Tema 7

Teoremas del cálculo diferencial

En este capítulo se abordarán algunos de los resultados más conocidos del cálculo diferencial que, en general, se corresponden con generalizaciones adecuadas de los clásicos teoremas del cálculo de una variable: teorema del valor medio, teorema de Taylor, etc. Mención aparte merece, por el uso necesario de varias variables en su formulación, el teorema de la función implícita; resultado éste de mucha trascendencia tanto para el estudio posterior de máximos y mínimos de funciones como el estudio, en cursos más avanzados, de la teoría y resolución de ecuaciones diferenciales.

7.1. Teorema del valor Medio

El teorema del valor medio, en funciones de una variable, trata del problema de evaluar la diferencia $f(x+t) - f(x)$ estableciendo la conocida fórmula

$$f(x+t) - f(x) = f'(c)t$$

suponiendo la existencia de la derivada f' y siendo c un punto del intervalo de extremos x y $x+t$.

El problema de evaluar la diferencia $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ para funciones de varias variables, puede reducirse a un problema de funciones de una sola variable introduciendo una variable adicional t y considerando la función auxiliar

$$F(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$$

manteniendo fijas las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{h}$. Entonces, conforme t varía de 0 a 1, el punto de coordenadas $\mathbf{x} + t\mathbf{h}$ recorre el segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} + \mathbf{h}$. Suponiendo expresamente que las derivadas parciales son continuas y aplicando el Teorema del Valor Medio a $F(t)$ en el intervalo $[0, 1]$, se obtiene

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

donde $0 < \theta < 1$. Por otra parte, aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$$

y, finalmente, si $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, resulta

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) h_i$$

donde ξ es un punto del segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Este razonamiento se resume en

Teorema 7.1 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas en D, siendo éste un conjunto abierto y convexo. Entonces para cada par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h} \in D$ se verifica

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) h_i$$

donde ξ es un punto del segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Una aplicación de este teorema se da en el cálculo de errores. El problema a abordar consiste en conocer cómo afecta al valor de una función, el error cometido en la determinación del valor de las variables.

Medición de errores

En la mayoría de los casos, los resultados obtenidos al utilizar aparatos de medida para evaluar determinadas magnitudes contienen errores propios de las mediciones aproximadas que se realizan. Aún en el caso de obtener medidas exactas, las operaciones llevadas a cabo por medio de ordenadores son simplemente aproximaciones. Esto es debido, fundamentalmente, a la precisión finita con que operan y almacenan los datos. Si $\tilde{a}$ es un valor aproximado de una cantidad a, llamaremos *error absoluto* la diferencia

$$\epsilon(a) = a - \tilde{a}$$

Si $\epsilon(a) > 0$ la aproximación es por defecto y si $\epsilon(a) < 0$ la aproximación es por exceso.

El *error relativo* de a se define como

$$\epsilon_r(a) = \frac{\epsilon(a)}{a} = \frac{a - \tilde{a}}{a}, \quad a \neq 0$$

Esta expresión parece poco útil, porque en realidad a es una cantidad que se desconoce. Por esta razón, cuando $|\epsilon(a)| \ll |\tilde{a}|$, suele utilizarse la aproximación

$$\epsilon_r(a) \approx \frac{\epsilon(a)}{\tilde{a}}$$

En la práctica suelen utilizarse cotas de estos errores. Una *cota del error absoluto* de a es un número real positivo M tal que

$$|\epsilon(a)| \leq M$$

De un modo similar, una *cota del error relativo* de a es un número real positivo N tal que

$$|\epsilon_r(a)| \leq N$$

Propagación de errores

Supongamos que tenemos n cantidades (datos obtenidos por medio de mediciones, cálculos, etc.) agrupadas en un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sus correspondientes aproximaciones $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. Supongamos también que f es una función de varias variables diferenciable en un dominio bastante amplio

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & f(\mathbf{x}) \\ & \tilde{\mathbf{x}} & \longmapsto & f(\tilde{\mathbf{x}}). \end{array}$$

Nuestro objetivo es conocer cómo se propagan los errores por medio de la función f. Podemos pensar que la función f es un algoritmo o simplemente un conjunto de operaciones aritméticas.

