Tema 5

Funciones de varias variables

Supongamos que tenemos una placa rectangular R y determinamos la temperatura T en cada uno de sus puntos. Fijado un sistema de referencia, T es una función que depende de las coordenadas (x, y) de cada uno de los puntos de R. La función que describe este fenómeno

$$T = f(x, y), \quad (x, y) \in R$$

es un ejemplo típico de una función de dos variables; en este caso, las coordenadas del punto donde evaluamos la temperatura. No es difícil encontrar ejemplos de fenómenos que a la hora de describirlos necesitemos utilizar funciones de tres, cuatro o más variables.

La definición formal de función de varias variables es la siguiente:

Definición 5.1 Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una función f de D en $\mathbb{R}$ se llama un campo escalar o una función real de n variables. La función f asigna, pues, a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ un valor real $f(\mathbf{x})$.

Las funciones de varias variables son esenciales en muchos problemas importantes de la ciencia, la ingeniería, la economía, etc... De hecho, cualquier fórmula que proporcione una relación entre una magnitud a partir de los valores de otras magnitudes es, en realidad, una función. Vamos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1

- La magnitud de la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo de masa M situado en el origen de coordenadas sobre un cuerpo de masa m situado en el punto (x, y, z) viene dada por
$$F(x, y, z) = \frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}$$
- La ley de los gases ideales dice que la presión P de un gas es una función del volumen V y la temperatura T según la ecuación
$$P = \frac{cT}{V}$$
donde c es una constante.
- La desviación S en el punto medio de una viga rectangular cuando está sujeta por ambos extremos y soporta una carga uniforme viene dada por
$$S(L, w, h) = \frac{CL^3}{wh^3}$$
donde L es la longitud, w la anchura, h la altura y C una constante.

Nota: El *dominio* de un campo escalar f (denotado por $\mathrm{Dom}(f)$) es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ donde está definida la función. En muchas ocasiones, una función viene dada por una expresión algebraica y su dominio no viene dado explícitamente. Entendemos, en este caso, que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la definición de f tiene sentido.

La *imagen* o *recorrido* de un campo escalar (denotado por $\mathrm{Im}(f)$) es el subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por todos los valores que toma la función f; es decir,

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

La *gráfica* de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, definido como

$$\mathrm{graf}(f) := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Evidentemente, sólo podemos representar gráficamente las funciones de una variable (su gráfica está en $\mathbb{R}^2$) y las funciones de dos variables (su gráfica está en $\mathbb{R}^3$).

5.1. Representación de funciones

Una forma de obtener información sobre el fenómeno descrito por una función de dos variables es estudiar su representación gráfica. Ésta no es una tarea sencilla pero disponemos de algunos métodos que permiten hacernos una idea de su comportamiento. Se trata de cortar la gráfica de la función con planos paralelos a los planos coordenados. Empezaremos con planos verticales.

Definición 5.2 Para una función $f(x, y)$, la función que se obtiene al mantener la variable x fija y variando la variable y se llama *sección transversal* de f con x fija. Análogamente se define una sección transversal de f con y fija.

Ejemplo 5.2 Vamos a calcular la sección transversal, para $x = 2$, de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solución: Tal y como se observa en la Figura 5.1, la sección transversal es la curva obtenida al cortar la gráfica de $f(x, y)$ con el plano vertical de ecuación $x = 2$.

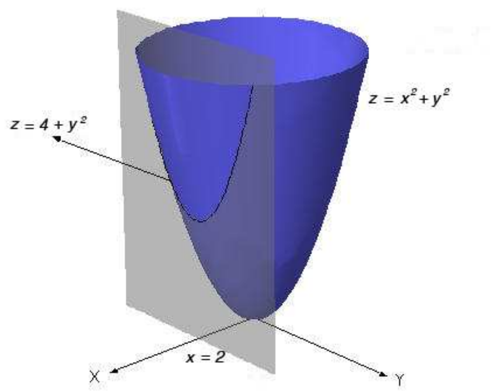


Figura 5.1: Sección transversal con x fija

La sección transversal que hemos de encontrar es, precisamente, $f(2,y) = 4+y^2$. Por tanto es una función de y, digamos g, definida como $g(y) = 4+y^2$. Se trata de una parábola simétrica respecto del eje x.

