Tema 6

Funciones diferenciables

Se sabe que la derivada y' de una función de una variable, $y = f(x)$, puede interpretarse como la tasa de variación de la variable y respecto de la variable x (es por eso que, frecuentemente, para remarcar este hecho, se utiliza la notación $\frac{dy}{dx}$ para representar dicha derivada).

Supongamos que tenemos, ahora, una función de dos variables. Por ejemplo, la presión de un gas ideal como función del volumen y la temperatura del gas puede expresarse:

$$P = \frac{cT}{V}$$

donde c es una constante. Si estamos interesados en conocer cómo varía la presión en función del volumen, a temperatura constante T_0, parece lógico calcular la derivada de P respecto de V suponiendo constante la temperatura, es decir, calcular la derivada de la sección transversal de la función $P = f(V, T) = \frac{cT}{V}$ para $T = T_0$.

En este tema se verá que este procedimiento intuitivo es perfectamente válido y que esta *derivación parcial* permitirá obtener un mejor conocimiento de las funciones de varias variables.

6.1. Derivadas parciales

La derivada de una función de una variable, $f(x)$, en un punto x_0 se define como

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y dicho valor, si existe, representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Como ya se ha dicho antes, también se utiliza la notación $\frac{df}{dx}(x_0)$.

De forma similar, las derivadas parciales de una función $f(x, y)$ se definen formalmente como límites:

Definición 6.1 Si f es un campo escalar de dos variables, las derivadas parciales de f en un punto (x_0, y_0) están definidas como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

si estos límites tienen sentido y existen. Observa que puede ocurrir que sólo exista una de las derivadas parciales o ambas o ninguna. También se suele utilizar la notación $f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

La derivada parcial en un punto (x_0, y_0) es un número real. Cuando las derivadas parciales pueden calcularse en puntos genéricos (x, y) entonces estamos definiendo una nueva función escalar, que se llama función derivada parcial y que seguimos denotando por $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, respectivamente). En ocasiones, prescindiremos del punto genérico y escribiremos, simplemente, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ($\frac{\partial f}{\partial y}$, respectivamente). Esta derivada parcial coincide con una derivación ordinaria (respecto de una variable). Para verlo, considera la sección transversal de $f(x, y)$ para $y = y_0$; es decir, la función $f(x, y_0)$. Esta función sólo depende de la variable x y podemos calcular la derivada de esta función en x_0, obteniendo:

$$\frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x\,=\,x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

es decir, que la derivada parcial de f respecto de x es la derivada de la sección transversal de f correspondiente. Por tanto, la derivada parcial puede calcularse con las reglas de derivación ordinarias, suponiendo constante la variable y.

Análogamente, la derivada parcial de f respecto de y es la derivada de la sección transversal de f para $x = x_0$. Por tanto, la derivada parcial puede calcularse suponiendo constante la variable x.

Ejemplo 6.1 Si $f(x, y) = 5x^2y - \sin(x + y)$, podemos diferenciar f con respecto a x, considerando y como una constante, y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10xy - \cos(x + y)\,.$$

De manera similar, si consideramos que la x es constante y derivamos respecto a y, obtenemos una función,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x^2 - \cos(x + y)\,.$$

Ejemplo 6.2 Calcula las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^7y - \mathrm{e}^{x-y}$.

Solución: En este caso podemos calcular las derivadas parciales en cualquier punto (x, y) por el procedimiento de suponer constante una de las variables. Así pues,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 7x^6y - \mathrm{e}^{x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^7 + e^{x-y}$$

$\square$

Ejercicio 6.1 Calcula las derivadas parciales de $f(x, y) = x \arctan(xy)$.

(**Sol.:** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2y^2}$)

Ejercicio 6.2 Calcula las derivadas parciales de $f(x, y) = x^3\,\mathrm{e}^x - x\cos y$.

(**Sol.:** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^3 + 3x^2)\,\mathrm{e}^x - \cos y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \sin y$)

Igual que sucede en el caso de una variable, hay ocasiones en que, teniendo en cuenta la definición de la función, no podemos calcular las derivadas parciales derivando respecto de una variable y debemos calcularla aplicando la definición, es decir, calculando los límites de la Definición 6.1. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.3 Estudia la existencia, y calcula en su caso, las derivadas parciales en el origen de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, en este caso no podemos derivar directamente la expresión $x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ para obtener las derivadas parciales en el origen porque dicha expresión no está definida en el origen. No tenemos más remedio que aplicar la definición de derivada parcial para calcular las derivadas parciales buscadas. Comenzaremos con la derivada parcial respecto a la variable x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h^2}\,.$$

último límite no existe (¿por qué?) y, por tanto, no existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Calculamos ahora la derivada parcial respecto a la variable y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}(0)=0$$

□

Ejercicio 6.3 Calcula las derivadas parciales en el origen de la función

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(**Sol.:** No existen.)

Ejercicio 6.4 Calcula las derivadas parciales en el origen de la función

$$m(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

(**Sol.:** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0)$)

Analizaremos a continuación la intrepretación geométrica de las derivadas parciales. Considera la superficie de la Fig. 6.1.