El error absoluto que se produce al actuar f sobre $\mathbf{x}$ viene dado por

$$\begin{array}{rcl} \epsilon(f(\mathbf{x})) & = & f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) \\ & = & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1 \pm \epsilon(x_1), x_2 \pm \epsilon(x_2), \ldots, x_n \pm \epsilon(x_n)), \end{array}$$

y, aplicando el Teorema del Valor Medio,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(x_i - \tilde{x}_i) \tag{7.1}$$

donde $\xi = \mathbf{x} + \alpha(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ i $\alpha \in (0,1)$. Por la continuidad de las derivadas parciales, se puede suponer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{x}}),\ 1 \leq i \leq n$, y calculando valores absolutos, obtenemos finalmente una cota del error absoluto:

$$|\epsilon(f(\mathbf{x}))| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{x}}) \right| \cdot |\epsilon(x_i)| \tag{7.2}$$

Ejemplo 7.1 El volumen de una pirámide triangular (de base un triángulo equilátero) de altura h y de arista de la base a es:

$$V = \frac{\sqrt{3}a^2 h}{12}$$

Al medir la arista de la base y la altura de la pirámide se han obtenido $a = 24 \pm 0{,}6$ *cm.* y $h = 95 \pm 0{,}4$ *cm.* ¿Qué error máximo tendrá el cálculo del volumen?. ¿Cuánto vale dicho volumen?

Solución: Los datos conocidos son las cotas de los errores absolutos ϵ_a y ϵ_h de las magnitudes a y h, respectivamente; es decir,

$$|\epsilon_a| \leq 0{,}6; \qquad |\epsilon_h| \leq 0{,}4$$

por lo que, aplicando la fórmula (7.2), el error absoluto del volumen, ϵ_V vendrá acotado por

$$|\epsilon_V| \leq \left|\frac{\partial V}{\partial a}\right| |\epsilon_a| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| |\epsilon_h|$$

de donde

$$|\epsilon_V| \leq \left|\frac{\sqrt{3}ah}{6}\right| |\epsilon_a| + \left|\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\right| |\epsilon_h|$$

y substituyendo los valores $a = 24$ y $h = 95$ se tiene

$$|\epsilon_V| \leq 380\sqrt{3} \cdot 0{,}6 + 48\sqrt{3} \cdot 0{,}4 \approx 428{,}16\ cm$$

El volumen calculado seria de

$$V = \frac{\sqrt{3}a^2h}{12} \approx 7898{,}15\ cm$$

con un error máximo de 428,16 cm.

□

Ejercicio 7.1 El área de un triángulo es $\frac{1}{2}ab\sin C$ donde a y b son las longitudes de dos lados y C es el ángulo comprendido. Al medirlos se ha obtenido que $a = 150 \pm 0{,}5$, $b = 200 \pm 0{,}5$ y $C = 60° \pm 2°$. ¿Qué error tendrá el cálculo del área?

(**Sol.:** 337,58; 25 %)

Ejercicio 7.2 El peso específico de un cuerpo viene dado por la fórmula

$$s = \frac{A}{A - W}$$

siendo A el peso en el aire y W el peso en el agua. ¿Cual es el error máximo posible en el valor calculado de s si $A = 9 \pm 0{,}01\ Kg.$ y $W = 5 \pm 0{,}02\ Kg.$ Determina también el porcentaje máximo del error cometido.

(**Sol.:** 0,0143; 0,639 %)

Ejercicio 7.3 El principio de Arquímedes establece que cuando un cuerpo es sumergido en el agua, la diferencia entre los pesos del cuerpo en el aire y en el agua es igual al volumen del agua desplazada. Como consecuencia, la densidad de un cuerpo puede calcularse mediante la fórmula

$$s = \frac{m}{m - \overline{m}}$$

donde s es la densidad, m es el peso del cuerpo en el aire y $\overline{m}$ el peso del cuerpo en el agua (se trabaja con el sistema de unidades CGS, centímetro–gramo–segundo).

Si $m = 100 \pm 0{,}005\ g.$ y $\overline{m} = 88 \pm 0{,}008\ g.$, encontrar el valor de la densidad del cuerpo y el error máximo en la medida de la densidad s.

(**Sol.:** $s = 8{,}333 \pm 0{,}0086\ gr/cm^3$)

En ocasiones, se conocen cotas de los errores relativos en las medidas lo cual permite conocer, de nuevo, una cota del error relativo en la magnitud calulada a partir de ellas.