En general, obtenemos las secciones transversales de f como funciones de y haciendo $x = c$ en $f(x,y)$. Las secciones son, por tanto, $g_c(y) = c^2 + y^2$, $c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Ejercicio 5.1 Calcular las secciones transversales, primero fijando la variable x y después la variable y, del campo escalar $f(x,y) = x^2 - y^2$.

(**Sol.:** $g_b(x) = x^2 - b^2$, $g_c(y) = c^2 - y^2$))

Otra manera de obtener información sobre una función de dos variables es por medio de las llamadas *curvas de nivel*, que corresponden a la curva obtenida al cortar la gráfica de $z = f(x,y)$ por un plano horizontal de ecuación $z = c$. Por tanto, las curvas de nivel de $f(x,y)$ son los subconjuntos del dominio con ecuaciones de la forma:

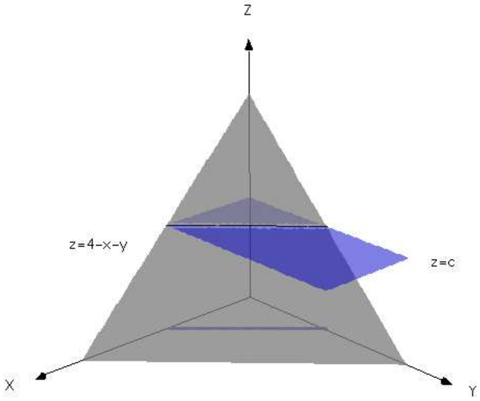
$$f(x,y) = c\,,$$

donde c es un valor en $\mathrm{Im}(f)$. La idea de las curvas de nivel es un método de *representar* superficies que utilizamos en la elaboración de mapas. Para representar terrenos montañosos es práctica común dibujar curvas que unen los puntos de la misma altura. Una colección de estas curvas, rotuladas de forma adecuada, da una buena idea de las variaciones de altitud de una región.

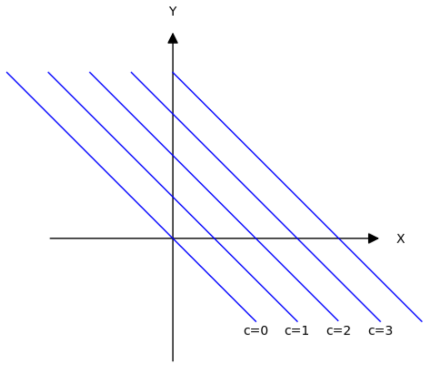
Ejemplo 5.3 Calculemos las curvas de nivel del campo escalar $z = 4-x-y$ (cuya gráfica es un plano). Haciendo $z = c$

$$4 - x - y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

obtenemos una familia de rectas paralelas tal y como se observa en la Fig. 5.2.



(a) Superficie

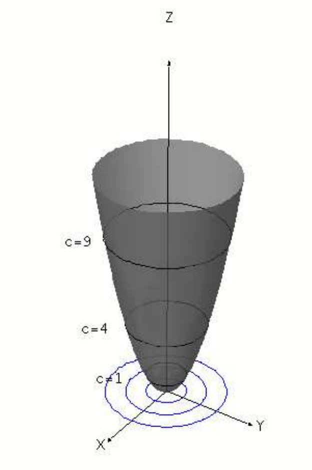


(b) Curvas de nivel

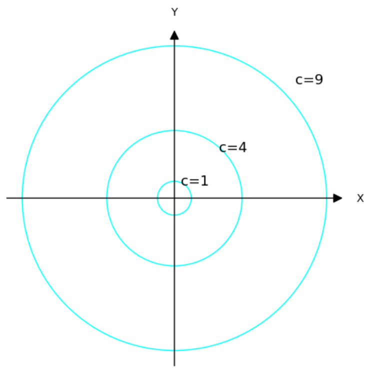
Figura 5.2: Curvas de nivel de $z = 4 - x - y$

