Tema 8

Extremos

La cuestión de determinar los máximos y mínimos que alcanza una función es de gran importancia en muchos problemas de ingeniería, economía y ciencias en general. Cuando el problema puede reducirse a una sola variable, conocemos métodos para resolverlo matemáticamente: se buscan los valores que anulan la derivada y se determina su comportamiento como máximo o mínimo según el valor que toma la derivada segunda. Cuando el número de variables es mayor disponemos de criterios parecidos que veremos en este capítulo y que, como de costumbre, generalizan lo que ocurre en el caso de una variable real.

8.1. Extremos libres

En esta sección estudiaremos cómo calcular los valores extremos de campos escalares definidos en un conjunto abierto. Las definiciones básicas son similares a las definiciones de funciones reales de variable real.

Definición 8.1 Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\mathbf{x}_0$ un punto que pertenece a una bola contenida en D. Diremos que f tiene un *máximo local* en $\mathbf{x}_0$ si

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$ perteneciente a una cierta bola de centro $\mathbf{x}_0$ (ver Fig. 8.1(a)).

Diremos que f tiene un *mínimo local* en $\mathbf{x}_0$ si

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$ perteneciente a una cierta bola de centro $\mathbf{x}_0$ (ver Fig. 8.1(b)).

Como en el caso de las funciones reales de variable real, hablaremos de *valores extremos* para referirnos simultáneamente a los máximos locales y a los mínimos locales.

En el caso de funciones reales de una variable real sabemos que si la función f tiene un extremo local en un punto x_0 entonces la derivada $f'(x_0) = 0$ o no existe tal derivada. En el caso de campos escalares tenemos un resultado similar.

Teorema 8.2 Si un campo escalar f tiene un extremo local en $\mathbf{x}_0$, entonces o bien $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ (cuando f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$) o bien $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ no existe.

Los puntos en los que el gradiente se anula o no existe se denominan *puntos críticos*. Por el teorema anterior son los únicos puntos en los que un campo escalar puede tener un extremo local. Los puntos en los que el gradiente se anula se denominan *puntos estacionarios*. Llamaremos *puntos de ensilladura* a los puntos estacionarios en los que la función no tiene un extremo local (ver Fig. 8.1(c)).

Si $\mathbf{x_0}$ es un punto estacionario de un campo escalar f, la fórmula de Taylor de segundo orden nos dice que

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{h}\, H(\mathbf{x_0})\, \mathbf{h}^{\mathrm{t}} + ||\mathbf{h}||^{\,2} E_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{h})$$

Podemos interpretar esta igualdad como que el signo de la diferencia $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ depende del signo de la forma cuadrática $H(\mathbf{x_0})$ cuando los puntos $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ están *suficientemente próximos.* Por tanto, la naturaleza del punto estacionario $\mathbf{x_0}$ puede analizarse clasificando la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana $H(\mathbf{x}_0)$. Podemos utilizar, pues, los criterios de clasificación de formas cuadráticas para estudiar si el punto estacionario $\mathbf{x_0}$ es un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura.

Aunque, como ya se ha dicho, se puede utilizar cualquier criterio de clasificación de formas cuadráticas, vamos a establecer uno de ellos que usa como única información las entradas en la matriz hessiana. Para ello, empezamos con algo de notación.

Dada una matriz cuadrada H,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces llamaremos *menores principales* de H, que representaremos por $H_1, H_2, \ldots, H_n$, a los determinantes siguientes:

$$H_1 = a_{11},\ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots, H_n = det(H)$$

Teorema 8.3 (Criterio de las derivadas parciales segundas) Supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en una bola que contiene al punto estacionario $\mathbf{x}_0$. Sea H la matriz hessiana de la función f en $\mathbf{x}_0$. Entonces,

1. Si $H_j > 0$,para todo $1 \leq j \leq n$, entonces f alcanza un mínimo local en $\mathbf{x}_0$.
2. Si $H_j < 0$ cuando j es impar y $H_j > 0$ cuando j es par, entonces f alcanza un máximo local en $\mathbf{x}_0$.
3. En otro caso, el criterio no clasifica.

En el caso particular de funciones de dos variables podemos afirmar un poco más.