Ejemplo 7.2 La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos de masas M y m separados a una distancia R, viene dada por la fórmula:

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Si se considera que la masa de uno de los cuerpos (M) permanece constante, estima el error máximo en el cálculo de la fuerza F cuando m tiene un error máximo del 2 % y la distancia R del 3 %.

Solución: Sean ϵ_m, ϵ_R y ϵ_F los errores absolutos de las magnitudes m, R y F, respectivamente. Entonces, se sabe que

$$\frac{|\epsilon_m|}{m} \leq 0{,}02 \quad i \quad \frac{|\epsilon_R|}{R} \leq 0{,}03$$

Así, aplicando la fórmula (7.2),

$$|\epsilon_F| \leq \left|\frac{\partial F}{\partial m}\right| |\epsilon_m| + \left|\frac{\partial F}{\partial R}\right| |\epsilon_R|$$

de donde

$$|\epsilon_F| \leq \left|\frac{GM}{R^2}\right| |\epsilon_m| + \left|\frac{-2GMm}{R^3}\right| |\epsilon_R|$$

y dividiendo por $F = G\frac{Mm}{R^2}$

$$\frac{|\epsilon_F|}{F} \leq \frac{|\epsilon_m|}{m} + 2\frac{|\epsilon_R|}{R} \leq 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}03 = 0{,}08$$

y, por tanto, el error máximo en F es del 8 %.

□

Ejercicio 7.4 ¿Con qué exactitud puede calcularse el volumen de un cilindro circular recto, $V = \pi r^2 h$, a partir de mediciones de r y h que tienen un error máximo de 1 %?

(**Sol.:** 3 %)

Ejercicio 7.5 Si se quiere calcular el área de un rectángulo largo y estrecho a partir de las mediciones de la longitud y la altura, ¿qué dimensión se ha de medir con más cuidado? Explica razonadamente la respuesta.

(**Sol.:** longitud)

7.2. Teorema de Taylor

El teorema del Valor Medio proporciona una aproximación de primer orden, también llamada lineal, al valor de la diferencia $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$. En algunas ocasiones se necesitan aproximaciones de orden superior y el método para conseguirlo lo proporcionan los métodos de Taylor que permiten el desarrollo de una función $f(\mathbf{x})$ entorno a un punto $\mathbf{x}_0$ hasta un cierto orden que depende, naturalmente, de la regularidad de la función f. Para los propósitos de este curso baste enunciar el desarrollo de segundo orden.

Teorema 7.2 (Fórmula de Taylor de segundo orden) Si f es un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en una bola abierta $B_r(\mathbf{x}_0)$, entonces para todo $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ tenemos

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\, \mathbf{h}\, H(\mathbf{x_0})\, \mathbf{h}^{\mathrm{t}} + ||\mathbf{h}||^{\,2} E_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{h})$$

donde $H(\mathbf{x_0})$ es la matriz hessiana de f en $\mathbf{x_0}$ y $E_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{h})$ es una función que tiende a 0 cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Ejemplo 7.3 Expresa el polinomio $p(x,y) = y^2+3xy-2x^2+1$ en potencias de $x-1$ e $y+1$.

Solución: Como se trata de un polinomio de segundo grado, basta aplicar el desarrollo de segundo orden a $p(x,y)$ en el punto $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$. Llamando $\mathbf{h} = (x-1, y+1)$, se tiene

$$p(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = p(\mathbf{x}_0) + \nabla p(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{2}\,\mathbf{h}\,H(\mathbf{x_0})\,\mathbf{h}^{\mathrm{t}}$$

En primer lugar,

$$p(1,-1) = -3$$

Ahora, las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 3y - 4x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(1,-1) = -7 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 2y + 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(1,-1) = 1 \end{aligned}$$

y las de segundo orden,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -4 \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 3 \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2$$

por tanto,

$$p(x,y) = -3 + (-7,1)\cdot(x-1,y+1) + \frac{1}{2}(x-1,y+1)\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

y, operando,

$$p(x,y) = -3 - 7(x-1) + (y+1) - 2(x-1)^2 + 3(x-1)(y+1) + (y+1)^2$$

□

Ejercicio 7.6 Expresa el polinomio $p(x,y) = x^2 + y^2$ en potencias de $x-1$ e $y-1$.