Ejemplo 5.4 Analizemos ahora las curvas de nivel del campo escalar definido por $z = x^2 + y^2$ (Fig. 5.3). Debemos estudiar las curvas de ecuación

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0\,.$$



(a) Superficie



(b) Curvas de nivel

Figura 5.3: Curvas de nivel de $z = x^2 + y^2$

Hemos considerado que $c \geq 0$ porque es imposible que $x^2 + y^2$ sea negativo. Las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen de coordenadas y de radio $\sqrt{c}$ si $c > 0$ y se reduce al origen de coordenadas si $c = 0$.

Dibujar las gráficas de las funciones de dos variables es en general una tarea difícil. Dibujar la gráfica de una función de tres variables es sencillamente imposible. Para dibujarlas necesitaríamos un espacio de cuatro dimensiones; el propio dominio ha de ser una porción del espacio tridimensional. Lo que haremos es intentar representar el comportamiento de una función $f(x, y, z)$ de tres variables mediante las *superficies de nivel* de f que son una generalización del concepto de curva de nivel visto anteriormente. Las superficies de nivel de $f(x, y, z)$ son los subconjuntos del dominio con ecuaciones de la forma:

$$f(x, y, z) = c\,,$$

donde c es un valor en $\mathrm{Im}(f)$.

Ejemplo 5.5 Consideremos el campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sus superficies de nivel

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

son esferas concéntricas centradas en el origen de coordenadas; como se muestran en la Fig. 5.4.

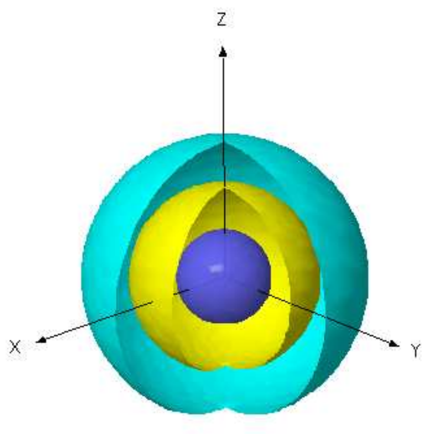


Figura 5.4: Superficies de nivel de $x^2 + y^2 + z^2$

Ejemplo 5.6 Si calculamos las superficies de nivel del campo escalar

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz$$

obtenemos las superficies de ecuación $Ax + By + Cz = c$, $c \in \mathbb{R}$ que son planos paralelos.

Ejemplo 5.7 Vamos a calcular las superficies de nivel del campo escalar definido como

$$f(x, y, z) \begin{cases} \dfrac{|z|}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, z), \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Para ello, observamos que sólo toma valores no negativos y que no está definida en los puntos del eje z diferentes del origen. Teniendo en cuenta que f sólo se anula cuando $z = 0$, la superficie de nivel cuando $c = 0$ es el plano xy. Para encontrar las otras superficies de nivel, consideramos $c > 0$ y hacemos $f(x, y, z) = c$. Entonces

$$\frac{|z|}{x^2 + y^2} = c, \quad \text{y por tanto} \quad |z| = c\,(x^2 + y^2)$$

que son paraboloides dobles de revolución (Fig. 5.5).

