente, uno de sus principales objetos, la situación didáctica, entendida como un sistema de interacciones entre alumnos, maestro, saber, y medio. Otros recursos metodológicos tales como la observación de clases comunes (no experimentales), la aplicación de pruebas, la realización de entrevistas, el estudio de textos de enseñanza, frecuentemente complementan esta metodología, pero, en lo que al estudio de un sistema didáctico refiere, difícilmente podrían sustituirla.

La experiencia en el salón de clases tiene la función, en principio, de corroborar o de falsear un conjunto de hipótesis acerca de los efectos de un proceso de enseñanza sobre el aprendizaje. "La ingeniería se diseña para provocar, de manera controlada, la evolución de las concepciones" (Artigue, 1995: 42)

Artigue distingue dos tipos de experiencias, las "micro ingenierías", que se centran en el estudio de procesos "locales", por lo general de duración breve, y las "macro ingenierías" que abarcan procesos de varios años de duración. Naturalmente, estas últimas, menos

---

[1] Desarrollo curricular para la educación primaria, dirigido a los instructores de cursos comunitarios. Fue solicitado al DIE en 1989 por Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE).

frecuentes debido a la dificultad práctica para llevarlas a cabo, se adaptan en mayor medida a los tiempos reales de los procesos de aprendizaje. Esto les permite también dar cuenta de manera más amplia y precisa de las articulaciones y las integraciones de los conocimientos que se estudian, con otros conocimientos.

La forma de validación de las hipótesis es quizá lo más característico de esta metodología. En la ingeniería didáctica, la validación es "interna", consiste en analizar los resultados de la experiencia a la luz de los argumentos y las conjeturas emanados de un "análisis previo". La atención se centra en este análisis, del que se obtienen argumentos susceptibles de ser contrastados con la experiencia. Esta metodología difiere de otras más conocidas, que consisten en contrastar resultados obtenidos en un grupo experimental con los de un grupo control y en las cuales frecuentemente se presentan dificultades importantes en el nivel de la validación y de la explicación del efecto de las variables consideradas[2]. No obstante, la metodología de la ingeniería didáctica no está exenta de numerosas dificultades, señalaremos algunas más adelante.

La concepción de una secuencia didáctica y la realización de su análisis previo, son precedidos por un conjunto de estudios preliminares que suelen abarcar varias dimensiones. Artigue (1995:38) destaca los siguientes:

- *Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza*
- *Análisis de la enseñanza vigente y de sus efectos*
- *Análisis de las concepciones de los alumnos, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución*
- *Análisis del campo de sujeciones en el que se va a situar la realización didáctica (sujeciones de distinta índole, por ejemplo, las relativas al conocimiento de los maestros).*

En el acervo de experiencias de ingeniería ya realizadas, puede observarse que los análisis preliminares suelen centrarse más en unos factores que en otros. Esto puede deberse a las diferencias del objeto de investigación, pero también, posiblemente, al tipo de formación de cada investigador[3].

[2] Los alumnos que participan en las experiencias de ingeniería se someten, como todos los alumnos del sistema educativo, a un exámen nacional de conocimientos y habilidades. Los resultados de este examen no son considerados como un elemento de validación; no se espera que los alumnos *deban* obtener mejores puntajes que otros, pero se asume el compromiso con la comunidad de que los resultados se ubiquen por lo menos en los promedios.

[3] Estos análisis, señala Artigue, rara vez aparecen de manera explícita cuando se presentan los productos del trabajo. Su carácter de preliminares se va perdiendo al integrar los análisis que se realizan posteriormente.

A partir de estos estudios se precisan las dificultades o las deficiencias didácticas que van a intentar ser corregidas mediante la experiencia, aunque puede tratarse también de estudiar empíricamente un fenómeno didáctico que no se traduce, necesariamente, en una dificultad especifica, pero acerca del cual se han formulado preguntas a nivel teórico.

En cualquiera de los dos casos, la función del análisis previo es hacer explícitas y fundamentar teóricamente las *opciones* que se tomaron y que caracterizan al proceso didáctico que se estudia. Esto implica anticipar los efectos posibles de determinadas variables didácticas sobre los comportamientos de los alumnos, comportamientos de los que se harán inferencias en términos de conocimientos adquiridos. Artigue distingue aquí, nuevamente, dos tipos de variables: macro didácticas, que refieren a elecciones en la organización *global* de una ingeniería, por ejemplo, las diferentes concepciones que se favorecen, las formas en que éstas pueden articularse a lo largo de varias secuencias didácticas; y las variables micro didácticas, que refieren a características específicas de una secuencia, o de una fase, destinadas a propiciar determinadas estrategias de resolución.

El análisis previo, agrega Artigue, (1995:44), debe concebirse como un "análisis de control de significado":

> *(...) si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería, ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.*

Entonces, el análisis previo pretende determinar las condiciones didácticas bajo las cuales los alumnos podrían construir y utilizar un conocimiento con determinado significado. Su función es "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado".

Finalmente, siguen las fases de experimentación y de análisis posterior. La conducción de las experiencias suele estar a cargo de maestros con cierto conocimiento del enfoque didáctico. Se analiza con ellos, previamente, la secuencia de situaciones así como la ficha de cada sesión de clase. Al término de cada sesión, se comenta con los maestros el desarrollo de la misma. Los registros tomados durante la clase por los observadores, se complementan con registros de audio y/o video, y por las hojas de trabajo de los alumnos. La cantidad de información que es posible recuperar depende, por supuesto, de la infraestructura con la que se cuente[4]. Los registros de observación no se realizan a partir de formatos preestablecidos, pero sí están orientados por el análisis previo. Finalmente, el análisis posterior se lleva a cabo, como dijimos, mediante la contrastación con las hipótesis de los análisis previos.

Para terminar esta breve caracterización, señalemos una de las principales dificultades, aun no resueltas, en el uso de esta metodología: la "replicabilidad" de las experiencias. La identificación de variables que inciden de una manera determinada en los comportamientos de los alumnos, supone que, en condiciones relativamente semejantes, se esperarían ver resultados también relativamente semejantes. Sin embargo, es claro que nunca se obtendrán dos "historias idénticas". Se plantea entonces el problema de especificar aquello que debería ser objeto de reproducción, más allá de las variaciones inevitables, y el problema de su identificación. En última instancia, "aquello" que debería ser objeto de réplica, remite a la significación de los conocimientos que se construyen.

A la dificultad anterior se suma el fenómeno conocido como "obsolescencia didáctica": en la réplica de una secuencia de situaciones por un mismo maestro, se ha observado una disminución en el grado en el que el maestro logra llevar a cabo, en las fases adidácticas, la "devolución" de los problemas[5]. El maestro muestra cada vez más dificultad para dar lugar a una interacción entre los alumnos y la situación, en la que sus expectativas no dirijan la acción mediante orientaciones sutiles; el maestro tiende a reproducir las "historias" vividas con anterioridad, lo cual redunda en un nivel de reproducción que Brousseau ha llamado "externa", en la que la significación de los conocimientos que entran en juego puede llegar a ser muy distinta a la que tuvieron en las experiencias anteriores[6].

La dificultad anterior tiene que ver con una integración todavía insuficiente del papel del maestro en la teoría. Durante varios años, el esfuerzo de teorización en didáctica se centró principalmente en las interacciones "adidácticas" de los alumnos con la situación, lo que obedeció a una necesidad de reducir la complejidad del sistema estudiado y, probablemente, también a la influencia de uno de los referentes más importantes de la

[4],Brousseau, a través del equipo del IREM de Burdeos y mediante un acuerdo con las autoridades de educación, instaló, en una escuela primaria pública, un aula especialmente diseñada como centro de observación. No obstante, un gran número de experiencias de ingeniería, entre las cuales las que hemos realizado nosotros, se han llevado a cabo en condiciones mucho más austeras.

[5] Estos conceptos se explicaron en el primer apartado del capítulo 1

[6] Artigue (1984) estudia este problema en su tesis doctoral.

didáctica, en su etapa inicial: la sicología genética. Actualmente, el estudio del papel del maestro, tanto en clases experimentales como en clases "comunes", y el estudio de los procesos de formación tienden a ocupar un lugar central en el desarrollo de la didáctica.

### *1.2) Las experiencias de ingeniería didáctica del presente estudio*

En distintos momentos a lo largo del presente estudio, se diseñaron y aplicaron experiencias breves de ingeniería. Durante el primer año de trabajo se aplicaron algunas situaciones relativas a la noción de operador fraccionario, en quinto y sexto grados de la escuela primaria. Fue a partir de las dificultades halladas en estas experiencias que se decidió redefinir el tema de estudio. Durante el período en el que se realizaron los estudios preliminares, se aplicó una secuencia en cuarto grado de primaria (*Los arbolitos A y B*), cuyos resultados no fueron todavía satisfactorios, pero aportaron elementos para diseños ulteriores. Finalmente, una vez avanzados los análisis que se reportan en los capítulos 1 y 2, se diseñaron y se aplicaron tres secuencias más. De esta manera, las experiencias de ingeniería acompañaron todo el proceso de análisis de este estudio y, aun cuando las primeras no cumplieron con las expectativas, proporcionaron una forma de retroalimentación al análisis en curso.

En el presente capítulo se reportará el análisis de una de las tres últimas experiencias. De las otras dos, se presentarán en los anexos 4 y 5 las secuencias y algunos elementos del análisis previo[7]. Las tres secuencias pueden considerarse de "micro ingeniería": abarcan períodos breves de tiempo, entre uno y dos meses cada una (5 a 9 sesiones), a lo largo de los cuales se estudian momentos o fases de procesos más amplios considerados en el estudio preliminar (capítulos 1 y 2).

Las secuencias son variantes de las dos situaciones fundamentales que hemos estudiado, la reproducción de una razón entre medidas (SFR-2; da lugar a problemas "de valor faltante"), y la comparación de razones (SFC). Comparten un mismo propósito general: propiciar el desarrollo de procedimientos de resolución que implican a la noción de razón, de manera integrada al estudio de la multiplicación y la división de números naturales, en un momento en el que los alumnos aún no disponen de un conocimiento suficiente acerca de las fracciones. Se consideró que el desarrollo de estos procedimientos permitiría enriquecer la significación de la operación de multiplicación, al

[7]No incluimos las experiencias "no exitosas" únicamente por motivos de tiempo y de espacio. El análisis de este tipo de experiencias puede aportar información relevante acerca del funcionamiento de las situaciones.

mismo tiempo que podría dar lugar a desarrollar en mayor medida un antecedente para la adquisición de las fracciones.

A continuación se presentan las características y los propósitos más específicos de cada secuencia.

1) La secuencia “Los intercambios”

Se aplicó en tercer grado de primaria, a lo largo de cinco sesiones. La situación principal plantea la comparación de “reglas de cambio”, expresadas como reglas de correspondencia: “se cambian n fichas por m estampas”. Los alumnos deben escoger la regla que les conviene más para cambiar sus fichas por estampas. El valor de la razón externa, en este caso “razón de cambio”, es siempre un número entero, de manera que de todas las reglas puede inferirse un operador entero (por ejemplo, “me dan 2 fichas por 6 estampas” equivale, en el nivel de los números, a “me dan el triple”).

La verificación empírica se realiza llevando a cabo concretamente los intercambios

Los propósitos de la secuencia son:

- Establecer que la comparación no puede basarse en una comparación de cantidades (de fichas, o de estampas), y que es necesario considerar la relación entre las cantidades;
- Desarrollar procedimientos internos para comparar las razones (en particular, sustituir las sumas repetidas por multiplicaciones);
- Establecer la existencia de razones equivalentes; Inferir los operadores externos naturales como una forma más económica de realizar la comparación.

El análisis de resultados de esta experiencia se presenta en el apartado siguiente.

2) La secuencia “Los collares”[8]

Se aplicó en cuarto grado de primaria, a lo largo de nueve sesiones. La situación principal es una versión de la variante estructural 3 de la SFR-2: conjunto final de dimensión mayor que uno (ver capítulo 1 apartado 5.1.2). Las diferentes situaciones se plantean en el

---

[8] Esta secuencia constituye una adaptación de una secuencia estudiada por B. Mopondi en sus tesis doctoral (Mopondi, 1986).

contexto de la fabricación de collares que se forman con cuentas de 4 colores. Se trabaja con la relación proporcional entre las cantidades de collares, y los cuartetos de cantidades de cuentas: *p* collares → (*m* amarillas, *n* rojas, *r* azules, *s* verdes).

La secuencia consta de dos fases: en la primera, se plantean problemas en los que se da el valor unitario o se pregunta por él (en este caso, el valor unitario está formado por las cuatro cantidades de cuentas de un solo collar, el collar ”modelo”). Aquí se presentan problemas de multiplicación, de división “partición” y de división “comparación” (capítulo 1, apartado 5.3.2, condiciones 1.2 y 2.1).

Además, a partir de ciertas variantes, se abordan otros aspectos: divisores de un número y estrategias para obtenerlos; divisores comunes de dos números; números primos.

En la segunda fase se plantean problemas en los que no se da el valor unitario: a partir de las cantidades de cuentas que corresponden a *n* collares, hallar las que corresponden a *m* collares del mismo tipo. El reto mayor en esta situación es identificar la existencia de un *valor unitario constante* y su pertinencia para el cálculo de otros valores.

Además, se planteó la variante de la distribución homogénea (variante estructural 4, en capítulo 1, apartado 5.1.2): dados dos cantidades, a y b, de cuentas A y B, determinar el collar más pequeño con cuentas de ambos tipos, del que pueden hacerse varios ejemplares sin que sobren cuentas. Las cantidades de cuentas a’ y b’ del collar más pequeño guardan la misma razón que las cantidades a y b. Una estrategia para determinarlas, es obtener el máximo común divisor de a y b.

En los problemas de las dos fases, la verificación empírica se llevó a cabo en dos “medios objetivos”: en ciertos momentos, se utilizó material concreto (fichas de colores que representaron las cuentas), en otros momentos se utilizó un programa de computadora diseñado ex profeso. Éste permitió trabajar con cantidades relativamente grandes de cuentas sin la pérdida de tiempo y de precisión que habría implicado la manipulación del material concreto.

La secuencia se presenta en el anexo 4.

3) La secuencia “Los saltos de las ranas”.

Se aplicó en quinto grado de primaria, a lo largo de seis sesiones.

En el contexto de “ranas” que, al dar cierto número de saltos, avanzan cierto número de metros, se plantearon dos tipos de problemas, de valor faltante (variantes de la SFR-2) y de comparación de razones (variantes de la SFC).

Los problemas de comparación consisten en determinar cual de dos (o más) ranas dio *el salto más grande*, a partir de las parejas de datos (nº de metros avanzados, nº de saltos). En las situaciones de valor faltante, se dan los dos datos que corresponden a una rana, y sólo uno de los dos para las demás ranas. Los alumnos deben encontrar los datos que faltan de manera que todas las ranas den saltos del mismo tamaño.

El tamaño de un salto es una medida, un valor unitario que permanece implícito en la razón entre el número de saltos y la el número de metros. Se trata de una relación de conmensuración entre dos unidades de longitud.

La razón externa se expresa en términos de una regla de correspondencia: “por cada n saltos, avanza m metros”.

Los propósitos generales de la secuencia fueron similares a los de la secuencia “Los intercambios”, con la diferencia de que ahora las razones en juego expresan medidas y, en la mayoría de los casos, fueron razones no enteras. Los propósitos más específicos fueron:

- Establecer que la comparación del tamaño de los saltos no puede basarse en una comparación de las cantidades de saltos o de metros, sino en una relación entre ambas cantidades;
- Desarrollar procedimientos (conservación de la suma, conservación de las razones internas) para comparar las valores unitarios no enteros, sin calcularlos;
- Establecer la existencia de razones equivalentes (razones entre número de saltos y número de metros que corresponden a un mismo tamaño de salto);
- Determinar los valores unitarios, cuando son enteros, para compararlos.[9]

[9] En un trabajo posterior desarrollado por D: Solares como tesis de maestría, se estudió, además, la determinación de valores unitarios fraccionarios (Solares, 1999)

En esta experiencia, la verificación empírica se llevó a cabo desde el principio mediante un programa para computadora diseñado ex profeso[10]. La disponibilidad de solamente dos computadoras personales en el salón de clases obligó a buscar formas de organización diversas[11].

La secuencia se presenta en el anexo 5.

[10] Este programa y el de la secuencia "Los collares" fueron realizados en colaboración con la Dirección General de Cómputo Académico de la UNAM, por un equipo coordinado por P. Martínez Falcón. Los programas se elaboraron inicialmente con herramientas muy limitadas (*Logo*). Actualmente, un programa derivado de la secuencia "Los saltos de las ranas" está siendo rediseñado en *Authorware*, para ponerlo a disposición del público interesado.

[11] Sobre la utilización de la computadora como herramienta de apoyo puede verse (Block y Martínez, 1999).

# CAPÍTULO 3: EXPERIENCIAS DE INGENIERÍA DIDÁCTICA

# CONTENIDO

## 2.6) Conclusiones

La experiencia que hemos analizado confirma que las tareas de comparar “reglas de cambio”, y de identificar reglas equivalentes, pueden llevar a los pequeños de tercer grado a tomar en consideración la idea de *relación* entre dos cantidades, como algo distinto de las cantidades mismas.

En el proceso, la noción de relación entre cantidades se desprende lentamente de la noción de cantidad: primero, al descartar las comparaciones centradas en una cantidad y al considerar la necesidad de igualar un término, el número de fichas o el de estampas; después, al comprender que reglas expresadas con cantidades distintas pueden ser equivalentes, y, finalmente, punto al que no fue posible llegar, al poder expresar la relación entre las cantidades con un solo número, un operador, momento en el que la razón en juego asume una forma propia.

La comprensión de la noción de razón progresa a la par con el desarrollo de los procedimientos numéricos que permiten manipular las razones: la suma iterada, la multiplicación (y la división) como razón interna que se conserva y la multiplicación como operador, expresión de una razón constante.

A continuación destacaremos los logros y las dificultades de los alumnos en el desarrollo de la secuencia de situaciones. Nos detendremos en las relaciones entre dos aspectos que se revelaron problemáticos, la noción de equivalencia y la de operador. Será la ocasión para señalar algunos de los ajustes que la secuencia podría requerir.

### Logros y dificultades; ajustes posibles a la secuencia.

Consideraremos aquí los distintos tipos de tarea según el grado de dificultad que presentaron para los niños.

*La aplicación de las reglas a una cantidad de fichas.*

La mayoría de las situaciones implicó la tarea de aplicar una regla a una cantidad de fichas. Además, la situación 2 se dedicó exclusivamente a ello. Esta fue la tarea menos compleja que enfrentaron los niños.

Los procedimientos que consisten en dibujar la colección de fichas, agruparla y dibujar una cantidad de estampas por cada grupo de fichas, fueron disminuyendo en favor de procedimientos numéricos, si bien en las últimas situaciones, más complejas, algunos alumnos necesitaron volver a la representación de la fichas.

El procedimiento numérico dominante fue la suma iterada de los términos de las reglas, frecuentemente abreviado mediante sumas de sumas u otras combinaciones lineales. Para los alumnos que manifestaron mayor dificultad para abordar los problemas, acceder a este procedimiento numérico constituyó el reto más importante en esta experiencia.

Poco a poco, y con cada vez más frecuencia, varios alumnos empezaron a utilizar la multiplicación en sustitución de las sumas repetidas, en el papel de una razón interna que debe conservarse, por ejemplo, para aplicar la regla 2→4 a 10 fichas, una vez sabiendo que se forman 5 agrupamientos, multiplican 5 por 10 en vez de sumar 5 veces 10. Al hacerlo, los alumnos empezaron a funcionalizar un conocimiento de la multiplicación que algunos demostraron disponer con anterioridad, en el nivel de destreza numérica: sabían obtener los resultados de las multiplicaciones, pero no reconocían la pertinencia de la multiplicación para sustituir una suma repetida.

De manera esporádica, pocos alumnos plantearon explícitamente una división para determinar un número de grupos de fichas, es decir, para determinar una razón interna (por ejemplo, al aplicar la regla 2→8 a 10 fichas, para conocer el número de agrupamientos, dividen 10 entre 2). Llamaremos a esta primera utilización de la división "división comparación para determinar una razón interna".

Finalmente, la utilización de la multiplicación en el papel de razón externa, como un operador externo que se aplica a una cantidad de fichas para obtener el número de estampas, apareció relativamente poco y de manera esporádica (por ejemplo, aplicar la regla 3→9 a una cantidad de fichas, multiplicando esta última por 3).

La determinación de este operador implica también la realización de una división comparación (¿cuántas veces 3 da 9?), pero ésta es más compleja que la anterior: por un lado, es necesario dejar de lado las diferencias en el nivel de los objetos concretos (puesto que 3 veces 3 *fichas* no es igual a 9 *estampas*), pudimos apreciar manifestaciones explícitas de esta dificultad, y por otra parte, el cociente no juega como una razón interna sino externa. Llamaremos a esta segunda forma de utilizar la división "división comparación para determinar un operador".

Cabe señalar que, excepto un alumno, quienes utilizaron un operador para calcular un número de estampas no plantearon explícitamente la división que lo determina, en parte, porque los dos números en juego fueron siempre muy pequeños, pero también, porque lograron intuir el número por el que se debe multiplicar sin que por ello reconocieran la pertinencia de una división.

Cuando la regla en juego fue una razón canónica (del tipo 1→n), fueron apenas un poco más los alumnos que calcularon una cantidad de estampas multiplicando la de fichas por el operador Xn, es decir, tampoco en este caso la presencia de un operador fue evidente para la mayoría de los niños. Identificamos un par de ejemplos expresivos en los que pudo apreciarse que el uso de este operador vino de conmutar inconscientemente los papeles de la multiplicación (por ejemplo, al aplicar la regla 1→3 a 12 fichas, la razón interna 12 veces 3 fichas da lugar al operador 3 veces 12).

Así, en la resolución de la tarea más elemental, aplicar las reglas a una cantidad de fichas, los procedimientos de los alumnos tendieron a mejorar en relativamente poco tiempo, pasando de procedimientos basados en representaciones concretas, a procedimientos numéricos internos, principalmente la suma repetida y las sumas de sumas y, después, de éstos últimos al uso de la multiplicación como razón interna, sustituyendo las sumas repetidas. En este nivel, el uso del operador externo fue incipiente.

Cabe destacar que el desarrollo de los procedimientos anteriores se dio en el marco de una situación más amplia y compleja que la de aplicar una regla a una cantidad de fichas. Excepto en la situación 2, el objetivo fue elegir la mejor regla o identificar reglas equivalentes. Por ello, al mismo tiempo que los alumnos desarrollaron estos procedimientos, tuvieron la ocasión de avanzar en su conocimiento sobre la noción de comparación de razones.

*La comparación de razones (¿cuál es la mejor regla?)*

A lo largo de las cuatro aplicaciones de la situación 1 “La elección de la mejor regla”, una parte importante del grupo logró comprender el funcionamiento de las reglas y logró descartar criterios de comparación centrados en una sola variable (gana la regla con más estampas, o con menos fichas). Relativamente pronto, intentaron considerar la relación entre las dos variables, a partir de un primer criterio intuitivo: más estampas *en relación* con el número de fichas. En estos progresos, el papel de las verificaciones empíricas de las anticipaciones (los intercambios físicos que se realizaron al final de cada aplicación) fue fundamental.

Cada vez más alumnos se dieron a la tarea de verificar sus anticipaciones aplicando las reglas a una cantidad determinada de fichas. Mostraron poco a poco mayor flexibilidad para elegir una cantidad de fichas, no con la idea de que esa sería "la cantidad" de fichas, sino con la idea de facilitar la comparación.

Apareció ocasionalmente la verificación mediante la igualación de la cantidad de estampas, procedimiento que refleja una forma de considerar las reglas independientemente de la cantidad de fichas.

En cambio, la estrategia que no pareció fue la identificación de los operadores (por ejemplo, una regla da el doble mientras que la otra da el triple). Si bien los operadores aparecieron ocasionalmente en la acción de calcular, no fueron identificados como expresiones de las reglas de cambio, expresiones en las que la independencia de las reglas con respecto a las cantidades específicas de fichas y estampas ya es explícita.

Los progresos de los alumnos en esta tarea (elección de la mejor regla) pueden verse como un proceso en el que las reglas de cambio tienden a ser comprendidas como *relaciones* entre cantidades, relaciones que, mientras no se identifiquen los operadores, requieren de las cantidades para ser expresadas y manejadas pero a la vez son independientes de éstas: las cantidades de fichas y estampas pueden variar, mientras que la regla es la misma.

Las dos tareas que hemos revisado hasta aquí, aplicar las reglas a cantidades de fichas, y elegir la mejor la regla, fueron adecuadas para el grupo, en el sentido de ser accesibles y al mismo tiempo de propiciar el desarrollo de ciertos conocimientos. No obstante, considerando el grupo específico de tercer grado con el que trabajamos, debimos dar mayores ocasiones a los alumnos con más dificultad para mejorar sus resoluciones, en primer lugar, incluyendo al inicio de la secuencia casos de comparación cualitativa, que no requieren cálculos (por ejemplo, reglas con un término homólogo común, reglas con los dos términos iguales), y en segundo lugar repitiendo en más ocasiones las situaciones 1 y 2, manejando cantidades más grandes de fichas para verificar, con el fin de propiciar la sustitución de sumas iteradas por multiplicaciones.

Faltó también difundir en mayor medida, e institucionalizar, las estrategias básicas desarrolladas por algunos de los alumnos, en particular, la comparación de dos reglas igualando las cantidades de fichas, o las de estampas. Finalmente, faltó abordar explícitamente el problema del número de fichas que conviene elegir para probar dos reglas, lo que hubiera constituido una buena ocasión para estudiar la noción de múltiplo común.

*La equivalencia de razones y el operador externo constante*

En las dos primeras situaciones, elegir la mejor regla y aplicar reglas a cantidades de fichas, los alumnos pudieron constatar que algunas reglas arrojan la misma cantidad de estampas, para una o varias cantidades de fichas. Sin embargo, no pudieron explicar el fenómeno, ni mediante la alusión a procedimientos internos (por ejemplo, si por cada ficha se dan dos estampas, por cada dos fichas se deben dar cuatro), ni mediante la identificación de los operadores. Explicar porqué dos reglas son equivalentes, les resultó más difícil que explicar porqué una regla es mejor que otra.

En este punto tomamos una decisión que ahora debe revisarse: consideramos que la estrategia óptima para establecer las equivalencias entre las reglas y para comprenderlas, era la identificación de los operadores subyacentes a las reglas. Dado que los alumnos no los habían logrado destacar por sí mismos, decidimos, desde la situación 3, introducirlos explícitamente, como una regla entre las demás. Esperábamos que, al identificar una equivalencia entre dos reglas como 2→10 y X5, se desencadenaría la búsqueda de los operadores implícitos en las demás reglas.

Sin embargo esto no sucedió. Para los alumnos fue difícil comprender la nueva regla (la que se formula con el operador) aunque al final la mayoría pudo hacerlo. En la situación 3, elegir la mejor regla, algunos constataron que el operador X5 arroja la misma cantidad que la regla 2→10, pero no por ello se propusieron identificar los otros operadores.

En la situación 4 se pidió directamente identificar reglas equivalentes. Para algunos niños, la pregunta misma careció de sentido, o los llevó a reducir el sentido de la noción de regla de cambio: son equivalentes si en su formulación aparece un mismo número, o un mismo número de estampas.

Otros, en cambio, lograron comprender que dos reglas son equivalentes si arrojan el mismo número de estampas, *para un mismo número de fichas*. La estrategia dominante fue entonces la misma que para elegir la mejor regla: probar las reglas dadas con un número de fichas. No se observó ningún alumno que optara por identificar los operadores en todas las reglas.

Esta última situación nos permitió identificar ciertos casos particulares que podrían aportar elementos para mejorar la secuencia de situaciones. Por un lado, era previsible que sería más sencillo identificar un operador Xn en una regla canónica (del tipo 1→n) que en una regla no canónica (k→kn), puesto que en el primer caso no es necesario hacer la división. Por lo menos un alumno mostró que, para él, la relación 1→n = Xn ya es evidente, alumno quien además hizo explícita la necesidad de considerar que, en esta relación, las fichas se convierten en estampas.

Por otra parte, la última actividad, escribir reglas mejores, menos buenas y equivalentes con respecto a la regla 2→10, fue reveladora en cuánto al tipo de regla equivalente que los niños optaron por construir: ninguno optó por utilizar un operador, varios lograron proponer la regla 1→5, y, en los procedimientos observados, pudo apreciarse que el recurso fue la realización de una especie de reparto: cuántas estampas asignar a una ficha para que a dos fichas toquen 10, o a 4 fichas toquen 20.

Notemos que en este problema se presenta una tercera forma de utilizar implícitamente la división: se trata de una división “partición” (o reparto) para determinar un valor unitario, esto es, una razón canónica. Aunque esta división es, en el nivel técnico, un poco más difícil que la división “comparación” para determinar una razón interna (uso 1), es conceptualmente más sencilla que la división “comparación” para determinar un operador (uso 2).

Estas observaciones sugieren que para los alumnos es más factible expresar las razones de manera canónica, antes que mediante un operador. Es decir, el problema a→b = 1→?, puede ser más accesible que el problema a→b = X?

La identificación del operador podría hacerse entonces, no sólo a través de la división-comparación de los dos términos de la razón, sino por el intermediario de la razón canónica: a→b = 1→(b:a) = X (b:a)

Lo anterior apunta, al igual que la primera conclusión, a desarrollar en mayor medida un trabajo en el nivel de procedimientos internos, antes de asumir como objetivo la construcción del operador constante.

Consideremos por último una distinción en la adquisición de la noción de orden y de equivalencia de razones que hemos mencionado pero que no problematizamos lo suficiente con los niños: una cosa es el orden que logra establecerse con una cantidad específica de fichas, y otra es la inferencia de que ese orden se mantiene con cualquier cantidad de fichas. Es probable que, una vez viendo cuál es la mejor regla al aplicarla a una cantidad de fichas, frente a la pregunta ¿seguirá siendo la mejor si usamos tal otra cantidad de fichas?, algunos alumnos duden. Este es otro aspecto que debe trabajarse explícitamente en la secuencia.

*Niveles de dificultad en la comprensión y en el uso de operadores*

En el capítulo 1 destacamos, a partir de un análisis de situaciones, dos grandes tipos de procedimientos que permiten abordar las situaciones SFR-2 y SFC: los internos (conservación de la suma o de las razones internas) y el del operador como razón externa constante. Estos dos procedimientos corresponden a dos formas de aprehender la linealidad, mediante la conservación de las razones internas (cuyo antecedente es la conservación de la suma), o mediante la constancia de la razón externa.

Intentamos mostrar en ese capítulo que los primeros procedimientos son conceptualmente menos complejos y pueden constituir un antecedente del segundo, sobre todo cuando la razón externa en juego es racional. Intentamos mostrar que, durante el lapso de tiempo en el que aun no se dispone de los racionales, el operador fraccionario puede permanecer implícito bajo la forma de razones entre pares de cantidades enteras.

La experiencia didáctica que hemos analizado aquí permite confirmar que aún cuando la razón externa es natural, como fue el caso de todas las reglas de cambio con las que se trabajó, el procedimiento que consiste en determinar un operador como razón externa constante presenta una dificultad conceptual muy superior a la determinación de razones internas, esto incluso cuando la relación en juego es canónica (del tipo 1→n).

En los procedimientos de los alumnos, el operador Xn tendió a permanecer implícito bajo la forma de razones del tipo k→kn, pese a la notoria economía que procura el uso de los operadores en las distintas tareas. Los intentos de propiciar la identificación de los operadores se revelaron hasta cierto punto prematuros: los logros de la mayoría de los alumnos del grupo de tercer grado fueron incipientes en esta dirección.

Podemos interpretar estas dificultades a partir de la diferenciación de dos concepciones de la noción de multiplicación por números naturales, a) como sustitución de la suma repetida, en el papel de razón interna que describe una variación al interior de una misma magnitud (fichas a fichas, estampas a estampas), y, b) como operador, en el papel de razón externa constante entre dos conjuntos de cantidades variables.