(**Sol.:** $2 + 2(x-1) + 2(y-1) + (x-1)^2 + (y-1)^2$)

7.3. Teorema de la Función Inversa

Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales determinado, es posible expresarlo en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y se sabe que la solución viene dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Cuando el sistema de ecuaciones es no lineal, ya no puede representarse por una matriz sino por un sistema de funciones:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) = b_2 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_n) = b_n \end{array}\right\}$$

que, llamando $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, puede escribirse abreviadamente

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

En el caso de existir la función inversa $\mathbf{F}^{-1}$, la solución vendrá dada por $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{b})$.

En este apartado veremos condiciones suficientes para que eso ocurra preservando además dicha función las propiedades de regularidad, continuidad y diferenciabilidad, de la función $\mathbf{F}$.

Empecemos recordando algunos conceptos básicos de las funciones inversas: una aplicación $f : A \longrightarrow B$ admite inversa si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = id_B \quad \text{y} \quad g \circ f = id_A$$

Si tal aplicación g existe, es única y se llama *la inversa* de f, que se representa por $g = f^{-1}$.

Puede comprobarse que, f admite inversa si, y sólo si, f es biyectiva; es decir, elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B (*inyectividad*) y cada elemento de B es imagen (única) de un elemento de A (*sobreyectividad*).

Definición 7.3 Sea $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con D un conjunto abierto. Se dice que $\mathbf{f}$ es *localmente biyectiva* en $\mathbf{x_0} \in D$ si existe un entorno abierto de $\mathbf{x_0}$, U, tal que

$$\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbf{f}(U) \text{ es biyectiva}$$

La función $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(U) \longrightarrow U$ se llama *inversa local* de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x_0}$.

A continuación se verán condiciones suficientes para garantizar la existencia de inversa local diferenciable:

Teorema 7.4 (Función Inversa) Sean $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con D un conjunto abierto y $\mathbf{x}_0 \in D$ tales que

(i) $\mathbf{f}$ es de clase C^1 en D

(ii) $Det\,(\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$

siendo $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$. Entonces, existen U y V entornos abiertos de $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, respectivamente, verificando

1. $\mathbf{f} : U \longrightarrow V$ es biyectiva
2. $\mathbf{f}^{-1} : V \longrightarrow U$ es de clase C^1 en V
3. $\mathrm{J}_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(x)) = (\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x))^{-1}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in U$

Ejemplo 7.4 Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\mathbf{f}(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y\ ,\ \mathrm{e}^x \sin y)$. Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

(i)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\,\mathrm{e}^x \sin y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

(ii) $|\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(a, b)| = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^a \cos b & -\,\mathrm{e}^a \sin b \\ \mathrm{e}^a \sin b & \mathrm{e}^a \cos b \end{vmatrix} = \mathrm{e}^a \neq 0$

y, aplicando el teorema anterior, existen U, V entornos abiertos de (a, b) y $\mathbf{f}(a, b)$, respectivamente, de manera que

1. $\mathbf{f} : U \longrightarrow V$ es biyectiva

2. $\mathbf{f}^{-1} : V \longrightarrow U$ es de clase C^1 en V

3. $\mathrm{J}_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(x,y)) = \left(\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x,y)\right)^{-1}, \quad \forall\ (x,y) \in U$

Es decir, $\mathbf{f}$ admite inversa local en cada punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. No obstante, $\mathbf{f}$ no admite inversa global en $\mathbb{R}^2$ porque $\mathbf{f}$ no es inyectiva en $\mathbb{R}^2$ ya que

$$\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{f}(x, y+2\pi)$$

Ejercicio 7.7 Sea la función $\mathbf{f}(x,y,z) = (\mathrm{e}^x, \sin(x+y), \mathrm{e}^z)$. Prueba que $\mathbf{f}$ es localmente inversible en $(0,0,0)$, pero no admite una inversa en ningún entorno de $(0,0,0)$ que contenga a $(0,\pi,0)$.