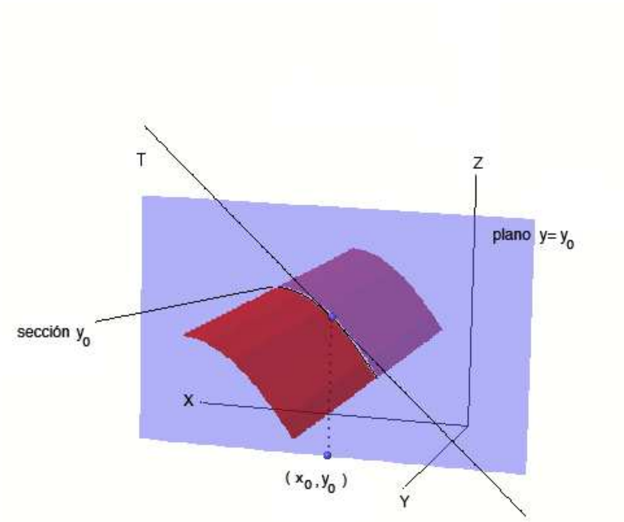

Figura 6.1: Interpretación geométrica de la derivada parcial

Hemos cortado la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$ paralelo al plano xz. El plano $y = y_0$ corta la superficie en una curva, la sección transversal y_0 de la superficie, es decir, $f(x, y_0)$, que es la gráfica de la función

$$g(x) = f(x, y_0)$$

y, por tanto,

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);$$

es decir, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la sección transversal y_0 de la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

De manera similar se puede razonar que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la sección transversal x_0 de la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

De forma análoga es posible definir las derivadas parciales para funciones de tres o más variables, con la salvedad de que aumenta el número de derivadas parciales a calcular (tantas como variables). Así, si tenemos ahora un campo escalar de tres variables, podemos considerar tres derivadas parciales, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Definición 6.2 Si f es un campo escalar de tres variables, las derivadas parciales de f en un punto (x_0, y_0, z_0) son definidas como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si estos límites tienen sentido y existen.

Ejemplo 6.4 Calcula las derivadas parciales de $f(x, y, z) = x^2y - yz^3$.

Solución: Suponiendo que y y z son constantes y derivando respecto a x, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2xy\,.$$

De forma similar tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = x^2 - z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -3yz^2$$

□

6.1.1. La diferencial

En esta sección generalizaremos el concepto de *diferenciabilidad* a campos escalares. Las derivadas parciales por sí mismo no cumplen este objetivo porque nada más reflejan el comportamiento de la función en algunas direcciones particulares (las direcciones de los ejes de coordenadas).

Definición 6.3 Se dice que un campo escalar $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con D un conjunto abierto, es *diferenciable* en $\mathbf{x}_0 \in D$ si existe un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} + \mathrm{o}(\mathbf{h})$$

donde $\mathrm{o}(\mathbf{h})$ es una función que satisface la condición

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathrm{o}(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0\,.$$

Cabe señalar que el vector $\mathbf{y}$ depende de $\mathbf{x}_0$. No es muy difícil demostrar las dos propiedades siguientes:

(1) Si f es un campo escalar diferenciable en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, entonces el vector $\mathbf{y}$ es único.

(2) Si f es un campo escalar diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continuo en $\mathbf{x}_0$.

El vector $\mathbf{y}$ que aparece en la Definición 6.3 recibe el nombre de *gradiente de* f en el punto $\mathbf{x}_0$ y lo denotaremos por $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ (en algunos textos también se usa la notación grad (f) para denotar el gradiente de f).

Como veremos posteriormente, el gradiente juega un papel importante en las aplicaciones del cálculo diferencial de campos escalares. Lógicamente, calcularlo utilizando la definición de función diferenciable suele ser complicado. El siguiente resultado nos proporciona una forma alternativa de calcularlo que es la que usualmente utilizaremos.

Teorema 6.4 (a) Si f es un campo escalar de n variables, diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0$, entonces

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$$

(b) Si f es un campo escalar que tiene derivadas parciales continuas el punto $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Es importante darse cuenta de que el gradiente define un campo vectorial: si f es diferenciable en todos los puntos de un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces queda definido el campo vectorial $\nabla f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Una consecuencia importante del Teorema 6.4 es que el cálculo del gradiente se reduce al cálculo de derivadas parciales.

Ejemplo 6.5 Calcula el gradiente del campo escalar $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x$.

Solución: Las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x$$

Las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ al ser producto y suma de funciones continuas. Por tanto, la función f es diferenciable. El gradiente es el campo vectorial definido como

$$\nabla f(x,y) = (\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x)\mathbf{i} + (x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x)\mathbf{j}$$

□

Ejercicio 6.5 Calcula el gradiente del campo escalar $f(x,y,z) = x\sin(\pi y) + y\cos(\pi z)$. Calcula $\nabla f(0,1,2)$.

(**Sol.:** $\nabla f(x,y,z) = (\sin(\pi y), \pi x\cos(\pi y) + \cos(\pi z), -\pi y\sin(\pi z))$,
$\nabla f(0,1,2) = (0,1,0)$)

Ejercicio 6.6 Calcula el gradiente del campo escalar $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ en el punto $(2,3)$.

(**Sol.:** $\nabla f(2,3) = (-1,18)$)

Ejercicio 6.7 Calcula el gradiente del campo escalar $f(x,y) = 2x(x-y)^{-1}$ en el punto $(3,1)$.