Antes de asumir este último papel, la multiplicación permanece implícita en cada conjunto de pares de cantidades que los niños generan a partir de una regla, así como en aquello que tienen en común dos reglas que son reconocidas como equivalentes. El proceso de hacer explícita la multiplicación como razón externa se revela más difícil y más tardío. Su antecedente no es la suma repetida, sino dichos conjuntos de pares y dichas reglas equivalentes.

Considerando, por otra parte, que los niños manifestaron dificultades para identificar equivalencias, o para descartar "no equivalencias", incluso entre razones expresadas sin el operador, cabe preguntarse si la noción de equivalencia de razones (la capacidad de identificar y generar reglas equivalentes) constituye un antecedente necesario de la noción de operador multiplicativo, en el papel de razón constante. Es decir, si el operador constante, en tanto expresión explícita de aquello que tienen en común dichas razones, solo puede tener sentido para los alumnos una vez que se han apropiado de la noción de equivalencia de razones.

Es probable que la relación entre estas dos nociones, equivalencia de razones y operador constante, sea más bien dialéctica. Sin duda, ya lo hemos visto, el trabajo con razones es primero. Sin embargo, es probable que, a partir de cierto momento, la introducción de operadores ayude también a comprender la idea de razones equivalentes al destacar con un solo número aquello que las distintas razones tienen en común.

Cabe hacer hincapié en que la noción de operador puede ser muy difícil de propiciar, sin introducirla directamente. Por ello, puede ser necesario que los alumnos se familiaricen con los operadores, mediante tareas simples, antes de pretender que identifiquen los operadores subyacentes a las reglas.

La experiencia que hemos realizado permite identificar algunas de estas tareas: en primer lugar, como ya vimos, los operadores pueden aparecer como medios implícitos de cálculo en la acción de aplicar las reglas a cantidades de fichas. En segundo lugar, pueden aparecer explícitamente como reglas de cambio *dadas*, que deben aplicarse a cantidades de fichas, e incluso, que deben compararse con otras reglas.

Entonces, después de las situaciones iniciales de elección de la mejor regla, el estudio de la noción de equivalencia de razones y el estudio inicial de los operadores pueden realizarse en paralelo, antes de propiciar la identificación de los operadores que subyacen a las razones (ver esquema de la siguiente página).

Momento 1

| Equivalencia | Operadores |
|---|---|
| • Se *constatan* equivalencias entre reglas del tipo “a por cada b” al aplicarlas a cantidades de fichas o al comparar reglas.<br>• Se *anticipan* equivalencias:<br>reglas del tipo (a, a) = (b, b)<br>reglas del tipo (a, b) = (1, n)<br>• Se escriben equivalencias, y, en particular, se aprende a determinar una razón canónica: (a, b) = (1, x) (división reparto) | • Se aplican implícitamente al calcular.<br>• Se comparan con reglas del tipo “a por cada b”, aplicándolos a una cantidad.<br>• Se anticipa su equivalencia con reglas del tipo (1, n) |

Momento 2

| |
|---|
| • Se identifica el operador que subyace a las reglas del tipo “a por cada b” mediante la identificación previa de la razón canónica:<br>(a, b) = (1, n) = Xn<br>(n, cociente de la división reparto b:a)<br>• Se identifica el operador directamente mediante la división de los términos:<br>(a, b) = Xn<br>(n, cociente de la división comparación b:a) |

# 2) SECUENCIA DIDÁCTICA “LOS INTERCAMBIOS”

## 2.1) Introducción

### *Los propósitos*

El propósito didáctico de la secuencia es propiciar un acercamiento por parte de los niños a la noción de relación multiplicativa entre dos conjuntos de cantidades, es decir, a la noción de razón. Los propósitos más específicos son:

- Propiciar el paso de la comparación de cantidades a la comparación de razones entre cantidades, expresadas como reglas de cambio.
- Propiciar el desarrollo de dos procedimientos para comparar razones: 1) la obtención de pares equivalentes mediante conservación de la suma y la sustitución de ésta por la conservación de las razones internas, y, posteriormente, 2) para el caso de razones enteras, la cuantificación de la razón externa mediante un operador o “número de veces” .

  La noción de relación multiplicativa constante se desarrolla primero bajo la forma de reglas que se expresan con dos cantidades, para asumir después la forma explícita de un operador.

La secuencia está dirigida a alumnos que cursan el tercer grado de primaria (entre 8 y 10 años de edad). En este momento de la escolaridad, según los programas oficiales, los niños llevan relativamente poco tiempo trabajando explícitamente con la multiplicación, entre un año y un año y medio. Han trabajado con esta operación básicamente con el sentido de una suma repetida; han empezado a aplicar y a memorizar las tablas de multiplicar. Así mismo, han iniciado el estudio de la división, probablemente más asociada a situaciones de reparto que a situaciones de agrupamiento o de comparación. Finalmente, el estudio de las fracciones apenas comienza.

Así, la secuencia no pretende sólo la *aplicación* de conocimientos adquiridos de multiplicación y división, de hecho, no supone un dominio de estas operaciones, más bien pretende contribuir a su aprendizaje al resolver ciertas variantes de las situaciones SFR-2 y SFC, en el contexto del “trueque”.

***La situación central "La elección de la mejor regla"***

Se trata de una situación de intercambios o "trueque". Los alumnos dispondrán de una cantidad de fichas, todos la misma cantidad, que podrán cambiar por estampas de acuerdo a la regla de cambio que ellos elijan entre cuatro posibles (por ejemplo, "se cambian cada 2 fichas por 6 estampas", "se cambia cada ficha por cuatro estampas", etc.). Ganan quienes logren tener la mayor cantidad de estampas.

La situación se desarrolla en los siguientes pasos:

1) Se anotan en el pizarrón las reglas de cambio
2) Los alumnos, organizados en equipos de cuatro integrantes, escogen la regla con la que piensan que ganarán más estampas y la anotan en un papel que entregan a la maestra.
3) Una vez escogida una regla, se les entrega cierta cantidad de fichas, la misma a todos los equipos.
4) Los equipos calculan cuántas estampas les corresponden de acuerdo a la regla que escogieron.
5) En el pizarrón se anota la regla que escogió cada equipo y la cantidad de estampas que espera recibir. Si hay discrepancias (por ejemplo, dos equipos que habiendo escogido la misma regla, esperan recibir cantidades de estampas diferentes) se discute. Éste constituye un primer momento de verificación (en el nivel numérico)
6) Se efectúan los intercambios de acuerdo con cada regla. Éste constituye un segundo momento de verificación, esta vez empírica.

Notemos que la situación se organiza de manera que, en el momento de escoger la regla de cambio, los alumnos todavía no saben cuál es la cantidad de fichas que van a recibir, de manera que tienen que comparar las reglas de cambio <u>antes</u> de comparar las cantidades de estampas que éstas arrojan.

El momento de la verificación empírica es fundamental, se espera que ayude a comprender la situación, y que sea la ocasión para poner en evidencia hipótesis erróneas (por ejemplo, la mejor regla es la que se formula con más estampas) así como para esbozar estrategias para la vez siguiente.

Por último, lo más importante: la situación implica efectivamente la realización de las dos tareas que nos interesan, la principal, la comparación de razones expresadas como "reglas de cambio" (SFC): la mejor regla no es necesariamente aquélla en la que aparece el mayor número de estampas, ni aquélla en la que aparece el menor número de fichas, sino aquélla en la que se dan más estampas *en relación* con el número de fichas. La segunda tarea, la aplicación de la regla escogida a la cantidad de fichas recibida (SFR-2).

***Características y variables de la situación***

A continuación se describen las características de la situación y las variables susceptibles de manejarse para generar una diversidad de problemas.

**La naturaleza de las cantidades:**

Las cantidades en relación son siempre discretas. Aunque se trata de objetos diferentes (fichas, estampas) la situación de intercambio puede favorecer que se consideren dentro de una clase abarcativa: objetos que se cambian. Esto último puede ser relevante cuando interesa que los alumnos puedan cuantificar la razón externa con un "número de veces" (ver en el primer capítulo, apartado 3.2 "Variables relativas a la naturaleza de las magnitudes").

**La formulación de las reglas de cambio:**

Durante las primeras sesiones, todas las reglas se enuncian bajo la forma explícita de una regla de correspondencia del tipo

*"Por cada n fichas se dan m estampas"*

Durante estas sesiones interesa que los niños superen la comparación centrada en cantidades aisladas y pongan en juego recursos para comparar las relaciones.

En sesiones posteriores, se introduce, junto con la formulación anterior, una formulación mediante un factor constante:

*"La cantidad de estampas que se da es n veces la cantidad de fichas".*

En este momento, el objetivo es propiciar el estudio de los números naturales en su función de expresión de una razón constante, de un operador, al mismo tiempo que se analiza su equivalencia con la formulación anterior.

**El carácter numérico de las razones:**

- Las razones externas[1]

Las razones externas pueden ser:

1) Enteras, por ejemplo, "por cada dos fichas, se dan 6 estampas". El operador que subyace es entero: X 3
   Entre éstas, distinguiremos además las razones "canónicas", en las que el número de fichas es uno, por ejemplo "por cada ficha se dan dos estampas"

2) No enteras, por ejemplo, "por cada dos fichas, tres estampas" (el operador que subyace es X 3/2). La razón canónica ("por cada ficha, una estampa y media"), en este caso, tiene poco sentido en términos del contexto.
   Hay que considerar por separado las razones en las que el número de estampas es igual a uno, por ejemplo, "por cada 3 fichas, una estampa", puesto que, en este caso, el operador corresponde a un "número de veces menos" (la cantidad de estampas que se reciben es *tres veces menor* que la cantidad de fichas que se dan) y por lo tanto no necesita expresarse necesariamente con una fracción.

En la experimentación de esta secuencia optamos por analizar únicamente el caso de razones enteras debido a que nos interesó estudiar la posibilidad de que los niños utilizaran, además de los procedimientos internos, el del operador constante[2]. Como veremos más adelante, esta expectativa resultó prematura para una parte del grupo.

Tampoco incluimos los casos más simples de comparación cualitativa, por ejemplo, comparar una regla con otra en la que los dos términos son iguales, o comparar dos reglas con un término común. Consideramos que, para los niños de tercer grado, estos problemas no presentarían una dificultad importante.

---

[1] Llamaremos razón externa a la que se establece entre los dos términos de una misma regla de cambio (número de estampas, número de fichas), e internas a las que se establecen entre los términos homólogos de dos pares (número de fichas de una regla , número de fichas de la otra o bien número de estampas de una , número de estampas de la otra).

[2] Desde el punto de vista de los procedimientos más probables, los internos, el carácter entero o no de la razón externa puede no influir en la dificultad del problema (ver Capítulo 1, apartado 3.4). Por ello, la condición de "razón externa entera" no es necesaria cuando no se pretende propiciar la identificación del operador externo.

- Las razones internas

Dado que los procedimientos de éxito más factibles son los internos, el carácter entero o no entero las razones internas puede ser determinante de la dificultad de la comparación: la presencia de una razón interna entera permite comparar modificando un solo par (por ejemplo, (**2** fichas, 6 estampas) vs (**4** fichas, 8 estampas), mientras que la ausencia de razones internas enteras exige, en este procedimiento, la modificación de los dos pares. Hemos visto ya, en el capítulo 2, la complejidad que este último procedimiento puede representar para los niños, desde dos puntos de vista: comprender que los pares pueden ser iterados diferentes números de veces[3] y encontrar un múltiplo común de los términos que se desean igualar.

Es previsible que la primera dificultad para comprender que los pares pueden ser iterados diferente número de veces pueda ser superada a lo largo del desarrollo de la situación. La verificación empírica puede jugar un papel importante: para obtener las estampas que corresponden a una cantidad de fichas, con diferentes reglas, los niños podrán constatar que el número de veces que se repite la acción de dar "n estampas por cada m fichas" no tiene porqué ser el mismo para las diferentes reglas. En cambio, la dificultad para determinar un múltiplo común de los términos, puede requerir de un trabajo especial. La situación misma puede proporcionar un motivo y un contexto idóneo para realizarlo.

Por otra parte, la ausencia de razones internas enteras, al volver más complejo el recurso a procedimientos internos, y dado que las razones externas son enteras, puede favorecer los operadores.

A lo largo de la secuencia, se consideran los dos casos: razones internas enteras y no enteras.

### El número de reglas a comparar:

El conjunto de reglas entre las cuales se debe elegir la mejor puede tener dos reglas o más. Al aumentar el número de reglas, aumenta la dificultad por el solo hecho de requerirse de una organización que asegure que se hicieron las comparaciones pertinentes: de cada dos reglas comparadas, desechar la menos buena y comparar la mejor con la siguiente, o comparar de dos en dos, y luego, las mejores de cada par, etc.

[3] Por ejemplo, para comparar (2 fichas, 6 estampas) contra (5 fichas, 10 estampas), igualando el número de fichas, es necesario iterar cinco veces el primer par y sólo dos veces el segundo.

En la secuencia optamos por proponer grupos de cuatro reglas por las siguientes razones: 1) con esto habría más diversidad en los resultados del grupo de niños, sin que la tarea fuera todavía excesivamente difícil, 2) este número de reglas permite incluir reglas equivalentes y no equivalentes en un mismo conjunto, y, 3) la situación de comparación de las reglas requiere de un desarrollo largo, en la serie de pasos que fueron descritos anteriormente; teniendo cuatro reglas, se logra un mejor aprovechamiento del tiempo que teniendo dos. Se consideró que si la dificultad era excesiva, el número de reglas se reduciría a dos.

**El tamaño de las cantidades:**

Las cantidades de fichas y estampas con las que se expresan las reglas de cambio se mantuvieron en un rango entre uno y veinte debido a que interesó centrar la atención en las relaciones en juego y además, para hacer posible la verificación empíricamente. Los operadores implícitos van de “el doble” a 10 veces”.

Las cantidades de fichas que se entregaron cada vez a los alumnos para el intercambio son de máximo 12. Las cantidades de estampas recibidas fueron siempre menos de 60, excepto en una situación en la que no se usó material.

**Variantes y extensiones de la situación:**

La situación admite una diversidad considerable de variantes, veremos aquí algunas de ellas.

1) La SFR-2
   Es posible reducir la situación a una tarea más simple que consiste en calcular el número de estampas que arroja una regla dada (o varias) para una cantidad dada de fichas (o varias). Esta situación puede ser pertinente en algunos momentos del proceso para propiciar el desarrollo de procedimientos más rápidos para calcular el número de estampas, por ejemplo, si la regla es “por cada 2 fichas se dan 6 estampas” y la cantidad de fichas es 30, la cantidad de estampas puede determinarse gráficamente agrupando de dos en dos las treinta fichas, pero también puede determinarse dividiendo 30 entre dos y después multiplicando por seis.

Así mismo, cuando en esta variante se aplican varias reglas a varias cantidades, pueden propiciarse ciertas relaciones, por ejemplo:

- Una regla que es mejor que otra para cierta cantidad de fichas, lo es también para cualquier otra cantidad de fichas
- Hay reglas que arrojan siempre la misma cantidad de estampas, son reglas equivalentes.
- Razones internas: cualquier regla da el doble de estampas a cambio de *2 n* fichas que a cambio de *n* fichas.
- "Razones de razones": por ejemplo, la regla 1 ficha→4 estampas da *el doble* de estampas que la regla 2 fichas →4 estampas.

El interés didáctico de esta variante radica en que permite estudiar ciertos aspectos específicos implicados en la situación original. No es necesario plantearla al inicio puesto que no constituye un requisito para abordar la original, y no contiene el sentido de la comparación.

2) Hacia la noción de múltiplo común:

Como veremos en los resultados de la experimentación, una dificultad reiterada que los niños enfrentaron en el momento de escoger la mejor regla, fue darse una cantidad de fichas que les permitiera hacer la comparación de las reglas, sin que hubiera residuos. Por ejemplo, dadas las reglas "por cada tres fichas se dan 9 estampas" y "por cada 5 fichas se dan 10 estampas", ¿qué número de fichas conviene usar para probar las reglas?

En cierto momento del proceso puede asumirse esta pregunta como objeto de estudio: plantear pares de reglas y analizar qué números de fichas permitirían hacer la comparación sin que "sobren fichas". De aquí puede derivarse un trabajo en el nivel numérico, sin el contexto del problema, sobre la noción de múltiplo común de dos números.

3) Uso implícito de divisores comunes:

Dado un cambio supuestamente efectuado, se trata de determinar la regla de cambio, por ejemplo:

"*Alguien cambió 18 fichas por 54 estampas, ¿cuál pudo ser la regla? ¿Cuál es la regla que se expresa con las cantidades más pequeñas"*

Es la variante estructural 4 de la SFR-2. Más allá de los procedimientos de ensayo y error, el procedimiento óptimo consiste en dividir ambos términos entre un mismo número, lo cual lleva a determinar divisores comunes. Para los casos particulares en los que la razón externa es entera, la división del número de estampas entre el número de fichas permite saber cuántas estampas corresponden a cada ficha.

4) El orden en el conjunto de razones

Si bien la situación original es de hecho una situación de comparación, pueden plantearse ciertas variantes que llevan a reflexionar sobre determinadas propiedades del orden de las razones, por ejemplo:

*"Escribir una regla mejor que "por cada ficha se dan dos estampas", otra que convenga igual (equivalente) y otra que convenga menos".*

El siguiente es un caso difícil:

*Proponer una regla que convenga más que "por cada ficha, dos estampas", pero menos que "por cada ficha, tres estampas".*

La primera impresión puede ser que dicha regla no existe. Posiblemente la forma menos compleja de lograrlo es a partir de obtener reglas equivalentes a las reglas dadas:

(1 ficha, 2 estampas) es equivalente a (2 fichas, 4 estampas)
(1 ficha, 3 estampas) es equivalente a (2 fichas, 6 estampas)
(2 fichas, 5 estampas) conviene más que la primera, pero menos que la segunda.

### Momentos de formulación y de validación:

Más allá de las formulaciones espontáneas que los niños hacen al discutir al interior de sus equipos o al discutir colectivamente acerca de una regla propuesta, y más allá de las validaciones empíricas propias de la situación original, pueden organizarse momentos en los que la tarea consiste en proponer explícitamente condiciones suficientes para que se cumpla determinada relación, por ejemplo: dada la regla "por 2 fichas, 6 estampas", decir qué se debe hacer para obtener reglas mejores, equivalentes o menos buenas. Las propuestas son objeto de discusión y prueba por parte de los niños.

## Objetos de institucionalización:

Sobre la marcha puede ser conveniente introducir ciertos términos (pocos en realidad), e institucionalizar ciertos procedimientos: las formas de calcular de manera rápida el número de estampas; la forma para generar reglas "equivalentes" multiplicando por un mismo número ambos términos y, en otro momento, identificando al "operador" cuando es entero; introducir ciertas propiedades en la medida en que se van utilizando, por ejemplo, si el número de fichas es el mismo, entre más estampas, mejor es la regla.

En cambio, puede ser innecesario e incluso prematuro, hablar de "razón" o de "razón constante", o distinguir razón interna de razón externa. Al trabajar en otros contextos (los hay muchos, como ya vimos en las partes anteriores), los niños pueden identificar semejanzas importantes. Puede ser ese el momento para introducir nombres más generales como el de "razón".

## Una situación "fundamental":

La situación que hemos presentado cumple con las características que definen a una situación fundamental en la teoría de las situaciones didácticas: 1) la resolución implica de manera ineludible el conocimiento que interesa propiciar, a saber, la identificación de razones y su comparación ,y, 2) es posible generar, mediante las variables que presenta, un conjunto amplio de situaciones que abarca una gran parte de la familia de problemas que se resuelven mediante el conocimiento en cuestión.

Hemos visto, al revisar las variantes, que la situación original puede dar lugar a un secuencia relativamente larga y completa de situaciones. No obstante, también es previsible que el contexto específico (reglas de cambio), debe cambiar en cierto momento para evitar que se vuelva monótono, y para evitar también una particularización excesiva de los conocimientos que son objeto de estudio.

### *La secuencia aplicada*

El estudio experimental constó de cinco sesiones de clase de entre 50 y 90 minutos cada una. Se abordaron únicamente algunos de los aspectos que se esbozaron anteriormente y que pueden considerarse como la parte inicial de la secuencia. En el cuadro que sigue se especifican estos aspectos.

## Secuencia de situaciones

| Sesión | Situación | Objetivos y comentarios |
|---|---|---|
| 1 | **Selección de la mejor regla de cambio (I)**<br>A) por cada 2 fichas se dan 8 estampas<br>B) por cada ficha se dan 3 estampas<br>C) por cada 3 fichas se dan 9 estampas<br>D) por cada 6 fichas se dan 12 estampas<br><br>**Selección de la mejor regla de cambio (II)**<br>Se repite, excluyendo la regla ganadora en la primera parte. | Comprobar que la comparación de cantidades aisladas no lleva a escoger la mejor regla.<br>Desarrollar procedimientos que permitan comparar.<br><br>Se presentó una confusión debido a la organización de la actividad; fue corregida en la siguiente. |
| 2 | **Selección de la mejor regla de cambio (III)**<br>A) por cada ficha se dan 4 estampas<br>B) por cada 2 fichas se dan 6 estampas<br>C) por cada 4 fichas se dan 8 estampas<br>D) por cada 8 fichas se dan 24 estampas<br>Al final: confrontación de procedimientos<br><br>**Selección de la mejor regla de cambio (IV)**<br>A) por cada 5 fichas se dan 10 estampas<br>B) por cada ficha se dan 3 estampas<br>C) por cada 2 fichas se dan 10 estampas<br>D) por cada 10 fichas se dan 20 estampas | Mismos objetivos<br>Además:<br>- empezar a difundir las estrategias de algunos niños.<br>- identificar la existencia de reglas equivalentes. |
| 3 | **Cálculo del número de estampas**<br>Se calcula el número de estampas que arrojan cuatro reglas, para varias cantidades de estampas. | Desarrollar procedimientos más eficientes para calcular el número de estampas. |
| 4 | Termina la actividad anterior:<br>Se confrontan observaciones realizadas a partir de los resultados obtenidos. | Difundir en el grupo procedimientos eficientes utilizados por algunos<br><br>Propiciar la identificación de ciertas relaciones en el cuadro de resultados, por ejemplo, hay dos reglas que siempre producen los mismos resultados. |
| | **“Una nueva regla”**<br>PRIMERA PARTE:<br>“Se da una cantidad de estampas igual a TRES VECES la cantidad de fichas”<br>Se aplica la regla a varias cantidades de estampas | Explicar el significado de la nueva formulación en donde un natural juega el papel de razón constante (número de veces). |
| | SEGUNDA PARTE:<br>**Selección de la mejor regla de cambio (V)**<br>A) Se da una cantidad de estampas igual a CINCO VECES la cantidad de fichas<br>B) Se cambia cada ficha por 4 estampas<br>C) Se cambian cada 2 fichas por 10 estampas<br>D) Se cambian cada 10 fichas por 20 estampas | Identificar la equivalencia entre las dos formulaciones de la razón:<br>“por cada 2, 10” y “5 veces”. |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | PRIMERA PARTE:<br>**Identificar reglas equivalentes (I)**<br>A) Se da una cantidad de estampas igual a CINCO VECES la cantidad de fichas.<br>B) Por cada ficha se dan 5 estampas<br>C) Por cada 5 fichas se dan 10 estampas<br>Por 2 fichas se dan 6 estampas. | Mismo objetivo que el anterior. |
| | SEGUNDA PARTE:<br>**Identificar reglas equivalentes (II)**<br>D) Se da una cantidad de estampas igual a DOS VECES<br>la cantidad de fichas<br>E) Por cada ficha se dan 4 estampas<br>F) Por cada 4 fichas se dan 8 estampas<br>Por 2 fichas se dan 8 estampas | Mismo objetivo que el anterior. |
| | TERCERA PARTE:<br>**Proponer reglas mejores, equivalentes y menos buenas que:**<br>“Se cambian 2 fichas por 10 estampas”<br>Sólo se pueden usar números hasta 10. | Propiciar una reflexión explícita sobre el orden. |

### *La aplicación, la observación y el registro*

La secuencia se aplicó en un grupo de 24 alumnos de tercer grado de una escuela pública vespertina. El nivel de desempeño del grupo es heterogéneo.

La conducción de las sesiones estuvo a cargo de una maestra con experiencia amplia en la aplicación de situaciones experimentales con el mismo enfoque que caracteriza al presente estudio.

En las sesiones participaron tres observadores. Cada uno estuvo a cargo del registro (con apoyo de grabadora) de un equipo de cuatro niños. Una de las observadoras registró además los momentos de interacción colectiva (consignas y confrontaciones). Con esta organización logramos tener información precisa del trabajo de alrededor de 10 niños e información más puntual de los demás.

## 2.2) Situación 1: Selección de la mejor regla de cambio

Esta situación se aplicó cuatro veces a lo largo de dos sesiones. Las razones en juego fueron siempre enteras. A partir de la segunda sesión se corrigieron algunos aspectos en el diseño de la situación que produjeron confusión en la primera.

***2.2.1) Primera aplicación*** *(sesión 1; 50 minutos)*

**Ficha de trabajo**

- Organización: equipos de cuatro alumnos
- Material por equipo de cuatro:
  15 fichas y 50 estampas por equipo
  Tablas de multiplicar
  Un pedazo de hoja de papel
- Consigna:

A todos los equipos les vamos a dar la misma cantidad de fichas.
Las fichas se van a poder cambiar por estampas con alguna de las siguientes reglas de cambio (leerlas):

A) Se cambian cada 2 fichas por 8 estampas
B) Se cambia cada ficha por 3 estampas
C) Se cambian cada 3 fichas por 9 estampas
D) Se cambian cada 6 fichas por 12 estampas

Ganarán los equipos que logren tener más estampas”

- Desarrollo:

1) “En cada equipo escojan una regla de cambio, tienen 5 minutos”(si preguntan por el número de fichas que van a recibir, contestar que ese dato no puede darse; decir que pueden usar sus cuadros de multiplicaciones).

2) Cada equipo anota en un pequeño papel su número de equipo y la regla que escogió. Entrega el papel a la maestra.

3) Se da la cantidad de fichas por equipo: “Cada equipo toma 12 fichas, calcule cada uno el número de estampas que le tocan. Pueden hacerlo como quieran, usando las fichas y las estampas, o con las tablas de multiplicar, o de otra manera” (5mn)

4) Confrontación de resultados (10 a 15 minutos)

- La maestra anota las reglas que se escogieron en el pizarrón:

| Equipo: | Regla | Número de estampas |
|---|---|---|

- Por turnos, cada equipo dicta a la maestra el número de estampas que le tocaron.
- Si para la misma regla aparecen números de estampas distintos, se discute la diferencia antes de decidir quiénes ganaron. Uno de los equipos, de preferencia el que cometió el error, explica cómo obtuvo sus puntos.
- Cuando se está de acuerdo en los números, se ve quienes ganaron.
- No se discuten todavía los procedimientos para dar más tiempo a todos los alumnos de desarrollar uno por sí mismos.

**Análisis previo**

*Selección de la regla.*

La regla que se formula con el mayor número de estampas (D) no es la mejor; tampoco lo es aquella que se formula con el menor número de fichas (B).

Las reglas B y C son equivalentes.

Se espera que la situación permita, en primer lugar, confrontar dos hipótesis falsas que eventualmente los niños pueden hacer:

- que conviene la regla que da más estampas o aquella en la que se dan menos fichas
- que para saber qué regla conviene hace falta conocer el número de fichas que se van a cambiar.

En segundo lugar, se espera que los niños desarrollen alguno de los siguientes procedimientos para determinar cuál es la mejor regla:

1. Generar pares a partir de una regla para igualar un término con el de otra regla, por ejemplo: la regla B, 1 →3, da lugar a 2 → 6 y como en A es 2→8, conviene más A.
   Con este procedimiento, la comparación más difícil es la de la regla A con la C porque es necesario generar nuevos pares con ambas reglas: A es 2→8 y por lo tanto 6 →24; C es 3 →9 y por lo tanto 6 →18 , entonces conviene más A. No es probable que los niños determinen desde el principio que conviene igualar las cantidades a 6 fichas, mínimo común múltiplo de 2 y 3. Harán tal vez listas de pares hasta encontrar dos que les sirvan.

2. Dado que las razones externas son enteras, un procedimiento en este caso mucho más rápido es determinar el operador constante:

   A) Se cambian cada 2 fichas por 8 estampas: <u>cuatro veces</u>
   B) Se cambian cada ficha por 3 estampas: <u>tres veces</u>
   C) Se cambian cada 3 fichas por 9 estampas: <u>tres veces</u>
   D) Se cambian cada 6 fichas por 12 estampas: <u>dos veces</u>

   No obstante, este un procedimiento complejo que difícilmente aparecerá en esta primera aplicación.

Si algunos alumnos se percatan de que las reglas B y C producen el mismo resultado, se les llamará “reglas equivalentes”.

*Procedimientos previstos para calcular el número de estampas.*

Una vez elegida una regla, para calcular el número de estampas que corresponden, se prevé que lo niños recurran a alguno de los siguientes procedimientos (se ejemplifican con la regla A, aplicada a12 fichas):

1. Hacer el intercambio con el material: por cada 2 fichas poner 8 estampas y luego contar
2. Sumar de 2 en 2 hasta 12 y, simultáneamente, de 8 en 8 (conservación de la suma)
3. Determinar el número de grupos de 2 fichas que se forman con 12 fichas y después multiplicar por 8 (conservación de las razones internas)
4. Identificar que la razón de cambio es “tres veces”, y multiplicar entonces por 12 por 3 (operador)

En la confrontación, si aparecen resultados distintos para una misma regla y los alumnos argumentan a favor de uno, es posible que los procedimientos utilizados se hagan explícitos.

**Resultados**

En esta primera aplicación de la situación se suscitaron confusiones acerca de las reglas del juego. No obstante, sobre la marcha se fue aclarando el juego. Al final, la mayoría de los niños pudo constatar que la regla que se formula con la mayor cantidad de estampas no es necesariamente la mejor.

*La consigna*[1]

> *(...)*
> *M: Todos los equipos van a recibir fichas rojas y todos van a recibir la misma cantidad y de lo que se trata es de que van a poder cambiar fichas rojas por estampas.*
> *Als: (Exclamaciones de entusiasmo, algunos aplauden)*
> *M: Van a poder cambiar fichas rojas por las estampas, pero va a haber reglas para poderlas cambiar, (repite). Atención ahí van las reglas, las voy a escribir en el pizarrón.*
> *M: (mientras escribe las reglas en el pizarrón, algunos niños van leyendo en voz alta)*
> *Stef.: (Inmediatamente de haber terminado de leerlas, comenta en su equipo) Está mejor la última. (...)*
> *M: ¡Atención!, se supone que va a ganar el equipo que consiga más estampas. Yo les voy a dar a ustedes su número de fichas (muestra las fichas que están en su caja) y ustedes estas fichas, van a cambiarlas a estampas, pero ahorita van a decidir en equipo cuál regla les conviene más, van a escoger solamente una.*
> *Stef.: La última*

La consigna fue aparentemente clara, no obstante, la mayoría de los niños la comprendieron hasta el final del primer juego.

*La selección de la mejor regla.*

En cuánto la maestra termina de escribir las reglas en el pizarrón, algunos niños escogen la regla con la que creen que van a ganar. Los seis equipos escogen en un primer momento la regla D (6f →12e), debido a que es la que presenta el mayor número de estampas:

Manuel. del equipo 1, "porque son más estampas"

Stefanie. del equipo 2, "porque es la que trae más"

Beth. del equipo 4, "porque vamos a ganar más estampas"

Miguel. del equipo 6, "porque es la que tiene más estampas".

Los niños anotan su regla en un papel que entregan a la maestra.

*Aplicación de la regla escogida a un conjunto de doce fichas*

La maestra anuncia la cantidad de fichas que van a tener: 12, y, al mismo tiempo, les entrega el material (12 fichas y un paquete de aproximadamente 60 estampas, agrupadas en paquetes de 10), para que tomen las que les corresponden:

Fue cuando los alumnos empiezan a trabajar con el material que se puso de manifiesto que por lo menos en cuatro equipos la consigna no fue comprendida.

[1] En los fragmentos de registro utilizaremos la letra M para indicar las intervenciones de la maestra, Obs, para las de los observadores, y Al o Als, para la de los alumnos que no se identifican por su nombre.