7.4. Teorema de la Función Implícita

Ocurre con frecuencia que determinadas magnitudes físicas vienen relacionadas entre sí por una fórmula en la que no es posible explicitar alguna de ellas en función de las otras; por ejemplo, las ecuaciones de estado de un gas de la termodinámica, que relacionan el volumen V, la presión P y la temperatura T. Sin embargo, cabe esperar que, fijando una presión y una temperatura determinadas, pueda calcularse el volumen que ocupa el gas. Este ejemplo ilustra el concepto de función definida implícitamente por una ecuación, que se desarrolla a continuación.

Una ecuación de la forma $y = f(x)$ se dice que define explícitamente a y como función de x. En realidad, toda ecuación puede interpretarse como una relación entre las variables (x,y): para cada valor de x puede encontrarse un valor de y de forma que (x,y) verifica la relación dada. Para que esta relación sea entendida como una función hay que exigir la unicidad de la imagen y.

Así pues, cuando se tiene una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$, se dice que define *implícitamente* a y como función de x, si para cada x existe un *único* y de forma que (x,y) verifica $F(x,y) = 0$.

Además, sería conveniente que las propiedades de F (continuidad, diferenciabilidad,...) también las conserve la función implícita, así definida.

Se verán, a continuación, condiciones suficientes para garantizar la existencia de función implícita en un entorno de un punto. Para dar la versión general del teorema, aplicable a un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, será necesario antes introducir alguna notación específica:

Considérese una ecuación de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ donde la función $\mathbf{F}$ está definida $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}^q$; es decir, el sistema tiene más variables que ecuaciones. Se buscan condiciones suficientes para que esta ecuación defina implícitamente a q de sus variables como funciones de las p variables restantes. Por comodidad se supondrá que se desean escribir las q últimas variables en función de las p primeras. Para distinguirlas con claridad se representarán con letras distintas; es decir, se escribirán las variables de $\mathbf{F}$ como

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Además, si $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_q)$ y $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in D$ se denotará

$$Det\left(\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_q)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_q)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

Teorema 7.5 (Función Implícita) Sean $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, con D un conjunto abierto, y $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in D$ tales que

(i) $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{F}$ de clase C^m en D $(m \geq 1)$

(iii) $Det\left(\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_q)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_q)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) \neq 0$

Entonces, existen $W \subseteq \mathbb{R}^p$, entorno abierto de $\mathbf{a}$, y una única función de p variables $\mathbf{f} : W \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$, verificando

1. $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{f}$ es de clase C^m en W
3. $\mathbf{F}(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_q(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall\ \mathbf{x} \in W$

Notad que la condición (3) de la conclusión nos dice que las variables y_j pueden identificarse con las funciones $f_j(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq q$, lo que equivale a decir que están definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones.

Ejemplo 7.5 Sean

$$\begin{array}{rcl} F_1(x,y,z) & := & xy^2 - 2yz + z^3 - 8 \\ F_2(x,y,z) & := & x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + z \end{array}$$

El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} F_1(x,y,z) & = & 0 \\ F_2(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right\}$$

define implícitamente a y y z como funciones de x en un entorno del punto $P(2,-2,0)$.

Solución: Se comprueban las hipótesis del teorema de la función implícita:

(i) $F_1(P) = 2\cdot(-2)^2 - 8 = 0$, $F_2(P) = 2^2 + (-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 + (-2) = 0$.

(ii) $F_1,\ F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, por ser funciones polinómicas.

(iii) $\left|\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}(P)\right| \neq 0$:

$$\left|\begin{array}{cc} 2xy - 2z & -2y + 3z^2 \\ 2y + x + 1 & 2z + 1 \end{array}\right|_{(x,y,z)=(2,-2,0)} = \left|\begin{array}{cc} -8 & 4 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = -4$$

Entonces, existen un entorno abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ de $x = 2$, y una única función $\mathbf{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, verificando

1. $\mathbf{f}(2) = (-2, 0)$
2. $\mathbf{f} \in C^1(V)$
3. $\left.\begin{array}{ll} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) & = 0 \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) & = 0 \end{array}\right\}\ \forall x \in V.$

Esta última condición permite, además, calcular las derivadas de $\mathbf{f}$ en $x = 2$ (derivación implícita):

Se sabe del apartado (3) anterior que

$$\left.\begin{array}{l} xf_1^2(x) - 2f_1(x)f_2(x) + f_2^3(x) - 8 = 0 \\ x^2 + f_1^2(x) + f_2^2(x) + xf_1(x) - x + f_1(x) + f_2(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \forall x \in V.$$