(**Sol.:** $\nabla f(3,1) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$)

Si volvemos a la Definición 6.3, se llama *diferencial* de f a la expresión $\mathbf{y} \cdot \mathbf{h}$ que allí aparece. Como $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ podemos escribir la diferencial como

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \cdot h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \cdot h_n$$

Entonces, así como las derivadas parciales representan la tasa de variación de la función f respecto de una de las variables; la diferencial puede interpretarse como la tasa de variación total de una función, respecto de cada una de sus variables. En efecto, como los valores h_j representan el incremento de las variables x_j, podemos reemplazarlos por la notación $\triangle x_j$ y, entonces,

$$\triangle f := f(\mathbf{x} + \triangle \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \triangle \mathbf{x} + o(\triangle \mathbf{x})$$

de donde

$$\frac{\triangle f}{\|\triangle \mathbf{x}\|} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\triangle \mathbf{x}}{\|\triangle \mathbf{x}\|} + \frac{o(\triangle \mathbf{x})}{\|\triangle \mathbf{x}\|}$$

y al tomar límites cuando $\|\triangle \mathbf{x}\| \to 0$ se tiene

$$df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

Por ejemplo, si $H = f(x, y, z)$ entonces,

$$dH = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

donde cada diferencial, dx, dy y dz, representa las variación total de las variables x, y y z, respectivamente.

Ejemplo 6.6 La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos de masas M y m separados a una distancia R, viene dada por la fórmula:

$$F = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Si la masa de uno de los cuerpos, M, aumenta un 3 % mientras que la otra, m, aumenta un 2 % mientras que la distancia, R, que los separa también aumenta un 3 %; estima el el cambio en la fuerza F.

Solución: Sabemos que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial M} dM + \frac{\partial F}{\partial m} dm + \frac{\partial F}{\partial R} dR$$

Como conocemos los cambios relativos (pocentajes), vamos a calcular también el cambio relativo en F. Así, dividiendo lo anterior por F:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{F} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial M}dM}{F} + \frac{\frac{\partial F}{\partial m}dm}{F} + \frac{\frac{\partial F}{\partial R}dR}{F} \\ &= \frac{\frac{Gm}{R^2}dM}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} + \frac{\frac{GM}{R^2}dm}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} + \frac{-\frac{2GMm}{R^3}dR}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} \\ &= \frac{dM}{M} + \frac{dm}{m} - \frac{2dR}{R} = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}03 = 0{,}02\end{aligned}$$

Por lo que el cambio en F es de un aumento del $2\,\%$.

$\square$

Ejercicio 6.8 La deflección y, en el centro de una placa circular suspendida por el borde y uniformemente cargada viene dada por

$$y = \frac{Kwd^4}{t^3}$$

donde w =carga total; d =diámetro de la placa; t = amplitud y K es una constante. Calcula el cambio aproximado en el porcentaje de y si se aumenta w en un $3\,\%$, se disminuye d en un $2\,\%$ y se aumenta t en un $4\,\%$.

(**Sol.:** $17\,\%$)

Ejercicio 6.9 Si se mezclan x moléculas-gramo de ácido sulfúrico con y de agua, el calor liberado viene dado por la fórmula

$$F(x,y) = \frac{1.786xy}{1.798x + y}\ cal.$$

Si partimos de 5 moléculas-gramo de ácido y 4 de agua y se aumentan, respectivamente, a 5.01 y 4.04; ¿cuánto calor adicional se genera?

(**Sol.:** 0.02 $cal.$)

Ejercicio 6.10 Según la ley de Pouseuille, la resistencia al flujo de sangre que ofrece un vaso sanguíneo cilíndrico de radio r y longitud x es

$$R = \frac{cx}{r^4}$$

donde c es una constante. Estimar la variación porcentual de R cuando x aumenta un $3\,\%$ y r decrece un $2\,\%$.

(**Sol.:** R aumenta un $11\,\%$)

6.1.2. Planos tangentes

Supongamos una superficie de ecuación $z = f(x, y)$, con f una función diferenciable en un punto (x_0, y_0). Sabemos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ y que representan las pendientes de las rectas tangentes a las secciones transversales para $y = y_0$ y para $x = x_0$, respectivamente. Estas secciones transversales son curvas sobre la superficie $z = f(x, y)$ que pasan por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, donde $z_0 = f(x_0, y_0)$ (véase la Fig. 5.1); por lo que se define el *plano tangente* a la superficie en (x_0, y_0, z_0) como el plano que contiene a las dos rectas tangentes mencionadas. Puesto que la intersección de este plano con los planos verticales $x = x_0$ e $y = y_0$ deben ser las rectas tangentes descritas, se puede deducir que una ecuación del plano tangente vendrá dada por

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Por otra parte, veremos en la sección siguiente que cualquier otra curva en la superficie $z = f(x, y)$ que pase por el punto P_0 cumplirá que su recta tangente está en este plano, lo que justifica el término *plano tangente*.

Ejemplo 6.7 Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: Según hemos visto, la ecuación del plano tangente es

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Basta calcular las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= y\,\mathrm{e}^{xy}\Big|_{x=1,\ y=0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= x\,\mathrm{e}^{xy}\Big|_{x=1,\ y=0} = 1 \end{aligned}$$

por lo que, la ecuación es

$$z - 1 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}_{0}(x - 1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)}_{1}(y - 0)$$

es decir, $z = 1 + y$.