*<u>Equipos que no comprendieron la consigna</u>*

En los equipos 2, 3, 4 y 6 la confusión fue considerar que debían repartirse el paquete de estampas entre los miembros del equipo. Algunos niños consideran que la cantidad de estampas de la regla que escogieron es la que le corresponde a cada uno. Otros determinan correctamente la cantidad de estampas que les tocan, pero la suman al total de estampas que recibieron.

En el equipo 4, después de que se repartieron las estampas y cada uno recibió 12, la observadora les pide que relean la regla que escogieron. Al hacerlo, Marcos comprende de lo que se trata y aplica la regla D (6→12) a 12 fichas así:

> *Marcos: No, allí dice que con 6 fichas te van a dar 12 estampas. El tiene 3 (fichas)… y él …… tiene 3 son 6, entonces son 12 estampas y otras 6 …(señala las fichas de él y de Beth)…. Son otras 6, entonces son 24. 12 más 12 son 24"*

No obstante, le resultará difícil convencer a sus compañeros, quienes además prefieren tener cada uno 12 estampas. Después de algunos intentos, Marcos convence a Fernando y entre los dos explican nuevamente el problema a Beth y a Víctor, pero no logran convencerlos.

*<u>Equipos que comprendieron de entrada la consigna</u>*

- Equipo 5 (no se observó):
  En la puesta en común dictan la cantidad de 24 estampas, la cual corresponde bien a la regla que escogieron (D). Además, en su hoja de trabajo, tienen una suma iterada de 12 veces un 3 (igual a 36), lo que puede indicar que, después de entregar el papelito con su regla y una vez que supieron que habría 12 fichas, probaron también la regla B (1→3).

- Equipo 1
  Cuando reciben el material, Manuel obtiene la cantidad de fichas que corresponde a la regla D: "por seis dan 12 y por otras seis dan 24".

  No obstante, como si tuviera una sospecha, decide usar las fichas para calcular cuántas estampas corresponden con la regla A (2→8): agrupa las doce fichas de 2 en 2, y por cada dos fichas suma mentalmente ocho. Al obtener el total de 48 se muestra sorprendido. Después dice al observador cómo se explica él mismo este resultado inesperado:

  > *Manuel: "porque nada más te piden 2 fichas" (van con la maestra, quien le permite cambiar la regla).*

Manuel presta atención ahora a la segunda variable, al número de fichas: si éste es menor, en total se reciben más estampas. Es posiblemente el primero en el grupo que atiende a esta variable, en la confrontación lo argumenta un poco más.

*Procedimientos para el cálculo del número de estampas*

Los equipos que aplicaron alguna regla a 12 fichas, determinaron el número de estampas mediante el intercambio, con el material, de *n* estampas por cada *m* fichas, o bien, agrupando previamente las 12 fichas de *m* en *m*, y sumando *n* estampas por cada grupo.

*La confrontación*

La maestra recupera los resultados obtenidos por los niños en un cuadro. En varios equipos, no hay un acuerdo entre los integrantes y cambian sus resultados en el curso del a confrontación:

| Equipo | Regla | Estampas |
|---|---|---|
| 1 | A | 48 |
| 2 | D | 36, cambia a 48 |
| 3 | D | 84 cambia a 72 y a 75 |
| 4 | D | 24 |
| 5 | D | 24 |
| 6 | D | 36, cambia a 51 |

Debido a que no esperábamos que algunos niños interpretaran la consigna en la forma en que varios lo hicieron, no previmos cómo manejar este problema en la confrontación. La maestra, cuidadosa de no invalidar por sí misma las respuestas, dio lugar a que los equipos explicaran lo que hicieron para que entre ellos mismos corrigieran sus errores. No obstante, esto dio pie a largas y confusas interacciones. En un caso como éste en el que el origen de los errores fue una mala comprensión de la consigna, puede ser mejor simplemente volverla a explicar.

*Discusión en torno a la regla D*

La maestra comenzó por señalar que la mayoría escogió la regla D, pero que se obtuvieron resultados muy variados. Mientras tanto, Manuel, del equipo 1, quien cambió su regla por la A, se muestra molesto por los resultados anotados:

> *Manuel: No se vale, ellos están haciendo trampa porque 12 y 12 son 24 (algunos niños tratan de dar su opinión)*

La maestra decide comenzar dando la palabra a los equipos que escogieron la regla D pero que no encontraron 24 estampas . Éstos, con dificultad, explican lo que hicieron.

Poco a poco va quedando claro cómo interpretaron ellos la consigna y, con la participación de dos niños y de la maestra se les va explicando cómo debía interpretarse, por ejemplo:

> *Marcos: Es que el (equipo) 6 dice que son 36, pero no, porque si está la regla **D**, sería entonces, como les dieron 12 fichas, entonces serían 6 fichas por 12 entonces ya les quedarían 12, después de otras 6 fichas tendrían 24, no fueran 36 porque entonces les hubieran dado más, (mientras da la explicación, la maestra escribe lo siguiente en el pizarrón).*
>
> *6f→12e*
> *<u>6f</u>→12e*
> *12f*

<u>*Discusión en torno a la regla A:*</u>

Manuel, del equipo 1, explica así la elección de su equipo:

> *Manuel: Porque (la regla A) tiene más, o sea ahí nos están pidiendo dos fichas y nos dan 8. (...) es como si te están pagando más en la otra por menos (...)*

*Aplicación empírica de las reglas*

Para asegurar que en todos los equipos se comprendiera la manera en que se aplican las reglas, la maestra propuso que se aplicaran las reglas D y A a 12 fichas. Pasaron dos niños al frente a hacer el cambio para la regla D a la vista de todos: uno tiene las fichas, otro las estampas, cambian cada 6 fichas por 12 estampas, verifican que efectivamente son 24 estampas. Enseguida, hacen lo mismo para la regla A, comprueban que se obtienen 48 estampas, y determinan que el equipo 1 fue el ganador.

*Comentario*

Al término de esta primera aplicación la mayoría de los niños parece haber comprendido las reglas del juego. Han podido constatar que la mejor regla no es necesariamente la que se formula con más estampas, aunque esta observación careció de contundencia debido a los múltiples errores de interpretación al determinar los números de estampas que correspondían a cada equipo. Por otra parte, algunos equipos aplicaron un primer procedimiento para calcular el número de estampas que arroja una regla, el intercambio con el material, o uno muy apegado a éste, el conteo de n en n.

***2.2.2) Segunda aplicación*** *(sesión 1; 40minutos)*

Se repitió la actividad con las misma reglas, descartando únicamente la que ganó en la aplicación anterior. Por lo tanto las reglas fueron las siguientes:

B) Se cambia cada ficha por 3 estampas

C) Se cambian cada 3 fichas por 9 estampas

D) Se cambian cada 6 fichas por 12 estampas

Dado que hay dos reglas equivalentes (B y C) y éstas son las mejores, se espera que algunos alumnos identifiquen la equivalencia.

Después de elegidas las reglas, se entregan ahora 6 fichas a cada equipo.

*La selección de la mejor regla.*

Todavía algunos niños siguen teniendo cierta dificultad para comprender la actividad, los del equipo 2, los del equipo 6 y uno que otro niño de otros equipos.

Por otra parte, debido al poco tiempo que quedó para hacer esta segunda aplicación, los dos primeros momentos de la actividad, el de escoger la regla y el de probarla a partir del número de fichas entregado, tendieron a empalmarse, de manera que cuando reciben las fichas (seis esta vez) algunos niños aún no habían escogido su regla y terminan haciéndolo considerando este último dato. Otros niños hicieron su elección considerando el número de fichas que se les entregó en la aplicación anterior (12 fichas).

En el siguiente cuadro se presentan las elecciones que hicieron los niños:

Segunda aplicación
B (1→3); C (3→9); D (6→12)

| Equipo | Reglas que consideran | Formas de verificación | Regla que escogen |
|---|---|---|---|
| 1 | B y C (Man; Ema) | Aplican B y C a 12 fichas; error en la aplicación de C. | B |
| 2 | B | Hubo confusión | B |
| 3 | C (Ism; Alf)<br>B (Pam) | Aplican B y C a 12 fichas; descubren que son equivalentes. | C |
| 4 | B y C (Mar; fer)<br>D (Bet) | Aplican B y C a 6 fichas; descubren que son equivalentes. | B y D |
| 5 | No se observó | Aplican regla B a 12 fichas | B |
| 6 | -- | Hubo confusión | C |

En la selección que hacen los niños puede percibirse el efecto de la experiencia anterior: la regla D quedó ahora descartada, posiblemente porque salió perdedora en aquella ocasión. Las elecciones del grupo se dividen entre la regla C que la mayoría escoge, probablemente porque en la experiencia anterior resultó ganadora la regla que presenta menos fichas, y la regla B, que presenta más estampas que la C.

Veamos los argumentos.

*Equipos que muestran cierta dificultad para comprender la consigna*

- Equipo 2:

  Escogen la regla B (1→3). Cuando se les dan las seis fichas, se las reparten entre los tres integrantes, dos a cada uno. En la confrontación explican que por cada ficha tomaron tres estampas, sin embargo determinaron que les correspondían 28 estampas en lugar de 18.

- Equipo 6

  Escogieron la regla C (3→9) y determinaron correctamente el número de estampas que corresponde a 12 fichas (18). Sin embargo, cuando la observadora les preguntó si alguna otra regla podía ser mejor, por ejemplo la D, dijeron lo siguiente

  > *Miguel: No, porque de todas maneras nos va a salir el mismo resultado que nos salió ahorita.*
  > *Obs: ¿Cuál?*
  > *Miguel: El de la D. Fue 51 y le pusieron 24.*

  Este equipo fue de los que en la actividad anterior dio como número de estampas todas las estampas que recibieron (51). El comentario de Miguel muestra que no les quedó claro porqué su resultado se corrigió a 24.

*Equipos en los que varios integrantes comprendieron la consigna*

- Equipo 4:

  De entrada, Marco escoge la regla B (1→3) y Fernando la regla C (3→9). Aun no hacen su elección cuando la maestra informa que esta vez dispondrán de seis fichas, de manera que sus argumentos se apoyan en este dato.

  Marco muestra que con la regla B (1→3), a seis fichas le corresponden 18 estampas (más adelante veremos los procedimientos). Con esto observa que la regla B conviene más que la D, lo cual le parece suficiente para escoger la B, la anota en el papel y la entrega a la maestra. No consideró necesario revisar la regla C.

Fernando por su parte sostiene que la regla C es mejor (3→9), pero, al aplicarla a 6 fichas, hace una interpretación errónea de la misma (multiplica cada término de la regla por 6). Un poco más adelante rectifica y descubre que las reglas B (1→3) y la C (3→9) producen el mismo resultado:

> *Fernando: "...(es la C) porque 9 más 9 son 18 y tenemos 6 fichas: 3 y 3 son 6. Nos van a dar 18 estampas….(dice sorprendido:) ¡Con la **C** también ganamos 18!"*

Beth, por su parte, muestra dificultad para comprender el funcionamiento de las reglas. En algunas intervenciones parece que se centra en el hecho de que conviene dar pocas fichas: la regla C (3→9) conviene más que la D (6→12) porque:

> *Beth: "Porque tienes que ganar muchas fichas (posiblemente quiso decir "pagar") y en la **C** tienes que dar pocas fichas y en la **D** das todas las fichas y se te acaban bien rápido y no tenemos que dar todas las fichas"*

Sin embargo, cuando Fernando muestra que las reglas B y C arrojan el mismo número de fichas, Beth defiende la regla D y toma la iniciativa de anotarla a nombre le equipo:

> *Beth: (Dice en un tono de reprobación y dando a entender que esa opción no conviene) "Ay no, allí entonces empataríamos y ganaríamos el mismo resultado, ¿por que mejor no **D**?"*

- Equipo 3 (Pamela, Ismael, Leyeli, Alfonso)

Mientras que Ismael y Alfonso se inclinan por la regla C (3→9), Pamela piensa que la B (1→ 3) es mejor. Layeli no participa, excepto para ayudarlos en las verificaciones con el material.

Pamela da un argumento a favor de la regla B (1→3): "*(...)gana la B (1→3) porque en la C (3→9) perdemos una ficha más*" Más adelante, Alfonso corrige: son 2 fichas más. Es decir, Pamela ahora atiende al número de fichas que se entregan en cada cambio.

Por su parte, frente a las preguntas de la observadora acerca de porqué escogen la regla C, Ismael se da a la tarea, con Alfonso, de averiguar el número de estampas que les corresponderían con esa regla, si tuvieran 12 fichas. Obtienen 36 estampas.

Después, deciden probar también la regla B, tal vez por la insistencia de Pamela. Al hacer el primer cambio de una ficha por tres estampas, Ismael exclama *"¡Espérate, espérate, sí es la B!"* Parece que el hecho de que por una sola ficha se reciban estampas le hace intuir que se recibirán muchas estampas.

En ese momento la maestra ya ha recogido los papelitos de los demás equipos y anuncia que esta vez contarán con 6 fichas. Se dan a la tarea de probar la regla B. Se registra cierta confusión entre si probar con 6 o con 12 fichas, hay numerosas interacciones rápidas y difíciles de seguir, se arrebatan entre ellos el material. Finalmente, es Ismael quien primero se da cuenta, con sorpresa, de que con ambas reglas, B y C, obtienen 36 estampas para 12 fichas.

> *Ismael: ¡Ya sale igual, no!, no perdemos, te sale igual, porque ahorita en la **B** y en la **C** sale igual, porque cuando hicimos la **C** salieron 36 estampas y ahorita que hicimos la **B** salieron 36*

Alfonso y Pamela se muestran también sorprendidos. Después, Alfonso e Ismael prueban ambas reglas para 6 fichas y obtienen 18 estampas.

- Equipo 1 (Manuel, Iván, Emanuel, Daniela)

  Rápidamente Manuel empieza por aplicar la regla B (1→3) a 12 fichas, obtiene 36 y concluye que es la mejor, aparentemente sin sentir necesidad de probar otras reglas. Cuando el observador le pregunta que porqué no escogió la regla C (3→9), Manuel aplica esta regla también a doce fichas, pero comete un error y obtiene 27 estampas.

Puede verse que los niños tienden a escoger una regla, guiados por una primera intuición, que presente menos fichas, o más estampas y tienden a aplicar únicamente esta regla a un conjunto de fichas. Cuando prueban dos reglas, es porque al interior de algunos equipos cada niño escoge de entrada una regla diferente. Eventualmente descubren entonces la equivalencia de dos reglas.

*Los procedimientos de cálculo del número de estampas*

Veamos ahora la forma en que algunos niños aplican las reglas a una cantidad de fichas dada, ya sea a la cantidad hipotética que ellos pensaron o a la cantidad de seis fichas que les fue entregada posteriormente.

*Intercambios con el material*

En algunos equipos, los niños aprovechan que tienen el material de fichas y estampas para aplicar alguna regla realizando efectivamente el intercambio y contando al final la cantidad de estampas obtenida. Por ejemplo, para aplicar la regla B (1→3) a 6 fichas, Alfonso e Ismael, del equipo 3, intercambian cada ficha por tres estampas. No obstante, este procedimiento se ve rápidamente sustituido por otros más rápidos, menos apegados al material, como los siguientes.

### *Iteración de los términos (conservación de la suma)*

Éste es el primer procedimiento numérico que aparece. Por ejemplo, Marco (equipo 4) muestra que con la regla B (1→3), a seis fichas le corresponden 18 estampas:

> *Marco: de una ficha son 3 estampas, de 2 son seis, de 3, nueve, de 4, doce, de 5, quince, de 6, dieciocho.*

Fernando (equipo 4), aplica la regla C (3→9) a 12 fichas: "porque 9 y 9 son 18, y tenemos 6 fichas, 3 y 3 son 6, nos van a dar 18 estampas".

### *Usos de la multiplicación*

En esta clase identificamos únicamente un niño, Marco, del equipo 4, que utiliza (correctamente) la multiplicación. Vimos un poco antes la primera explicación que da a la observadora acerca de cómo aplicó la regla B (1→3) a 6 fichas. Al repetir la explicación señala:

> *Marco: "nada más tendríamos que multiplicar: por una, serían 3, por dos, serían 6, (...) por 6 serían 18, por eso nos conviene más que la D-*

Marco deja implícito el multiplicando es 3. Este factor originalmente representa a una cantidad constante (3 estampas) a la que se aplican escalares variables, derivados de las cantidades de fichas: una vez tres, dos veces tres, etc. Pero, posiblemente, al repasar la lista de parejas (por una son tres, por dos son seis...) Marco conmuta los papeles de escalar y medida y asigna al factor tres el papel de operador constante sin dimensión, "3 veces".

Pasa de:

| Fichas | Estampas | |
|---|---|---|
| 1 | **3** | |
| | | X2 |
| 2 | 6 | |
| | | X6 |
| 6 | 18 | |

a:

**X3**

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 6 | 9 |

Esta aplicación sutil de la conmutatividad se vuelve explícita cuando, en la confrontación, Marco intenta explicar su idea de multiplicar:

> *"Sí, porque (en la B) le estás cambiando una ficha por 3 estampas, multiplicamos 6 por 3 y son 18".*

Pero, para ser aún más claro, regresa a la suma iterada:

> *Marco: Sí, es que aquí dice que se cambia cada ficha por 3 estampas, ahora, sumé <u>3 veces 6,</u> ahora, sumé 3 veces 6 nos daría 18, es que se cambian cada ficha por 3 estampas (...)*

La suma que corresponde al contexto es, en realidad, la de 6 veces 3 estampas, y no la de 3 veces 6 estampas. La inversión de papeles que hizo Marco queda puesta en evidencia.

Cuando Marco, para demostrar que la regla anterior es equivalente a la C (3→9), explica cómo aplicó ésta última a 6 fichas, destaca esta vez el factor "dos veces", el cual juega claramente como razón interna:

> *Marco:, (...) después (en la regla C) tenemos dos (dos veces 3 fichas), 18 (dos veces 9 estampas) y nos daría el mismo resultado.*

Esto es:

| | Fichas | Estampas | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 9 | |
| X2 | | | X2 |
| | 6 | 18 | |

Así, la regla 1→3 lo lleva a utilizar el operador constante X3 a partir de observar el vínculo entre los pares (1, 3) (2, 6) (3, 9) etc., mientras que en la regla 3→9 utiliza la multiplicación en la función de razón interna.

<u>*Errores en el uso de la multiplicación*</u>

Manuel (equipo 1), al intentar aplicar la regla C (3→9) a 12 fichas, multiplica 9 por 3 y obtiene 27 estampas. Probablemente calculó mal la razón interna (12 fichas entre 3 fichas = 3 veces). Después, para calcular cuántas estampas se obtendrían con esa misma regla aplicada a 6 fichas dice que es "la mitad de 27, 13 con un punto", demostrando con ello que tiene claro que una misma regla arroja la mitad de la cantidad de estampas cuando se aplica a la mitad de la cantidad de fichas.

*La confrontación*

Los equipos dictan los números de estampas que les corresponden:

| Equipo | Regla | Estampas |
|---|---|---|
| 1 | B | 18 |
| 2 | B | 28 |
| 3 | B | 36 |
| 4 | D | 18 |
| 5 | B | 36 |
| 6 | C | ~~36~~ 18 |

Se refleja por un lado la confusión en el número de fichas considerado, unos tomaron 6 otros 12 y por otro lado, la iniciativa de una niña del equipo 4 quien modificó por su cuenta la regla propuesta (B por D), pero en su equipo calcularon el número de estampas con la regla B.

A lo largo de la discusión, la maestra aclara que las fichas eran 6 y no 12. Se van cambiando los resultados 36 por 18. Se aclara así mismo que al equipo 4 le correspondían 12 estampas, aunque la maestra olvida corregir el dato en la tabla (el tiempo se había terminado) por lo que parece que en todos los casos se obtiene 18 estampas.

La clase termina con la observación de que las reglas B y C arrojan la misma cantidad de estampas. La maestra dice entonces que las van a llamar "reglas equivalentes".

***Comentarios***

A lo largo de estas dos primeras aplicaciones de la situación fue posible aclarar a los niños, poco a poco, en qué consiste la actividad, es decir, fue posible transmitirles las "reglas del juego" en sentido amplio.

Los niños han podido constatar que la mejor regla no es necesariamente la que se expresa con más estampas, aunque, como veremos, no por ello han desechado este criterio. Han podido ver también que algunas reglas arrojan la misma cantidad, aunque esto no tiene explicación por ahora, y, finalmente, han empezado a desarrollar procedimientos numéricos para determinar el número de estampas, principalmente la suma iterada de los términos, eventualmente apoyada con representaciones gráficas. La multiplicación aparece apenas, en el caso de un alumno, Marco, como operador para 1→3 y como razón interna en 3→9. En un caso aislado, también aparece el uso de una división entre dos en tanto razón interna (a 6 fichas corresponde la mitad de lo que corresponde a 12 fichas).

Se espera que en las dos aplicaciones de la sesión siguiente, los procedimientos sigan mejorando, con un uso más frecuente de la multiplicación, al mismo tiempo que los alumnos logran establecer con más certeza criterios de comparación.

***2.2.3) Tercera aplicación*** *(sesión 2; duración: 35mn)*

**Ficha de trabajo**

Señalamos únicamente los cambios que se hicieron en relación a la situación anterior.

1) Las reglas de cambio son:

A) Se cambia cada ficha por 4 estampas

B) Se cambian cada 2 fichas por 6 estampas

C) Se cambian cada 4 fichas por 8 estampas

D) Se cambian cada 8 fichas por 24 estampas

2) En la consigna, se especifica que, una vez anotada la regla elegida en el papelito, “no se valdrá cambiar de regla”

3) Una vez que los equipos escogen su regla, se les da la cantidad prevista de fichas (ocho), pero no las estampas. Los niños deben calcular el número de estampas que les corresponden.

4) Una vez que han dicho cuántas estampas les corresponden, se organizan los intercambios (la verificación empírica) de la siguiente manera:

> “Voy a nombrar seis cajeros, uno de cada equipo. Ellos serán los encargados de darles las estampas que les corresponden. Si escogieron, por ejemplo, la regla B, van entregando sus fichas <u>de dos en dos</u> al cajero, y él, por cada 2 fichas, les da 6 estampas”
>
> (Asignar un cajero en cada equipo, cuidando que no sean cajeros de su propio equipo. Darles 40 estampas a cada uno. Devuelven las que les sobren).

5) Se asignan puntos a los equipos: un punto si el cálculo de estampas fue correcto; 3 puntos a los que ganen más estampas.

6) Al final, se pide a los equipos ganadores que expliquen cómo lo lograron. Para este momento, se recomienda:

- Ayudar a los niños a expresar sus ideas, sean correctas o no.
- Aceptar que otros contra argumenten.
- No forzar a obtener conclusiones correctas, o totalmente claras.
- Interrumpir cuando se divague o no haya ninguna claridad
- Si ningún niño interviene, provocar la discusión diciendo: *En otro grupo, un niño dijo: hay que escoger la regla que tiene el número de estampas más grande” ¿Están de acuerdo?*

En la segunda parte se repite la situación con otras reglas de cambio.

**Análisis Previo.**

Se trata de ofrecer dos experiencias más a los niños con la misma situación, pero organizada de manera que se eviten las confusiones que varios niños tuvieron en la primera aplicación. Los propósitos siguen siendo los mismos.

En las reglas que se proponen las razones externas son nuevamente enteras; hay dos reglas equivalentes (B y D); la regla que se expresa con el mayor número de estampas no es la mejor (la D), pero esta vez la que se expresa con el menor número de fichas sí es la mejor (la A).

Con respecto a la argumentación en torno a cómo elegir la mejor regla que se propone al final del primer juego, es poco probable que los niños puedan dar todavía argumentos claros. Se puede aspirar a que hagan explícito lo que varios ya han observado: la regla que tiene el mayor número de  estampas no necesariamente es la mejor. En cambio, pueden validar un criterio incorrecto: la regla que te "cobra" menos fichas es (necesariamente) la mejor.

Si algún niño identifica a los operadores, se intentará que lo explique a los demás.

**Resultados**

Se lograron evitar las confusiones a que dio lugar la primera aplicación, para prácticamente todos los niños. La situación se desarrolló bien, conforme estaba planeado, también en lo que respecta a los tiempos: aproximadamente media hora.

Ningún equipo intentó modificar su regla fuera de tiempo. La idea de los "cajeros" cumplió el cometido de permitir una verificación empírica muy clara, a la vez que fue recibida con entusiasmo por los niños.

Con respecto a las respuestas y procedimientos de los niños, se registran avances, tanto para quienes no habían comprendido la actividad y ahora empiezan a hacerlo, y también para quienes empiezan a desarrollar un mejor análisis de las reglas.

*La elección de la regla, antes de saber cuántas fichas habrá.*

Mientras la maestra anotaba las reglas, un niño preguntó por el número de fichas que se les iban a dar. Esperábamos esta pregunta. La maestra contestó que eso quedaría "en secreto" hasta después de que escogieran su regla.

La petición de escoger una regla sin saber de cuántas fichas van a disponer fue ciertamente desconcertante y difícil para los niños. En dos de los tres equipos observados, los niños volvieron a preguntar por el número de fichas, uno de ellos fue más drástico y dijo que sin saber cuántas fichas iba a haber no era posible saber qué regla es mejor. La observadora los animó a que lo intentaran.

Los niños enfrentan aquí dos dificultades, una de orden conceptual: comprender que la mejor regla lo es para cualquier cantidad de fichas, y la otra de orden técnico: para probar las reglas con alguna cantidad de fichas, es necesario que ésta sea múltiplo de las cantidades que presentan las reglas.

Frente a esta condición, los niños tendieron a hacer una primera elección intuitiva de una o dos reglas como probablemente mejores. En los equipos que se pudieron observar, nunca hubo consenso al inicio, los niños se inclinaron por distintas reglas. El caso extremo fue el equipo 4 en el que cada niño escogió una regla diferente.

Después de esta primera elección, o al mismo tiempo, algunos niños, no todos, se dieron un número de fichas posible para probar una o dos reglas.

En el siguiente cuadro se resumen los resultados:

Tercera aplicación
A (1→4); B (2→6); C (4→8); D (8→24)

| Equipo | Reglas que consideran | Formas de verificación | Regla que escogen |
|---|---|---|---|
| 1 | D (Eman.)<br>A y B (Man.) | Man. aplica A y B a 12 fichas<br>Eman. Aplica D a 12 fichas, hay residuo, concluyen que “no conviene” | A |
| 2 | D (Lau.)<br>C (los otros) | No se observó | C |
| 3 | D (Ley.)<br>B, luego A (Ism.) | Ism. aplica A y D a 12 fichas | A |
| 4 | A (Mar.)<br>C, luego A (Fer.)<br>D, luego B (Bet) | Mar. aplica A y C a 12 fichas<br>Fer aplica C a 40 fichas<br>Bet anota la regla B como propuesta del equipo. | B |
| 5 | No se observó | | A |
| 6 | B vs D (varios) | Estiman que si hubiera 8 fichas, en la D “se acaban bien rápido”. | B |

*La primera elección*

Cuatro niños escogen de entrada la regla **D** (8→24). En la explicación que dan dos de ellos, puede observarse que se centran en la cantidad de estampas:

> *Leyeli, del equipo 3: (a Ismael, quien escoge la B) “No, porque aquí (señala la **D**) dan 24 estampas”.*

> *Beth, del equipo 4: “Porque con la **D** ganamos muchas más estampas”*

Otro niño deja ver muy tenuemente que considera ambas variables, 24 estampas parecen ser muchas en relación a las ocho fichas que se deben pagar:

> *Emanuel, del equipo1: “La **D** (...) porque cada 8 por 24 y nada más vamos a dar 8”.*

No obstante, por la influencia de los otros miembros de los equipos, o simplemente porque fueron otros quienes decidieron, en ningún equipo apostaron a esta regla.

Cinco niños, por su parte, se inclinan de entrada por la regla **A** (1→4), o por la **A** y la **B** (2→6). En sus argumentos puede apreciarse que se fijan en que presentan pocas fichas, y que por lo tanto pueden cambiar varias veces:

> *Manuel, del equipo 1 (inmediatamente): “vamos a verificar la **A** y la **B**” (no argumenta).*

> *Ismael, del equipo 3: (le insiste a Alfonso) “La **B**, la **B**”.(vuelve a leer y las reglas y dice) “La **A**, es la **A**” (...) porque en la **A** no se acaban rápido las fichas, (...)son más estampas de las que juntan. Ve son 12 fichas, si por ejemplo nos dan 12..., o sea haga de cuenta que en la **D** nos dieron 12 fichas por 24 estampas, o sea se acaban rápido las fichas, y 4 estampas en cada ficha se necesitan más estampas”.*

> *Marco, del equipo 4: “No (a las propuestas de sus compañeros) , yo pienso que es la **A** … Es que... se gana una ficha por 4 estampas, y es que si son 12 fichas, 12 por 4 son 48 y así ganaríamos más estampas”*

> *Miguel del equipo 6: “La **B**”*
> *Obs: “¿Por qué?”*
> *Carlos: “Así ya no se acaban las fichas”*
> *Obs: “¿Así ya no se acaban las fichas? ¿cómo es eso?”*
> *Miguel: “Es que como las otras, la **D** tiene 8 fichas, así se las van a acabar bien rápido, se acaban las 8 fichas por 24 estampas y así se acaban las fichas”*

Finalmente, pocos niños se inclinaron en este primer momento por la regla **C** (4→8): el equipo 2, que no lo argumenta (“pensamos que iba a salir más”) y Fernando (equipo 4) quien intuye que es la mejor y para argumentarlo la aplica a una cantidad grande, ad hoc:

> *Fernando: Porque me cambian 4 fichas por 8 estampas, y creo que nos van a dar como 40, y entonces vamos a ganar como 80”*

Así, parece que, en esta primera elección, el grueso del grupo se divide entre quienes optan por la regla que presenta más estampas, y quienes optan por aquellas que presentan menos fichas y en las que, por lo tanto, “se acaban menos rápido las fichas”.

Puede observarse, en los argumentos de estos últimos niños, que varios piensan ya en un número de fichas hipotético para argumentar su primera elección, lo cual no sucede con los otros niños, aquellos que se fijaron en el número de estampas. Esto expresa que para ellos ya es necesario algún tipo de verificación, no basta el tener “menos fichas”, y es aun más claro cuando escogen de entrada dos reglas.

En los equipos 2 y 5 no se observó que aplicaran alguna regla previamente al momento de conocer el número de fichas. Los equipos 3, 4 y 6 se pudo observar que aplicaron dos reglas cada uno, y en el equipo 1 aplicaron tres reglas.

La mayoría de los niños que verificaron reglas, tomó como número hipotético de fichas para hacer sus pruebas la misma cantidad de fichas que se les dio en la primera actividad de la sesión anterior: 12 fichas. Un alumno, Fernando, consideró una cantidad ad hoc para la regla C (40), y en el equipo 6 consideran la cantidad de fichas de la regla D, que es la más grande (8 fichas) de las que presentan las reglas.

Identificamos una forma de verificación un poco distinta de las demás: se trata de Manuel, del equipo 1, quien al principio dijo que había que verificar las reglas A (1→ 4) y B (2→6). Probó la regla A con 12 fichas considerando grupos de 4 fichas: 4→16, repetido tres veces le dio 12→48. Después empezó a probar la regla B considerando también grupos de cuatro fichas: 4→12. Sin embargo solo hizo dos repeticiones (se detiene en 8→24). No supimos porqué se detuvo, una posibilidad es que haya observado que en un caso, por cuatro fichas dan 16 mientras que en el otro dan 12. Si fuera así, éste sería el único caso en el que se realiza una comparación entre dos reglas igualando un término que no es pensado como la cantidad hipotética de fichas que van a recibir.

Como vemos, los niños tienden a escoger primero una o dos reglas, guiados por un criterio que puede consistir en atender a una de las dos variables. Algunos, pocos todavía, consideran necesario probar las reglas, con la dificultad de que para hacerlo, necesitan pensar en una cantidad hipotética de fichas adecuada para el conjunto de reglas.

En el segundo momento de la clase, al recibir las ocho fichas, todos los equipos determinaron correctamente el número de estampas que les correspondían. Veamos los procedimientos.