Derivando este sistema respecto de x se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} f_1^2(x) + 2xf_1(x)f_1'(x) - 2(f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x)) + 3f_2^2(x)f_2'(x) = 0 \\ 2x + 2f_1(x)f_1'(x) + 2f_2(x)f_2'(x) + f_1(x) + xf_1'(x) - 1 + f_1'(x) + f_2'(x) = 0 \end{array}\right\}$$

Particularizando para $x = 2$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} f_1^2(2) + 4f_1(2)f_1'(2) - 2(f_1'(2)f_2(2) + f_1(2)f_2'(2)) + 3f_2^2(2)f_2'(2) = 0 \\ 4 + 2f_1(2)f_1'(2) + 2f_2(2)f_2'(2) + f_1(2) + 2f_1'(2) - 1 + f_1'(2) + f_2'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

Y, teniendo en cuenta el apartado (1) de la conclusión, se conocen los valores $f_1(2) = -2$ y $f_2(2) = 0$, por lo que resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4 - 8f_1'(2) + 4f_2'(2) = 0 \\ 4 - 4f_1'(2) - 2 + 2f_1'(2) - 1 + f_1'(2) + f_2'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

y, agrupando los términos,

$$\left.\begin{array}{l} -8f_1'(2) + 4f_2'(2) = -4 \\ -f_1'(2) + f_2'(2) = -1 \end{array}\right\}$$

que es un sistema lineal cuya solución es:

$$f_1'(2) = 0 \qquad f_2'(2) = -1$$

$\square$

Ejercicio 7.8 Demuestra que $y\cos x = 0$ define una función implícita diferenciable $y = \varphi(x)$ en un entorno de (0,0) . Calcula $\varphi'(0)$.

(**Sol.:** $\varphi'(0) = 0$)

Ejercicio 7.9 Comprueba que la ecuación $x^2 + xy + y^3 = 11$ define a y como función implícita de x en un entorno de $x = 1$, en el cual toma el valor $y = 2$. Calcula las derivadas primera y segunda de y en $x = 1$.

(**Sol.:** $y'(1) = \frac{-4}{13}$; $y''(1) = -\frac{426}{13^3}$)

Ejercicio 7.10 Comprueba que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ define a $z = \phi(x, y)$ implícitamente en un entorno de $(6, -3)$, tomando en ese punto el valor $z = -2$. Calcula el gradiente de ϕ en $(6, -3)$.

(**Sol.:** $(3, -\frac{3}{2})$)

7.5. Problemas adicionales

Ejercicio 7.11 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $15{,}4 \pm 0{,}1$ cm. y uno de sus catetos $6{,}8 \pm 0{,}1$ cm. ¿Con qué exactitud puede calcularse el otro cateto?

(**Sol.:** error máximo de 0,16 cm)

Ejercicio 7.12 En un experimento para determinar el valor de la aceleración g de la gravedad, se mide el tiempo t de caída, en segundos, de un cuerpo que se deja caer una distancia fijada x partiendo del reposo . La fórmula utilizada es, entonces,

$$g = \frac{2x}{t^2}$$

Si los aparatos de medida, permiten establecer un error máximo para x del 1 % y para t del 0,5 %. ¿Cuál es el error máximo que cabe esperar en la determinación de g?

(**Sol.:** 3 %)

Ejercicio 7.13 El momento de inercia de una varilla longitudinal, de masa m y longitud h, respecto a un eje que pase por uno de sus extremos viene dado por la fórmula

$$I = m\frac{h^2}{3}$$

Determina el error máximo en el momento de inercia de una varilla si $h = 4 \pm 0{,}1$ cm y $m = 3 \pm 0{,}1$ gr.

(**Sol.:** 1,333 $gr.cm^2$)

Ejercicio 7.14 Desarrolla la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en potencias de $(x - 1)$ e $(y - 2)$ mediante el polinomio de Taylor.

(**Sol.:** $7 + 4(x - 1) + 5(y - 2) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 2) + (y - 2)^2$)

Ejercicio 7.15 Desarrolla la función $\mathrm{e}^{2x}\cos(y)$ en forma de polinomio de Taylor, hasta el segundo orden, en el punto $(0, 0)$.