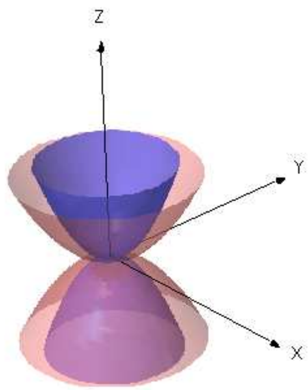


Figura 5.5: Superficies de nivel de $\dfrac{|z|}{x^2 + y^2}$

5.2. Funciones vectoriales

Una función $\mathbf{f}\colon D \subset R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > 1$ se llama *una función vectorial de varias variables.* Si $n = m > 1$, la función se llama *campo vectorial.*

Una función vectorial $\mathbf{f}\colon D \subset R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se puede estudiar de forma natural por medio de m campos escalares

$$\begin{array}{rl} \mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \mapsto (\, f_1(\mathbf{x}),\, \ldots,\, f_n(\mathbf{x})\,) \end{array}$$

sin más que considerar las componentes del vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Estos campos escalares se llaman *las funciones componentes de* $\mathbf{f}$. Por tanto, una función vectorial no es más que un vector de m funciones escalares:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

Queda claro, además, que el dominio de una función vectorial debe estar contenido en la intersección de los dominios de cada una de sus componentes.

Ejemplo 5.8 Si consideramos la función vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y,\, \sin x,\, -x + e^2)\,,$$

las funciones componentes de $\mathbf{f}$ son:

$$\begin{array}{rl} f_1(x, y) = & x^2 + y \\ f_2(x, y) = & \sin x \\ f_3(x, y) = & -x + e^2 \end{array}$$

En el caso de campos vectoriales, aún es posible idear una representación. Para campos vectoriales en el plano (o en el espacio) a cada punto (x, y) del dominio le corresponde el vector $(u, v) = \mathbf{f}(x, y)$; basta dibujar dicho vector con origen en (x, y) para obtener una representación gráfica del campo. En la figura siguiente, Fig. 5.6, se ha representado, con la ayuda de un programa informático, el campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

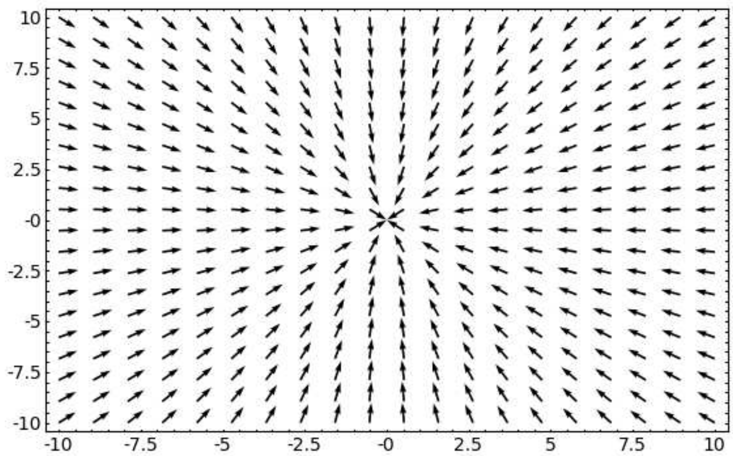


Figura 5.6: Campo vectorial

5.3. Límites y continuidad

Imaginemos que, en un futuro, los científicos hallaran una fórmula (función) que proporcionara la temperatura ambiente en cada instante t (medido en segundos) en un punto de la Tierra de coordenadas (θ, ϕ) (latitud y longitud, respectivamente). Dicha fórmula podría expresarse en la forma

$$T = T(\theta, \phi, t)$$

Entonces, podríamos predecir la temperatura ambiente en cualquier momento de cualquier día del año. Sería de esperar, entonces, que dos puntos espaciales próximos entre sí, tuvieran temperaturas parecidas en el mismo instante o que el mismo lugar tuviera temperaturas próximas en instantes cercanos. Más aún, cabe esperar que la temperatura no fuese muy distinta en lugares próximos en instantes cercanos (imagina el caos térmico si no fuera así). Este comportamiento de la función $T(\theta, \phi, t)$ es lo que llamaremos *continuidad*. Las funciones continuas no requieren grandes esfuerzos de imaginación; rigen la mayoría de los procesos físicos y químicos (pero no todos!).

Antes de abordar el concepto de continuidad necesitamos introducir el de *límite* de una función que nos ayudará a entender el concepto de proximidad entre valores.