*Los procedimientos de cálculo del número de estampas*

Esta vez la mayoría de los niños que participaron en la determinación del número de estampas acuden a procedimientos numéricos con poco o ningún apoyo en el material (únicamente disponen de las fichas) o en representaciones gráficas. Esto no significa que todos lo puedan hacer de esta manera puesto que en casi todos los equipos uno o dos niños se quedan sin participar, y suelen ser los que tienen más dificultades (la sesión siguiente se está pensada principalmente para ellos).

*Iteración de los términos (conservación de la suma)*

El procedimiento más frecuente consistió en iterar las cantidades de fichas y estampas indicadas en la regla, hasta agotar la primera, por ejemplo, Marco (equipo 4), para aplicar la regla B (2→6) a 8 fichas:

> *Marco: (Dice en voz baja, para sí.) “6, 12,18, 24 (... )*

Este conteo de 6 por cada 2 se puede esquematizarse como sigue:

| Fichas | | Estampas | |
|---|---|---|---|
| | 2 | **6** | |
| + 2 | | | +6 |
| | 4 | **12** | |
| + 2 | | | +6 |
| | 6 | **18** | |
| + 2 | | | +6 |
| | 8 | **24** | |

Marco expresa oralmente únicamente la suma de 6 en 6, la otra la lleva mentalmente, o posiblemente con algún apoyo visual o con los dedos.

Otro ejemplo: en la hoja de trabajo del equipo 5, aparece la siguiente suma que corresponde a la aplicación de la regla A (1→4) a 8 fichas:

4+4+4+4+4+4+4+4 = 32

De los niños que participaron en estos cálculos, varios mejoran su técnica: no hacen el doble conteo apegado a las cantidades de la regla, en vez de ello, abrevian el camino considerando relaciones ya calculadas, por ejemplo:

Manuel, del equipo 1, aplica la regla A (1→4) a 12 fichas considerando la relación 4→16 (lo que está entre paréntesis no fue escrito por Manuel):

| (Fichas | Estampas) |
|---|---|
| ( 1 | 4 ) |
| ( 4 ) | 16 |
| ( 4 ) | 16 |
| ( 4 ) | 16 |
| ( 12 ) | 48 |

Otros niños tienden a ir sumando el resultado anterior, lo que constituye una forma de duplicación, por ejemplo:

En el equipo 3, aplican regla A (1→4) a 8 estampas:

> *Manuel: Sí, sí es la **A**, ya me fijé.*
> *Ob: ¿Por qué?*
> *Manuel: Porque 4 más 4, son 8, otros 8 son 16 más 16 son 32. Entonces ganaría más*

Es decir:

| Fichas | | Estampas | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | |
| | +1 | | +4 |
| 2 | | 8 | |
| | +2 | | +8 |
| 4 | | 16 | |
| | +4 | | +16 |
| 8 | | 32 | |

<u>*Usos de la multiplicación*</u>

En comparación con la aplicación anterior, se observa un incremento en el uso de la multiplicación, pequeño pero perceptible. Las multiplicaciones funcionan como razones internas, veamos algunos ejemplos:

En el equipo 2, al aplicar la regla C (4→8) a 8 estampas:

> *Ob: ¿Cómo lo supieron (que saldrían 16 estampas), antes de hacer el intercambio?*
> *Stefany: Porque 8 y 8, 16.*
> *Laura: Multiplicando 8 por 2*

Es decir:

| Fichas | | Estampas | |
|---|---|---|---|
| 4 | | 8 | |
| | X2 | | X2 |
| 8 | | 16 | |

En el equipo 4:

> *Fernando: “No, yo la* ***C****… Porque me cambian 4 fichas por 8 estampas, y creo que nos van a dar como 40, y entonces vamos a ganar como 80”*

En este caso cabe la duda de si aplicó la razón interna (X10), o la razón externa X2. El mismo niño en otro momento, explica porqué, al aplicar la regla B (2→6) a 8 estampas, se obtienen 24:

> *Fernando: “Porque somos 4 en el equipo y porque dice que se cambian 2 fichas por 6 estampas, entonces 6 por 4 son 24 …(con los dedos señala que cada quien tiene 2 fichas y por lo tanto les tocarían 4 veces 6 estampas)… y por eso ya, porque cada quien tiene 2 fichas”*

La razón interna “4 veces” surge naturalmente al corresponder a los cuatro niños que tienen cada uno dos fichas.

Marco identifica con rapidez y de manera clara una razón interna al aplicar la regla C (4→8) a 12 estampas:

> *Obs: (Pregunta a Fer que si les dieran las 12 fichas que propone Marco, ganarían más con la opción* ***C****)*
> *Marco (contesta en lugar de Fer) “No, porque tienes que dar 4 fichas por 8 estampas y entonces sería 4 por 3, 12 y 8 por 3, 24 y nada más ganaríamos 24 estampas”*

Es decir:

| Fichas | | Estampas | |
|---|---|---|---|
| 4 | | 8 | |
| | X3 | | X3 |
| 12 | | 24 | |

Marco calculó muy rápido que la razón interna entre 4 y 12 fichas es tres veces. Tenemos aquí un buen ejemplo de inclinación por las razones internas, aun cuando la externa es la más simple posible: doble.

*Asomo de una constante, nuevamente para una regla del tipo 1→n*

Por último, veamos dos casos en los que tiende a identificarse un factor constante en la relación 1 ficha → 4 estampas.

Ismael, del equipo 3 trata de explicar cómo usar el cuadro de multiplicaciones para aplicar la regla A (1→4) a 8 fichas:

> *Ismael: (toma el cuadro de multiplicaciones, ve el renglón del cuatro, dice) "uno por cuatro, cuatro..." (sus compañeros le hacen burla; él se empeña en explicar a la observadora cómo usar el cuadro de multiplicaciones para conocer el resultado.) "Esa que dice la **A,** que se cambia una ficha por 4 estampas, entonces de 2 serían 8 (toma su hoja y escribe a la vez que va diciendo), de 3 serían, ¿cuánto?, (cuenta con sus dedos 9, 10, 11, 12) de tres serían 12, de 4 (sigue utilizando sus dedos para contar, 13,14,15,16) 16*
> *(En este momento comienza la confrontación entre equipos; Ismael sigue haciendo su tabla solo, con la ayuda de sus dedos, hasta terminar la siguiente tabla)*
> *2=8*
> *3=12*
> *(...)*
> *8=32*

Ismael intuye que esas parejas de números que se van obteniendo tienen que ver con la "tabla del cuatro", pero se manifiesta una dificultad para identificar la multiplicación pertinente (8 veces 4), de manera que termina por reconstruir la tabla a partir de la conservación de la suma.

Si vemos de cerca el procedimiento de Ismael, observamos nuevamente, como lo hicimos a raíz de un procedimiento de Marco en la aplicación anterior, que la constante es originalmente la cantidad de 4 estampas, cantidad que es objeto de multiplicación por factores variables sin dimensión:

| Fichas→ | Estampas |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 2 veces 4 |
| 3 | 3 veces 4 |
| (...) | |

De hecho, ésta es una de las formas en que los niños suelen aprenden las tablas de multiplicar: el factor que expresa una cantidad es el que suele ser constante: “una vez, cuatro, dos veces cuatro, tres veces cuatro...”, cada nuevo producto de obtiene sumando 4 al anterior.

Como vimos en el ejemplo anterior de Marco, los niños, sobre la marcha, pueden conmutar los papeles de los factores y asignar a la contante el papel de operador sin dimensión, de número de veces.

En esta aplicación de la situación, Marco identifica nuevamente una multiplicación en la relación 1→4, aunque esta vez no puede saberse qué papel otorga al 4, si el de una razón interna (12 veces 4 fichas) o el de un operador (4 veces 12):

> *Marco: “No, yo pienso que es la **A** … Es que, se gana una ficha por 4 estampas, y es que si son 12 fichas, 12 por 4 son 48 y así ganaríamos más estampas”*

*Otros hallazgos: las reglas B y D son equivalentes*

Una vez que se supo que habría ocho fichas, al calcular el número de estampas que les correspondería, por lo menos dos niños (Manuel del equipo 1 y Marco del equipo 2) descubren que las reglas B (2→6) y D (8→24) arrojan el mismo número de estampas, y por lo tanto son igualmente ventajosas. El hallazgo sigue teniendo el carácter de casual, no tiene explicación.

*La verificación empírica y la confrontación*

En el tercer momento se realizaron los intercambios, los cajeros asignados entregaron las estampas conforme indican las reglas (escogimos para ello a los niños que mostraron más dificultad para participar en los equipos). Algunos niños expresaron sorpresa y emoción al comprobar que la cantidad que ellos habían previsto coincide con la que recibieron, lo que pone de manifiesto que para ellos no se trataba de algo obvio, o banal. Otros en cambio no tenían ninguna duda, incluso, corrigieron algunos errores de los cajeros quienes en ocasiones daban dos estampas contando sólo una. Al final de este intercambio, los niños pudieron comprobar que la mejor regla fue la A (1→4).

En el último tramo de la actividad, la maestra invitó a los equipos ganadores a que explicaran cómo hicieron para saber cuál iba a ser la regla ganadora. Como se pensó, a los niños no les resultó posible hacerlo, se limitaron a explicar cómo calcularon su cantidad de estampas una vez que sabían que habría ocho fichas, o a lo más, dijeron ideas vagas como “fuimos sumando”.

Los niños aún no disponen de una estrategia para elegir la mejor regla: En su elección intervienen intuiciones, “corazonadas” basadas en relaciones de las que aun no son del todo conscientes. Por ello, pueden explicar bien únicamente el momento final, en el que se aplica un procedimiento preciso para determinar el número de estampas.

#### *2.2.4) Cuarta aplicación*

Se repitió la misma situación con las siguientes reglas de cambio:

A) Se cambian cada 5 fichas por 10 estampas
B) Se cambia cada ficha por 3 estampas
C) Se cambian cada 2 fichas por 10 estampas
D) Se cambian cada 10 fichas por 20 estampas

Características:

Las razones externas son siempre enteras.
La mejor regla (C) no es la que se formula con el mayor número de estampas, ni tampoco, esta vez, con el menor número de fichas.
Hay dos reglas equivalentes, la A y la D, fáciles de identificar por la razón externa “doble”.

Las razones internas entre las cantidades de fichas son enteras para todos los pares de reglas excepto para el caso de las reglas A y C; no obstante, estas dos reglas tienen un término común.

#### Resultados

Esta vez todos los equipos escogen la mejor regla, la C (2→10), lo que expresa que en cada equipo ya hay niños que no consideran el tamaño de los términos de manera aislada puesto que, desde ese punto de vista, las mejores reglas serían la D (más estampas) o la

B (menos fichas). No obstante, algunos niños se inclinaron por otras reglas, como se muestra en el cuadro siguiente.

Cuarta aplicación
A (5→10); B (1→3); C (2→10); D (10→20)

| Equipo | Reglas que consideran | Formas de verificación | Regla que escogen |
|---|---|---|---|
| 1 | C y D (Iván)<br>C (Eman. Y Man) | Iván aplica C y D a 10 fichas, estimando, concluye bien.<br>Eman y Man aplican C a 10 fichas | C |
| 2 | C (Man y Mig) | No se observó | C |
| 3 | B (Ism)<br>C (Alf y Mig) | Ism aplica B a 8 fichas<br>Man y Mig aplican la C a 10 fichas | C |
| 4 | B, luego C (Mar)<br>C (Fer) | Mar aplica B y C a 12 fichas, con error en la aplicación de C<br>Fer. Aplica la C a 10 fichas | C |
| 5 | | No se observó | C |
| 6 | C (Mig) | No se observó | C |

*La elección de la regla.*

Algunos niños empiezan por aplicar una regla a una cantidad hipotética de fichas; otros, simplemente dicen cuál creen que es la mejor, sin todavía aplicarla a una cantidad. Antes de analizar la aplicación de las reglas, veamos cuál fue la primera regla elegida. Da cuenta de una estimación inicial cuyo criterio casi siempre permanece implícito.

*La primera elección:*

La regla C (2→10)

En cuatro equipos pudimos identificar a ocho alumnos que optaron por esta regla casi inmediatamente después de ver las cuatro reglas. Ninguno de ellos pudo explicar en ese momento porqué intuyeron que ésta podía ser la mejor: al pedirles una explicación, a lo más repetían la regla enfatizando el número de estampas, o el de fichas: porque nos da 10 fichas por (sólo) 2 estampas.

¿A qué responde esta primera estimación súbita? El criterio no es esta vez ni el número de estampas más grande ni el número de fichas más pequeño. Notemos que la regla C tampoco es aquella en la que la diferencia entre las dos cantidades es mayor (es de 8, mientras que en la regla D es de 10).

Tuvo que haber, por lo tanto, una estimación de la razón en términos cualitativos, una apreciación de que el número de estampas que se dan (10) es grande en relación al número de fichas que se piden (2) en comparación con las otras reglas.

No sabemos si algún alumno llegó a identificar la razón con un número de veces (5 veces), es poco probable debido a que en ningún momento lo expresaron.

- La regla D (10→20)

Identificamos únicamente a un alumno (Iván, equipo 1) quien participa por primera vez. En un primer momento, escoge esta regla que es la que presenta el mayor número de estampas en su formulación. No obstante, rectifica enseguida diciendo: “aunque si nos dan 10 estampas, es la de ellos (la C, escogida por sus dos compañeros)”.

- La regla B (1→3)

Un alumno, Ismael, del equipo 3, escoge esta regla que es la que presenta el menor número de fichas. En el transcurso de la actividad explica el motivo de su elección: en la actividad pasada ganó la regla A (1→4) (además, él la escogió). Hasta poco antes del final se muestra convencido de que esta regla va a ganar, no siente necesidad de probar otras reglas y no presta mucha atención a las pruebas que hacen sus compañeros. Al final, se mostrará muy sorprendido al constatar que la regla C es mejor.

En el equipo 4, también un alumno (Marco) escogió esta regla, aunque él cambió de opinión después.

- Otras reglas, o ninguna regla

Una alumna (Blanca, equipo 6) a invitación de la observadora participa por primera vez y escoge la regla A (5 →10) pero no explica porqué. Otra alumna (Beth, del equipo 4) se limita a repetir las reglas que van escogiendo sus compañeros.

Es probable que haya varios alumnos más que aún se mantienen al margen.

*La verificación de algunas reglas con una cantidad hipotética de fichas*

Nuevamente, la única forma de verificación (observada) que los alumnos utilizan para averiguar si la regla que escogen es efectivamente mejor que otras, es darse una cantidad probable de fichas y aplicar a dicha cantidad la regla escogida y, a veces, una regla más, la que causa duda, o la que proponen otros compañeros.

En el cuadro anterior puede observarse que de los alumnos que aplicaron reglas, sólo dos parejas aplican dos reglas, los demás sólo aplican la regla que escogieron, aparentemente no sienten necesidad de probar otras reglas.

Con respecto a las cantidades hipotéticas de fichas que utilizan, la más frecuente es 10 fichas, que es la mayor de las que presentan las reglas en su formulación. Parece que ya observaron que en dos ocasiones fue ésta cantidad de fichas la que la maestra asignó.

Las otras dos cantidades de fichas, 8 y 12 son las que recibieron en las actividades anteriores.

No se identificaron otros procedimientos para comparar las reglas en este momento previo a saber de cuántas fichas dispondrán. Hasta donde pudimos observar, esta vez no identifican que las reglas A (5→10) y D (10→20) son equivalentes, probablemente porque tendieron a desecharlas de entrada.

Tampoco observamos que expresaran que la regla A (5→10) es mejor que la C (2→10) porque en ambas se reciben 10 estampas pero en la segunda hay que dar más fichas, aunque es posible que lo hayan percibido.

*Los procedimientos de cálculo del número de estampas*

La maestra entrega 10 fichas a cada equipo. Los equipos se dan a la tarea de calcular la cantidad de estampas que les corresponde, cuando no la tenían ya determinada. Algunos aplican también otras reglas. Se registran pocos errores.

Entre los procedimientos que aparecen, incluyendo aquellos que se usaron en el momento anterior, al escoger una regla, y también en el posterior, durante la confrontación, destaca una utilización de la multiplicación más frecuente que en la actividad anterior.

*<u>Agrupar y contar</u>*

Dos niñas que casi no han participado (Daniela del equipo 1 y Blanca del equipo 6), calcularon, con ayuda de los observadores, el total de estampas para 10 fichas, dibujando las fichas, agrupándolas según el número de fichas de la regla, dibujando las estampas que corresponden a cada agrupamiento y finalmente contándolas.

*Iteración de los términos (conservación de la suma)*

Por lo menos seis niños (Alf; Mig; Ism. del equipo 3; Víc. y Mar. del 4) aplicaron alguna de las reglas iterando los dos términos hasta agotar el número de fichas, ya sea por escrito o mentalmente, por ejemplo, Manuel aplica la regla A (2→10) a 10 fichas así: “4 es 20, 6 es 30, 8 es 40, 10 es 50”

*Usos de la multiplicación*

Por lo menos ocho alumnos utilizan por lo menos una vez una multiplicación para calcular alguna cantidad de estampas (Man. y Eman. del equipo 1; Lau., Ste., Adr., del equipo 2; Mig, e Ism. del equipo 3, Mar., del equipo 4).

Esta vez en casi ningún caso fue posible distinguir si aplicaron la multiplicación en calidad de razón interna o externa, debido a que los factores son los mismos. Veamos algunos ejemplos:

Miguel, del equipo 3 afirma que la regla A (5 fichas →10 estampas) aplicada a 10 fichas da 20 estampas porque “*10 por dos da 20, porque 5 da 10 y 5 da 10*”. Por la última parte de su frase, puede suponerse que aplica las razones internas (a dos veces 5 fichas, dos veces 10 estampas).

En el equipo 2, Laura, Stefanie y Adriana explican al observador que supieron que la regla C (2→10) aplicada a 10 fichas daría 50 estampas porque multiplicaron 5 por 10. Pudieron haber aplicado cualquiera de las dos razones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | X5 | | |
| Fichas | | Estampas | |
| 2 | | 10 | |
| | | | X5 |
| 10 | | 50 | |

Si hubiéramos escogido una cantidad de fichas distinta a 10 habría sido posible en varios casos distinguir mejor estos dos usos de la multiplicación[2].

No obstante, por lo que hemos observado hasta ahora, es probable que estas multiplicaciones procedan de considerar las razones internas.

*Errores en el uso de la multiplicación*

Fernando, del equipo 4, quien antes ha calculado bien las cantidades de estampas, esta vez se confunde y aplica la regla C (2→10) a 10 fichas multiplicando 2 por 10, 5 veces, y sumando los cinco resultados, como si por cada ficha se dieran 10 estampas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| x10 | X10 | x10 | x10 | x10 | |
| 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | total: 100 estampas |

***2.2.5) Comentario final***

A lo largo de estas cuatro aplicaciones de la situación de comparación de reglas, disminuyó de manera clara la tendencia a escoger una regla considerando sólo una de las variables, a favor de una estimación de la razón, estimación que requiere de considerar ambos términos simultáneamente.

Se registraron progresos nítidos también en los procedimientos para aplicar las reglas a un número de fichas: el número de niños que necesitó de una representación gráfica (o concreta) que les permitiera hacer los agrupamientos para luego contar, disminuyó a favor de procedimientos numéricos. Entre éstos, también disminuyó un poco el recurso a la conservación de la suma (suma iterada de los términos) a favor del uso de la multiplicación, principalmente para conservar las razones internas.

Desde este punto de vista, la situación cumple el cometido de favorecer un trabajo sobre la noción de razón en dos niveles: primero, al propiciar el paso de la comparación entre cantidades a la comparación de relaciones entre cantidades, y segundo, al propiciar el tránsito de la suma iterada a la multiplicación, en tanto razón interna que se conserva en una situación de relación proporcional entre cantidades.

En cambio, a lo largo de estas cuatro aplicaciones de la situación no se registraron cambios importantes en lo que respecta a los procedimientos para anticipar con certeza qué regla es mejor, antes de conocer el número de fichas. Veamos esto de más cerca.

[2] Este fue un error de planeación: para facilitar el análisis de procedimientos conviene evitar en lo posible el uso de un mismo número en dos papeles.

*La verificación con una cantidad hipotética de fichas*

Cuando los niños empiezan a considerar la relación entre las cantidades, hacen una estimación rápida que no logran hacer explícita. Su estimación parece basarse en una integración cualitativa de las dos variables: "son muchas estampas por (relativamente) pocas fichas". En el momento de corroborar su primera elección, tendieron a considerar una cantidad hipotética de fichas a la que aplicaron la regla escogida y, sólo algunas veces, aplicaron también otra u otras dos reglas. Este procedimiento conlleva la dificultad, grande para ellos en este momento, de escoger una cantidad que permita comparar las reglas sin el problema de los residuos (lo cual requiere de escoger un múltiplo de los números de fichas de las reglas). Esto podría ser objeto de un trabajo explícito en una situación posterior.

*La verificación, igualando dos términos homólogos*

Un procedimiento que esperábamos, sobre todo porque lo vimos aparecer con frecuencia en las entrevistas aplicadas a alumnos de 4º a 6º, fue el que consiste en comparar dos reglas que tienen una razón interna entera, igualando un término mediante la iteración de una de ellas (procedimiento $I_1$)[3], por ejemplo, para comparar la regla A (1→3) con la C (2→10), pueden iterarse *una vez* los términos de la regla A para obtener (2→6), lo cual permite comparar.

Posiblemente este procedimiento no apareció debido a que se adecua a la comparación de dos reglas, mientras que en la presente situación enfrentamos a los niños a cuatro reglas simultáneamente. Para usar ese mismo procedimiento ahora, con cuatro reglas, los niños tendrían que haber comparado de manera sistemática pares de reglas. Entonces, para cada par, habrían trabajado con una cantidad hipotética de fichas ad hoc. Esta forma sistemática de proceder puede ser aún demasiado compleja para los niños del nivel en el que trabajamos.

La alternativa de trabajar al principio sólo con pares de reglas habría tenido la ventaja de facilitar la determinación de una cantidad hipotética de fichas adecuada, aunque presentaba otras limitaciones (ver análisis previo de la situación).

*La identificación de los operadores*

Con respecto al segundo procedimiento previsto en el análisis previo, la determinación de los operadores o "números de veces" que subyacen a las reglas, debemos distinguir dos

---

[3] (En el Capítulo 2, apartado 3.2.1, se explican estos procedimientos).

momentos: el de la elección de la mejor regla (problema de comparación), y el del cálculo del número de estampas para una cantidad ya dada de fichas (problema de cuarta proporcional).

En el primer momento, hasta donde nos fue posible observar, dicho procedimiento no apareció. Aunque sabíamos que este procedimiento es conceptualmente complejo (no en el nivel de las operaciones), pensábamos que algunos niños lo podrían establecer en algún momento, dada la simplicidad de las razones en juego y el tamaño pequeño de los números. No obstante, no fue así: para los pequeños de tercer grado las dificultades inherentes a este procedimiento son aún grandes, en particular, dejar de lado las unidades específicas en juego, fichas y estampas, para despejar una relación numérica constante entre las dos variables: una es el doble, el triple, etc., de la otra.

Con respecto al segundo momento, cuando los niños aplicaron las reglas a una cantidad dada de fichas, si bien se observó una utilización cada vez más frecuente de la multiplicación, esta fue casi siempre en el papel de una razón interna, como sustitución de una suma repetida.

Identificamos solamente dos casos, para razones canónicas (del tipo 1→n) en los que los alumnos utilizaron un factor constante. Este factor tuvo originalmente el sentido de una cantidad de estampas a la que se aplican “números de veces” variables. Sin embargo, por lo menos uno de los alumnos (Marco), a partir de la lista de parejas (nº de fichas, nº de estampas), desprende un operador sin dimensión, un número de veces constante.

La identificación del operador es incipiente y no llevó a ninguno de los alumnos a buscarlo en otras reglas. Esta observación, aunada a la anterior, manifiesta con claridad una diferencia importante en la complejidad conceptual de la multiplicación cuando ésta funciona como medio para generar pares equivalentes conservando las razones internas (lo cual fue accesible para varios niños), y cuando funciona como factor constante entre dos variables, (los niños no lo han podido hacer hasta ahora).

## 2.3) Situación 2: El cálculo del número de estampas.

Hacemos una pausa en la actividad de elegir la mejor regla para ofrecer la experiencia, más simple, de aplicar varias reglas a varias cantidades de fichas. Con ello se busca, por un lado, ayudar a los alumnos que todavía muestran dificultad en comprender el funcionamiento de las reglas de cambio y, por otro lado, favorecer el mejoramiento de los procedimientos para realizar los cálculos. En particular, se espera una mayor frecuencia en el uso de la multiplicación.

### *2.3.1) Ficha de trabajo*

*Organización: un momento individual y un momento en equipos*
*Material:*

- *por alumno: una hoja de trabajo y una hoja blanca*
- *por equipo: otra hoja de trabajo y una tabla de multiplicaciones*
- *para todo el grupo: 60 fichas y 300 estampas, por si las solicitan.*

*Hoja de trabajo:*

***Los intercambios***

*Equipo N º:______________*

*Nombre ____________________________________________*

| | *12 fichas* | *24 fichas* | *30 fichas* | *60 fichas* |
|---|---|---|---|---|
| *Regla **A**<br>Por cada 6 fichas,<br>12 estampas* | | | | |
| *Regla **B**<br>Por cada ficha,<br>3 estampas* | | | | |
| *Regla **C**<br>Por cada 2 fichas,<br>8 estampas* | | | | |
| *Regla **D**<br>Por cada 3 fichas,<br>9 estampas* | | | | |

*Desarrollo:*

- *Inicio:*
  *- Copiar la tabla de la hoja de trabajo en el pizarrón (poner los cuadros grandes porque en cada uno se anotarán dos o tres respuestas; ver confrontación)*
  *- Asignar a cada integrante de cada equipo la letra A, B, C y D, procurando que la A y*

*la B toquen a los niños que tienen más dificultad.*
*- Repartir una hoja de trabajo  por alumno, una hoja blanca y una pluma.*

- *Consigna (5min):*
  *(se explica la tarea por realizar: en cada equipo, el integrante A aplica la regla A a las cuatro cantidades, el B aplica la regla B, etc. Al final vacían los resultados de todos en una nueva hoja de trabajo y los verifican)*

- *Trabajo individual y en equipos (15 min)*
  *Tratar de identificar métodos rápidos, para que se expliquen en la confrontación.*
  *NOTA: no es necesario esperar a que los equipos tengan todos los datos para 60 fichas. Interrumpir cuando se termine el tiempo.*

- *Confrontación de resultados (20min)*
  *- Se revisa regla por regla*
  *- Para la regla A, preguntar a un primer equipo cuánto obtuvo para la primera cantidad.*
  *- Anotar la cantidad en el cuadro y debajo de ésta, el número del equipo entre paréntesis, por ejemplo:*

| | *12 fichas* | *24 fichas* | *30 fichas* | *60 fichas* |
|---|---|---|---|---|
| *Regla **A*** <br> *Por cada 6 fichas, 12 estampas* | ***28*** <br> *(4)* | | | |

  *- Preguntar a los demás si aceptan el resultado o si proponen otro (si lo proponen anotarlo abajo del anterior con el número del equipo).*
  *- Explicar que si alguien muestra que un resultado es incorrecto y convence a los demás se lleva los dos puntos para su equipo.*
  *- Pasar al siguiente número, preguntando a un segundo equipo.*
  *- Procurar que cada equipo tenga el mismo número de oportunidades.*

- *Confrontación de procedimientos para el caso de 60 fichas(15min)*
  *Consigna:*
  *"Ya sabemos que para calcular cuántas estampas tocan, hay que ir cambiando, por ejemplo, con la regla A, seis fichas, por 12 estampas, seis fichas, por 12 estampas, y así hasta que se acaben las fichas... pero eso es un poco tardado para 60 fichas.*
  *"Ahora se trata de que ustedes propongan formas más rápidas de calcular los números de estampas.".*

- *Confrontación de observaciones (5min)*
  *Despejar el cuadro para que sólo queden los resultados correctos.*
  *Consignas:*
  *1) ¿cuál fue la mejor regla? ¿esa regla es la mejor sea cual sea la cantidad de fichas que se dan?*
  *2) ¿qué más observan?*
  *¿ya vieron que hay dos reglas que dan siempre la misma cantidad de estampas?*
  *¿ya vieron que todas las reglas dan el doble de estampas para 60 fichas que para 30 fichas? ¿porqué será?*

### *2.3.2) Análisis Previo.*

**Los procedimientos**

El cálculo de cada número de estampas se puede realizar, en principio, mediante los procedimientos de conservación de la suma (CS), conservación de las razones internas (CRI) u operador constante (OP)[1]. El procedimiento del valor unitario (VU), en cambio, no se favorece, en primer lugar debido a que la formulación de las reglas en términos de "por cada n fichas, m estampas", disuade la idea de que se puedan cambiar menos fichas de las que indica la regla y, en segundo lugar, porque las razones internas son siempre enteras.

Por otra parte, como se señaló en el capítulo 1 (apartado 5.3.2, condición 1.1), la diferencia entre el procedimiento CRI y el procedimiento CS puede llegar a ser muy sutil debido a que, en ciertos casos, en CRI también puede utilizarse la suma. Por ejemplo, para aplicar la regla "por cada 6 fichas se dan 12 estampas" a la cantidad de 24 fichas, tendríamos CS si se van sumando simultáneamente 6 fichas y 12 estampas hasta llegar a 24 fichas, sin determinar el número de agrupamientos de 6 fichas (razón interna entre 6 y 24 fichas). Tendríamos CRI si primero se hacen las sumas de 6 fichas, se determina que hay cuatro agrupamientos, y entonces se suma 4 veces la cantidad de 12 estampas. Se trata de una forma de conservación de las razones internas muy concreta, en tanto conservación de un número de agrupamientos.

Debido a la cercanía entre CRI y CS, y a que nos interesa identificar los momentos en que los niños sustituyen las acciones directas con objetos por la realización de sumas, y a su vez las sumas iteradas por multiplicaciones, optaremos por una categorización más apegada a las acciones que se realizan.

Partimos de que, para aplicar una regla a una cantidad, se realizan dos operaciones, la identificación del número de agrupamientos, y el cálculo del número de estampas:

| | 1ª operación | | 2ª operación | |
|---|---|---|---|---|
| Fichas | | Agrupamientos | | Estampas |
| 6 | | 1 | | 12 |
| 12 | | 2 | | 24 |

[1] En el apartado 3.1 del capítulo 1 se definen estos procedimientos.

En ciertos casos, el número de agrupamientos puede quedar implícito (sería el caso de CS). Por otra parte, cada una de las dos operaciones puede realizarse de distintas maneras:

| Regla (6f→12 e) aplicada a 24 fichas | |
|---|---|
| 1ª operación<br>Determinación del nº de agrupamientos | 2ª operación<br>Determinación del nº de estampas |
| C) mediante la representación de la colección de 24 fichas, su agrupamiento de 6 en 6 y el conteo del número de agrupamientos<br>S) mediante sumas repetidas del número 6 y el conteo de sumandos<br>CL) mediante combinaciones lineales diversas, en particular, sumas de sumas, por ejemplo: 6+6 = 12 (2 sumandos) y 12+12 = 24 (4 sumandos)[2]<br>D) mediante la búsqueda del número de veces que 6 es 12 (División) | C) mediante la representación de los 4 agrupamientos de 12 estampas y el conteo.<br>S) mediante sumas repetidas de 12 estampas<br>CL) mediante combinaciones lineales diversas<br>M) mediante la multiplicación. |

Considerando el nivel escolar de los niños, los procedimientos probables son:

- **C/C** Se dibuja la colección de fichas, se agrupa de 6 en 6, por cada agrupamiento se dibujan 12 estampas, se cuenta el total de estampas.
- **C/S** Una vez determinado el número *n* de agrupamientos como arriba, se suma *n* veces el número de estampas.
- **S/S** Se suma el número de fichas (de 6 en 6) y el número de estampas correspondiente (de 12 en 12). Las sumas se detienen cuando la suma de fichas llega al total considerado.
- **CL/CL** Igual que arriba, pero abreviando el número de sumas mediante composiciones aditivas diversas:

[2] En el capítulo 1 (apartado 5.3.1) hicimos referencia al procedimiento “combinaciones lineales” , conocido como “building up strategies” en inglés. En esta experiencia, dicho procedimiento consiste casi siempre en realizar composiciones aditivas diversas.