$\square$

Ejercicio 6.11 Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^{xy}$ en el punto $(1, 0, 1)$.

(**Sol.:** $z = x + y$)

Si observamos, de nuevo, la Definición 6.3, obteníamos

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x,y)} + o(\mathbf{h})$$

siendo ahora $\mathbf{h} = (x - x_0, y - y_0)$; que puede interpretarse como que la función $L(x, y)$ aproxima a $f(x, y)$ para $\mathbf{h}$ suficientemente pequeño. Pero la gráfica de $z = L(x, y)$ no es más que el plano tangente; por lo que acabamos de probar que si una función es diferenciable en un punto (x_0, y_0), entonces el plano tangente es una aproximación a la gráfica de la función $f(x, y)$ en el punto de tangencia.

Ejemplo 6.8 Utiliza el Ejemplo 6.7 para calcular un valor aproximado de $f(1.1, -0.1)$ siendo $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$.

Solución: Dado que el plano tangente era $z = 1+y$ entonces, $f(x, y) \approx 1+y$ para puntos cercanos a $(1, 0)$, por lo que

$$f(1.1, -0.1) \approx 1 - 0.1 = 0.9$$

($\mathrm{e}^{-0.11} \approx 0.895834135$)

$\square$

Cuando las superficies vienen dadas de la forma $f(x, y, z) = 0$ y, o bien no es posible o bien resulta muy complicado, despejar z en función de x e y, podemos aplicar el siguiente resultado para calcular el plano tangente.

Teorema 6.5 En cada uno de los puntos del dominio de f en los que $\nabla f \neq 0$, el vector gradiente ∇f es perpendicular a las curvas de nivel de f que pasan por el punto, si f es un campo escalar de dos variables, y a las superficies de nivel que pasan por el punto, si f es un campo escalar de tres variables.

Ejemplo 6.9 Para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ las curvas de nivel son circunferencias concéntricas

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

En cada uno de los puntos $(x, y)) \neq (0, 0)$, el vector gradiente

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

es perpendicular a las circunferencias anteriores (ver Fig. 6.2). En el origen, la curva de nivel se reduce a un punto y el gradiente es simplemente el vector $(0, 0)$

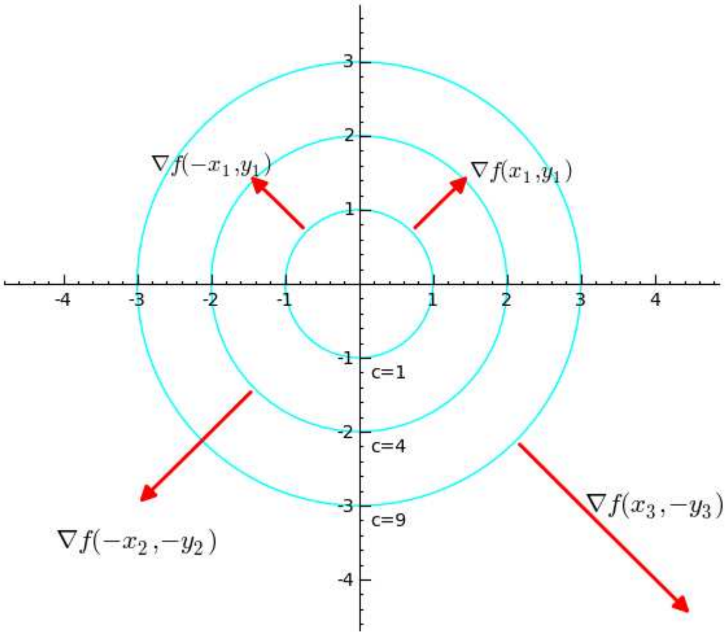

Figura 6.2: El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel

Veremos ahora la aplicación del Teorema 6.5 a curvas con ecuaciones de la forma $f(x, y) = c$ para calcular rectas tangentes y rectas normales (perpendiculares). Después lo aplicaremos de forma similar al caso de superficies para calcular planos tangentes. Teniendo en cuenta dicho teorema, si (x_0, y_0) es un punto de la curva de nivel C, $\nabla f(x_0, y_0)$ es un *vector normal* a la curva

C en el punto (x_0, y_0). Por tanto, la recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene como a vector director el vector perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ es la recta tangente. Por tanto, un punto (x, y) está en la recta tangente si verifica la igualdad

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0\,.$$

Ejemplo 6.10 Encuentra un vector normal y un vector tangente a la curva del plano de ecuación $x^2 + 3y^3 = xy + 4$ en el punto $(2, 1)$. Encuentra, además, las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto $(2, 1)$.