Teorema 8.4 Supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en una bola que contiene el punto (x, y) el cual es un punto estacionario, es decir, $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Sean

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

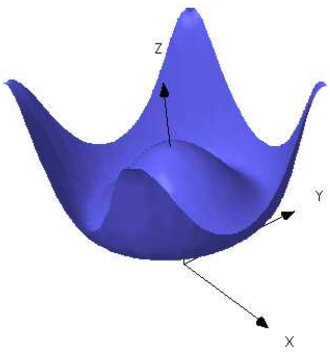
y sea $D = AC - B^2$. Entonces,

(a) si $D > 0$ y $A < 0$, el punto (x, y) es un máximo local;

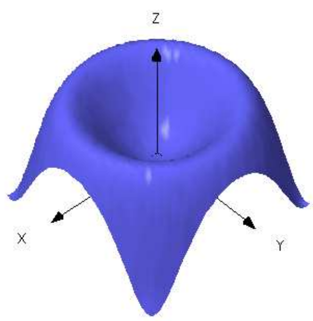
(b) si $D > 0$ y $A > 0$, el punto (x, y) es un mínimo local;

(c) si $D < 0$, el punto (x, y) es un punto de ensilladura.

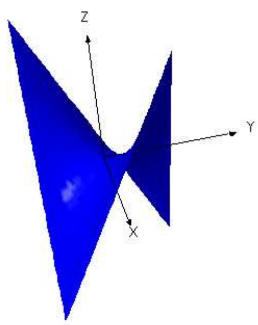
(Observa que, según la notación del Teorema 8.3, $A = H_1$ y $D = H_2$; por lo que la información adicional que proporciona este resultado es el apartado (c); la clasificación de los puntos de ensilladura)



(a) $A < 0$, $D > 0$



(b) $A > 0$, $D > 0$



(c) $D < 0$

Figura 8.1: Tipos de extremos

Ejemplo 8.1 Encuentra los extremos locales del campo escalar $z = x^5y + xy^5 + xy$.

Solución: Comencemos por calcular los puntos críticos, que son la solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(5x^4 + y^4 + 1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(5y^4 + x^4 + 1) = 0 \end{cases}$$

Como los factores $5x^4+y^4+1$ y $5y^4+x^4+1$ son siempre positivos, deducimos que la única solución es el punto $(0,0)$, que es el único punto crítico de f.

Calculemos ahora las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = 20x^3y\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 5x^4 + 5y^4 + 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 20xy^3;$$

y, al evaluarlas en el punto crítico: $A = 0$, $B = 1$ y $C = 0$; por lo que, $D = AC - B^2 = -1$ y, según el Teorema 8.4, z tiene un punto de ensilladura en $(0,0)$ (ver Fig. 8.2).

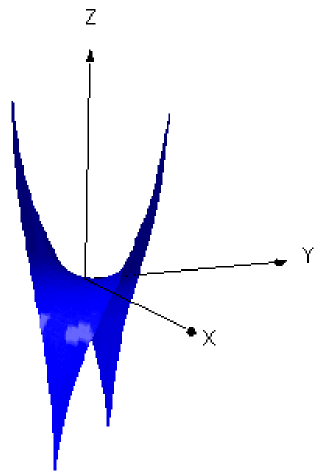


Figura 8.2: Gráfica de $z = x^5y + xy^5 + xy$.

□

Ejercicio 8.1 Encuentra los extremos locales del siguiente campo escalar:

$$f(x,y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

(**Sol.:** Punto de ensilladura en $(0,0)$; mínimos locales en $(1,1)$ y $(-1,-1)$;
máximos locales en $(1,-1)$ y $(-1,1)$))

Ejercicio 8.2 Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Para f tenemos que $D = 0$. ¿Podrías decir si los puntos críticos son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura?

(**Sol.:** Los puntos críticos son mínimos locales))

Ejercicio 8.3 Clasifica los puntos críticos del siguiente campo escalar:

$$z = (x^2 + 3y^2)\, \mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$$

(**Sol.:** Mínimo en $(0,0)$ y máximo en $(0,1)$ y $(0,-1)$;
puntos de ensilladura en $(1,0)$ y $(-1,0)$))

Ejercicio 8.4 Clasifica los puntos críticos del campo escalar $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

(**Sol.:** Mínimo local en $(1,4)$.))