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 6 | 12 |
| +6 | +12 |
| 12 | 24 |
| +12 | +24 |
| 24 | 48 |

- **---/M** Independientemente de cómo se obtuvo el número *n* de agrupamientos, la cantidad de estampas se obtiene utilizando la multiplicación.

La utilización de una multiplicación puede darse al interior de un procedimiento basado en sumas iteradas, por ejemplo:

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 6 | 12 |
| +6 | +12 |
| 12 | 24 |
| **X2** | **X2** |
| 24 | 48 |

Es factible que esto suceda al pasar de 12 a 24 fichas y de 30 a 60 fichas, en donde la razón interna es la más simple posible, el doble.

Es posible que los procedimientos más elementales, C/C y C/S, sean utilizados por algunos niños, y que vengan acompañados de errores de conteo frecuentes. Esperamos que, al pasar a cantidades de fichas cada vez más grandes (en particular con 60 fichas) y al observar el trabajo de sus compañeros de equipo, los niños cambien por procedimientos más eficientes: utilización de la suma y sustitución de sumas por multiplicaciones. En las confrontaciones se harán notar las ventajas de estos últimos.

Finalmente, el procedimiento **OP** es más económico que los anteriores, incluso que el D/M, puesto que la división se realiza una sola vez. Debido a que las razones externas son siempre enteras y entre números pequeños, interesa saber si algunos niños empiezan a utilizarlo.

Tenemos por lo tanto dos procedimientos que incorporan el uso de la multiplicación, x/M y Op.

**Las reglas y las cantidades escogidas**

En todos los casos, las razones internas y externas son enteras. Las razones externas corresponden a factores pequeños (X2, X3 y X4); las internas van de X2 a X30 (y X60, en el caso de la regla B (1→3) aplicada a 60 fichas). La cantidad mayor de estampas es de 240.

Dos cantidades de fichas son el doble de otras dos: 24 de 12 y 60 de 30, lo que permite inferir las cantidades correspondientes de estampas duplicando.

En la regla B (1→3), la primera operación, la división para determinar el número de agrupamientos, o para determinar el factor constante, no es necesaria. Probablemente en este caso es más factible la utilización de multiplicaciones.

Finalmente, dos reglas son equivalentes, la B (1→3) y la D (3→9). Los niños podrán observarlo si utilizan el procedimiento OP o, al final, al tener los resultados a la vista.

### *2.3.3) Análisis de resultados.*

#### 2.3.3.1 Resultados generales

Los procedimientos generados por el grupo son heterogéneos, abarcan desde el más elemental (C/C) hasta el más avanzado (OP). La mayoría utiliza procedimientos basados en la suma. De las 83 resoluciones:

- Ocho (10%) son procedimientos erróneos;
- 12 (15%) corresponden al procedimiento más elemental C/C, en el que se dibuja y se agrupa la colección de fichas, después se dibuja la colección de estampas para finalmente contarlas una por una;
- 39 (47%) corresponden a procedimientos en los que se utiliza la suma, en general para calcular el número de estampas, conociendo el número de agrupamientos (C/S; C/CL S/S y CL/CL);
- 22 (27%) corresponden a procedimientos que incorporan el uso de la multiplicación (---/M y OP).

#### 2.3.3.2 Efectos de la variable "número de fichas"

Las siguientes observaciones se infieren de las tablas 1 y 3 que se presentan más adelante.

*Pocos cambios de procedimiento en los extremos.* De los cuatro alumnos que utilizan, para 12 fichas, el procedimiento más elemental, C/C, únicamente uno lo abandona al pasar de 12 a 24 fichas, a favor de C/CL.

Los otros tres alumnos lo mantienen para las demás cantidades (uno de ellos no calculó para 60 fichas), dibujando, cada vez, toda la colección de fichas.

En el otro extremo, los procedimientos que incluyen el uso de la multiplicación (--/M y OP), también tendieron a ser utilizados por los mismos alumnos para todas las cantidades. Cuatro alumnos utilizan siempre --/M, y sólo uno más lo adopta al crecer el número de fichas. Con respecto a OP, las ocho ocurrencias corresponden a las mismas dos alumnas quienes los usaron siempre. Estas alumnas, que naturalmente terminaron mucho antes que los demás, manifiestan un conocimiento sobre la multiplicación del que aún no disponen los demás.

Así, las variaciones en las cantidades de fichas provocaron muy pocos cambios en los procedimientos extremos, prácticamente no disuadieron el recurso del dibujo en los pocos alumnos que aun los utilizan y favorecieron poco un uso, más frecuente, de la multiplicación.

*Cambios en los procedimientos intermedios.* En total fueron siete (de 19) los alumnos que cambiaron de procedimiento al aumentar el número de fichas, incluyendo a los que ya mencionamos. Los cambios fueron los siguientes:

| del procedimiento: | al procedimiento | N° de alumnos |
|---|---|---|
| C/C | CL/CL | 1 |
| C/S | CL/CL | 3 |
| S/S. | CL/CL | 3 |
| CL/CL | --/M | 1<br>(ya incluido entre los anteriores alumnos) |

Los cambios más frecuentes fueron de procedimientos que ya incorporan el uso de la suma repetida (C/S, S/S) al uso de combinaciones aditivas (sumas de sumas) para abreviar el número de sumandos (CL/CL): para 24 fichas se suma dos veces lo de 12 fichas, igual que para 60 fichas se suma dos veces lo de 30 fichas. Para 30 fichas, menos frecuentemente, se suma a lo de 24 fichas, lo de 6 fichas.

El aumento en la cantidad de fichas tuvo influencia también en los errores de cálculo cometidos, lo veremos más adelante.

#### 2.3.3.3 Efectos de la variable “tipo de regla”

La única regla que presenta, con respecto a las demás, una diferencia que podía tener un efecto en los procedimientos es la B (1→3), en la que el antecedente de la razón es la unidad. Cabía suponer que en este caso el recurso a la multiplicación sería un poco más frecuente, debido a que tanto la razón externa (X3) como las internas (X12, X24, etc) se pueden identificar sin necesidad de dividir. Efectivamente, en esta regla el recurso a las razones internas (---**/M**) fue más frecuente que en las demás (aparece 6 veces, versus 1, 3, y 4 respectivamente en las otras tres reglas, ver tabla 2).

En cambio, no hay, para esta regla, ninguna ocurrencia del procedimiento **OP** (X3), lo cual deja ver una vez más la mayor dificultad conceptual de este procedimiento.

Sin embargo el procedimiento **OP** ocurre ocho veces en la regla D (3→9), en donde aplicarlo es más difícil que en la regla B (1→3). Las ocho veces corresponden a dos alumnas que aplicaron este procedimiento a todas las cantidades. Cabe suponer que lo que determinó su uso fue el conocimiento previo de estas alumnas, y no el tipo de regla en juego.

**Tabla 1**

**Frecuencia de procedimientos, para cada cantidad de fichas**

<table>
<tr><th></th><th>Error P</th><th>X</th><th>C/C</th><th>---/S</th><th>---/CL</th><th>---/M</th><th>OP</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>12 fichas</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>9</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>22</td></tr>
<tr><td>24 fichas</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>9</td><td>4</td><td>2</td><td>22</td></tr>
<tr><td>30 fichas</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>2</td><td>21</td></tr>
<tr><td>60 fichas</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>8</td><td>2</td><td>12</td><td>17</td><td>22</td><td>14</td><td>8</td><td>83</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">39</td><td colspan="2">21</td><td></td></tr>
</table>

**Error P**: error de procedimiento; **X**: procedimiento desconocido; ---: C ó S

**Tabla 2**

**Frecuencia de procedimientos, para cada regla**

| | Error P | X | C/C | ---/S | ---/CL | ---/M | OP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Regla A 6→12** | 5 | 0 | 4 | 4 | **7** | 1 | 0 |
| **Regla B 1→3** | 0 | 2 | 4 | **6** | 3 | **6** | 0 |
| **Regla C 2→8** | 3 | 0 | 4 | 5 | 3 | 3 | 0 |
| **Regla D 3→9** | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 4 | **8** |

**Error P**: error de procedimiento; **X**: procedimiento desconocido

**Tabla 3: Procedimientos por alumno**

| | 6→12 | | | | | | 1→3 | | | | | 2→8 | | | | | 3→9 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Dan | MC | Mig2 | Ley | Mar4 | Dor | Iv1 | Pam | Bca | JC | Civ6 | Em | Mig2 | Ism | Fer | MIv | Man1 | Est | Man3 | Mar4 | Lil | Mig6 |
| 12 | C/C | C/S | CL/CL | C/S | S/S | <u>e-p</u> | C/S | ---/M | C/C | ---/M | C/S | C/S | ---/M | C/S | C/C | <u>C/C</u> | S/S | OP | C/CL | S/S | OP | ---/M |
| 24 | C/C | <u>e-p</u> | CL/CL | CL/CL | CL/CL | <u>e-p</u> | CL/CL | ---/M | C/C | ---/M | C/S | CL/CL | ---/M | C/S | CL/CL | <u>C/C</u> | CL/CL | OP | C/CL | CL/CL | OP | ---/M |
| 30 | C/C | <u>C/S</u> | CL/CL | CL/CL | <u>---/M</u> | <u>e-p</u> | <u>CL/CL</u> | ---/M | C/C | X | C/S | <u>CL/CL</u> | **Ø** | C/S | <u>e-p</u> | <u>C/C</u> | <u>CL/CL</u> | OP | C/CL | <u>---/M</u> | OP | <u>CL/CL</u> |
| 60 | <u>C/C</u> | <u>C/S</u> | **Ø** | CL/CL | **Ø** | <u>e-p</u> | <u>CL/CL</u> | ---/M | C/C | X | C/S | <u>e-p</u> | **Ø** | C/S | <u>e-p</u> | **Ø** | <u>CL/CL</u> | OP | <u>C/CL</u> | <u>---/M</u> | OP | <u>---/M</u> |

**e-p**: error de procedimiento
<u>subrayado</u>: error de cálculo.
**Ø**: no resolvió
X: procedimiento desconocido

**Tabla 4: Errores Aciertos**

| | **Erróneo** | **X** | **C/C** | **C ó S/S** | **---/CL** | **---/M** | **OP** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **12 fichas** | 1e | 0 | 4a<br>0e | **9a**<br>0e | 2a<br>0e | 4a<br>0e | 2a<br>0e | 21a<br>1e |
| **24 fichas** | 2e | 0 | 2a<br>1e | 2a<br>0e | **9a**<br>0e | 4a<br>0e | 2a<br>0e | 19a<br>3e |
| **30 fichas** | 2e | 1<br>0e | 2a<br>1e | 2a<br>1e | **3a**<br>4e | 1a<br>2e | 2a<br>0e | 11a<br>**10e** |
| **60 fichas** | 3e | 1<br>0e | 1a<br>1e | 2a<br>1e | 2a<br>2e | 1a<br>2e | 2a<br>0e | 9a<br>**9e** |
| **Total** | 8e | 2<br>0e | 9a<br>3e | 15a<br>2e | 16a<br>6e | 10a<br>4e | 8a<br>0e | 60a, 72%<br>23e= 28% |
| **Eficiencia** | --- | --- | 75% | 88% | 63% | 61% | 100% | |

Eficiencia de un procedimiento = número de aciertos con el procedimiento entre número de veces que se usó.
Nota: no se consideran errores cuando fueron corregidos por los niños sobre la marcha.

### 2.3.3.4 Los errores

En la tabla 4 puede observarse que el único procedimiento que destaca por no presentar errores es la aplicación de la razón externa como factor constante (OP). Este procedimiento no es sólo el más rápido, también es el más confiable. Con respecto a los demás, el número de errores aumenta al pasar de 24 a 30 fichas, lo que deja ver que todos los procedimientos, excepto OP, se vuelven difíciles de manejar para los niños en cuanto las cantidades crecen un poco y la razón interna no es “el doble”. Varios de los errores que se registran para 60 fichas provienen de los que se cometieron para 30 fichas.

Por otra parte, el hecho de que la eficiencia de los procedimientos más elementales, el C/C y el ---/S (suma repetida) sea mayor que la de los procedimientos más avanzados, ---/CL, en donde se abrevia la cantidad de sumas mediante composiciones aditivas, y el ---/M en donde se sustituye la suma repetida por la multiplicación en tanto razón interna, expresa el dominio aun incipiente que los niños tienen sobre estos últimos y, por otro lado, el hecho de que los valores de la variable “número de fichas” fueron insuficientes para volver más ineficientes a los primeros.

### 2.3.3.5 Procedimientos y errores representativos

*A) Interpretaciones erróneas de las reglas de cambio*

Los ocho procedimientos erróneos corresponden a cuatro alumnos en uno o varios de sus cálculos. Todos los errores, excepto uno que no pudimos descifrar, provienen de interpretar las reglas “por cada m fichas, n estampas” como “por cada ficha, n estampas”, con lo cual la cantidad de estampas se obtiene multiplicando la de fichas por n.

*B) Agrupar y contar (procedimiento C/C):*

Pudimos identificar dos tipos de dificultad en los alumnos que utilizaron sistemáticamente este procedimiento: por un lado, la carencia de una técnica rápida para sumar y, sobre todo, cierta dificultad para considerar, en cada nuevo cálculo, las cantidades ya calculadas.

Daniela, por ejemplo, para aplicar la regla 6f → 12e a 12 fichas, dibuja 12 fichas, las agrupa de 6 en 6, anota un 12 debajo de cada agrupamiento, y, para sumar 12 más 12, dibuja dos conjuntos de 12 palitos y los cuenta. La dificultad aquí es la falta de una técnica para sumar. Después, para calcular las estampas que corresponden a 24 fichas, no agrega las fichas que faltan a las 12 que ya tenía para tener las 24, y por lo tanto tampoco agrega 24 estampas a las 24 que ya tenía. En lugar de esto, dibuja las 24 fichas, las vuelve a agrupar de 6 en 6, etc. La cantidad de 24 fichas no es vista como 12 fichas más algo. Esto mismo hace incluso para 60 fichas, naturalmente, con errores de conteo.

El caso de Blanca es un poco distinto porque ella, para cada nuevo cálculo, parte de la cantidad anterior, agregando poco a poco las fichas que faltan. Puede incluso anticipar cuántas fichas le faltan. Sin embargo, no prevé que a una cantidad de fichas igual a la que ya tiene, le corresponde una cantidad de estampas igual. En lugar de ello, necesita agrupar nuevamente las fichas y dibujar, para cada agrupamiento, la cantidad de estampas correspondiente. Es decir, aunque puede sumar y restar mentalmente, no anticipa que la suma se conserva.

Cabe señalar que ésta fue la primera clase en la que estas niñas lograron participar. Expresaron una visible satisfacción por la experiencia de haber llegado a la meta sin error o con un error mínimo (para 60 fichas tuvieron que dibujar y contar 120 estampas, con la regla A, y 180 con la B).

*C) La suma iterada (procedimientos C/S y S/S):*

**Carlos** (eq.6), para aplicar la regla 1f→3e a las cuatro cantidades de fichas, sumó sistemáticamente el número 3, tantas veces como fichas se presentan (12, 24, 30 y 60). Cada vez hizo todas las sumas, es decir, no consideró un cálculo ya hecho para una cantidad a la hora de calcular el siguiente, aunque en algunas de las largas sumas, anotó un subtotal, sumó el resto y luego sumó los dos subtotales. Presenta errores de cálculo en 30 y 60 fichas.

**Manuel** (eq 1), al aplicar la regla 3→ 9 a 12 fichas, suma mentalmente las cantidades de fichas al tiempo que cuenta, con los dedos, del número de sumandos. Enseguida, suma ese número de veces las cantidad de estampas:

> Manuel*: “3, 6, 9, 12 (va levantando un dedo), 4.*
> *9 y 9, 18 y ya llevo 6 fichas, más 6 fichas...18 ... son 36”*

Como intenta hacer las cuentas mentalmente, se equivoca en el cálculo para 30 y 60 fichas...

**Marco** (eq.4), explica como aplicó la regla 3f→9e a 12 fichas:

> Marco: *“Nada más multipliqué, porque aquí dice que 3 fichas por 9 estampas.. y si le doy 3 fichas me da 9 estampas, si le doy otras 3 fichas me da 18 estampas, si le doy otras 3 fichas me da 27 y si le doy otras 3 me da 36 …(señala el resultado para 12 fichas)….*

No sabemos cómo Marco determinó que había que sumar cuatro veces, si hizo al mismo tiempo las sumas de fichas de tres en tres hasta doce, o si determinó el número de sumandos de antemano. Llama la atención que dice, al empezar su explicación, “nada más multipliqué”, como si reconociera en esta suma iterada de números nueve una multiplicación. Para la cantidad siguiente, 24 fichas, Marco vuelve a utilizar la suma, pero se limita a sumar dos veces la cantidad calculada para 12 fichas. Para 30 y 60 fichas, intenta utilizar la multiplicación.

A **Ismael** (eq. 3) le tocó la regla 2→8. Él creó una técnica muy práctica para realizar todos sus cálculos: dibujó fichas de dos en dos, las fue encerrando en una rueda (numera las primeras 12 ruedas) y abajo anotó las cantidades de estampas que corresponden al último par:

*1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12*
*oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo ...*
*8 16 24 32 40 48 56 64 72 80 88 96 104 112 120...*
*(continúa hasta 240)*

Para determinar cuántas estampas corresponden a cada cantidad de fichas, cuenta sobre su “tabla” la cantidad necesaria de fichas. De esta manera, Ismael separa los dos conteos implicados, se concentra primero en la suma sistemática de ochos, después solamente cuenta las fichas necesarias.

Después, Ismael hace lo mismo con la regla 3→9, e identifica entonces el uso de la multiplicación como razón interna. En su hoja de trabajo aparece lo siguiente:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | o o o | o o o | o o o | o o o | o o o | o o o | o o o | o o o | 8 |
| | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | X 9 |

El número 8, razón interna entre 3 fichas y 24 fichas, aparece como el número de agrupamientos de tres fichas que se pueden hacer con 24 fichas. A cada agrupamiento corresponden 9 estampas, por lo que habrá 8 veces 9 estampas.

*D) Combinaciones lineales (procedimientos ---/CL):*

Los procedimientos ---/CL consisten en abreviar el número de sumas para calcular el total de estampas mediante diversas composiciones aditivas. Como ya vimos, algunas veces este procedimiento vino a reemplazar procedimientos anteriores, en particular, la suma repetida. Es el procedimiento más frecuente en el cálculo para 24 fichas, y de hecho, en esta cantidad alcanza su mayor porcentaje (ver tabla 1). Esto se debe a que la cantidad anterior es de 12 fichas, lo que permite calcular el número de estampas que corresponden a 24 fichas, sumando las cantidades consigo mismas.

Fueron menos los niños que utilizaron este procedimiento para calcular la cantidad de estampas que corresponden a 60 fichas, a partir de la cantidad calculada para 30 fichas (3 de 16 resoluciones). Eso se debe a que algunos de los niños que lo usaron para 24 fichas no alcanzaron a resolver el problema con 60 fichas, y otros intentaron usar la multiplicación.

Veamos un ejemplo de un alumno que utilizó este procedimiento para todas las cantidades. **Miguel** (eq. 6) determinó siempre los números de agrupamientos dibujando las colecciones de fichas, agrupándolas y contando. Formó cada cantidad a partir de la cantidad anterior. Una vez determinado el número de agrupamientos, se dio a la tarea de sumar ese numero de veces la cantidad correspondiente de estampas, pero no las sumó de una en una, tendió a considerar “sumas de sumas”. Por ejemplo, para aplicar la regla 6f→12e a 30 fichas, presenta, junto con más de 60 fichas agrupadas de 6 en 6, las siguientes operaciones:

*12+12 = 24*
*24 +24 =48*
*48 + 12 = 60*

Éstas corresponden probablemente a lo siguiente:

| Agrupamientos de 6 fichas | Estampas |
|---|---|
| 1 | 12 |
| + 1 | + 12 |
| 2 | 24 |
| + 2 | + 24 |
| 4 | 48 |
| +1 | +12 |
| 5 | + 60 |

Para aplicar la regla 2f→8e a 24 fichas, presenta en su hoja de trabajo, además de una colección de más de 60 fichas agrupada de dos en dos, lo siguiente:

*32 +16 = 48 +16 = 64 + 16 = 80 +16 = 96.*

Las operaciones expresan que para sumar 12 veces 8 estampas optó por sumar cada vez lo correspondiente a dos agrupamientos, es decir, por sumar 6 veces 16 estampas:

| Agrupamientos de 2 fichas | Estampas |
|---|---|
| 2 | 16 |
| + 2 | + 16 |
| 4 | 32 |
| + 2 | + 16 |
| 6 | 48 |
| + 2 | + 16 |
| 8 | 64 |
| +2 | +16 |
| 10 | 80 |
| +2 | +16 |
| 12 | 96 |

En su hoja de trabajo también aparecen dos multiplicaciones: 6X8= 48 y 12X8= 96, lo que probablemente indica que en algún momento Miguel sustituyó las sumas repetidas por multiplicaciones (procedimiento C/M):

| Agrupamientos | Estampas |
|---|---|
| 1 | 8 |
| X6 | X6 |
| 6 | 48 |

| Agrupamientos | Estampas |
|---|---|
| 1 | 8 |
| X12 | X12 |
| 12 | 96 |

La eficiencia del procedimiento de combinaciones lineales (---/CL) es relativamente baja (63 %). En la tabla 4 puede observarse que en las nueve veces que se usó el procedimiento para el cálculo correspondiente a 24 fichas no hubo errores, mientras que en las siete veces que se usó para 30 fichas, hubo 4 errores, mismos que causaron los errores para 60 fichas. Esta diferencia obedece a que en el caso de 24 fichas únicamente sumaron la cantidad correspondiente a 12 fichas consigo misma, mientras que, para 30 fichas algunos hicieron mayor número de operaciones y perdieron la cuenta del número de sumandos, por ejemplo,

> *Iván (regla 1→3 para 30 fichas) : "Sumé 3 y 3, 18 para 6, más otras 18 para 6, más otras 18 para 6 … ay no, sale 88"*

Otros alumnos sumaron lo correspondiente a 24 y a 6 fichas, pero cometieron errores en la suma, por ejemplo, Emanuel, calculó bien que con la regla 2→8 a 24 fichas corresponden 96 estampas y a 6 fichas 24, pero obtiene 96+24= 126.

Un error más que llama la atención porque aparece por lo menos 5 veces, consiste en considerar que la cantidad de 30 fichas se forma juntando las de 24 y 12 fichas. Posiblemente cometen este error por dejarse llevar por una regularidad aparente:

6 fichas<br>
+ 6 fichas<br>
12 fichas<br>
+12 fichas<br>
24 fichas<br>
+12 fichas (¡!)<br>
30 fichas

*E) La sustitución de la suma repetida por una multiplicación (procedimientos ---/M):*

Ya vimos que algunos de los alumnos que utilizaron la suma iterada intuyeron la presencia de una multiplicación o incluso, en alguna de sus cuentas, sustituyeron la suma repetida de estampas por una multiplicación, como segundo procedimiento.

Veremos ahora algunos ejemplos de alumnos que resuelven directamente con este procedimiento. Algunos lo usan para todas las cantidades, otros, lo empiezan a usar cuando las cantidades crecen. Por otra parte, como vimos, este procedimiento es un poco más frecuente en la regla 1→3 que en las otras.

**Juan Carlos** (regla 1f→3e, aplicada a 12 fichas): tiene en su hoja una lista vertical de 7 números 3. Parece que su intención era sumar 12 veces el 3 (para 12 fichas) y que en cierto momento optó por multiplicar 3X12 = 36, operación que aparece a un lado.

Después, para 24 fichas, aparece la operación 6X12, la cual, posiblemente, proviene de considerar 12 veces 3+3 estampas, en lugar de 24 veces de 3 estampas.

Finalmente, en su hoja presenta dos operaciones verticales sin realizar, 3X30 y 3X60, seguramente destinadas al cálculo de las estampas correspondientes a 30 y 60 estampas.

**Miguel** (eq 6) utilizó el procedimiento ---/M para todas las cantidades. Sus explicaciones son muy explícitas:
Regla 3→9 para 12 fichas:

> Obs: *"¿Cómo le hiciste?"*
> MIguel: *(…) Sumé 9 por 4 y me dio 36"*
> Obs: *"¿Por qué por 4, de dónde sacaste que era 9 por 4?"*
> MIguel: *"Porque me alcanzaba para 4 grupitos de estampas, porque 3,6, 9, 12 y son 12 fichas (...)*

Regla 3→9, para 24 fichas:

> Miguel: *"Si por 12 fichas me alcanza para 4 grupos, con 24 me alcanza para 8 grupos, entonces son 72 en total"*

En esta última resolución, Miguel proyecta primero la razón entre números de objetos (12 y 24), el doble, a los números de agrupamientos (4 y 8). y después a los números de estampas que corresponden (36 y 72). Con cantidades más grandes, sin embargo, tiene dificultades:

Regla 3→9, para 30 fichas:

> Miguel: *"¿Para 30? (...) Son 24 estampas… le tengo que restar lo que le falta para 30… y le faltan 6, entonces… en 30 estampas me salió 108, porque 9 por… ¿para cuánto me alcanza?… me alcanza para 11 …"*

Con 24 estampas se forman 8 agrupamientos de 3 estampas. Miguel sabe que le faltan 6 estampas para tener 30, pero, en la explicación que da, considera sólo un agrupamiento más (considera 9 en total) en vez de dos más (para tener 10) .Por otra parte, en su resolución, consideró en realidad 12 agrupamientos, puesto que 108 resulta de multiplicar 9 por 12. Con la siguiente resolución puede suponerse el origen de su error:

> Miguel: *"…y acá …(en 60 fichas)… me alcanza para 15 grupitos y son 144 estampas" (toma sus hojas y se va contento a su lugar porque "ya quedó grabado" su procedimiento)*

144 estampas correspondería a 16 grupitos, no a 15. No hay indicios en su hoja de cómo obtuvo estos dos últimos números de agrupamientos, pero pareciera que consideró la constante "más 4 grupitos":

| Fichas | Agrupamientos de 3 | Estampas |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 9 |
| 12 | 4 | 4 X 9 = 36 |
| 24 | 4 **+ 4** = 8 | 8 X 9 = 72 |
| 30 | 8 **+ 4** = 12 (**¡**) | 12 X 9 = 108 |
| 60 | 12 **+ 4** = 16 (**¡**) | 16 X 9 = 144 |

La eficiencia del procedimiento es relativamente baja. Puede observarse en la tabla 3 que los errores se concentran en las cantidades de 30 y 60 fichas. Al aumentar las cantidades, aumenta el número de descomposiciones que los alumnos realizan, casi siempre mentalmente, y con ello tienden a perder el control de las mismas. Recursos como los esquemas o las tablas, que permitan no dejar todos los pasos en la memoria, podrían ser de gran ayuda en estos casos.

*F) El procedimiento OP*

Dos alumnas utilizaron este procedimiento para todas las cuatro cantidades, ambas con la regla 3→9.

**Stefanie** (equipo 2) presenta en su hoja de trabajo colecciones de fichas agrupadas de tres en tres y dos columnas de 5 y 7 números nueve, por lo que puede suponerse que su primer intento fue con el procedimiento de sumas iteradas (S/S). A un lado presenta las operaciones 24X3= 72; 30X3= 90 y 60X3= 180 (verticales). En el caso de **Liliana** (equipo 5) sólo aparecen las multiplicaciones. No hay indicios en el registro, ni en las hojas de trabajo que nos permitan saber como llegaron estas alumnas a identificar el operador X3.

### 2.3.3.6 La revisión de resultados

Se revisaron los resultados para 12, 24 y 30 estampas. Esta revisión hubiera requerido de una mejor planeación debido a la gran cantidad de resultados y de procedimientos. En la verificación de los errores, la maestra propició la sustitución de sumas repetidas (procedimientos S/S) por multiplicaciones (procedimientos S/M) mediante preguntas como "¿cómo podemos hacer esta suma más rápido?". El procedimiento OP, aunque fue mencionado por quienes lo utilizaron, no fue destacado, ni justificado.

### 2.3.3.7 La confrontación de observaciones

Esta parte de la situación se llevó a cabo hasta la sesión siguiente, cuatro días después de la anterior. Después de poner en el pizarrón los resultados acordados para 12, 24 y 30 fichas, se invitó a los alumnos a hacer observaciones.

| | *12 fichas* | *24 fichas* | *30 fichas* | *60 fichas* |
|---|---|---|---|---|
| *Regla **A***<br>*Por cada 6 fichas, 12 estampas* | *24* | *48* | *60* | |
| *Regla **B***<br>*Por cada ficha, 3 estampas* | *36* | *72* | *90* | |
| *Regla **C***<br>*Por cada 2 fichas, 8 estampas* | *48* | *96* | *120* | |
| *Regla **D***<br>*Por cada 3 fichas, 9 estampas* | *36* | *72* | *90* | |

Después, se les pidió que propusieran formas rápidas para calcular las cantidades que corresponden a 60 fichas.

*A) Observaciones sobre los resultados*

*La regla ganadora*. Observan que la regla que gana es la C (2→8) porque “tiene más estampas”.

*Las reglas equivalentes*. Miguel observa que hay “dos (reglas) iguales”, la B (1→3) y la D (3→9) . Después de verificar que efectivamente arrojan cantidades iguales de estampas para cada cantidad de fichas, la maestra pregunta a qué creen que se deba que las reglas “sean iguales”. La mayoría de los niños que participan se limitan a constatar la igualdad de los resultados: “salen números iguales”, “sale la misma cantidad”, “ se calculó lo mismo”, etc. Un alumno lanza una idea que parecía poder llevar hacia una explicación: “se gastan las mismas fichas”, pero no logra explicar más. En algún momento, cuando se decide aplicar las dos reglas a 30 fichas, Fernando propone, para ambas reglas, multiplicar las cantidades de fichas por 3. Sin embargo, por ahora no logra explicar porqué se podría hacer esto (más adelante vuelve sobre este punto). Aparentemente, el procedimiento no sugiere a nadie una explicación de porqué las reglas son equivalentes. La razón externa constante queda sin ser identificada por los niños.

*B) Formas rápidas para aplicar las reglas a 60 fichas.*

Ante la invitación de la maestra para proponer formas de cálculo rápidas aparecen las siguientes:

- Sumar consigo misma la cantidad correspondiente a 30 fichas, o multiplicarla por dos, puesto que 60 fichas es igual a 30 fichas más 30 fichas.
- Para la regla D, repetir el resultado de la regla B, puesto que “son iguales”.
- Fernando, el alumno que propuso multiplicar por 3 en las reglas B (1→3) y D (3→9) propone un algoritmo excepcional, en el que además de recuperar al operador, hace explícita la división que permite obtenerlo: se divide la cantidad de estampas entre la de fichas (por ejemplo, para 2→8, se divide 8:2 = 4) y se multiplica el resultado por el número de fichas. Sin embargo, aunque muestra que el algoritmo funciona con varios ejemplos, no logra justificarlo. En la actividad de aplicar las reglas de cambio, para encontrar las cuatro cantidades de estampas, Fernando fue de los alumnos que cometieron el error de multiplicar las cantidades de fichas por el número de estampas

de cada regla, como si fueran reglas del tipo 1→n. Probablemente este alumno tenía la atención puesta desde el principio en el operador, logró identificar su error y con ello, logró establecer la operación que determina al operador. El procedimiento no fue institucionalizado pues, para la mayor parte de los alumnos, no habría sido más que un algoritmo sin justificación. En las actividades siguientes, si bien Fernando no recurrirá a este algoritmo de manera sistemática, demostrará en varias ocasiones tener más facilidad que sus compañeros para identificar la equivalencia entre una regla de cambio expresada mediante dos cantidades y una regla expresada mediante un operador.

### *2.3.4) Comentario*

El nivel heterogéneo del grupo se tradujo en avances también heterogéneos. La situación manifiesta la virtud de admitir una gama amplia de formas de resolver, lo que permitió a la mayoría de los alumnos lograr algún avance en sus procedimientos.

Los alumnos con mayores dificultades logran comprender la forma en que las reglas se aplican a una cantidad de fichas y enfrentan el reto, sin lograr todavía superarlo, de sustituir la representación concreta por sumas iteradas, y de considerar, en cada nuevo cálculo, los resultados calculados con anterioridad.