Solución: La idea consiste en expresar la ecuación de la curva como una curva de nivel y así poder aplicar el Teorema 6.5. Para ello basta observar que podemos escribir la ecuación como

$$x^2 + 3y^3 - xy = 4$$

y, entonces, llamando $f(x, y) = x^2+y^3-xy$, la curva es precisamente la curva de nivel $C :\equiv f(x, y) = 4$. Notemos, además, que el punto $(2, 1)$ pertenece a C. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (6y^2 - x)\mathbf{j}$$

y, por tanto, el gradiente $\nabla f((2, 1)$, es un vector normal a la curva en el punto $(2, 1)$. Dicho gradiente vale

$$\nabla f(2, 1) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Conocemos por tanto un punto de la recta normal buscada (debe pasar por el punto $(2, 1)$) y un vector director $\nabla f(2, 1)$. La ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4},$$

es decir, $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

Encontremos ahora la ecuación de la recta tangente. Como el vector director $\mathbf{v}$ de la recta tangente es perpendicular al vector normal, debe verificarse $\mathbf{v} \cdot \nabla f(2, 1) = 0$. Por tanto, podemos encontrar $\mathbf{v}$ cambiando las coordenadas de $\nabla f(2,1)$ de lugar y de signo, $\mathbf{v} = (4, -3)$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3},$$

es decir, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

$\square$

Apliquemos ahora el Teorema 6.5 al caso de superficies. En este caso, la propiedad nos dice que el *plano tangente a una superficie* dada por la ecuación $f(x,y,z) = c$ en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector normal $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Por tanto, un punto $\mathbf{x}$ está en el plano tangente en el punto $\mathbf{x}_0$ si, y sólo si,

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

que es la ecuación del plano tangente (ver Fig. 6.3). En forma implícita:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

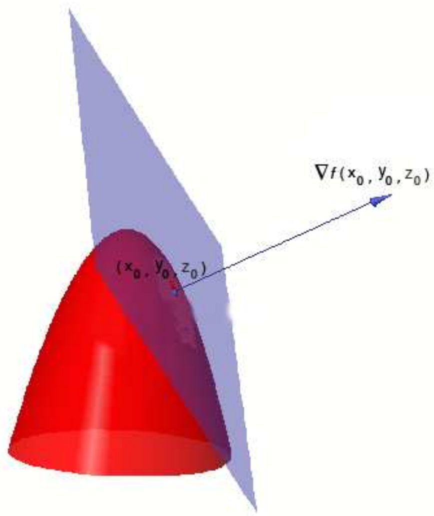

Figura 6.3: Plano tangente

Si ahora queremos calcular la recta normal a la superficie en el punto $\mathbf{x}_0$ sólo hemos de tener en cuenta que un vector director es el vector $\nabla f(\mathbf{x}_0)$

que es perpendicular a la superficie en el punto $\mathbf{x}_0$. La ecuación continua de la recta normal es

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x_0})} = \frac{y-y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x_0})} = \frac{z-z_0}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x_0})}$$

Ejemplo 6.11 Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $xy + yz + zx = 11$ en el punto $(1, 2, 3)$.

Solución: Como antes, la estrategia es expresar la ecuación de la superficie como una superficie de nivel. En este caso, basta observar que la ecuación dada puede escribirse como $f(x, y, z) = 11$ para el campo escalar $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Tenemos que $\nabla f(1, 2, 3) = (5, 4, 3)$, debe ser perpendicular a la superficie de nivel y, por tanto, perpendicular al plano tangente a esa superficie, de donde la ecuación del plano tangente es

$$5(x-1) + 4(y-2) + 3(z-3) = 0\,,$$

que simplificada es $5x+4y+3z-22 = 0$. La ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$$

□

Ejercicio 6.12 Encuentra la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ en $P(-1, -1)$.

(**Sol.:** recta tangente: $x + y + 2 = 0$, recta normal: $x - y = 0$)

Ejercicio 6.13 Encuentra la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $2x^3 - x^2y^2 = 3x - y - 7$ en $P(1, -2)$.

(**Sol.:** recta tangente: $x - y - 3 = 0$, recta normal: $x + y + 1 = 0$)

Ejercicio 6.14 Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z = \left(x^2 + y^2\right)^2$ en $P(1, 1, 4)$.

(**Sol.:** plano: $8x + 8y - z - 12 = 0$, recta: $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-4}{-1}$)

Ejercicio 6.15 Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a $xy^2 + 2z^2 = 12$ en $P(1, 2, 2)$.

(**Sol.:** plano: $x + y + 2z = 7$, recta: $x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-2}{2}$.)

6.1.3. Matriz Jacobiana

Una función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ de n variables se dirá diferenciable en un punto $\mathbf{x}_0$ de su dominio cuando cada componente f_j lo sea. Por lo visto antes, deben existir todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)$. Entonces, se llama *matriz jacobiana* a la matriz $(m \times n)$

$$\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

donde todas las derivadas parciales están evaluadas en el punto $\mathbf{x}_0$. Observa que en cada fila j se encuentra el gradiente de la componente f_j.

Ejemplo 6.12 Calcula la matriz jacobiana del campo $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x+y^2)$.

Solución: Sólo debemos calcular las derivadas parciales de cada componente. Así pues,

$$\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

□

6.2. Derivadas direccionales

Las derivadas parciales son *derivadas* en la dirección de los ejes de coordenadas. La definición de derivada parcial se puede generalizar a cualquier dirección definida por un vector $\mathbf{u}$ diferente de cero. Recordemos que un vector *unitario* es un vector de norma uno.

Definición 6.6 Para cada vector unitario $\mathbf{u}$, el límite

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

si tiene sentido y existe, se denomina derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{u}$.

Como ya sabemos, las derivadas parciales de f representan las tasas de variación de f en las direcciones de los ejes de coordenadas $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. La derivada direccional $f'_{\mathbf{u}}$ proporciona la tasa de variación de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

En la Fig. 6.4 se muestra la interpretación geométrica de la derivada direccional de una función de dos variables. Fijemos un punto (x, y) en el plano xy, y sea C la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano s que contiene el vector $\mathbf{u}$ y es perpendicular al plano xy. Entonces $f'_{\mathbf{u}}(x, y)$ es la pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto $(x, y, f(x, y))$.