8.2. Extremos condicionados

En la sección anterior hemos estudiado los extremos de funciones definidas en un abierto. Sin embargo, en muchos problemas los extremos deben determinarse cuando las variables están sujetas a una serie de restricciones (que ya no constituyen un conjunto abierto).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $X \subset A$. Se considera la restricción

$$f\Big|_X : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \end{array}$$

es decir, es la función f al considerarla evaluada sólo en los puntos del subconjunto X. Es evidente que los extremos locales de f serán, en general, distintos de los de $f_{|X}$; incluso también ocurrirá que no comparten siquiera los mismos puntos críticos. El problema de determinar los extremos locales de $f_{|X}$ se llama un problema de *extremos condicionados*, aludiendo al hecho de que las variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vienen ligadas por la condición de pertenecer a X. Para determinar condiciones analíticas que garanticen la existencia de extremos condicionados, deben imponerse unas ciertas condiciones de regularidad tanto para la función f como para el conjunto X.

En esta sección vamos a estudiar los extremos de funciones sujetas a restricciones de la forma

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

donde $\mathbf{g}$ es una función de clase C^p con $m < n$ componentes; es decir, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas pero siempre con menor número de ecuaciones que de incógnitas.

Así, en lo que sigue, $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función de una cierta clase C^p en A y X será un conjunto de esa forma.

Vamos a distinguir dos posibilidades para el conjunto de restricciones X, según podamos despejar o no m variables del sistema en función de las $n - m$ variables restantes.

8.2.1. Método de reducción de variables

Suponemos, pues, que tenemos una función de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y queremos hallar los extremos de la función f cuando las variables $(x_1, \ldots, x_n)$ están ligadas por un sistema de m ecuaciones de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. El método consiste en despejar m variables en función de las otras y substituirlas en la función f, por lo que el problema se reducirá a un problema de extremos libres para una función de $n - m$ variables. Veámoslo en un ejemplo.

Ejemplo 8.2 Una partícula de masa m está dentro de una caja de dimensiones x, y, z y tiene la energía de estado

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

donde k es una constante física. Si el volumen de la caja es de 8 dm^3, halla los valores de x, y, z que minimizan la energía de estado.

Solución: Dado que el volumen de la caja viene dado por $xyz = 8$; se trata de resolver el problema de extremos condicionados:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & E(x, y, z) = \dfrac{k^2}{8m}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right) \\ \text{c.p.} & xyz = 8 \end{array}$$

De la restricción, puede despejarse, por ejemplo la varibale $z = \dfrac{8}{xy}$ y, substituyendo en la función E, el problema se reduce a

$$\text{Min. } \ E(x,y) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{x^2y^2}{64}\right)$$

Por tanto, se reduce a un problema de extremos libres, en las variables x e y. Basta, pues, aplicar el procedimiento visto en al sección anterior.

(a) *Puntos críticos.* Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= \frac{k^2}{8m}\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{2xy^2}{64}\right) = 0 \\ E'_y &= \frac{k^2}{8m}\left(-\frac{2}{y^3} + \frac{2x^2y}{64}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{2}{x^3} &= \frac{xy^2}{32} \\ \frac{2}{y^3} &= \frac{x^2y}{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 64 &= x^4y^2 \\ 64 &= x^2y^4 \end{aligned}\right\}$$

Entonces, teniendo en cuenta que x e y son dimensiones de una caja y han de ser positivas ambas:

$$x^4y^2 = x^2y^4 \ \Rightarrow \ x^2 = y^2 \ \Rightarrow \ x = y$$

Substituyendo en la primera ecuación:

$$64 = x^6 \ \Rightarrow \ x = \sqrt[6]{64} = 2$$

de donde se obtiene el punto crítico: $A(2,2)$.

(b) *Clasificación.* Se calcula la matriz hessiana:

$$H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{y^2}{32} & \dfrac{xy}{16} \\ \dfrac{xy}{16} & \dfrac{6}{y^4} + \dfrac{x^2}{32} \end{bmatrix}$$

y, substituyendo los valores en el punto crítico,

$$H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{32} & \dfrac{4}{16} \\ \dfrac{4}{16} & \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{32} \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

de donde,

$$\left.\begin{array}{l} H_1 = \dfrac{k^2}{8m} \cdot \dfrac{1}{2} > 0 \\ H_2 = \left(\dfrac{k^2}{8m}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16}\right) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ es un mínimo.}$$

Por tanto, la solución es: las dimensiones que minimizan la energía de estado son $x = y = z = 2\ dm$.

□

Ejercicio 8.5 Una caja rectangular sin tapa ha de tener un volumen de 12 metros cúbicos. Encontrar las dimensiones de la caja que proporcionan el área mínima.

(**Sol.:** Longitud: $2\sqrt[3]{3}$ m.; ancho: $2\sqrt[3]{3}$ m.; altura: $\sqrt[3]{3}$))

Ejercicio 8.6 Demostrar que una caja rectangular de volumen dado tiene una superficie mínima cuando es un cubo.