La mayor parte del grupo utiliza la suma repetida de los dos términos y varios empiezan a poner en juego sumas de sumas y relaciones más específicas para abreviar los cálculos: duplicaciones, sustitución de la relación 1→4 por 4→16, sustitución de 12 veces 8 por 6 veces 16, etc..

El número de niños que sustituyen las sumas iteradas por multiplicaciones en tanto razones internas, no aumenta de manera significativa, pero puede observarse que quienes usan la multiplicación lo hacen de manera más sistemática.

La utilización de los operadores externos aparece de manera incipiente: tres alumnos los utilizan, uno de ellos logra proponer el algoritmo que corresponde a este acercamiento, pero ninguno logra todavía justificar el procedimiento. La multiplicación se abre paso con dificultad, en primer lugar en tanto razón interna.

Por otra parte, con respecto a las variables didácticas:

La variable "número de fichas" propició pocos cambios de procedimiento, en general, en favor de combinaciones lineales, particularmente sumas de sumas, para reducir un número de sumandos. La variable “tipo de regla” mostró cierta influencia al propiciar un mayor uso de la multiplicación en el caso más simple de una regla tipo 1→n. Estos resultados muestran cierta preeminencia, en este nivel escolar y frente a esta situación, de los conocimientos individuales de los alumnos sobre las variables. No obstante, la situación se ha aplicado una sola vez, y sin momentos intermedios para difundir y analizar procedimientos.

*La continuación de la secuencia.*

Se abre la alternativa de aplicar algunas veces más las situaciones 1 y 2, considerando sobre todo a los alumnos que han manifestado mayores dificultades, o de introducir desde ahora ciertas variantes para favorecer en mayor medida el estudio explícito de aspectos más complejos, en particular, la identificación de los operadores externos y la noción de “reglas equivalentes”. Optamos por este segundo camino, considerando que las situaciones que se proponen son suficientemente abiertas para poder ser abordadas también por los alumnos con mayor dificultad

## 2.4) Situación 3: una nueva regla

Pocos alumnos, hasta ahora, han identificado al operador Xn en las reglas "*na* por cada *a*". En esta situación dicho operador se introduce explícitamente en una de las reglas que serán comparadas, por ejemplo "*Se da una cantidad de estampas igual a tres veces la cantidad de fichas*". Se espera que los alumnos: 1) comprendan esta formulación, al aplicarla a distintas cantidades de fichas, 2) establezcan su equivalencia con otras reglas, expresadas sin el operador, y, 3) identifiquen el operador en otras reglas.

La situación consta de dos partes, en la primera se explica la nueva regla y los alumnos la aplican a las cuatro cantidades de fichas con las que trabajaron en la situación anterior. En la segunda, deben elegir nuevamente "la mejor regla" entre cuatro.

### *2.4.1) Primera parte*

#### 2.4.1.1) Ficha de trabajo

*Propósito: dar a conocer el funcionamiento de la nueva regla.*

*Material: El cuadro de la situación anterior, con los resultados, en el pizarrón*

*Consigna (5min):*

> *1) Vamos a añadir una nueva regla de cambio (se anota en el pizarrón):*
> ***Regla E: Se da una cantidad de estampas igual a TRES VECES la cantidad de fichas.***
> *¿Quién quiere decir cuántas estampas da esta regla por 12 fichas?*
> *(propiciar que se expliquen dos formas de calcular: sumar tres veces 12 y multiplicar 12 por 3).*
>
> *2) Pasar a tres alumnos más para que calculen las otras cantidades de estampas con la nueva regla.*

*Confrontación de observaciones (3min):*
*¿A qué creen que se deba que sale lo mismo otra vez que con las reglas B y D?*

### 2.4.1.2) Resultados

*Dificultades para comprender la nueva regla*

Una vez escrita la nueva regla, al preguntar a los alumnos si les resultaba clara, varios comentaron que en esa regla no se dice cuántas estampas les van a dar y manifestaron la necesidad de saberlo. Al aplicar la regla a varias cantidades pequeñas de fichas, algunos alumnos empezaron a comprender su funcionamiento: “para obtener la cantidad de estampas que nos darán, la cantidad de fichas que damos se multiplica por tres”.

Sin embargo, otros alumnos siguieron manifestando dudas a lo largo de la actividad. Además de la dificultad para comprender que *cualquier* cantidad de fichas se triplica, se manifestó otra: lo que se triplica son los números (sin unidad), no las cantidades físicas: 3 veces 2 es igual a 6, pero 3 veces 2 fichas *no es igual* a 6 estampas (es igual a 6 fichas). Hay un cambio en la cantidad, y en la naturaleza de los objetos. Los siguientes fragmentos de la discusión en el equipo 1, cuando intentan aplicar la nueva regla a 12 fichas, son expresivos de esta dificultad:

> *“Alf: No le entiendo todavía.*
>
> *Obs: A ver, la regla dice que nos da 3 veces la cantidad de fichas, nosotros tenemos 12 fichas (dibuja 12 fichas en el cuaderno)*
>
> *Alf: Las estampas son como si fueran las fichas...*
>
> *Obs: ¿Cómo?*
>
> *Alf: O sea, que las fichas es como si las cambiáramos por estampas, haga de cuenta, las 12 fichas que nos van a dar nos la van a triplicar (...) O sea, en vez de 12 fichas, nos van a dar 3 veces el 12 <u>pero en estampas</u>.*
>
> *Obs: (a Pam) ¿Le entiendes?*
>
> *Pam: ¡No!*
>
> *Ley: Yo tampoco (...)*
>
> *Alf: Es que en donde dice 12 fichas, haz de cuenta ahí esas 12 fichas las triplicas las haces más grandes, pero las sumas 3 veces, 12 más 12 más 12 (...) y ese resultado que te de, no va a ser en fichas, sino que eso se va a cambiar por estampas. (...)*
>
> *Alf: Es como si fueran ahí 36 personas y que... haz de cuenta, las hacen más grandes, las convierten en estampas y estás personas que son 36 ya no van a ser personas sino que van a ser estampas, ¿ya entendiste ?*
>
> *Pam: ¡Sí!*

*El cálculo de estampas para 12, 24, 30 y 60 fichas.*

Estos cálculos se realizaron en el pizarrón, con la participación de voluntarios. Observamos tres procedimientos, todos correctos. Por ejemplo, para 12 fichas:

multiplican la cantidad de fichas por 3 (al menos cinco alumnos);

suman tres veces la cantidad de fichas (al menos tres alumnos);

traducen el operador X3 en 1→3 (por cada ficha, tres estampas) y suman entonces la cantidad de 3 estampas, tantas veces como fichas hay (al menos un alumno).

En los dos primeros procedimientos se utiliza el operador "3 veces". En el tercero en cambio, se regresa a un procedimiento interno (conservación de la suma).

*Equivalencia de la nueva regla con las reglas anteriores*

En cuanto se calculó y se anotó en el cuadro del pizarrón el número de estampas que la regla "X3" arroja para 12 fichas, dos alumnos comentan que esta regla es equivalente a las reglas B (1→3) y D (3→9). Ante la pregunta ¿porqué creen que son equivalentes? los alumnos se remiten a los resultados: porque salen las mismas cantidades.

### *2.4.2) Segunda parte: Escoger la mejor regla*

#### 2.4.2.1) Ficha de trabajo

*Material:*

Una hoja blanca por alumno

Un papelito para que anoten la regla que escogen

10 fichas por equipo de cuatro

50 estampas por equipo de cuatro

*Consigna:*

Vamos a jugar otra vez a escoger la mejor regla. Las reglas van a ser las siguientes:

A) Se da una cantidad de estampas
igual a CINCO VECES la cantidad de fichas

B) Se cambia cada ficha por 4 estampas

C) Se cambian cada 2 fichas por 10 estampas

D) Se cambian cada 10 fichas por 20 estampas

*Características de las reglas*

- En todas las reglas la razón es entera. Los operadores implícitos son pequeños (X2, X4 y X5).
- La mejor regla no es la que se formula con la cantidad mayor de estampas (D) ni la que se formula con la cantidad menor de fichas (B). Tampoco es aquella en la que la diferencia entre fichas y estampas es mayor (D).
- Hay dos formulaciones para la mejor regla (A y C), una mediante el operador, la otra mediante dos cantidades.
- Las reglas C y D aparecieron ya una vez, en la cuarta aplicación de la situación 1.

*Desarrollo:*

Mismo desarrollo que la situación uno: 1) anticipación de la mejor regla, 2) cálculo de las estampas que arroja para un número dado de fichas, y, 3) verificación empírica (se realizan los intercambios).

### 2.4.2.2) Resultados

En el cuadro de la siguiente página se concentran las elecciones que hicieron que los diferentes equipos.

*La primera elección*

Al igual que en la cuarta aplicación de esta situación, la regla elegida en el primer momento por más alumnos fue la C (2→10), lo que confirma que los dos criterios iniciales incorrectos, basados en la consideración de una sola variable, son ya desechados por la mayoría. Los alumnos estiman que la cantidad de estampas en la regla C es alta *en relación con la cantidad de fichas*, más alta que en el caso de las otras reglas.

Identificamos únicamente a dos alumnos que consideran en este primer momento que la mejor regla puede ser la que presenta más estampas (D: 10→20) o la que presenta menos fichas (B: 1→4).

Con respecto a la regla A (X5), únicamente dos de los alumnos observados la eligieron de entrada, los demás la tuvieron en cuenta hasta que los observadores preguntaron expresamente por ésta. La nueva formulación sigue resultando extraña para la mayoría de los alumnos.

A (X5); B (1→4); C (2→10); D (10→20)

| Equipo | Reglas que consideran | Formas de verificación | Regla que escogen |
|---|---|---|---|
| 1 | **C** (Man y Eman)<br><br>**A** y **D** (por sugerencia del obs.) | Man aplica A y C a 12 fichas. Observa que hay equivalencia.<br><br>Descartan la D porque, al aplicarla a 12 fichas, "sobran fichas". | C |
| 2 | | No se observó. | C |
| 3 | **C** (Ley y Pam)<br><br>**A** (Alf)<br><br>**B** y **D** (por sugerencia del obs.) | Alf aplica A y C a 10 fichas, obtiene 50 en ambas. Aplica B a 10 fichas y obtiene 40.<br><br>Ley aplica C y D a 10 fichas:<br>C (2→10) = (10→50) mejor que D (10→20)<br><br>Pam compara C y D igualando el segundo término:<br>C (2→10) = (4→20) mejor que D (10→20) | A y C |
| 4 | **D** (Bla)<br><br>**B** (Bet)<br><br>**A** y **D** (Vic)<br><br>**A**, **B** y **C** (Fer) | Vic aplica A y D a 10 fichas para convencer a Bla. de la conveniencia de A.<br><br>Fer identifica el operador X4 en B (1→4) y lo compara con A (X5). Aplica ambos operadores a 12 fichas. Después, aplica C a 12 fichas y observa que da lo mismo que la A. | A |
| 5 | | No se observó. | B |
| 6 | **C** (Mig y Car) | Aplican la C a 10 fichas. | C |

*Las formas de comparación, antes de conocer el número de fichas*

En dos de los equipos observados (3 y 4), los alumnos comparan por lo menos dos reglas por iniciativa propia. Las preguntas de los observadores (¿cómo saben que la regla x no es mejor?) llevan a un equipo más (1) a comparar dos reglas.

En esta ocasión, para comparar cuál de dos reglas es mejor, más allá de los procedimientos específicos de cálculo, identificamos tres estrategias.

- Estrategia 1: Aplicar las reglas a una cantidad hipotética de fichas.

Como en las ocasiones anteriores, la mayoría de los alumnos que verifican consideran una cantidad hipotética de fichas, o a veces hasta dos cantidades. Varios ya observaron que la cantidad de fichas que se les ha entregado coincide con la de la regla que presenta mayor número de fichas, en este caso 10. Ésta es la cantidad más frecuentemente escogida para probar las reglas. Otros alumnos escogieron una de las cantidades que se usaron en sesiones anteriores, 12 fichas y otros probaron algunas reglas con ambas cantidades.

Una vez escogida la cantidad de fichas, para determinar la cantidad de estampas en el caso de las reglas B, C y D, los alumnos utilizan la suma iterada de los términos, realizando también con frecuencia la suma de sumas para abreviar el proceso. Pocos acuden al dibujo y agrupamiento.

Aparece nuevamente una dificultad relativa al número de fichas que se escoge: en el equipo 1 tomaron como cantidad de referencia 12 fichas y al aplicar la regla D (10→20) observan que “sobran dos fichas” y concluyen que esa regla no les conviene. Todavía no optan por probar con otra cantidad de fichas.

Finalmente, en la hoja de trabajo de una alumna del equipo 2 (no fue observado) encontramos las siguientes operaciones:

20 : 2 = 10 y 10 X 5= 50 (operaciones planteadas verticalmente)

30 : 2 = 15  y 15 X 5 = 240 (sic) (operaciones planteadas verticalmente)

10 : 2 = 5 y 10+10+10+10+10 = 50

Las operaciones probablemente corresponden a la aplicación de la regla C (2→10) a 20, 30 y 10 fichas respectivamente. Llama la atención el uso sistemático de la división para determinar la razón interna (procedimiento D/M).

Con respecto a la regla A (X5), los alumnos que la consideran multiplican por 5 una cantidad de fichas o bien la suman 5 veces. Descubren entonces que la regla A y la regla C (2→10) arrojan la misma cantidad, a veces incluso con sorpresa, lo que manifiesta claramente que esta equivalencia no es aún anticipada, ni siquiera por las alumnas que en la actividad anterior identificaron el operador X3 en la regla 3→9.

- Estrategia 2: Igualar el segundo término en dos reglas

Pam, del equipo 3 compara las reglas C y D igualando el número de estampas en ambas: C (2f→10e) = (4f→20e), conviene más que D (2f→ 20e), puesto que dan la misma cantidad de estampas, pero en C “cobran más fichas”. Esta estrategia, que aparece por primera vez, no parte de una cantidad hipotética de fichas, lo que manifiesta que las reglas son consideradas de manera independiente de las cantidades específicas de fichas.

- Estrategia 3: comparar los operadores

Una estrategia que quisimos propiciar al introducir la nueva regla fue la comparación directa de los operadores, por ejemplo, en la regla A dan *cinco veces* la cantidad, conviene más que la regla D (10→20) en la que dan *el doble*. Hasta donde pudimos observar, ningún alumno utilizó esta estrategia.

Únicamente uno de los alumnos observados, Fernando, hizo explícitos dos operadores, pero no los comparó directamente sino los aplicó a una cantidad de fichas: primero aplicó la regla A (X5) a 12 fichas, obtuvo 60, después aplicó la regla B (1→4) a 12 fichas, <u>multiplicando directamente por 4</u>, obtuvo 48 fichas y concluyó que la regla B “no lo convence”. Aun cuando la comparación de los operadores no se dio de manera directa, sino por el intermediario de una cantidad de fichas (lo cual además se justifica por su intención de probar todavía una tercera regla con 12 fichas), podemos decir que Fernando está más cerca de comparar directamente los operadores.

Para apreciar la economía que procura el uso del operador, comparemos la resolución anterior de Fernando con la forma en que un alumno del equipo 3, Alfonso, aplica la regla 1→4 a 12 fichas:

> *Alf: La B no porque nos dan 38 (en su hoja acaba de hacer lo siguiente)*
>
> *1 4*<br>
> *1 4=8 16*<br>
> *1 4 16*<br>
> *1 4=8 16*<br>
> *4 16 38*<br>
> *4=8*<br>
> *4*<br>
> *4=8*<br>
> *4*<br>
> *4=8*
>
> *(...)*
>
> *Obs: ¿Cómo sacaste eso?*
>
> *Alf: Le andaba sumando, (...) son las fichas que gastamos, acá son 8, 8, 8 ¡ay! me faltó un 16. Ah no, está bien... Entonces son tres 16... (después corrige su resultado haciendo la siguiente suma)*
>
> *16*<br>
> *16*<br>
> *8*<br>
> *40*

Al realizar sumas de sumas, la determinación del número de sumandos se vuelve difícil y da lugar con facilidad a errores. Este proceso contrasta con la facilidad del procedimiento en el que se determina del número de estampas multiplicando 12 por 4.

### 2.4.3) Comentario

La introducción explícita de un operador en esta situación, si bien ayudó a los niños a comprender su funcionamiento, no fue suficiente por ahora para desencadenar la búsqueda de los otros operadores. La equivalencia entre el operador X5 y la regla 2→10 fue descubierta pero no anticipada. En cierta forma, esta equivalencia no pierde todavía el carácter de contingente. Por otra parte, un solo alumno observado (Fernando) establece la equivalencia 1→4 = X4, lo que deja ver la dificultad conceptual inherente a esta identificación, incluso cuando la razón es canónica.

Cabe recordar que la mayoría de los alumnos ha demostrado disponer de un algoritmo para multiplicar números de dos cifras por números de una cifra. Es claro que las dificultades son de orden conceptual: para varios, la dificultad es todavía identificar la multiplicación en el papel de razón interna (por ejm., si una ficha da 4 estampas, 12 fichas dan 12 veces 4 estampas), y para casi todos, construir la noción de multiplicación como razón externa constante (si cada ficha da 4 estampas, cualquier número de fichas da 4 veces ese número, en estampas).

Los progresos de los niños se realizan lentamente en otras direcciones: se afirma, para la mayoría, la necesidad de tener en cuenta los dos términos de las reglas al compararlas; en el nivel de las estrategias para comparar, son más frecuentes las verificaciones de por lo menos dos reglas y se vislumbran, débilmente aún, formas que dejan de lado la necesidad de conocer la cantidad específica de fichas que habrá (aparece la estrategia que consiste en igualar el número de estampas, no de fichas); en el nivel de los procedimientos, disminuye la necesidad de la representación pictórica en favor de los procedimientos numéricos, la suma iterada, las sumas de sumas y el uso de la multiplicación como razón interna; empieza a aparecer el uso de la división para determinar las razones internas.

## 2.5) Situación 4: En busca de reglas equivalentes

La última situación de la secuencia se dedica al estudio de la equivalencia de las reglas de cambio, reglas que se formulan con un operador (Xn) y con un par de cantidades en relación (por cada *a* fichas, *n·a* estampas).

La actividad consiste en identificar, de un conjunto de cinco reglas, las que son equivalentes. En la primera aplicación, las reglas equivalentes son 1→5 y X5 y en la segunda hay dos equivalencias: X5 y 2→10, y 1→4 y 2→8.

La tarea por realizar es más compleja que las anteriores (la elección de la mejor regla) puesto que supone comprender la idea misma de equivalencia y, a la vez, la formulación mediante un operador, lo cual es probable que no hayan logrado aún varios alumnos en la situación anterior.

Después de las dos aplicaciones de la situación, incluimos una tercera actividad menos compleja, en la que la comparación y la equivalencia de las reglas se abordan de una nueva manera: se pide a los alumnos que ellos mismos escriban tres reglas, una mejor, una equivalente y una menos buena que una regla dada. Esta actividad permite entrever los criterios que los niños utilizan y con ello el grado en el que consideran la razón entre las cantidades, sin centrarse en una sola de las cantidades.

### *2.5.1) Primera parte (30mn)*

#### *2.5.1.1) Ficha de trabajo*

*Material*

- Las cuatro reglas en una hoja grande para pegar en el pizarrón[1]
- Una hoja blanca por equipo de 4
- 10 fichas y 50 estampas por equipo (se usarán sólo si son solicitadas)

*Recordatorio (5min)*

En la clase pasada usaron una regla como ésta:

> *"E) Se da una cantidad de estampas igual a TRES VECES*
> *la cantidad de fichas.*

Vamos a recordar qué quiere decir.

“Supongamos que nos dan 4 fichas (dibujarlas en el pizarrón), ¿quién pasa a dibujar las estampas que nos da esta regla?”

*Consigna (2min)*

(Poner las 4 reglas en el pizarrón)

A) Se da una cantidad de estampas igual a CINCO VECES la cantidad de fichas.
B) Por cada ficha se dan 5 estampas.
C) Por cada 5 fichas se dan 10 estampas.
D) Por 2 fichas se dan 6 estampas.

“Ahora **no** van a ganar los equipos que escojan la regla que da más estampas, sino los que encuentren las reglas que son equivalentes (recordar lo que esto quiere decir). Cuando encuentren las reglas que son equivalentes, las anotan en el papelito que les voy a dar después”.

*Trabajo en equipos (10 min)*

*Recuperación de respuestas (2min)*

1) Anotar en el pizarrón las propuestas de los equipos, por ejemplo:

| Reglas equivalentes | Equipos |
|---|---|
| La X con la Y | 2, 3, 6 |
| La X con la Z | 1, 4, 5 |

*Verificación y discusión (10min)*

Se verifica con 10 fichas; asignar a cada equipo una regla (como son 4 reglas y 6 equipos, dos equipos harán la misma regla que otros dos).

- Pedirles que calculen el número de estampas con la regla que les tocó.
- Recuperar los resultados en tablas como las siguientes:

**A**

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 10 | --- |

**B**

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 10 | --- |

**C**

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 10 | --- |

**D**

| Fichas | Estampas |
|---|---|
| 10 | --- |

[1] Las reglas vienen escritas en la hoja para ahorrar tiempo

- Si en el cálculo de una cantidad de estampas aparecen dos resultados distintos, anotarlos. Después, favorecer que ellos argumenten cuál es el correcto. Para ayudar a los alumnos que aún se apoyan en dibujos, favorecer el uso de una tabla.
- Destacar las reglas que son equivalentes y asignar 3 puntos a los equipos ganadores.
- Solicitar, entre los alumnos que ganaron, un voluntario para que explique cómo lo averiguó.

### 2.5.1.2) Características de las reglas y procedimientos probables

La regla equivalente a la que se formula con un operador (X5) es una regla canónica, es decir, con el antecedente igual a uno (1→5). Las dos reglas presentan el número cinco, pero hay una más que también lo presenta (5→10), por lo que este indicio no podrá ser determinante.

Los alumnos escogerán en un primer momento el par de reglas que, a primera vista, les parezcan equivalentes. Interesa ver si en esta primera elección identifican ya la equivalencia entre 1→5 y X5. Después, algunos alumnos se darán a la tarea de verificar aplicando a una cantidad de fichas las reglas elegidas. ¿Los que escogieron 1→5 = X5 tienen necesidad de verificarlo? Puede ocurrir que algunos alumnos no anticipen la equivalencia anterior pero la descubran si deciden aplicar a ambas reglas una cantidad de fichas.

Finalmente, es poco probable, pero puede ocurrir, que algunos alumnos identifiquen y comparen directamente los operadores de todas las reglas.

### 2.1.5.3) Resultados

*1) Equivalencias que proponen:*

A (X5); B (1→5); C (5→10); D (2→6)

| Reglas Equivalentes | Equipos |
|---|---|
| A y C | 1,3 |
| B y C | 5, 6 |
| A y B | 2, 4 |

La actividad resultó más difícil de lo previsto, sólo dos equipos de seis identificaron la equivalencia 1→5 = X5

*2) Procedimientos.*

Como lo han hecho en situaciones anteriores, los alumnos eligen en un primer momento dos reglas que por alguna razón consideran que podrían ser equivalentes. Después, sólo en algunos equipos se dieron a la tarea de verificar si hay efectivamente equivalencia.

<u>Respuestas erróneas: A (X5) = C (5→10) y B (1→5) = C (5→10)</u>

Como puede verse en el cuadro anterior, varios alumnos parecen considerar como primer criterio la presencia del número 5 (la única regla descartada por todos es la D, la cual no presenta el número cinco).

Los equipos que hicieron esta primera elección y que la mantienen, probablemente no la sometieron a verificación. De hecho, en uno de los que fueron observados (equipo 3: Leydi, Pamela; Alfonso, Ismael) se registró una especie de bloqueo frente a la situación, lo cual es un poco desconcertante debido a que la mayoría de los integrantes han manifestado un buen nivel de desempeño en las actividades anteriores. Ismael propone primero la equivalencia A=C, unos minutos después D=C, D= B y finalmente nuevamente y con más convicción A=C pero no realiza ninguna verificación ni da argumentos.

En el momento de aplicar las reglas a 10 fichas, les tocó aplicar la regla C (5→10). Alfonso y Pamela encuentran rápidamente que les corresponden 20 fichas, Alfonso mediante suma iterada y Pamela mediante multiplicación por 2 (razón interna). La dificultad para ellos, como para otros, fue comprender la nueva tarea. En la segunda aplicación de la situación, después de ver los resultados de la primera, lograrán un mucho mejor desempeño.

Lo que ocurrió en el equipo 1 (Emanuel, Miguel, Manuel, e Iván) fue distinto. Emanuel y Miguel consideraron de entrada que las reglas A (X5) y C (5→10) eran equivalentes. Ellos sí decidieron probarlas (con 10 fichas), pero no identificaron su error porque obtuvieron 50 estampas con ambas reglas: después de aplicar la regla A multiplicando 10 estampas por 5, aplican la regla C (5→10) multiplicando también 5X10[2].

Un momento después, Manuel, aplica la regla C (5→10) a 10 fichas dibujando las 10 fichas y anotando un 10 bajo la quinta ficha y la décima. Observan entonces que la regla C arroja 20 estampas, pero ya habían entregado la respuesta.

---

[2] Es posible que el uso de la preposición "por" en la formualción de las reglas haya propicado este error. Cabe señalar sin embargo que este tipo de error no fue frecuente.

En las hojas de trabajo de este equipo, puede verse además que tres alumnos consideraron también la regla D (2→6): tienen numerosas cuentas, eventualmente con colecciones de fichas dibujadas, con las que calcularon las cantidades de estampas que corresponden a varias cantidades de fichas mediante sumas iteradas (llegan incluso hasta 288 estampas). Parece como si esperaran que en algún momento se manifestaría la equivalencia con alguna de las otras reglas.

La equivalencia A (X5) = B (1→5)

- Equipo 2 (Laura, Adriana, Mari Cruz, Stefani; no se observó).

No sabemos qué las llevó a proponer la equivalencia A=B, pero en su hoja de trabajo puede observarse que verificaron con 10 fichas. Puede notarse además que cada una de estas reglas fue interpretada textualmente: la regla A (X5) las lleva a sumar 5 veces 10 fichas y también a multiplicar 10 por 5, mientras que en la regla B (1→5) no hacen lo mismo; ahí, a cada ficha corresponden 5 estampas, por lo que a 10 fichas corresponde una suma iterada de 10 veces el número cinco.

- El equipo 4 (Victor, Fernando, Marco, Beth)

Es Fernando quien manifiesta tener clara la equivalencia entre las reglas del tipo 1→n y Xn. En la parte introductoria de la clase, cuando la maestra preguntó a los alumnos si recordaban lo que se significa una regla como “se da una cantidad de estampas igual a tres veces la cantidad de fichas”, Fernando explicó:

> *(...) una ficha igual a 3 estampas, porque dice una cantidad de estampas igual a 3 veces de cantidad de fichas y por eso la cambiaron de estampas y es 1 por 3 y así multiplicamos por 3*

Ahora, explica por qué considera que las reglas A (X5) y B (1→5) son equivalentes:

> *Porque dice una cantidad de estampas es igual a 5 veces la cantidad de fichas y es una ficha y dan 5 estampas y en la* ***B*** *dice que se cambia... por cada ficha se da 5 estampas*

Fernando no necesita ya probar la equivalencia aplicando las dos reglas a una cantidad de fichas. Sus compañeros dicen estar de acuerdo, aunque no es claro que realmente lo comprendan. La observadora los invita a probar las reglas con alguna cantidad de fichas.

*3) La verificación con 10 fichas y la confrontación*

En un segundo momento, los equipos aplicaron las reglas a 10 fichas. No se registraron dificultades. Vuelven a aparecer procedimientos que van del agrupamiento y la suma repetida, a la conservación de las razones internas (el operador se usa únicamente en la regla A). En el pizarrón quedan registrados los resultados:

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| fichas | estampas | fichas | estampas | fichas | estampas | fichas | estampas |
| 10 | 50 | 10 | 50 | 10 | 20 | 10 | 30 |

La maestra invitó a los equipos que acertaron a explicar la forma en que lo hicieron. Las alumnas del equipo 2 sólo explican cómo verificaron: aplicando las reglas a 10 fichas. Fernando vuelve a dar la explicación que ya vimos.

### *2.5.2) Segunda parte (20 min)*

#### 2.5.2.1) Ficha de trabajo

*Material:*

Cuadro grande para pegar en el pizarrón con las siguiente reglas:

E) Se da una cantidad de estampas igual a DOS VECES la cantidad de fichas

F) Por cada ficha se dan 4 estampas

G) Por cada 4 fichas se dan 8 estampas

H) Por cada 2 fichas se dan 8 estampas

Una hoja blanca por alumno.

#### 2.5.2.2) Características de las reglas

- Ahora hay dos pares de reglas equivalentes;
- La regla que se formula con el operador (E) es equivalente a una regla (G) que no es canónica (del tipo 1→n).
- Dos reglas tienen el segundo término común (G y H), lo cual puede facilitar para algunos descartar la equivalencia, pero, para otros, puede ser motivo para que las consideren equivalentes.

### 2.5.2.3) Resultados:

*1) Equivalencias que proponen*

E (X2); F (1→4); G (4→8); H (2→8)

| Reglas equivalentes | Equipos |
|---|---|
| No hay equivalencias | 1 |
| G y H | 5, 4 |
| E y F | 6 |
| F y H | 2 |
| F y H, E y G | 3 |

Nuevamente el equipo 2 encuentra una equivalencia y esta vez es el equipo 3, que no pudo resolver la actividad anterior, el que encuentra las dos equivalencias. Los otros cuatro equipos no logran identificar todavía las equivalencias, aunque, como veremos, esto no significa que ninguno de sus miembros hubiera podido hacerlo.

*2) Procedimientos*

<u>G (4→8) = H (2→8)</u>

Por lo menos en tres equipos (1, 4, 5), en un primer momento proponen la equivalencia G = H, basándose en que ambas reglas dan 8 estampas. Con ello, muestran que se centran en una sola variable y pierden de vista el sentido de las reglas: la cantidad de estampas no está determinada, dependerá del número de fichas y éste debe ser el mismo, no importa cuál regla escojan. Esta dificultad, que parecía superada, se explica por el carácter distinto y más complejo de esta situación y viene a recordar que la comprensión de las reglas de cambio en tanto razones (relaciones entre cantidades no ligadas a una cantidad fija) requiere de tiempo y de experiencia.

En los dos equipos que fueron observados (1 y 4), dicha equivalencia fue cuestionada por algún miembro del equipo, pero sólo en el equipo 1 la descartaron:

> *Manuel: pero gastan más... (se refiere a la G): aquí (4→8) pagas más y aquí (2→8) pagas menos.*

Nos detendremos un momento en la discusión que se libra en el equipo 4 (Victor, Marco, Fernando, Beth). La discusión se da entre Fernando y Marco. Víctor, y sobre todo Beth, se limitan a apoyar a Marco quien parece tener cierto ascendente sobre ellos. Fernando introduce varios argumentos correctos pero el punto de vista de Marco acabará imponiéndose.

Apenas iniciada la actividad, Marco propone la equivalencia G (4→8) = H (2→8) misma que justifica muy claramente a lo largo de la discusión: ambas dan lo mismo (8 estampas).