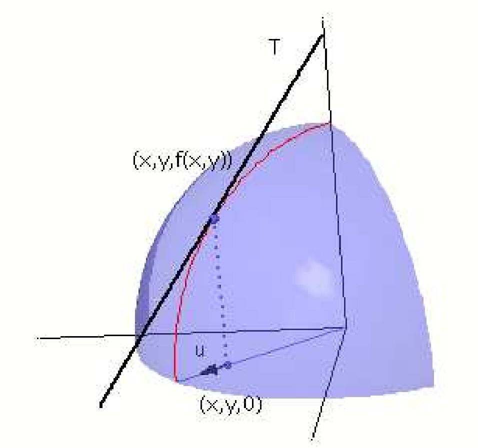

Figura 6.4: Interpretación geométrica de la derivada direccional

Nota: La definición de derivada direccional en la dirección $\mathbf{u}$ requiere que el vector $\mathbf{u}$ sea unitario. No obstante, podemos extender la definición a vectores arbitrarios no nulos: la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ en la dirección de un vector no nulo $\mathbf{w}$ es $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ donde $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}$ es el vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{w}$.

Teorema 6.7 Si f es diferenciable en $\mathbf{x}$, entonces f tiene derivada direccional en $\mathbf{x}$ en cualquier dirección $\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario y, además, se verifica la igualdad

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}\,.$$

Ejercicio 6.16 Para los campos escalares de los Ejercicios 6.5, 6.6 y 6.7, calcula la derivada direccional en las direcciones $(0,1,2)$, $(2,3)$ y $(3,1)$, respectivamente.

(**Sol.:** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{52\sqrt{3}}{3}, 0$)

Teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar, la igualdad

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}\,.$$

puede escribirse como

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = ||\nabla f(\mathbf{x})||\,||\mathbf{u}||\,\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}$. Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, tenemos que la derivada direccional $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ será máxima cuando $\cos\theta = 1$; es decir, cuando $\theta = 0$ o, equivalentemente, cuando $\mathbf{u}$ *apunta* en la dirección y sentido de $\nabla f(\mathbf{x})$. Además, el valor máximo será $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.

Por otra parte, la derivada direccional $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ será mínima cuando $\cos\theta = -1$; es decir, cuando $\theta = \pi$ o, equivalentemente, cuando $\mathbf{u}$ *apunta* en la dirección y sentido de $-\nabla f(\mathbf{x})$. Además, el valor mínimo será $-\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.

Ya que la derivada direccional es la tasa de variación de la función en la dirección $\mathbf{u}$ considerada, se acaba de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 6.8 Si f es una función diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0$, entonces f tiene máximo crecimiento a partir del punto $\mathbf{x}_0$ en el sentido de su gradiente (y la tasa de variación es entonces $||\nabla f(\mathbf{x}_0)||$) y tiene máximo decrecimiento a partir del punto $\mathbf{x}_0$ en el sentido contrario (y la tasa de variación es entonces $-||\nabla f(\mathbf{x}_0)||$).

Ejemplo 6.13 La temperatura en cada uno de los puntos de una placa metálica viene dada por la función

$$T(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x\,.$$

(a) ¿En qué dirección crece la temperatura más rápidamente a partir del punto $(0,0)$? ¿Cuál es la tasa de incremento?, (b) ¿En qué dirección decrece más rápidamente la temperatura a partir de $(0,0)$?

Solución: Basta aplicar el Teorema 6.8. Comencemos por calcular el gradiente de T:

$$\nabla T(x, y) = (e^x \cos y - e^y \sin x)\,\mathbf{i} + (e^y \cos x - e^x \sin y)\,\mathbf{j}\,.$$

(a) A partir de $(0, 0)$ la temperatura crece más rápidamente en la dirección del gradiente

$$\nabla T(0, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

La tasa de variación es

$$||\nabla T(0, 0)|| = ||\mathbf{i} + \mathbf{j}|| = \sqrt{2}$$

(b) La temperatura decrece más rápidamente a partir de $(0, 0)$ en la dirección de

$$-\nabla T(0, 0) = -\mathbf{i} - \mathbf{j}\,.$$

$\square$

Ejercicio 6.17 Dada la función de densidad $\lambda(x, y) = 48 - \dfrac{4}{3}x^2 - 3y^2$, encontrar la tasa de variación del cambio de densidad (a) en $(1, -1)$ en la dirección en la que la densidad decrece más rápidamente; (b) en $(1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{i}$ y (c) en $(2, 2)$ alejándose del origen.

(**Sol.:** (a) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{97}$; (b) $-\dfrac{8}{3}$; (c) $-\dfrac{26}{3}\sqrt{2}$)

6.3. Derivadas parciales de orden superior

Recordemos que las derivadas parciales de un campo escalar si existen en una bola de centro $\mathbf{x}_0$ definen un nuevo campo escalar y que, por tanto, podemos calcular también sus derivadas parciales si se dan las circunstancias convenientes para su existencia. Estas derivadas parciales se denominan *derivadas parciales de segundo orden* y se denotan de la siguiente manera:

$$f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{x})$$

En el caso particular de ser $i = j$ se escribe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ en lugar de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Fijémonos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.14 Calcula las derivadas parciales de segundo orden del campo escalar $f(x,y) = x^3y - x^2y^2$.