8.2.2. Método de multiplicadores de Lagrange

En el apartado anterior se ha visto que para encontrar los extremos cuando las variables están sujetas a una restricción, se utiliza el método de despejar una variable de la ecuación; substituir en la función original y resolver el problema de extremos con una variable menos. Sin embargo, este método no siempre es factible e, incluso, puede llevarnos a no obtener todas las soluciones posibles. De hecho, el despejar una variable de una ecuación consiste en aplicar el teorema de la función implícita visto en el Capítulo 7.

Para obviar estas dificultades, vamos a ver otro método de calcular los extremos de una función, cuando las variables están ligadas por una restricción en forma de una ecuación o de un sistema de ecuaciones (pero siempre en número menor al de variables).

Puede enunciarse ahora ya la condición necesaria, conocida como *método de los multiplicadores de Lagrange*

Teorema 8.5 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C^1(A)$. Sea $X = \{\mathbf{x} \in A\ :\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, con $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ de clase C^1 y cumpliendo que la matriz jacobiana de $\mathbf{g}$ en cada punto del conjunto X tiene rango máximo. Sea $\mathbf{x}_0 \in X$. Si $f_{|X}$ tiene un extremo local en $\mathbf{x}_0$, entonces existen m escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que el punto $\mathbf{x}_0$ es punto crítico de

$$L(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

Introduciendo los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ como variables adicionales en la función L anterior, se reduce el problema de determinar los puntos críticos de f que cumplen las restricciones al problema de determinar los puntos críticos de la función *lagrangiana*

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

Se enuncia ahora la condición suficiente para saber si un punto estacionario es máximo o mínimo. Como antes, esto dependerá del signo de la forma cuadrática dada por la matriz hessiana, aunque en este caso, al haber restricciones, no sirve el estudio realizado en el caso de extremos libres y debe estudiarse el signo de la forma cuadrática restringida al llamado espacio tangente al conjunto de restricciones X. Afortunadamente, la teoría de formas cuadráticas dispone de métodos para mecanizar esta tarea tal y como se propone en el teorema siguiente.

Teorema 8.6 (Clasificación de los puntos críticos) Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C^2(A)$. Sea $X \subset A$ como en el teorema anterior, donde ahora $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ de clase C^2. Supóngase determinados m escalares λ_1, λ_2, ..., λ_m tales que el punto $\mathbf{x}_0$ es punto crítico de

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

Sea Q la matriz expresada por bloques como sigue:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{H} & \mathrm{J} \\ \hline \mathrm{J}^t & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

siendo H la hessiana de $L(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}_0$ y J la jacobiana de $\mathbf{g}$ en $\mathbf{x}_0$. Sea el polinomio en α de grado $n - m$

$$p(\alpha) = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{H} - \alpha \mathrm{I}_n & \mathrm{J} \\ \hline \mathrm{J}^t & \mathbf{0} \end{array}\right|$$

Entonces,

1. Si todas las soluciones de $p(\alpha) = 0$ son positivas, $f_{|X}$ alcanza en $\mathbf{x}_0$ un mínimo local estricto.

2. Si todas las soluciones de $p(\alpha) = 0$ son negativas, $f_{|X}$ alcanza en $\mathbf{x}_0$ un máximo local estricto.

3. En otro caso, el criterio no clasifica.

Ejemplo 8.3 Encuentra los extremos de la función $f(x,y) = x^2y$, con $y > 0$, que verifiquen

$$2x^2 + y^2 = 3$$

Solución: Se trata de un problema de extremos condicionados. Como parece complicado despejar una variable de la ecuación $2x^2 + y^2 = 3$, lo resolvemos aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange:

(a) *Puntos críticos.* Se construye la función *Lagrangiana*

$$L(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda(2x^2 + y^2 - 3)$$

y se buscan los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rrr} L'_x = & 2xy + 4\lambda x = & 0 \\ L'_y = & x^2 + 2\lambda y = & 0 \\ L'_\lambda = & 2x^2 + y^2 - 3 = & 0 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación:

$$x(y + 2\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rr} x = & 0 \\ ó & \\ y = & -2\lambda \end{array}\right.$$