Fernando rechaza al principio esta propuesta pero enseguida, como si dudara, agrega "ah, sí...". Sin embargo, él identifica la equivalencia de G (4→8) con E (X2) y concluye entonces que la G, la E y la H deben ser equivalentes:

> *Fer: "Dice en la **E**, se da una cantidad de estampas igual a dos veces de cantidad de fichas, Y dice en la **G**... dice que por cada 4 fichas se dan 8 estampas y entonces 4 fichas... 4 por 2 dieron 8 …(señala la regla **E**)… es igual a la **E**, la **G** y la **H**"*

Pero Marco rechaza esta posibilidad. A lo largo de las interacciones muestra dificultad para comprender la regla E (x2).En un momento dice:

> *Mar: "En la **E** dice que se da una cantidad de estampas igual a dos veces la cantidad de fichas y si dos …diez (…) o sea que nos dan dos por diez"*
>
> *Obs: "A ver, en la regla **E,** si nos dan 2 fichas, ¿cuántas estampas vamos a recibir?"*
>
> *Fer. "4"*
>
> *Marco: "¿4?, No"*
>
> *Obs. "¿Cuántas Marco?"*
>
> *Marco: "No, 10"*
>
> *Fer: "Nooo"*

No fue posible saber cómo Marco interpretó la regla E. Un poco más adelante, él acepta que la regla E (X2) da 4 estampas con 2 fichas, pero encuentra en este hecho un argumento más para rechazar la regla E: da 4 estampas, mientras que la G (4→8) y la H (2→8) dan 8 estampas:

> *Mar: "Es que la **G** nos da 8 estampas, porque dice que por 4 fichas te da 8 estampas y la **H** dice que por 2 fichas te dan 8 estampas. Y la **E** dice que te dan una cantidad igual a dos veces la cantidad de fichas y nada más nos darían 4 y entonces perderíamos…Nos tienen que dar el mismo resultado las dos"*

Fernando, cuestionando que la E dé necesariamente 4 estampas, argumenta: *"pero ahí no dice la cantidad de cuánto"*.

Más adelante, Marco, con ayuda de la observadora, logra dar las cantidades de estampas que corresponden 1, 2, y 3 fichas con la regla E (x2), pero no cambia de opinión. Fernando propone entonces que apliquen las tres reglas a 4 fichas:

Para la regla G (4→8) Marco dice inmediatamente: 8 estampas. Se pregunta por la regla H (2→8) y Marco afirma: "si nos dieran dos fichas, nos dan 8 estampas, por eso son iguales, 8 estampas y 8 estampas". Sorprendentemente, Fernando acepta: "Ah, si es cierto, la G y la H", mostrando que él también se ha confundido.

El desenlace de esta discusión se da al final, cuando ya tienen los resultados de aplicar las cuatro reglas a 8 fichas:

> *Mar: (al ver los resultados) "Están mal"*
>
> *Beth: "Ay, lo hubiéramos hecho con Fernando"*
>
> *Fer. (Se muestra muy decepcionado)*
>
> *Víc: "Es como decía este Fer"*
>
> *Obs. "Pues sí, pero a Fer lo convencieron en el último segundo"*
>
> *Fer: (Intenta explicar que él había resuelto bien el problema, pero que sus compañeros no aceptaron su respuesta.)*

La maestra pide a Marco que aplique nuevamente las reglas G (4→8) y H (2→8) a 8 fichas. Marco acepta el error.

<u>E (X2) = F (1→4)</u>

El equipo que propone esta equivalencia (6) no fue observado. Es probable que la idea les haya venido del hecho de que en las situaciones anteriores, la regla que se formula con un operador (Xn) ha sido equivalente a una regla que se formula mediante un valor unitario (1→n). Seguramente no aplicaron las reglas a una cantidad de fichas.

<u>"No hay reglas equivalentes": el problema del número de fichas</u>

En el equipo 1 (Manuel, Emanuel, Iván, Miguel), después de descartar la equivalencia G (4→8) = H (2→8), consideran la equivalencia E (x2) = G (4→8). Sin embargo tuvieron dificultades debido a que escogieron la cantidad de 10 fichas para probar las reglas (es la cantidad que se utilizó en la actividad anterior): al aplicar la regla G (4→8) mediante sumas repetidas obtuvieron un residuo de 2 fichas y descartaron esta regla.

En la confrontación, después de que se aplican las reglas a 8 fichas y se ven las equivalencias, Iván explica:

> *Ivan: Es que estuvimos haciendo de 10 en 10 fichas pero es de 8 y nos salió mal.*

En ese momento, la maestra no percibe que la dificultad estriba en la cantidad específica de fichas (10 no es múltiplo de 4), piensa que la confusión es más profunda, que Iván considera que cambiando la cantidad de fichas podrían ser otras las reglas equivalentes.

Pregunta entonces:

> *M: "A ver, este equipo dice que se equivocó, que pensó que no había reglas equivalentes porque todo el tiempo la estuvieron calculando con 10 fichas ¿ustedes qué piensan? Si no fueran 8 fichas, si fuera cualquier otro número de fichas, ¿de todos modos saldrían los mismos resultados?"*
>
> *Ñs: ¡No!*
>
> *M: ¿De todos modos las reglas tendrían los mismos resultados?*
>
> *Ñs: ¡No!*

En este punto queda la duda de qué es lo que los niños quieren decir: no saldrán los mismos resultados porque pueden sobrar fichas, o porque las cantidades concretas de estampas van a variar, o se refieren a que las equivalencias mismas podrían cambiar. Un alumno dice que él probó con 4 fichas y que sale lo mismo. Se hace entonces grupalmente la verificación con 4 fichas. Todos observan que las equivalencias son las mismas, pero el problema de las cantidades que no son múltiplo se queda por ahora sin analizar.

Manuel (del equipo 1) dice en voz baja: "*con algunos números sí, pero algunos no*". y, al final, después de haber perdido dos veces:

> *Obs: A ver si en el próximo ganamos...*
>
> *Man: Sí, pero primero que digan con cuántas fichas, porque si nos pasamos no se puede...*

Es momento de analizar este problema con los alumnos.

En este equipo también consideraron la equivalencia F (1→4) = H (2→8), pero tampoco la lograron comprobar porque, al aplicar las reglas a 10 fichas, cometieron errores: En la F, Miguel dibujó 11 fichas en lugar de 10 y al sumar los sumandos "4", obtuvo 44 estampas. En la H (2→8) Manuel dibuja las 10 fichas, anota un 8 debajo de cada dos fichas, pero al sumar cinco veces el número ocho obtiene 60.

En este punto sucede algo que llama la atención: el observador pregunta a Manuel, ¿cuánto es 8 por 5?, a lo que Manuel responde, *"40, pero eso es multiplicar y aquí es de sumar"*. No es la primera vez que observamos que los alumnos conocen las tablas de multiplicar, incluso algunos saben multiplicar números de dos cifras por una cifra, pero no identifican la pertinencia de la multiplicación aun en el caso más simple de una suma repetida.

Más adelante, Manuel corrige la suma que realizó y obtiene 40. Entonces toma su tabla de multiplicaciones y confirma que efectivamente 8 por 5 da 40. Para un cálculo posterior, sumar 8 veces el número 4, esta vez Manuel acude directamente a la tabla y encuentra 32.

<u>F= H y E = G</u>

En el equipo 2 identifican la equivalencia F (1→4) = H (2→8) y en el equipo 3 identifican las dos equivalencias planteadas. Veamos la resolución del equipo 3 que fue observado:

En un primer momento, Ismael y Alfonso proponen rápidamente la equivalencia F (1→4) y G (4→8). Parece que la presencia de un número 4 en ambas reglas propició esta intuición (Ismael explica después: "es que estaba confundido con el 4 que dice estampas y fichas").

Mientras Ismael se apresura a anotar su propuesta y a entregarla a la maestra, Alfonso aplica ambas reglas a 4 fichas. Cabe observar que nunca se les ha dado una cantidad tan pequeña de fichas, por lo que Alfonso no parece estar pensando en la cantidad que se les va a dar, sino en una cantidad que facilite hacer la comparación. Mediante sumas iteradas, obtiene 16 estampas para la regla F y sabe que son 8 para la G. Se da cuenta entonces de que las reglas no son equivalentes y pide a Ismael que recupere la hoja de respuestas para poderla corregir.

Enseguida Alfonso encuentra la equivalencia: la F (1→4) y la H (2→8). Él ya sabía que para 4 fichas la F da 16 estampas, y observa que la H daría dos veces 8 estampas.

Unos segundos después, él mismo encuentra la segunda equivalencia: E (X2)= G (4→8): lo explica así:

> *Alf: Porque te da estampas igual a dos veces la cantidad de fichas, es que si me dieran 4 fichas y dos veces la cantidad de fichas, entonces serían 8 y por cada 4 fichas serían 8 estampas. (Vuelve a explicarles a sus compañeros) Entonces las estampas se convertirían en fichas, sería 4 fichas y dos veces la cantidad de fichas entonces 2 veces la cantidad de fichas son 4, entonces 4 fichas, entonces serían 8 y por cada 4 fichas se dan 8 estampas.*

Ismael verifica por su cuenta con las 4 fichas y concluye que es correcto.

La explicación de Alfonso sigue manifestando la necesidad de considerar el cambio cualitativo en el nivel de los objetos "las estampas se convertirían en fichas" (o, más bien, las fichas en estampas).

En un momento posterior, por equivocación, en el equipo aplican la regla G (4→8) a 16 fichas en lugar de a 8 fichas, como lo pidió la maestra. En la forma en que lo hacen surgen dos sucesos que merecen un pequeño comentario:

1) Alfonso rápidamente determina que se deben sumar 4 ochos y obtiene 32. Pero enseguida, como buscando una forma más rápida de hacerlo, plantea la suma vertical 88+88 y obtiene 176, se desconcierta y desecha el intento. Resulta sorprendente observar la manifestación súbita de concepciones básicas que no han terminado de construirse (88 no es lo mismo que 8+8), al mismo tiempo que se están desarrollando otras más complejas (la multiplicación).
2) La observadora les pregunta si hay alguna manera de resolver más rápido esa suma. Pamela, quien no había participado, es quien propone la multiplicación de 8 por 4. A Alfonso sigue causándole duda; ”es que con las multiplicaciones sale peor”. Pamela, a diferencia de Alfonso, identifica bien la pertinencia de una multiplicación para sustituir una suma repetida, sin embargo, es Alfonso y no Pamela quien logra identificar las equivalencias en esta actividad, y en particular la de 4→8 con X2.

El suceso deja entrever la presencia de dos interpretaciones de la noción de multiplicación, como operación que sustituye una suma repetida, en general en la función de una razón interna, y como relación entre dos conjuntos de cantidades (razón externa).

*3) La verificación y confrontación de los resultados*

La maestra pide a todos los equipos que apliquen las reglas a 8 fichas. Una vez con los resultados a la vista, se dan las discusiones que ya hemos referido, incluyendo la verificación con una nueva cantidad, 4 fichas.

| E | |
|---|---|
| Fichas | estampas |
| 8 | 16 |

| F | |
|---|---|
| Fichas | Estampas |
| 8 | 32 |

| G | |
|---|---|
| fichas | estampas |
| 8 | 16 |

| H | |
|---|---|
| fichas | Estampas |
| 8 | 32 |

### 2.5.2.4) Comentario:

En la primera aplicación, por lo menos la mitad de los equipos (1, 3 y 4) pudieron abordar la situación, aunque el primero no logró encontrar la equivalencia debido al problema del residuo. En la segunda aplicación, en cuatro equipos (1, 2, 3 y 4) se registran procedimientos correctos para abordar la situación, dos de los cuales no identifican las equivalencias, en el equipo 1 por errores de cálculo y de conteo, y en el equipo 4 porque se acaba imponiendo una interpretación errónea de las reglas de cambio.

En el nivel individual, la proporción de alumnos que logra abordar estas dos situaciones (sin perder de vista el sentido de las reglas de cambio) es considerablemente menor (entre 5 y 6 alumnos de 21) puesto que, en cada equipo de tres o cuatro alumnos, fueron siempre uno o dos quienes dirigieron el trabajo. Así, la tarea resultó difícil para una parte importante del grupo y, frente a la dificultad, varios alumnos se centraron en una variable o consideraron indicios no relevantes como la presencia de un término común.

De las dos dificultades que presenta la situación, la noción misma de equivalencia y la presencia de operadores, es la primera la que parece determinante, puesto que los alumnos que manifiestan dificultad con los operadores, también muestran dificultad con las reglas que se expresan sin éstos (proponen equivalencias erróneas entre reglas sin operadores). El ejemplo de Marco es expresivo en este sentido. Probablemente habría sido conveniente comenzar con el estudio de equivalencias de reglas cuyos términos son iguales. Éstas, al no requerir de cálculo alguno, permiten centrar la atención en la noción misma de equivalencia ($3 \rightarrow 3 = 5 \rightarrow 5$...)

Por su parte, los alumnos que lograron determinar las equivalencias, tendieron a hacerlo con ambos tipos de regla. Puede observarse que entre los alumnos que logran abordar la situación sin reducir el sentido de las reglas de cambio, ninguno se da a la tarea de determinar y comparar directamente los operadores de todas las reglas. Logran en cambio comparar un operador *dado* con reglas en las que dicho operador no está dado. Algunos tienen necesidad de comprobarlo aplicando las dos reglas a un número de fichas, mientras que otros ya no expresan esta necesidad.

En este sentido, el recurso didáctico de introducir un operador entre las reglas expresadas mediante dos cantidades se muestra adecuado para favorecer la comprensión de los operadores, si bien ahora puede considerarse que, desde el punto de vista de la mayoría del grupo, este recurso debió esperar un poco más de tiempo.

Destaquemos por último que, frente a las dificultades de sus compañeros, algunos alumnos logran hacer explícitas ideas que reflejan una comprensión más profunda de la noción de regla de cambio: las cantidades de estampas dependen de las cantidades de fichas por lo que dos reglas que se expresan con una misma cantidad de estampas no necesariamente convienen igual, en una “se paga” más que la otra; las reglas que se expresan con un operador implican multiplicar, pero junto con un cambio cualitativo, de fichas a estampas; una regla que es mejor que otra con una cantidad de fichas, lo es también con otras cantidades de fichas, aunque queda sin resolver el problema de las cantidades de fichas que dejan un sobrante.

Al mismo tiempo, para la mayoría de los alumnos estas actividades siguen constituyendo ocasiones para funcionalizar su conocimiento de multiplicación, en primer lugar, en el papel de una razón interna, como sustituto de una suma repetida, y más lentamente y para menos alumnos, en el papel de un operador equivalente a una razón del tipo “por cada 1, n”

La siguiente actividad, menos difícil que ésta, permitirá distinguir mejor los tipos de dificultad que los alumnos del grupo pueden ya enfrentar.

### *2.5.3) Tercera parte (15mn)*

#### 2.5.3.1) Ficha de trabajo

*Material:*

Una hoja blanca por alumno, y una adicional para que anoten sus reglas.
*Consigna:*

Ahora tenemos una sola regla: *“Regla **A:** se cambian 2 fichas por 10 estampas”*
Se trata de que en cada equipo inventen (anotar en el pizarrón):

- una regla **B** que sea mejor que la A
- una regla **C** que sea menos buena que la A
- una regla **D** que sea equivalente a la A

Sólo pueden usar números hasta 10.
*Trabajo en equipos (10 mn)*

#### 2.5.3.2) Análisis Previo

*El propósito:*

Debido a la dificultad que representó la situación anterior para una parte importante del grupo, decidimos plantear esta última situación menos compleja.

Se trata de ofrecer a los niños una nueva oportunidad de analizar el comportamiento de las reglas de cambio, ahora desde una nueva perspectiva: ellos diseñan las reglas. Se espera que al interior de los equipos, y después, en la confrontación colectiva, los alumnos se ayuden entre sí para determinar algunos criterios para que las reglas cumplan con las condiciones que se piden.

*La regla a comparar*

La regla (2→10) se expresa con números pequeños y corresponde a un operador relativamente fácil de identificar (X5). En la situación 3, aplicada unos días antes, las reglas (2→10) y (X5) formaron parte del grupo de cuatro reglas con el que trabajaron y varios alumnos identificaron la equivalencia.

La restricción de no usar números mayores que 10 tiene dos propósitos:
1) permitir las verificaciones con material, y, 2) estimular la búsqueda de reglas "mejores que la A", distintas de aquella que se obtiene aumentando la cantidad de estampas.

*Los procedimientos*

Consideremos primero los procedimientos más sencillos y por lo tanto, más probables. La forma más simple de generar una regla mejor es aumentando la cantidad de estampas, y dejando igual la cantidad de fichas (=/+). Sin embargo, la restricción de usar sólo cantidades hasta 10 descarta esta posibilidad, y también aquella en la que disminuye la cantidad de fichas y aumenta la de estampas (-/+). Por lo tanto queda sólo la opción de disminuir la cantidad de fichas y dejar igual la de estampas (-/=), lo que implica considerar la relación inversa "entre menos fichas presenta la regla, más estampas se obtienen".

En cambio, para proponer una regla menos buena, los alumnos tienen las tres opciones : (+/=); (=/-) (+/-)

La elaboración de la regla equivalente constituye la tarea más difícil. La única respuesta posible, respetando la restricción de números hasta 10 es la regla (1→5), a la cual pueden llegar por ensayo error, o por división entre 2 de ambos términos de la regla 2→10 (:2/:2). Si hacen caso omiso de la restricción, pueden aparecer reglas que se obtienen mediante la iteración o la multiplicación de los términos, por ejemplo, 4→20 (xn,/xn).

Por otra parte están los procedimientos basados en la identificación del operador X5: una regla mejor puede ser entonces X6, X7, etc., una regla menos buena X4, X3, etc., y una regla equivalente: X5. No obstante, considerando los resultados obtenidos hasta ahora, estos procedimientos son todavía improbables.

### 2.5.3.3) Resultados

En la tabla de la siguiente página se consignan las respuestas, clasificadas según el tipo de estrategia (+/=, +/-, etc.). Aunque la actividad se organizó en equipos, la mayor parte de las respuestas fueron individuales debido a que no hubo tiempo para que en los equipos acordaran una respuesta común.

A un lado de algunas de las reglas propuestas aparece entre paréntesis la letra *v* que inidica que el o los alumnos verificaron que la regla en cuestión cumpliera con la condición de ser mayor, menor o equivalente a la regla A, aplicando ambas reglas a una cantidad de fichas. El número que acompaña letra *v* indica la cantidad de fichas que se usó para verificar.

En algunos casos, pocos, para un mismo alumno o equipo, aparecen dos respuestas para el mismo ítem. En general esto se debe a que una primera respuesta fue errónea pero fue verificada y corregida.

*Generales*

La tarea difícil para los niños fue claramente la elaboración de la regla D (equivalencia): se registran 11 respuestas erróneas de 17. En cambio, la elaboración de las reglas B (regla mejor), y C (regla menos buena) pueden considerarse ya fáciles para ellos (4 respuestas erróneas de 15 y ninguna errónea de 19, respectivamente[3]).

[3] Los datos son aproximados debido a que las respuestas de equipo fueron contadas como una sola respuesta.

**A (2 f→10e)**

| | **B: Regla Mejor** | | | | | **C: Regla menos buena** | | | | | **D: Regla equivalente** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **error** | **–/=** | **=/+** | **–/+** | **otra** | **error** | **+/=** | **=/–** | **+/–** | **otra** | **error** | **:2/:2** | **xn/xn** |
| Eman-1 | 5, 20 | | | | | | | | | 1,2 | 3, 8 | | |
| Man-1 | | | | 1, 12 | | | | 2, 5 | | | 1, 10(v 4)<br>1,9 (v 4) | 1,5 (v 4) | |
| Mig-1 | | | | 1, 20 | | | | | 20, 1 | | | | |
| Iván-1 | | | | | | | | | 4, 1 | | | | |
| Mcru-2 | 2,1 | | | | | | | | 5,3 | | 6,5 | | |
| Lau-2 | | | 2,20 | | | | | | 6,5 | | 9,5 | | |
| Fan-2 | | | | 1,20 | | | | 2,1 | | | 6,5 | | |
| Tha-2 | 5,15 | | | | | | | | 3,1 | | 5,10 | | |
| Alf-3 | | 1,10 | | | | | | | | 1,1 | 1,10 (v 4) | 1,5 (v 4) | |
| Pam-3 | | | | | | | | | 5,7 | | 3,10 | | |
| Ism-3 | | | | | | | | | 10,8 | | X2 | | |
| Ley-3 | | | | | | | | | | | | | |
| Vic-4 | | 1,10 | | | | | | | 3,5 (v 10) | | | | |
| Mar-4 | | | | | 1,9 | | | | 5,7 (v 10) | | | 1,5 | |
| Fer-4 | | | | | | | | | 3,2 (v 10) | | | 1,5 (v 2) | |
| Bet-4 | | | | | | | | | | | 3,8 | | |
| Lil-5 | | 1,10 | | | | | | | 3,9 | | 1,9 | | |
| Dor-5 | | | | | | | | | | | | | |
| Mig-6 | | 1,10 (v 10) | | | | | | | 3,7 (v 6) | | | 1,5 (v 2) | |
| Bla-6 | 1,2 | | | | | | | | | | | | |
| C.Iva-6 | | | | | | | | 2,3 (v 8) | | | | 1,5 (v 8) | |
| s/n | | 1,10 | | | | | 4,10 | | | | 2,9 | | |
| s/n | | 1,10 | | | | | 5,10 | | | | | | |
| TOTAL | 4/15 | 6/15 | 1/15 | 3/15 | 1/15 | 0/19 | 2/19 | 3/19 | 12/19 | 2/19 | 10/16 | 6/16 | 0/16 |

s/n: hojas de trabajo sin nombre.

De los 21 alumnos que participaron en la actividad, se observó a nueve, casi la mitad del grupo, que sometieron a verificación por lo menos una de las reglas que propusieron, aplicándola, junto con la regla A de referencia, a una cantidad determinada de fichas. Cuatro alumnos verificaron una regla, cuatro verificaron dos y uno verificó las tres.

Los alumnos realizaron las verificaciones a veces por iniciativa propia y otras veces a partir de preguntas de los observadores del tipo: ¿cómo lo saben?, o ¿cómo pueden estar seguros?.

Es en la búsqueda de una regla equivalente en donde las verificaciones son más frecuentes. En algunos casos, además de cumplir el papel de desechar reglas erróneas, las verificaciones ayudaron a encontrar una regla adecuada. Más adelante veremos ejemplos de estas resoluciones.

La dificultad para elegir una cantidad adecuada de fichas para verificar se presentó poco debido a que la mayoría de las veces la cantidad de fichas con la que se formulan las reglas que fueron verificadas es igual a uno o, en un caso, a 2 (es la cantidad de fichas de la regla A (2→10)). Como puede verse en la tabla siguiente, los niños casi nunca eligieron la menor cantidad de fichas posible (el mínimo común múltiplo).

| Reglas | Nº de fichas |
|---|---|
| 2, 10 vs 2, 3 | 8 |
| 2, 10 vs 3, 7 | (6) |
| 2, 10 vs 1, 10 | 4 y 10 |
| 2, 10 vs 1, 5 | 2, 4 y 8 |
| 2, 10 vs 1, 9 | 4 |

En el caso del segundo renglón la cantidad de fichas fue sugerida por el observador.

Sólo en el equipo 4 se observó que escogieran una cantidad de fichas no múltiplo de las cantidades con las que se expresan las reglas: para verificar que la regla A (2, 10) es "menos buena" que tres reglas elaboradas en el equipo, (3, 5), (5, 7) y (3, 2), utilizaron 10 fichas.

a (2, 10) corresponde (10, 50)
a (3, 5) corresponde (9, 15) (sobra una ficha)
a (5, 7) corresponde (10, 14)
a (3, 2) corresponde (9, 4) (sobra una ficha)

Los residuos no les impidieron observar que sus tres reglas arrojan menos estampas que la regla A (2, 10) y por lo tanto son correctas.

*Reglas B, mejores que la regla A (2→10)*

De las 11 respuestas correctas, en 7 se respeta la restricción de usar números hasta diez. En 6 de estos casos se recurre a la estrategia de disminuir el número de fichas, conservando el número de estampas (obtienen 1→10). La estrategia presenta la dificultad de dar lugar a un aumento en la cantidad de estampas mediante una disminución en la cantidad de fichas. Pamela explica su regla (1→10) así *"Ganamos más estampas y perdemos menos fichas"*

Un alumno más (Mar-4) opta por disminuir ambos términos: 1→9, pero no hay indicios que permitan saber cuál fue el razonamiento.

Otros cuatro alumnos no consideraron la restricción de usar números hasta 10 y optaron por las estrategias, más simples que la anterior, que consisten en aumentar el número de estampas, ya sea conservando el número de fichas (un alumno) o disminuyéndolo (tres alumnos).

Los errores:

En la regla B ("mejor que la A")se registran cuatro errores mientras que en la regla C ("menos buena que la A") no se registra ninguno. Podría pensarse que esta diferencia se debe a que, para elaborar la B, los niños no podían optar por la estrategia más simple que consiste en aumentar el número de estampas, debido a la restricción de usar números hasta 10, mientras que en la C podían simplemente disminuir el número de estampas.

Sin embargo, al revisar las reglas propuestas, puede verse que ésta no fue la dificultad principal. Por un lado, en dos de los cuatro errores que aparecen, no se respetó la restricción. Por otro lado, los otros dos errores corresponden a dos alumnas que han manifestado dificultades importantes para comprender la noción misma de "regla de cambio" desde el inicio. Veamos primero estas últimas.

Mari Cruz propone la regla B (2→1) como "mejor" que la A (2→10): en su regla conserva el número de fichas y disminuye drásticamente el número de estampas, lo que manifiesta una dificultad en la comprensión de las reglas. Es probable, por lo tanto, que el acierto de Mari Cruz en la regla C "menos buena" (propone 5→3) haya sido azaroso. Su regla D (equivalente), la más difícil, también presenta error (6→5).

Blanca propone la regla (1→ 2) y argumenta su propuesta diciendo: “porque si me dan 8 fichas, no se me van a terminar las fichas”, con lo cual muestra que retoma un hallazgo del grupo: la observación de que conviene más un número pequeño de fichas para que, al hacer los cambios “no se terminen rápido”. Pero Blanca pierde de vista ahora la otra variable, el número de estampas. Con ayuda de la observadora, identifica el error al aplicar su regla y la regla A a ocho fichas. Blanca no resuelve los dos problemas siguientes.

Por otra lado, están los dos alumnos que usan números mayores que diez. Ambos crean sus reglas B aumentando los dos términos de la regla A:

Thalía propone (5→15) y deja ver, en su hoja de trabajo, que aplicó correctamente esta regla a 10 fichas, obtuvo 30 estampas. Probablemente comparó esta cantidad contra las 10 estampas de la regla A, sin considerar ya el número de fichas. Resuelve bien el caso de la regla C, pero tampoco logra resolver el de la regla D.

Finalmente, Emanuel propone 5→ 20, aumentando los dos términos de la regla A. No hay indicios que permitan interpretar su razonamiento. En la regla C (menos buena) acierta, pero probablemente de manera azarosa pues propone 1→2, disminuyendo los dos términos. Posiblemente Emanuel aplica un criterio según el cual para obtener una regla mejor hay que aumentar las dos cantidades, y para obtener una regla menos buena hay que disminuirlas. Para la regla D, aumenta el número de fichas y disminuye el de estampas.

*Reglas C, menos buenas que la regla A (2→10)*

Puede observarse que los alumnos prefieren modificar los dos términos: aumentar el número de fichas y disminuir el de estampas (en 12 de 19 respuestas). Ismael justifica así que su regla 10→ 8 es menos buena que la A 2→10: *“porque se acaban todas las fichas y nada más son 8 estampas”* (probablemente está pensando en que les dan 10 fichas).

Tres alumnos mantienen el número de fichas y diminuyen el de estampas, y sólo dos mantienen el número de estampas, y aumentan el de fichas.

Entre las respuestas clasificadas como “otras”, llama la atención la regla “por cada ficha, una estampa”, por ser la primera vez que aparece. Recibir la misma cantidad es efectivamente menos bueno que recibir más...

*Reglas D, equivalentes a la regla A*

Entre las 13 respuestas erróneas que hubo en un primer momento, en cuatro se proponen reglas con 10 estampas, es decir, con la misma cantidad de estampas que la regla A. Dos de los cuatro alumnos que hacen esto desechan esta primera regla al verificarla. En el caso de los otros dos es posible que se hayan centrado en el número de estampas (en ambas reglas se reciben 10), dejando de lado el de fichas.

Seis reglas más presentan una cantidad de fichas igual o mayor a 2, y una cantidad de estampas menor que 10 (por ejemplo, por cada 6 fichas, 5 estampas), es decir, son reglas que podían determinarse como "menos buenas" que la A (2→10) sin cálculo alguno.

En los ocho errores anteriores, la noción misma de regla de cambio vuelve a perder su sentido. Tres de ellos corresponden a alumnos que cometieron errores desde la regla B. Los otros cinco tuvieron dificultad sólo en el caso de la regla D (equivalencia).

Los dos errores siguientes manifiestan dificultades de otro orden.

La regla 1→9, propuesta por Liliana y Doris del equipo 5, y también por Iván del equipo 1 (aunque él la verifica y la corrige), puede ser consecuencia de una hipótesis tácita para formar reglas equivalentes que consiste en sumar o restar la misma cantidad a los dos términos de la regla A. Esta hipótesis incorpora ya dos consideraciones que caracterizan efectivamente a la equivalencia (ambos términos deben disminuir o aumentar, y debe haber "algo constante"), pero no asume el carácter multiplicativo de la variación.

Finalmente, un error singular es el de Ismael, quien propone la regla "se cambia una ficha por lo doble de estampas". Por las explicaciones que proporciona a la observadora (difíciles de comprender), se puede entrever que Ismael interpreta la idea de "doble" como una razón interna que se aplica a la cantidad de fichas; de regla 1→x, se obtiene 2→10:

> *Ism: Yo, yo le explico ...mire se cambia una ficha por lo doble de estampas, <u>o sea de una ficha serían 2 fichas</u>, y ahí dice en la A, se cambian dos fichas por 10 estampas, y por lo doble serían 2 fichas y daría 10 y aquí serían..*
>
> *Obs: A ver chicos, ¿lo doble de 2 es 10?*
>
> *Ma: Lo doble de 2 es 4. (...)*
>
> *Ism: (Muy desesperado insiste) ¡No! que lo doble de 1 son 2, mira por eso dice aquí...(...)*
>
> *Ism: Yo le estaba haciendo así, o sea que las fichas, lo doble de una ficha , o sea que lo doble serían 2 fichas, **no por estampas**, aquí la A dice se cambian 2 fichas por 10 estampas.*
>
> *Obs: Pero lo doble de 2 no es 10, lo doble de 2 es 4*

> *Is: No me ha entendido, ¿verdad?(...)*

Este fue el único caso en el que se formula una regla mediante un operador, pero el operador es interpretado en el papel de razón interna, de una manera peculiar. Posiblemente Ismael pretendía obtener la regla 1→5 cuyos términos, duplicados, dan 2→10.

Veamos ahora las resoluciones correctas. Siete de los ocho alumnos que encontraron la equivalencia 2, 10 = 1, 5 (tres de ellos trabajando en equipo) hicieron verificaciones. En dos casos dieron primero una respuesta errónea y fue por la verificación que lograron encontrar la regla:

En el equipo 1, Manuel propone la regla 1→9. Al aplicarla junto con la regla A (2→10) a 2 fichas obtiene respectivamente 18 y 10 estampas. Con la idea de aumentar el número de estampas, él e Iván proponen la regla 1→10, quizá sin reparar que presenta el mismo número de estampas que la A. Se disponen a aplicarla a 2 fichas, y, al observar que necesitan llegar a 10 estampas, corrigen: por cada ficha, 5 estampas.

En el equipo 3, Alfonso propone de entrada la regla 1→10, la aplica a 4 fichas y argumenta enseguida:

> *Alf. (...) Entonces son 4 y serían 40, y ahí (regla A) serían 2 fichas por 10 estampas, entonces serían 40 porque 2 y 2 son 4 y se lo gastarían....¡no!, me equivoqué...( observa que la regla A sólo da 20 estampas por 4 fichas; vuelve a trabajar solo unos minutos)... ya lo encontré, mira, por cada ficha, 5 estampas (muestra que para 4 fichas se debe multiplicar 4 por 5 y da 20, igual que en la regla A).*

Alfonso reinicia la búsqueda con la idea clara de obtener 20 estampas con cuatro fichas.

En estas dos resoluciones, las únicas en las que sabemos cómo llegaron a la regla equivalente 1→5, el camino no consistió en obtener directamente la mitad de los dos términos de la regla 2→10, y por supuesto tampoco en identificar el operador X5. Los niños consideran que la nueva regla debe formularse con una sola ficha (posiblemente por la restricción de no usar números mayores que 10) y hacen entonces una conjetura, en ambos casos errónea, acerca del número de estampas. Es al ponerla a prueba que logran plantear con más precisión lo que buscan: cuántas estampas asociar a una ficha para que dos fichas den 10, o cuatro fichas den 20. Planteado de esta manera, el problema es ahora un reparto.