Solución: Calculamos primero las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2y - 2xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^3 - 2x^2y \end{aligned}$$

Ahora, para calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, sólo hemos de volver a derivar respecto a la variable x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - 2xy^2) = 6xy - 2y^2$$

El procedimiento para calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ es similar. Volvamos a derivar respecto a la variable y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2x^2y) = -2x^2$$

El cálculo de las otras derivadas parciales de segundo orden se realiza de una forma similar. Para calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ derivamos respecto x la derivada parcial de f respecto a y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2x^2y) = x^2 - 4xy$$

y, por último, para calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y)$ derivamos respecto a y la derivada parcial respecto a x de la función f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - 2xy^2) = 3x^2 - 4xy$$

$\square$

En el ejemplo anterior hemos visto que las derivadas *cruzadas* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ coinciden. Este hecho no es casual. Si las derivadas parciales de segundo orden existen en una bola que contiene al punto (x, y) y son continuas en el punto (x, y), entonces las derivadas parciales cruzadas coinciden en el punto (x, y). La igualdad anterior es consecuencia, por tanto, del hecho de que el campo escalar $f(x, y) = x^3y - x^2y^2$ satisface esta condición. Los campos escalares con los que trabajaremos a partir de ahora verificarán siempre la condición anterior, por lo que sólo tendremos que calcular una de las dos derivadas cruzadas.

Las derivadas parciales segundas (como la derivada segunda en el caso de funciones reales de variable real) se utilizarán para estudiar si un campo escalar tiene extremos locales. Si f es un campo escalar con derivadas parciales de segundo orden continuas en una bola abierta que contiene al punto $\mathbf{x}_0$, denotamos por $H(\mathbf{x}_0)$ *la matriz Hessiana* de f en el punto $\mathbf{x}_0$ definida como

$$H(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

donde todas las derivadas estaán evaluadas en $\mathbf{x}_0$. Notemos que la matriz Hessiana $H(\mathbf{x}_0)$ es una matriz simétrica ya que las derivadas cruzadas coinciden en el punto $\mathbf{x_0}$ y, por tanto, define una forma cuadrática.

Un razonamiento análogo permite definir las *derivadas de tercer orden* como las derivadas parciales de las derivadas de segundo orden. Se denotarán por

$$f'''_{x_ix_jx_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(\mathbf{x})$$

Ejemplo 6.15 Considérese $f(x, y, z) = x^2yz$.

Solución: Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = 2x$$

Además,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = 0$$

y así sucesivamente.

$\square$

Evidentemente, el proceso puede reiterarse, de forma que es posible definir derivadas parciales de orden p mientras se puedan derivar las parciales de orden $p-1$.

En general, si un campo escalar admite derivadas parciales hasta un orden p y todas son continuas, se dice que f es de clase $\mathcal{C}^p$. Además, cuando un campo escalar es de clase $\mathcal{C}^p$ para cualquier orden p, se dice que es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

6.4. Regla de la cadena

La llamada *regla de la cadena* se utiliza para derivar la composición de funciones, al igual que sucede con las funciones de una variable.

Teorema 6.9 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $D' \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$, con $\mathbf{f}(D) \subseteq D'$ y $\mathbf{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Entonces la composición $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y además,

$$\mathrm{J}_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$$

A partir de él se deduce la regla de la cadena, que admite diversas versiones según sean las funciones involucradas. Por ejemplo, si se tiene una función $u = f(x, y, z)$ y cada variable x, y, z es, a su vez, función de una variable t resulta que la función u es, en realidad, una función de t y tiene sentido calcular

$$\frac{du}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

donde las derivadas de f están evaluadas en $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y las derivadas de x, y, z en t_0.

Otro ejemplo ocurre cuando las variables x, y, z sean, a su vez, funciones de varias variables: si $u = f(x, y, z)$ y cada variable x, y, z es, a su vez, función de las variables s, t resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

donde cada derivada se evalúa en su correspondiente punto y, análogamente para la otra derivada parcial.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Ejemplo 6.16 Sea $z = f\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ con f una función diferenciable. Calcula el valor de la expresión

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución: Llamamos $v = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Entonces, $z = f(v)$ con v una función que depende de x e y. Aplicamos la regla de la cadena y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Ahora,

$$\frac{df}{dv} = f'(v), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

por lo que

$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= xf'(v)\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + yf'(v)\frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= f'(v)\left(\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = 0\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.17 Sea $z = f(y/x)$, donde f es una función derivable. Calcula el valor de la expresión

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Solución: Llamamos $s = y/x$ y, entonces, $z = f(s)$. Ahora aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds}\ \frac{-y}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{df}{ds}\ \frac{1}{x}$$