5.3.1. Límites

La noción de distancia se presenta en la geometría eucídea al medir las longitudes de los segmentos que unen dos puntos cualesquiera del espacio. A continuación se definen las distancias, también llamadas métricas, más usuales con las que trabajaremos.

- La aplicación $d(x, y) := |x - y|;\ \ x, y \in \mathbb{R}$ define una métrica sobre $\mathbb{R}$, que, salvo que se diga lo contrario, será la métrica usual de $\mathbb{R}$.
- Análogamente la aplicación $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ será la métrica usual de $\mathbb{C}$.
- La *métrica euclídea* sobre $\mathbb{R}^n$ será la definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

  donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
- El *módulo* o *norma* de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define por

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

  Por tanto, se verifica que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Si los subconjuntos notables de $\mathbb{R}$ son los intervalos, sus equivalentes en $\mathbb{R}^n$ van a ser las *bolas abiertas* y *bolas cerradas* de centro $\mathbf{a}$ y radio $r > 0$, definidas como

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}, \quad B_r[\mathbf{a}] = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\}$$

A continuación, se define el *diámetro* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, representado por $\delta(A)$ como

$$\delta(A) = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ :\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}$$

lo que permite definir el concepto de *conjunto acotado* como aquel cuyo diámetro es finito o, equivalentemente, como aquel que está contenido en una bola cerrada.

En el estudio de los límites, y de las funciones en general, es importante conocer no sólo el valor de la función en un punto sino cómo se comporta dicha función en los puntos cercanos a él. Tiene sentido entonces definir *entorno* de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene una bola abierta centrada en $\mathbf{x}$. También se dice que $\mathbf{x}$ es *interior* a U. Es decir, un entorno de $\mathbf{x}$ contiene al punto $\mathbf{x}$ y a todos sus *vecinos*.

De especial interés son los llamados *conjuntos abiertos* definidos como los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son entornos de todos sus puntos; es decir, con la propiedad

$$A \text{ es un conjunto abierto de } \mathbb{R}^n \text{ sii } \forall\, x \in A\ \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(a) \subset A.$$

Cabe notar, entonces, que un conjunto A es abierto si, y solamente si, todos sus puntos son interiores.

También será de interés conocer los *puntos frontera* de un conjunto A definidos como aquellos que cumplen que cualquier bola centrada en ellos contiene puntos del conjunto A y puntos de su complementario $\mathbb{R}^n \setminus A$. El conjunto de puntos frontera de A se denotará por ∂A.

Los conjuntos abiertos, por tanto, no contienen puntos frontera. Esta es la ventaja esencial de los conjuntos abiertos; dado cualquier punto del conjunto abierto podemos acercarnos a él desde cualquier dirección; es decir, todos sus vecinos próximos están también en el abierto. Esta propiedad facilita muchas definiciones de las que veremos a lo largo de este tema y de los siguientes; puesto que muchos conceptos están definidos por *límites* y estos dependen de que podamos acercarnos cuanto queramos al punto en cuestión. Por este motivo, en las disquisiciones teóricas se suele exigir que las funciones estén definidas en un abierto.

A continuación se dará la definición de límite para funciones de dos variables, fácilmente generalizable para funciones de más variables. Esta definición es, a su vez, una generalización de lo que ocurre en funciones de una variable.

Definición 5.3 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con D un conjunto abierto y sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando (x, y) tiende a (a, b)

si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ / \text{ si } (x, y) \in D \text{ y } \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x, y) - \lambda| < \varepsilon$$

y se denota por $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lambda$.

En resumen, la expresión anterior puede interpretarse diciendo que el límite de f es λ si cuando (x, y) está cerca de (a, b) el valor de $f(x, y)$ está cerca de λ.

Ejemplo 5.9 Calcula el límite de $f(x, y) = y^2 + 3xy$ cuando (x, y) tiende a $(0, 1)$.