### 2.5.3.4) Comentario

*Desempeño del grupo*

De los 21 alumnos que participaron en esta actividad, sólo cuatro manifestaron dificultades importantes (tales que las reglas de cambio pierden sentido) en la elaboración de una regla mejor que la A, y cinco más en la elaboración de la regla equivalente. Teniendo en cuenta las dificultades que los niños de este grupo han manifestado en las actividades anteriores, y que la actividad se planteó una sola vez, puede considerarse que estos resultados expresan cierto avance del conjunto del grupo en la comprensión de las reglas de cambio en tanto razones.

Los avances pueden identificarse también en la verificación de las anticipaciones. Son un poco más los alumnos que verifican, ya sea espontáneamente o como respuesta a la pregunta ¿cómo pueden estar seguros?, determinando por sí mismos, en casi todos los casos, las cantidades de fichas para verificar. Escoger cantidades múltiplo no fue un problema grande debido a las características de las reglas propuestas por los niños.

*La mayor dificultad para elaborar una regla equivalente*

Los resultados confirman claramente la mayor dificultad de elaborar una regla equivalente en comparación con la de una regla mejor o menos buena. Este resultado era previsible, desde el momento en que los criterios para elaborar reglas mejores o menos buenas pueden ser cualitativos (basta con aumentar o disminuir las cantidades de estampas o de fichas) mientras que elaborar una regla equivalente requiere, además de comprender la idea misma de equivalencia, de poner en juego un criterio numérico: la suma o resta término a término, la conservación de razones internas que multiplican o dividen, o por último, la identificación del operador.

La experiencia nos permitió conocer, al menos en dos casos, la forma en que los alumnos lograron determinar la regla 1→5, equivalente a 2→10: parten de que la regla se expresa con una ficha, y abordan entonces un problema con la estructura de un reparto: ¿cuánto asignar a cada ficha, para que dos fichas den 10?. En cambio, los alumnos no recurrieron a identificar el operador (X5) que subyace a la regla 2→10 para construir sus reglas, esto pese a que en una sesión anterior algunos identificaron la equivalencia 2→10 = X5.

En las conclusiones finales, al considerar los resultados del conjunto situaciones, retomaremos esta compleja cuestión de la equivalencia de razones y de su relación con la identificación de los operadores.

*Razones racionales*

Como vimos en el Análisis de situaciones (capítulo 1), desde el punto de vista de los procedimientos que los niños tienden a utilizar para aplicar las reglas a una cantidad de fichas, la conservación de la suma o de las razones internas, es indiferente que las reglas en juego constituyan razones enteras o racionales (el segundo término no es múltiplo o no del primero) puesto que el operador en juego permanece implícito. Puede observarse que en esta actividad, las reglas propuestas por los niños son casi siempre racionales.

## CONCLUSIONES FINALES

En este espacio retomaremos brevemente las conclusiones que hemos presentado en los tres capítulos, para después destacar aquellas preguntas que no pudimos contestar y también otras que se plantean a partir de lo que estudiamos. En esta segunda parte se esbozan por lo tanto algunos de los caminos por los que se puede continuar este trabajo de investigación.

En la introducción general se escribió:

> *Si se acepta que enseñar a resolver un campo de problemas concretos sigue siendo una tarea importante de la educación básica, ¿en qué medida la noción de razón se revela necesaria como un "puente" para permitir a los alumnos establecer una primera relación con determinados objetos matemáticos elementales? ¿En qué medida estos conocimientos pueden constituir un apoyo para la introducción de conocimientos más elaborados? ¿Podrán los alumnos superar los obstáculos susceptibles de generarse mediante esta aproximación cuando, más adelante, se espere de ellos la adquisición de nociones más avanzadas? Y, por otra parte, ¿es posible identificar determinadas dificultades en la enseñanza, y en el aprendizaje, cuyo origen pueda atribuirse a la desaparición de la posibilidad de formular la noción de "razón", o al desvanecimiento de su sentido?. El presente trabajo pretende contribuir al estudio de la problemática que se abre con estas preguntas.*

Más adelante, se explicó el ángulo desde el cual se abordaría este problema y se especificó uno de los propósitos del trabajo:

> *...producir una clasificación general de las situaciones relativas a la noción de razón. Se espera de esta clasificación que proporcione una jerarquía de los factores que influyen en la adquisición de los diferentes aspectos de esta noción.*

Finalmente, al introducir el concepto de "el medio de la razón", se precisó la tesis general del estudio:

> *Podemos precisar ahora la tesis que asumimos en este estudio: en un proceso de matematización, antes de disponer de las fracciones, es posible identificar un trabajo en el nivel de razones en tanto parejas de cantidades que se expresan con números enteros. Desde esta perspectiva, las razones de números enteros funcionarían como la forma implícita, germinal, de las fracciones.*

*1) ¿En qué hemos avanzado?*

Mediante el análisis de situaciones que realizamos en el primer capítulo, fue posible mostrar, en primer lugar, que la noción de razón constituye un conocimiento implicado en la construcción de diversas nociones de las matemáticas de la escuela primaria, aunque, en casi todos los casos, se desvanece detrás de los saberes con los que culminan estos procesos: los números y las operaciones con los números. La razón constituye, desde este punto de vista, una especie de andamiaje en la edificación de diversas nociones.

Debido a esta característica, que podríamos describir como un sustrato común, germinal, y relativamente indefinido, de diversos conocimientos, su papel no es necesariamente percibido desde la enseñanza, y, por lo tanto, tampoco es asumido como objeto de estudio. Los objetos de estudio en la escuela primaria son, en general, los números y las operaciones con los números. La idea de *relación* se suele estudiar explícitamente hasta el momento en el que asume la forma de un saber instituido, la "función". Los intentos, realizados hace 30 años, por adelantar la enseñanza de esta última noción, no lograron cubrir este vacío.

A lo largo del trabajo, hemos intentado mostrar que hacer explícitas las formas en que interviene la noción de razón en las situaciones que se utilizan para la enseñanza de otros contenidos (explícitas en principio para nosotros mismos), puede ayudarnos a cubrir este vacío, al permitirnos comprender mejor los procedimientos efectivamente utilizados por los alumnos y al permitirnos propiciar en mayor medida el desarrollo de dicha noción, a partir del estudio mismo de los contenidos tradicionales de enseñanza (medición, números naturales y racionales, multiplicación y división, proporcionalidad), <u>al mismo tiempo que la noción de razón apoya y articula la construcción de dichos contenidos</u>.

En el caso de las fracciones, estas relaciones de interdependencia se expresaron de manera particularmente clara, en la identificación de tres momentos en el paso de la noción de razón a la noción de fracción:

- el primero, en el que las fracciones (para expresar medidas y para expresar operadores) permanecen implícitas en conjuntos de razones que se formulan mediante parejas de cantidades naturales, y se manejan mediante operadores naturales internos;
- el segundo, en el que se construye la razón canónica, la que expresa al valor unitario, momento en que las fracciones emergen como expresiones de una medida, y son objeto de operadores que siguen siendo naturales;
- Finalmente, el tercer momento en el que la fracción se hace explícita en el papel de operador.

Hemos mostrado que a lo largo de este proceso, existen espacios para estudiar propiedades relativas al orden y a la equivalencia de las fracciones, previamente al momento en el que se obtienen los cocientes, y al momento en el que se trabaja explícitamente con fracciones. Hemos intentando poner en evidencia el doble beneficio de esta posibilidad: no solamente puede permitir una mejor comprensión de las fracciones como expresiones de razones, sino que proporciona las condiciones para el desarrollo de la noción misma de relación.

La perspectiva de cada capítulo.

El recurso metodológico que utilizamos en el análisis de situaciones del capítulo 1, la identificación de un conjunto pequeño de situaciones *fundamentales*, y de un conjunto de variables cuyos valores permitieran generar una parte significativa del universo de problemas en los que funciona una razón, fue eficaz para organizar este universo, y, sobre todo, para identificar las condiciones que propician el funcionamiento de la razón en sus distintos papeles así como para destacar las formas de vinculación de éstos con otras nociones: la razón entre magnitudes en el contexto de las homotecias, la razón entre magnitudes que subyace a la construcción del cardinal y de la medida, la razón entre medidas, en el contexto de las relaciones lineales, en cuyo seno se desarrolla la multiplicación como razón interna y como razón externa constante.

El análisis de las resoluciones de un pequeño grupo de alumnos de 4º a 6º grados de la escuela primaria a un conjunto de 25 problemas (capítulo 2) permitió, por una parte, corroborar el efecto de determinadas variables numéricas y contextuales en el tipo de procedimientos por el que los niños optan y en el grado de dificultad de los problemas. Por otra parte, permitió destacar que, frente a cierto tipo de problemas, los niños utilizan efectivamente razones y, sobre todo, puso de manifiesto algunas de las formas en que las razones se articulan, en sus procedimientos, con otros conocimientos que están en proceso de construir.

El diseño de secuencias didácticas relativas a la noción de razón (capítulo 3) constituyó otra forma de comprobar la posibilidad de integrar el estudio de esta noción al de las operaciones de multiplicación y división, y de enriquecer, de esta manera, los significados de estas operaciones. En particular, el análisis de una de las experiencias, “Los intercambios”, aplicada en tercer grado de primaria, mostró 1) la posibilidad de propiciar un trabajo cualitativo y cuantitativo con razones, en el marco de la situación fundamental de comparación de razones (SFC), cuando la mayoría de los niños tiene conocimientos incipientes sobre la multiplicación y la división, y prácticamente ningún conocimiento formal sobre las fracciones; 2) la posibilidad de propiciar la construcción explícita de la multiplicación como razón interna, sustituyendo a las sumas repetidas, en el marco de las situaciones SFC y SFR-2 y 3) la dificultad subyacente a la construcción de un segundo significado de la multiplicación por un natural, la multiplicación como operador externo constante.

Con respecto al último punto, la experiencia permitió precisar algunas características del proceso de construcción del operador: los niños no expresaron al operador que subyace a las reglas, para entonces comparar dos operadores, pero algunos de ellos si llegaron a utilizarlo como un recurso de cálculo, y la mayoría sí logró, con cierta dificultad, comprender el funcionamiento de un operador dado y compararlo contra una razón.

Concluimos el análisis de esta última experiencia planteando, nuevamente, pero con más argumentos, dos conjeturas: 1) la construcción del operador como expresión de un conjunto de razones equivalentes puede requerir de un mayor desarrollo de la noción misma de equivalencia de razones. En cierto momento, la relación podría invertirse: la posibilidad de identificar al operador podría redundar en una mayor comprensión de la equivalencia de razones y 2) es posible que la identificación de razones canónicas (las que proporcionan un valor unitario) constituya un antecedente del operador.

En resumen, consideramos que este conjunto de resultados aporta elementos para contestar a las primeras preguntas:

> *¿En qué medida la noción de razón se revela necesaria como un "puente" para permitir a los alumnos establecer una primera relación con determinados objetos matemáticos elementales? ¿En qué medida estos conocimientos pueden constituir un apoyo para la introducción de conocimientos más elaborados?*

*2) Lo que no se pudo hacer y lo que falta por hacer:*

- En el nivel de la metodología empleada

En el análisis de situaciones, logramos distinguir diferentes papeles de la noción de razón, señalamos cada vez, algunas de las variables que los propician así como algunas de las variables que introducen determinadas dificultades. Hicimos referencia a errores o dificultades ya identificados en otros estudios, intentando interpretarlos en términos de dichas características. Pero no llegamos al punto de identificar una acepción particular de la noción de razón, relativa a una familia particular de situaciones, que pudiera considerarse como el origen más específico de determinadas dificultades. Es posible, sin embargo, que esto sea necesario para dar una respuesta más fundamentada a la siguiente pregunta, sobre todo a la parte que refiere al aprendizaje:

> *¿es posible identificar determinadas dificultades en la enseñanza, y en el aprendizaje, cuyo origen pueda atribuirse a la desaparición de la posibilidad de formular la noción de "razón", o al desvanecimiento de su sentido?*

Por este mismo motivo, en el conjunto de problemas que utilizamos en el estudio empírico del capítulo II, tampoco hay una diferenciación de por lo menos dos grupos de problemas que permitiera poner en evidencia qué aspecto específico podría ser el que está faltando. De hecho, dicho capítulo no se destinó tanto a la identificación de errores, como a poner en evidencia la forma en que, detrás de ciertos procedimientos correctos, interviene la noción de razón, y la forma en que esta noción se puede articular con otros conocimientos. Falta avanzar en la identificación de las dificultades más específicas que son atribuibles a un trabajo didáctico deficiente en relación a esta noción. Subrayamos que se trata aquí, nuevamente, del tratamiento "didáctico" de la noción, y no de dificultades atribuibles al desarrollo cognitivo, más allá de la enseñanza. Esto último ha sido, me parece, suficientemente documentado.

Cabe señalar también que la ausencia de un estudio estadístico de correlaciones obedece al mismo motivo: no se llegó al punto de identificar un aspecto específico de un conocimiento, que caracterizara una familia de situaciones y que permitiera considerarlo, con un grado razonable de incertidumbre, como el origen de errores frecuentes, para que valiera la pena someter la correlación a una validación estadística. No obstante, es posible que algunas de las relaciones que sí fueron identificadas, entre características de las situaciones y los procedimientos que favorecen, estarían mejor sustentadas al ser sometidas a este tamiz. Falta analizar más la pertinencia de este tipo de análisis, y, eventualmente, realizarlo.

- El estudio de procesos de largo plazo.

Las secuencias didácticas sobre la noción de razón que diseñamos y analizamos (tercer capítulo) abarcan momentos relativamente breves del largo proceso de adquisición de nociones tales como el número racional y la función. En particular, nos centramos en un momento de la escolaridad (3º y 4º grados) en el que las nociones de multiplicación y de división de números naturales son el objeto principal de enseñanza, y en el que se inicia el estudio del lenguaje de las fracciones.

No obstante, como vimos en el análisis de situaciones del primer capítulo, desde los primeros grados de primaria, se desarrolla un trabajo sobre la noción de razón, a nivel cualitativo, en el marco de las homotecias, y también cuantitativo, una vez que se empieza a trabajar con agrupamientos. Por otra parte, en el último grado de la escuela primaria, y en el primer grado de secundaria, se registra el proceso de hacer explícitos el operador multiplicativo racional y algunas propiedades de la linealidad, con lo cual se inicia también la introducción formal de la noción de función.

Para poder apreciar los beneficios, en el largo plazo, de propiciar en mayor medida el estudio de la noción de razón, hace falta realizar estudios puntuales en otros niveles escolares, y, sobre todo, realizar estudios que abarquen períodos más largos. Esto es necesario también para poder contestar otra de las preguntas que se plantearon al inicio de este trabajo:

> *¿Podrán los alumnos superar los obstáculos susceptibles de generarse mediante esta aproximación cuando, más adelante, se espere de ellos la adquisición de nociones más avanzadas?*

- Falta también incorporar a este análisis los aportes de los estudios que se han centrado en dos temáticas, el tratamiento de la información y la probabilidad, que constituyen otros dos ámbitos característicos de la noción de razón.
- El conocimiento de los maestros de la escuela primaria

En la introducción general mencionamos algunos de los resultados de dos estudios sobre conocimientos y prácticas de los maestros, relacionados con la enseñanza de la proporcionalidad. Comentaremos aquí, brevemente, otras tendencias observadas en estos trabajos, directamente vinculadas con la problemática que hemos estudiado.

El primer estudio consiste en una exploración con un grupo de 60 maestros de escuela primaria acerca de distintos aspectos relativos a la noción de razón. En una parte del mismo analizamos los procedimientos de resolución que los maestros anticipan como probables, o deseables, de parte de alumnos de distintos grados de la escuela primaria, frente a cierta diversidad de problemas de proporcionalidad. Se trataba de variantes de las situaciones SFC y SFR, similares a las que aplicamos a los niños.

Fueron relativamente pocos los maestros que identificaron los procedimientos más accesibles para los alumnos, considerando las características de los problemas. En particular, observamos una tendencia a 1) no considerar los procedimientos internos (conservación de la suma o de las razones internas) en problemas con razones internas enteras y 2) no considerar el procedimiento de reducción a la unidad, en problemas con magnitudes de misma naturaleza.

En el primer caso, una consecuencia previsible puede ser cierta dificultad por parte de los maestros para identificar procedimientos que de hecho utilizan sus alumnos y, con ello, para valorar el papel que éstos pueden desempeñar en el proceso de construcción de otras nociones[1]. Nos llamó la atención que en los pocos casos en que un procedimiento interno sí fue identificado, los maestros mostraron dificultad para nombrarlo. En dos ocasiones dijeron, de manera parecida a como lo hizo uno de los niños con quienes trabajamos "éste, (se resuelve) por lógica", o bien "por razonamiento"[2].

[1] Resultados similares fueron encontrados en un estudio realizado con maestros franceses por J. Maurice (1996)

[2] Entonces, recurrir a las razones es "razonar", lo cual se comprende bien si se considera que esta forma de resolver (mediante CS o mediante CRI) no consiste en aplicar una regla preestablecida. Por otra parte, posiblemente se considera que, al igual que el razonamiento, las razones forman parte de aquello que se adquiere espontáneamente, que se da por adquirido, o que, en todo caso, no compete a la enseñanza.

En el segundo caso se trata de la ausencia de un procedimiento que se comparte con los niños. Implica no contar con una alternativa más accesible que la del operador constante, o la de los productos cruzados, la cual puede jugar un papel importante en la introducción de la noción de operador multiplicativo fraccionario.

Pudo observarse también que, para algunas maestras con experiencia reciente sólo en los dos primeros grados de la primaria, fue más fácil identificar ciertos procedimientos no canónicos que para algunos maestros cuya experiencia se concentra en el tercer ciclo (quinto y sexto de primaria), aunque también, para las primeras, algunos problemas resultaron más difíciles que para sus compañeros y tendieron a cometer errores similares a los que cometen los niños. Lo anterior sugiere que un mayor dominio de técnicas aritméticas más generales puede venir acompañado de un pérdida de sensibilidad hacia los procesos por los que pasan los alumnos y hacia la forma en que determinadas variables de los problemas pueden afectar sus resoluciones.

En el segundo estudio al que hicimos referencia en la introducción, el trabajo de tesis de Ramírez (Ramírez, s/f), se analizan algunas de las clases sobre el tema de proporcionalidad, impartidas por un maestro de sexto grado con amplia experiencia. La autora destaca que, a lo largo de las doce clases observadas, ocurren dos historias casi siempre paralelas, aunque se tocan algunas veces: las razones internas aparecen de manera implícita y funcional en los procedimientos de los niños. Se usan, pero no se enseñan, (excepto en una de las últimas clases, en las que aparecen vinculadas a las “tablas de variación”) y nunca se nombran.

Por su parte, las razones externas aparecen como el objeto de la enseñanza, reciben un nombre, una escritura propia y una manera de ser “leídas”, se identifican con las fracciones y se manipulan como tales, pero, no se usan realmente para resolver los problemas. Su verdadera funcionalidad aparece en las tres últimas clases en donde constituyen el medio para acomodar los números de manera que permitan la aplicación de la regla de los productos cruzados.

Las interacciones entre alumnos y maestro tienden a asumir también ciertas características en este segundo tipo de momento: los alumnos, al comprender poco el sentido de las fracciones que su maestro manipula, intentan descifrar los pasos que aquél espera que ellos den; el maestro, por su parte, libra un enorme esfuerzo por “decirles sin decirles”, por conducirlos por el camino que deben recorrer, procurando que no sea evidente que no lo pueden hacer por sí mismos.

La identificación de dificultades como las anteriores permite considerar que el estudio de la noción de razón, de las distintas formas en que se utiliza implícitamente en un gran número de problemas, de la forma en que se articula con otras nociones, podría proporcionar a los maestros un conocimiento teórico adecuado para comprender en mayor medida las formas en que sus alumnos resuelven los problemas multiplicativos, para comprender la forma en la que se articulan diversas nociones que cruzan el currículum, de la primaria y la secundaria, y para organizar, con mayor conocimiento de causa, su propio programa y sus situaciones didácticas.

Lo anterior no concierne únicamente a la formación específica que los maestros reciben en la normal, en la cual, por lo general, hay poco espacio para el estudio de las disciplinas, sino también al currículum de la escuela secundaria y preparatoria. Al respecto, Brousseau ha señalado que una de las funciones insuficientemente consideradas de estos niveles escolares, es justamente la de proporcionar el bagaje de matemáticas básico de los futuros maestros de primaria. Este constituye un motivo más para articular con mayor cuidado el currículum de primaria con nociones más formales que se estudian en secundaria y que, a su vez, arrojan nueva luz sobre las primeras. Puede ser el caso de la relación entre la noción de razón y la de función lineal.

## Referencias bibliográficas


Artigue, M., et J. Robinet (1982). "Concéptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire" *Recherches en Didactique des mathématiques.* Vol 3.1, 5-64. París. La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques.* Thèse d'État (première partie) Paris: Université Paris 7.

Artigue, M. (1989). *Épistémologie et didactique*. Cahier DIDEREM. Didactique des mathématiques, IREM, Université de Paris VII.

Artigue, M. (1995), "Ingeniería didáctica" En : Gómez, P. (Ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y las innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (7-24) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balbuena, H. (1988). Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria. *Tesis de Maestría*. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Balbuena, H., Espinosa, C., Espinosa, H., Fregona, D., Saíz, I. (1984). Descubriendo las fracciones. N. 5. *Documento interno del Laboratorio de Psicomatemáticas*. Departamento de Investigaciones Educativas. CINVESTAV-IPN.

Behr, M.J.,Lesh, R., Post,T. R.,& Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (91-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & R. Lesh, (1990). "On the operator construct of rational numbers: towards a semantic analysis". *Paper presented at the anual meeting of the American Educational Research Association*, Boston.

Block D. (1987). Estudio didáctico de la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria. *Tesis de maestría*. Departamento de Investigaciones Educativas. CINVESTAV-IPN.

Block, D. (1991). "Validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas en la primaria". *Cero en conducta.* Año 6 (25), mayo-junio y En: *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa.* San José, Costa Rica; 298-304 (26-28 de julio).

Block, D. y. Álvarez, A. M. (1999). "Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas". *Educación Matemática,* Vol. 11 (1), 57-76. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Block, D. e I. Fuenlabrada (1999) "Materiales curriculares de Matemáticas para el nivel básico" En : Remidi, E (Coord) *Encuentros de Investigación Educativa*. (259 - 286). DIE- Plaza y Valdes eds. ISBN 968-856-690-X.

Block, D. P. Martínez (1999) . “Frogs’ jumps: An example of using computers as a means of empirical validation” En: *Eurologo 99. Proceedings of the Seventh European Logo Conference.* Sofía, Bulgaria, págs 150-159 (22-25 agosto).

Block, D., y Solares, D. (s/f). “Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo” (en arbitraje).

Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Memoria para optar por el grado de doctor*. Departent de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Univeristat Autònoma de Barcelona.

Briand, J. (1993). L’énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposisition didactique. *Thèse doctorale*. Unversité de Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l’école élémentaire*, París: APMEP.

Brousseau, G. (1976). “Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques”. *Proceedings of the CIAEM, (*101-117). Louvain: La Neuve.

Brousseau, G. (1981). “Problèmes de didactique des décimaux“. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 2 (3), 37-127. París: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1984). “Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques “. *Communication au Colloque International: Obstacle épistémologique et conflit congnitif.* Montreal.

Brousseau, G. (1992). “Problèmes de didactique de la mesure”. En: N. Brousseau, *La Mesure.* IREM Bordeaux.

Brousseau, G. (1994). “Los diferentes roles del maestro”. En C. Parra, I. Saíz, (comps), *Didáctica de las matemáticas (*65-94). Buenos Aires, Barcelona, México: Piadós Editores.

Brousseau, G. (1998) Théorie des situations didactiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques*. París: La pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1999). “Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales”. Documento fotocopiado.

Brousseau, G. (2000). “Educación y didáctica de las matemáticas”. *Educación Matemática*, Vol 12 (1), 5-37. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, N et Brousseau, G. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. *Document pour les enseignants et pour les fromateurs*. IREM de Bordeaux.

Carraher, T. (1986). “From drawings to buildings; working with mathematical scales”: *International journal of behavioral development*. N. 9. North Holland.

Conne, F. (1992) “Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique”. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*12 (2.3), 221-270*.* París: La Pensée Sauvage.
Charnay, R. (1994). ”Aprender (por medio de) la resolución de problemas”. En C. Parra, I. Saíz (comps), *Didáctica de las matemáticas (*51-63). Buenos Aires, Barcelona, México: Piadós Editores.

Chevallard, Y. (1982). *Sur l’ingénierie didactique.* Texte préparé pour la deuxiéme Ecole d’Eté de Didactique des Mathématiques. Orléans, Juillet.

Chevallard Y., Jullien, M. (1989). *Sur l’enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche société*. IREM d’Aix – Marseille: France.

Chevallard, Y. (1992-a). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique (Psicología congnitiva y educación).

Chevallard, Y. ( 1992-b). “Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apporteés par une approche anthropologique”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112. París: La pensée Sauvage.

Dávila, M. (1991). Situaciones de reparto: una introducción a las fracciones. *Tesis de Licenciatura*. Universidad Pedagógica Nacional.

Dávila, M. (1992). “El reparto y las fracciones“. *Educación Matemática,* Vol. 4 (1), 32-45. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). “Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto”. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* Vol. 1 (2), 268-282. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Dienes, Z.P. (1972). *La mathématique vivante 1. Nombres naturels, entiers, rationnels*. Claude Bernard, París.

Douady, R. (1980). “Approche des nombres réels en situation d’apprentissage scolaire”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 1.1,72-112. París: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1984). “De la didactique des mathématiques à l’heure actuelle”: *Cahier de didactique des mathématiques,* Nº 6. París: IREM.

Duval, R. (1983) “L’obstacle du dédoublement des objets mathématiques”. *Educational Studies in Mathematics*; 14, 385-414.

El Bouazzaoui, H. (1982). Éstude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. *Thèse*, Université de Bordeaux I.

Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales. *Tesis de Doctorado*. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Fregona, D. (1989) Una experiencia en el nivel elemental. La adquisición del concepto de número. *Opera Prima*, No. 2. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Holanda: Reidel Publishing Company, Doredrecht.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel, Dordrecht.

Fuenlabrada, I. (1987) “La conmesuración y el fraccionamiento de la unidad. Una experiencia con maestros” *Memorias de la primera reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa,* (165-176). Merida, Yucatan, México.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14 (3), 325-355. París: La Pensée Sauvage.

Hart, K. M. (1981). *Children understanding of mathematics*. J. Murray, London.

Hart, K. M. (1988). “Ratio and proportion”. In J. Hiebert,  and M. Beher, (Eds), *Number Concepts and operations in the middle grades,* Vol 2, 198-219. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

H. Ratsimba, R. (1982). “Élements d’etude de deux méthodes de mesures rationnelles” *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 3.1, 65-113. París: La Pensée Sauvage.

Hernández, S. (1954) *Aritmética y Nociones de Geometría*; 8ª ed. México: Herrero Hnos. Sucs., S. A.

Hiebert, J. (1988). “Acercamientos teóricos al estudio sobre la adquisición del número” (Olimia Figueras, trad.) En Bergeron, J y Hersovics, N. (comps.), *Psychological Aspects in early Education*, versión preliminar, manuscrito no publicado, Montreal, Canadá.

Hiebert, J. (1989). “Aspectos teóricos sobre la adquisición del concepto de número”. En Bergeron, J. y Hersocovics, N. (Comps.), *Psychological aspectcs in early aritmetic education*, documento interno del Grupo Internacional sobre la Psicología de la Educación Matemática, Primera versión, (1-9), Montreal, Canada.

Inhelder, B., Piaget, J. (1955). *De la logique de l’enfant à la logique de l’adolescent*, PUF, París.

Karplus, R. (1981). “Education and formal thought. A modest proposal”. En E. Siegel (Ed), *New in Piagetian theory and practice*. Hillsdate. New Jersey. Erlbaum.

Karplus, R., Pulos S. and Stage E. (1983). “Proportionnal Reasoning of Early Adolescents”. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (45-90). New York: Academic.

Kieren, T. (1975). “On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers”. In R. Lesh (Ed.) *Number measurement: Papers from a research workshop* (101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1980) “The rational number construct- its elements and mechanisms”. In T.E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (125-149). Columbus, OH: ERIC/AMEAC..

Kieren, T. (1988). “Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal develpment”: In Hiebert J., y M. Behr (Eds) *Number Concepts and operations in tha middle grades*, Vol 2, 162-181. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

Lamon, S. (1991). “Ratio and proportion: connecting content and children’s thinking”. *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol 24 (1), 41-61.

Levain, J. P. (1997). *Faire des maths autremente*. Paris: Harmattan Colección, Espaces Théoriques.

Leysenne, P. (1913). *Tratado de Aritmética Teórica y Práctica* ; 3ª ed (traducción de S. Anízar), (465p). México: Librería del a Vda. de C. Bouret.

Martínez, N. P. (1997). Desarrollo de procedimientos para dividir. Un estuido didáctico. *Tesis de Maestría*. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN.

Maurice, J. (1996). “Problèmes multiplicatifs: l’expérience de l’enseignant, l’action effective de l’élève”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 16, (3), 323-348.

Mopondi, B. (1986). Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l’institutionnalisation d’un algorithme: notion de proportionnalité au cours moyen. *Thèse de 3ème cycle en didactique des mathématiques*. Université de Bordeaux 1.

Moreno, E. (1996). Introducción a la noción de división en la escuela primaria. Un estudio didáctico. *Tesis de Maestría*. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN.

Noelting, G. (1980a). “The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages”. *Educational Studies in Mathematics* (217-253). Holland: Reidel Publishing, Dordrecht.

Noelting, G. (1980b). “The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages. Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics* (331-363). Holland: Holland: Reidel Publishing, Dordrecht.

Ohlsson, S. (1988) Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In Hiebert, J & M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades.* Vol.2 (53-92), USA: Lawrence Erlbaum Associates. National Council of teachers of mathematics.

Painchault, J. (1975) Produit de deux naturels et multiplication au $CE_1$ et au $Ct_{2.}$ IREM, Grenoble. Lycée d'Aix les Bains.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., Bang, V. (1968). *Épistémologie et psychologie de la fonction*, PUF, París.

Ramírez, M. (s/f). La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria. Un estudio de caso. *Tesis de maestría* (en proceso). Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN.

Resnick, L. y Singer J. (1993). "Propotoquantitative origins of ratio reasoning". En: T. P. Carpenter, E. Fennemma, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers : An integration of research* (107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ricco, G. (1982). "Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans". *Educational Studies in Mathematics*, 13, 289-327.

Rockwell, E., Block D., Fuenlabrada I., Candela A., Taboada E. y Navarro L. (1991). "Investigación básica e innovación didáctica: el nuevo manual del instructor comunitario". En: *Memorias del Primer Encuentro de Innovaciones en Educación Básica.* México, Esfinge, y en: *Documento DIE, N*º 44, 22 págs.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure.* Didier Hatier. Bruxelles.

Schwartz, (1988). "Intensive quantity and referent transforming compositions arithemtic operatations": In J. Hiebert, y M. Behr (Eds) *Number Concepts and operations in tha middle grades*. Vol 2. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

Solares, D. (1999). Las fracciones y la división. Estudio didáctico de algunos vínculos. *Tesis de Maestría*. Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV-IPN.

Soto C. y Rouche N. (1995) "Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos": *Educación Matemática,* Vol 7 (1), 77-95. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Steffe, (1988). "Children's construction of number sequences and multplying shemes". En J. Hiebert, y M. Behr (Eds), *Number Concepts and operations in the middle grades,* Vol 2, 119-140. Lawrence Erlbaum Associates. National Council of teachers of Mathematics.

Tourniare, F., and Pulos S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.

Vergnaud, G, (1988). "Multiplicative Structures": Number Concepts and operations in tha middle grades. Vol 2. En. J.Hiebert , y M. Behr (Eds). Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

Waldegg, G. (1996). "La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número": *Educación Matemática,* Vol 8 (2),.5-17. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Zuñiga,A. (1993) "Las Matemáticas Modernas en las Américas: Filosofía de una Reforma". *Educación Matemática,* Vol 4 (1), 10-20. México: Grupo Editorial Iberoamérica.