En el caso $x = 0$, sustituyendo en la tercera ecuación sale

$$y^2 = 3 \ \Rightarrow y = \sqrt{3} \quad \text{(la solución } y = -\sqrt{3} \text{ no se considera ya que } y > 0)$$

y, al sustituir este valor en la segunda, resulta $\lambda = 0$. Así, en este caso se tiene el punto crítico:

$$A(0, \sqrt{3}), \quad \lambda = 0$$

En el caso $y = -2\lambda$ se sustituye en la segunda y se obtiene:

$$x^2 - 4\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow x^2 = 4\lambda^2$$

y, al sustituir las dos condiciones en la tercera ecuación, resulta

$$8\lambda^2 + 4\lambda^2 = 3 \ \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Como tiene que ser $y > 0$ e $y = -2\lambda$ sólo puede ser la solución $\lambda = -\frac{1}{2}$ y, entonces, $y = 1$ y el valor de x es

$$x^2 = 4\lambda^2 = 1 \ \Rightarrow x = \pm 1$$

por lo que, en definitiva, se tienen los puntos críticos

$$\begin{array}{rl} B(1,1) & \quad \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ C(-1,1) & \quad \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

(b) *Clasificación.* Para clasificar los puntos se calcula la matriz por bloques:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2y+4\lambda & 2x & 4x \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ \hline 4x & 2y & 0 \end{array}\right)$$

Esta matriz corresponde exactamente a la matriz hessiana de L como función de x, y y λ, separando los bloques respecto de x e y del multiplicador λ.

Para el punto $A(0, \sqrt{3})$, $\lambda = 0$

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ \hline 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$$

y, entonces, hay que calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{3}-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 12(2\sqrt{3}-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \ A \text{ es un mín.}$$

Para el punto $B(1,1)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

y, entonces, hay que calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 2 & 4 \\ 2 & -1-\alpha & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 - 16(-1-\alpha) + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{48}{5} < 0 \Rightarrow \ B \text{ és un máx.}$$

Para el punto $C(-1,1)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

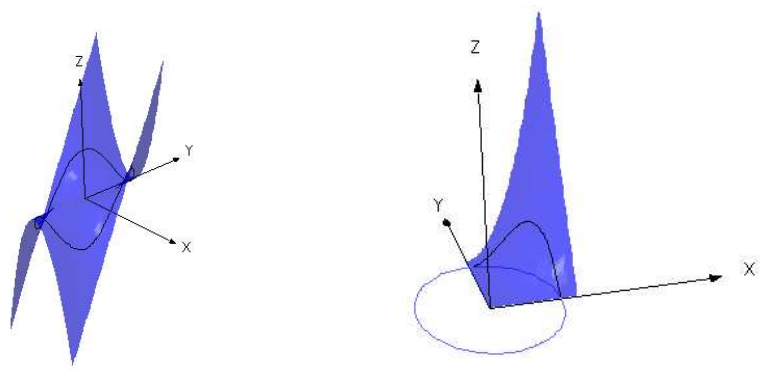
$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ \hline -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

y, entonces, hay que calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} -\alpha & -2 & -4 \\ -2 & -1-\alpha & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 - 16(-1-\alpha) + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{48}{5} < 0$$

por lo que f alcanza en C un máximo.

Para finalizar, veremos gráficamente el proceso realizado. En la Fig. 8.3(a) se ha representado la superficie $z = x^2 y$ y la curva sobre ella corresponde a la imagen de los puntos (x, y) del plano que cumplen la restricción $2x^2 + y^2 = 3$ (elipse). Para un mayor detalle, en la Fig. 8.3(b) se ha representado sólo la parte gráfica correspondiente al octante positivo. La elipse del plano XY es la restricción $2x^2 + y^2 = 3$ y la imagen de dichos puntos dibujan una curva sobre la gráfica de la función $z = x^2 y$.



(a) Gráfica completa (b) Gráfica en el octante positivo

Figura 8.3: Gráfica de $z = x^2 y$

Finalmente, en la Fig. 8.4, se ha representado únicamente la curva restricción, $f_{|X}$; es decir, la función f evaluada en los puntos de la elipse $2x^2+y^2 = 3$ y se han señalado los puntos críticos hallados que como se observa, corresponden a un mínimo y dos máximos locales.