Para hacer las derivadas segundas se debe tener en cuenta que $\frac{df}{ds}$ sigue dependiendo de la variable s y, entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right) = \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{ds}\right) = \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{\partial s}{\partial y}$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\frac{2y}{x^3} = \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{\partial s}{\partial x}\ \frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\ \frac{2y}{x^3} \\ &= \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{-y}{x^2}\ \frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\ \frac{2y}{x^3} = \frac{y^2}{x^4}\ \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{2y}{x^3}\ \frac{df}{ds}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{1}{x} = \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{\partial s}{\partial y}\ \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\ \frac{d^2 f}{ds^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\ \frac{-1}{x^2} = \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{\partial s}{\partial x}\ \frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\ \frac{-1}{x2} \\ &= \frac{d^2 f}{ds^2}\ \frac{-y}{x^2}\ \frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\ \frac{-1}{x^2} = -\frac{y}{x^3}\ \frac{d^2 f}{ds^2} - \frac{1}{x^2}\ \frac{df}{ds}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 &\left[\frac{y^2}{x^4}\ \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{2y}{x^3}\ \frac{df}{ds}\right] \\ &+ 2xy\left[-\frac{y}{x^3}\ \frac{d^2 f}{ds^2} - \frac{1}{x^2}\ \frac{df}{ds}\right] \\ &+ y^2\left[\frac{1}{x^2}\ \frac{d^2 f}{ds^2}\right] = 0\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 6.18 Determina $\frac{df}{dt}$, mediante la regla de la cadena, en los siguientes casos: (a) $f(x,y) = x^2y^3$; $x = t^3$, $y = t^2$; (b) $f(x,y) = x^2y - y^2x$; $x = \cos t$, $y = \sin t$.

(**Sol.:** (a) $12t^{11}$; (b)$-2\sin t\cos t(\sin t + \cos t) + \sin^3 t + \cos^3 t$)

Ejercicio 6.19 Sea $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + g(u,v)$, siendo $g : R^2 \to R$, con $u = e^x \cos y, v = \ln y$. Calcula (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (H: Exprésalas en función de $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$; $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$).

(**Sol.:** (a) $xy + e^x \cos y \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$; (b) $\frac{x^2}{2} - e^x \sin y \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$)

6.5. Problemas adicionales

Ejercicio 6.20 Encuentra la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en $P(1,2)$.

(**Sol.:** recta tangente: $x + 4y - 9 = 0$, recta normal: $4x - y - 2 = 0$)

Ejercicio 6.21 Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^3 + y^3 = 3xyz$ en $P(1,2,\frac{3}{2})$.

(**Sol.:** plano: $4x - 5y + 4z = 0$, recta: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-\frac{3}{2}}{4}$)

Ejercicio 6.22 Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z(x,y)$ definida por $x^2z + y^2z^2 + z^3 = 1$ en el punto $(0,0,1)$.

(**Sol.:** $z = 1$)

Ejercicio 6.23 Calcula el gradiente de la función $f(x,y,z) = z\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ en $(1,1,2)$. Calcula la derivada direccional de la función f anterior en el punto $(1,1,2)$ y en la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,-1,1)$.

(**Sol.:** $\nabla f(1,1,2) = (2,-2,0)$; $f'_{\mathbf{v}}(1,1,2) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$)

En los ejercicios 6.24–6.25, encuentra un vector que indique la dirección en la cual la función dada aumenta más rápidamente en el punto indicado. Halla la razón de cambio máxima.

Ejercicio 6.24 $f(x,\, y) = e^{2x} \sin y;\; (0,\, \pi/4)$

(**Sol.:** $\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\mathbf{j},\; \sqrt{5/2}$)

Ejercicio 6.25 $F(x,\, y,\, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2;\; (1,\, 2,\, -1)$

(**Sol.:** $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k},\, 2\sqrt{6}$)

En los ejercicios 6.26–6.27, obtén un vector que indique la dirección en la cual la función dada disminuye más rápidamente en el punto indicado. Encuentra la razón de cambio mínima.

Ejercicio 6.26 $f(x,\, y) = \tan(x^2 + y^2);\; (\sqrt{\pi/6},\, \sqrt{\pi/6})$

(**Sol.:** $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\mathbf{j},\; -8\sqrt{\pi/3}$)

Ejercicio 6.27 $F(x,\, y,\, z) = \sqrt{xz}e^y;\; (16,\, 0,\, 9)$

(**Sol.:** $-\frac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, -\sqrt{83281}/24$)

Ejercicio 6.28 Considera una placa rectangular. La temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por $T(x, y) = \dfrac{5 + 2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$. Determina la dirección en que un insecto debe ir, partiendo de $(4, 2)$, para que se enfríe lo más rápidamente posible. Calcula la tasa de variación máxima.

(**Sol.:** $\left(\frac{1}{50}, \frac{21}{100}\right);\; \frac{\sqrt{445}}{100}$)

Ejercicio 6.29 Un esquiador experto desea descender por una montaña lo más rápidamente posible. Suponiendo que el perfil de la montaña viene dado por la gráfica de la función $f(x, y) = x^3y + 2xy^2 + xy - 2$; calcula la dirección que debe tomar cuando se encuentra en las coordenadas $(1, 1, 2)$.

(**Sol.:** la que indica el vector $(-6, -6)$)

Ejercicio 6.30 Sea $z = f(x^2 + y^2)$ con f una función de clase C^2. Calcula

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$$

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 6.31 Sea $z = f\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ con f una función diferenciable. Calcula el valor de la expresión

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 6.32 Prueba que la función $f(x, y) = \dfrac{y}{\varphi(x^2 - y^2)}$ satisface la relación

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y^2}f(x, y)$$

cualquiera que sea la función derivable $\varphi(u)$.