(**Sol.:** $f(x, y) \approx 1 + 2x + 4x^2 - y^2$)

Ejercicio 7.16 Halla el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $f(x, y) = \mathrm{e}^y \sin(x)$, en el punto $(\pi, 0)$. Utilízalo para obtener un valor aproximado de $f(3.14, 0.01)$ y compáralo con el valor obtenido mediante la aproximación lineal del plano tangente. (Toma $\pi = 3.141592$ en los cálculos)

(**Sol.:** $f(x, y) \approx \pi - x - \frac{1}{2}(x - \pi)y$; $f(3.14, 0.01) = 0.0016$; $L(3.14, 0.01) = 0.001592$)

Ejercicio 7.17 Sea la función

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (e^{x+y} \sin y, e^{x+y} \cos y) \end{array}$$

¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ admite g inversa local?. ¿Admite g inversa en $\mathbb{R}^2$?

(**Sol.:** Admite inversa local en cada punto de $\mathbb{R}^2$, pero no admite inversa global.)

Ejercicio 7.18 Prueba que $\mathbf{f}(x, y) = (\mathrm{e}^{x-y}, y + 2))$ admite inversa diferenciable en un entorno de $(0, 0)$. Halla $\mathcal{J}_{\mathbf{f}^{-1}}(1, 2)$.

(**Sol.:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Ejercicio 7.19 Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2 \end{array}\right\}$$

define implícitamente una función diferenciable $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$ en un entorno del punto $x = 0$ de forma que $f_1(0) = 0$ y $f_2(0) = \pi$. Calcula $f_1'(0)$ y $f_2'(0)$.

(**Sol.:** $f_1'(0) = 1$, $f_2'(0) = 0$)

Ejercicio 7.20 Halla todos los posibles valores de z_0 para que la ecuación $x^2 - xz + z^2 + yz = 4$ defina implícitamente a z como función de x e y en un entorno del punto $(1, 3, z_0)$.

(**Sol.:** $z_0 = 1$ y $z_0 = -3$)

Ejercicio 7.21 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} xy + xz + yz & = & 1 \\ -x + y + z^2 & = 2 & \end{array}\right\}$$

(a) Prueba que el sistema de ecuaciones define implícitamente a y y z como funciones de x en un entorno del punto $(0, 1, 1)$.

(b) Sea $G(x) = \log(yz)$, donde $y = y(x)$ y $z = z(x)$ representan las funciones implícitas del apartado anterior. Halla el valor de $G'(0)$.

(**Sol.:** (b) $G'(0) = -2$)

Ejercicio 7.22 Sea $z(x, y)$ la función definida implícitamente por la ecuación $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xy^2 + x^2y} = 3$ verificando que $z(1, 1) = 2$. Halla el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la derivada direccional $f'_{(a,a)}(1, 1) = 2$.

(**Sol.:** $a = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$)

Ejercicio 7.23 Sea $\mathbf{f}(x, y)$ la función definida implícitamente por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x \sin y + \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x+y} - v \cos u & = & 1 \end{array}\right\}$$

en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (-\pi, \pi, 0, 0)$. Demuestra que $\mathbf{f}$ admite inversa local diferenciable en $(-\pi, \pi)$ y calcula la matriz jacobiana $\mathrm{J}_{\mathbf{f}^{-1}}(0, 0)$.

(**Sol.:** $\mathrm{J}_{\mathbf{f}^{-1}}(0, 0) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 & \pi - 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$)

Ejercicio 7.24 El volumen V, la presión P y la temperatura T de un gas de Van der Waals estan relacionados por la fórmula

$$P = \left(\frac{RT}{V - \beta}\right) - \frac{\alpha}{V^2}$$

con α, β y R constantes. Si el volumen V es una función de P y de T demuestra que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{RV^3}{PV^3 + \alpha(V - 2\beta)}$$

Ejercicio 7.25 La ecuación de Dieterici del estado de un gas es

$$P(V - b)\,\mathrm{e}^{\frac{a}{RVT}} = RT,$$

donde P es la presión, V el volumen y T la temperatura del gas en un instante determinado y siendo a, b y R constantes. Demuestra la fórmula

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{VT}\right)\left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right)^{-1}$$