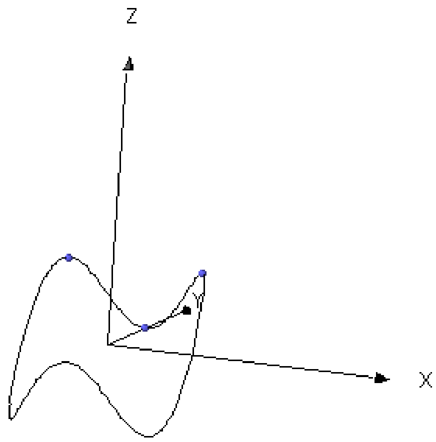


Figura 8.4: Extremos de la función restringida

En dicha Figura 8.4 se observan, además, otro máximo y dos mínimos, que corresponden a la región $y < 0$, que han sido excluidos del estudio.

$\square$

Ejercicio 8.7 Halla los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, que verifican la restricción

$$x^2 + 2y^2 = 2$$

(**Sol.:** Mínimos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$; máximos en $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.)

8.3. Máximos y mínimos absolutos

Por último, haremos una introducción al estudio de la teoría de *máximos y mínimos absolutos* (*o globales*). Recordaremos las definiciones básicas:

Definición 8.7 Supongamos que $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar definido en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$. Diremos que f tiene *un máximo absoluto* (respectivamente, un *mínimo absoluto*) en $\mathbf{x}_0 \in D$ si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (respectivamente, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$) para todo $x \in D$.

El siguiente resultado demuestra la existencia de extremos absolutos en un tipo especial de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es *acotado* si existe una bola que lo contiene y que es *cerrado* si contiene los puntos de su frontera.

Teorema 8.8 (Teorema de existencia de extremos absolutos) Sea D un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo escalar continuo. Entonces existen puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo, respectivamente.

En general, el problema de encontrar los extremos absolutos de un campo escalar es una tarea nada sencilla. Si consideramos el dominio del campo escalar D como una unión de su interior $\mathrm{int}(D)$ y de su frontera, ∂D, podemos dividir el problema de encontrar los puntos en los que un campo escalar alcanza sus extremos absolutos, en subproblemas donde aplicar los resultados de las secciones precedentes; siempre y cuando su frontera pueda expresarse como un conjunto de restricciones de la forma adecuada.

Sea f una función continua definida en una región D de $\mathbb{R}^n$ cerrada y acotada. Para localizar el máximo y el mínimo absoluto de f en D seguiremos los siguientes pasos:

1. Localizar los puntos críticos de f en D (problema de extremos libres).
2. Encontrar los puntos críticos de f considerada como una función definida sólo en ∂D (problema de extremos condicionados).
3. Calcular el valor de f en todos los puntos críticos.
4. Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

Observa que en esta estrategia no será necesario clasificar los puntos críticos.

Ejemplo 8.4 Encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución: Seguimos los pasos indicados.

(1) Puntos críticos en el interior del círculo $x^2 + y^2 < 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

lo que implica que el punto $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ es el único punto crítico en el interior del círculo $x^2 + y^2 < 1$.

(2) Puntos críticos en la frontera $x^2 + y^2 = 1$. Es un problema de extremos condicionados. Como no podemos despejar ninguna variable de la restricción aplicamos el método de multiplicadores de Lagrange. Formamos la función lagrangiana,

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x - y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

y calculamos sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1 - 2x}{2x} \\ \lambda = \dfrac{1 - 2y}{2y} \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

y substituyendo en la tercera ecuación

$$x^2 + x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto, se obtienen los puntos críticos $B(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ y $C(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

(3) Calculamos el valor de la función f en los puntos críticos hallados.

$$\begin{cases} f(A) = \dfrac{1}{2} \\ f(B) = 2 - \sqrt{2} \\ f(C) = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

(4) Seleccionamos los puntos en los que la función alcanza el valor mayor y el valor menor. Comparando los valores del paso (3) tenemos que f tiene un mínimo absoluto en $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y el máximo absoluto se alcanza en el punto $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Los valores mínimo y máximo que f alcanza son $\frac{1}{2}$ y $2+\sqrt{2}$, respectivamente.

$\square$

Ejercicio 8.8 Encuentra los valores máximo y mínimo que alcanza la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el círculo unidad.

(**Sol.:** $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto)

En el ejemplo anterior, la frontera del dominio estaba formada por una única curva (la circunferencia); sin embargo puede ocurrir que la frontera de D esté formada por una unión de diversas curvas (como, por ejemplo, la frontera de un cuadrado que está formada por sus cuatro lados). En este caso, el paso (3) implica que tendremos que calcular los puntos críticos de tantas funciones de variable real como curvas forman la frontera. Además, en el paso (4) deberemos añadir los puntos donde se unen las diversas curvas que forman la frontera (vértices).

Ejemplo 8.5 Considera una placa delgada que tiene la forma del triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(-1, -1)$ y $C(1, -1)$. Suponiendo que la temperatura en cada punto viene dada por la función $T(x, y) = x^2 - xy + y^2$; determina las temperaturas mínima y máxima (absolutas) en la placa.

Solución: La frontera del triángulo está formada por tres segmentos de recta. Empezamos hallando las ecuaciones de las tres rectas que forman los lados del triángulo, AB, AC y BC.

Para cada recta, se necesita un punto y un vector:

$$AB \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(1, 0) \\ \mathbf{v} = (-2, -1) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} \quad \Rightarrow \quad x = 2y + 1.$$

Como A y C tienen la misma coordenada $x = 1$, es fácil deducir que AC es una recta vertical de ecuación: $x = 1$.

Por último, como B y C tienen la misma coordenada $y = -1$, es fácil deducir que BC es una recta horitzontal de ecuación $y = -1$.

En la Figura 8.5 se ha representado el triángulo, indicando además los puntos críticos que hallaremos a continuación.

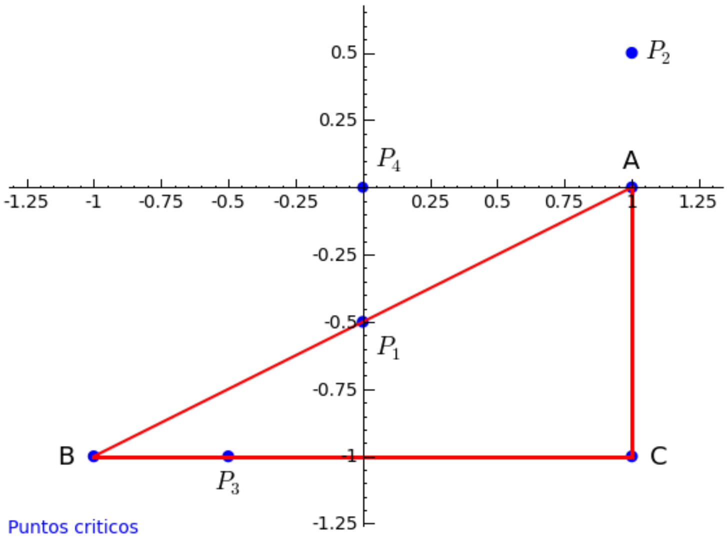


Figura 8.5: Extremos en un recinto triangular

Como se trata de un problema de extremos absolutos en un recinto con frontera (los lados del triángulo) dividiremos el problema en subproblemas:

(1) Puntos críticos en el interior del triángulo. En este caso, es un problema de extremos libres y los puntos críticos deben anular las derivades parciales de T:

$$\left.\begin{array}{l} T'_x = 2x - y = 0 \\ T'_y = -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x = y = 0$$

Por tanto, deberíamos obtener un punto crítico $P_4(0,0)$, pero este punto no pertenece al interior del triángulo (ver Fig. 8.5) y, por ello, no se considera.

(2) Puntos críticos en el lado AB de ecuación $x = 2y + 1$. Substituyendo la restricción en T reducimos el problema a encontrar los puntos críticos de

$$T(y) = (2y+1)^2 - (2y+1)y + y^2 = 3y^2 + 3y + 1$$

y, entonces, al ser un problema de una variable,

$$T'(y) = 6y + 3 = 0 \; \Rightarrow \; y = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos un punt crítico $P_1(0, -\frac{1}{2})$ (pertenece al lado AB).

(3) Puntos críticos en el lado AC de ecuación $x = 1$. Substituyendo la restricción en T reducimos el problema a encontrar los puntos críticos de

$$T(y) = 1 - y + y^2$$

y, entonces, al ser un problema de una variable,

$$T'(y) = 2y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}$$

Por tanto, deberíamos obtener un punto crítico $P_2(1, \frac{1}{2})$, pero este punto no pertenece al lado AC (ver Fig. 8.5) y, por ello, no se considera.

(4) Puntos críticos en el lado BC de ecuación $y = -1$. Substituyendo la restricción en T reducimos el problema a encontrar los puntos críticos de

$$T(x) = x^2 + x + 1$$

y, entonces, al ser un problema de una variable,

$$T'(x) = 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos un punto crítico $P_3(-\frac{1}{2}, -1)$ (pertenece al lado BC).

(5) Como la frontera es unión de varias curvas, debemos añadir a los puntos críticos anteriores los puntos de unión de las curvas (vértices del triángulo): $A(1, 0)$, $B(-1, -1)$ y $C(1, -1)$.

(6) Calculamos los valores de T en cada punto crítico.

$$\begin{array}{rcl} T(0, -\frac{1}{2}) & = & \frac{1}{4} \\ T(-\frac{1}{2}, -1) & = & \frac{7}{4} \\ T(0, 1) & = & 1 \\ T(-1, -1) & = & 1 \\ T(1, -1) & = & 3 \end{array}$$

Y, por tanto, el mínimo se alcanza en el punto $(0, -\frac{1}{2})$, con una temperatura de $\frac{1}{4}$ de grado y el máximo se alcanza en el vértice $(1, -1)$ con una temperatura de 3 grados.

$\square$

Ejercicio 8.9 Encuentra el valor máximo y el valor mínimo del campo escalar $f(x, y) = xy - 2x - 3y$ en la región triangular

$$T = \{\,(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4,\, 0 \leq y \leq 2x\,\}$$

(**Sol.:** El valor máximo es 0 y el valor mínimo es -8)

Ejercicio 8.10 Encuentra los extremos absolutos del campo escalar $f(x, y) = \sin x + \cos y$ en el rectángulo R definido por $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$.

(**Sol.:** -2 es el mínimo absoluto y 2 es el máximo absoluto)

8.4. Problemas adicionales

Ejercicio 8.11 Calcula los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

(**Sol.:** mínimo en $(1, 2)$)

Ejercicio 8.12 Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$

(**Sol.:** mínimo en $(1/2, 1, 1)$)

Ejercicio 8.13 Calcula los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, con $x > 0$ e $y > 0$, condicionados por $\log(x^2) + y^2 = 1$.

(**Sol.:** mínimo en $(1, 1)$)

Ejercicio 8.14 Calcula los puntos de la curva $x^2 + y = 1$ cuya distancia al origen de coordenadas sea mínima o máxima.

(**Sol.:** máximo en $(0, 1)$; mínimos en $(\pm\sqrt{2}, -1)$)

Ejercicio 8.15 Halla los extremos de la función $f(x, y) = x + 2y$ condicionados por $x^2 + y^2 = 5$.

(**Sol.:** máximo en $(1, 2)$; mínimo en $(-1, -2)$)

Ejercicio 8.16 Halla los extremos de la función $f(x, y) = x^2y$, con $y > 0$, que verifican la restricción $2x^2 + y^2 = 3$.

(**Sol.:** mínimo en $(0, \sqrt{3})$; máximos en $(\pm 1, 1)$)

Ejercicio 8.17 Halla el punto o puntos de la curva $\left\{ \begin{array}{l} x + z^2 = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right.$ cuya distancia al punto $(1, 0, 0)$ sea mínima.

(**Sol.:** $(0, 1, 0)$)

Ejercicio 8.18 La presión en el interior de un fluido viene descrita por la función $P(x, y, z) = xy + xz + yz$. Calcula la presión máxima en los puntos de la superficie $2x + 3y + z = 4$ sumergida en dicho fluido.

(**Sol.:** 2)

Ejercicio 8.19 Considera la función $f(x, y, z) = \log(xyz)$ definida para $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Halla los extremos relativos condicionados por $xy + yz + zx = 3$.

(**Sol.:** máximo en $(1, 1, 1)$ con valor 0)

Ejercicio 8.20 Halla los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, condicionados por

$$\begin{cases} xy^2 + yx^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(**Sol.:** mínimo en $(2, 2, 4)$)

Ejercicio 8.21 Halla un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que maximice la función $2x^2 + 2y^2 + z^2 - xy$ definida en el dominio $x > 0$ e $y < 0$.

(**Sol.:** máximo en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$)

Ejercicio 8.22 Encuentra el valor máximo y el valor mínimo (absolutos) del campo escalar $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ en la región triangular de vértices $A(0, 0)$, $B(0, 6)$ y $C(6, 0)$.

(**Sol.:** El valor máximo es 4 y el valor mínimo es -64)

Ejercicio 8.23 Halla el punto del plano $3x - 4y + 2z - 32 = 0$ que está más cerca del origen de coordenadas y calcula esa distancia mínima.

(**Sol.:** $(\frac{32}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{32}{9})$; $\frac{16}{3}$)

Ejercicio 8.24 Encuentra los valores máximo y mínimo de la función definida por $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en la región rectangular $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 4$.

(**Sol.:** El valor máximo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y el valor mínimo es $\frac{1}{5}$)