Solución: Dado que (x, y) tiende a $(0, 1)$, esto significa que x está cerca de 0 e y está cerca de 1, por lo que, intuitivamente, parece claro que $f(x, y) = y^2 + 3xy$ estará cerca de $1^2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 1$. Entonces, afirmamos que el límite será 1; es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y^2 + 3xy) = 1^2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

Cabe notar que, en realidad, lo hecho anteriormente equivale a substituir x por 0 e y por 1 y evaluar $f(x, y)$.

$\square$

Nota: El procedimiento visto en el ejemplo anterior (substituir x por 0 e y por 1 y evaluar $f(x, y)$) puede funcionar en muchos casos sencillos pero no equivale siempre al cálculo del límite correcto. Igual que sucede en el cálculo de límites de funciones de una variable, la mayor dificultad se presenta cuando al efectuar estas operaciones el resultado es una de las indeterminaciones típicas del cálculo de límites. Para resolverlas se utilizan técnicas especiales que no abordaremos en este curso.

A pesar de esto, conviene conocer algunos resultados que pueden ayudarnos a calcular ciertos límites.

Teorema 5.4 (Criterio del Sandwich) Sean $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando que

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = \lambda$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lambda$$

Teorema 5.5 Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, verificando que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ y $g(\mathbf{x})$ es una función acotada en D. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = 0$$

El siguiente resultado relaciona el límite de funciones y el límite de sucesiones; aunque las sucesiones que aparecen aquí están formadas por vectores de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.6 Sea $f(\mathbf{x})$ una función definida en un entorno de $\mathbf{x}_0$. Entonces, el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe y vale L si, y sólo si, para toda sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ que converge a $\mathbf{x}_0$, siendo $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$, para todo k; se cumple que

$$\lim_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}_k) = L$$

EL siguiente ejemplo nos muestra el interés de este teorema: sirve para demostrar que ciertos límites no existen.

Ejemplo 5.10 Calcula el $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución: Vamos a ver que este límite no existe. Por el Teorema 5.6, basta encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que converjan a 0 y que cumplan

$$\lim_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_n \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

Aprovecharemos para ello las propiedades de periodicidad de la función seno. Sean, para cada n,

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Entonces, es claro que ambas convergen a 0 y, al evaluar la función

$$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(n\pi) = 0, \quad \text{para todo } n$$

por lo que $\lim \sin\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 0$; mientras que

$$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \text{para todo } n$$

por lo que $\lim \sin\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = 1$, tal y como se quería demostrar.

En la Fig. 5.7 se ha representado la gráfica de la función $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

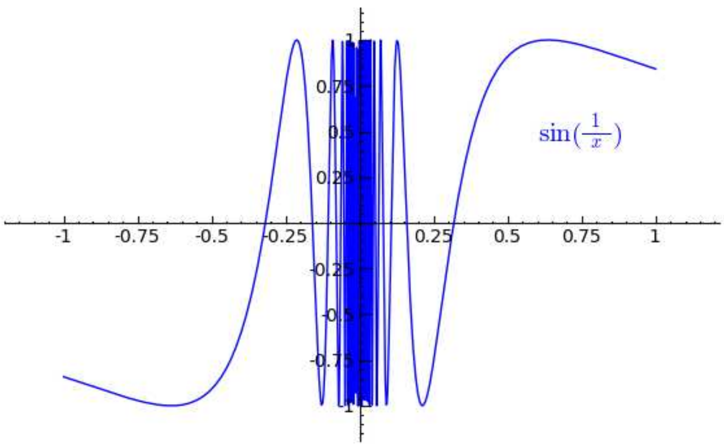


Figura 5.7: Gráfica de $\sin(\dfrac{1}{x})$

Como puede observarse la función oscila entre -1 y 1 al acercarse a $x = 0$; por lo que toma todos los valores posibles del intervalo $[-1, 1]$.

$\square$

Ejercicio 5.2 Demuestra que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$. (H: Considera sucesiones en $\mathbb{R}^2$ de la forma $(a_n, 0)$ y $(b_n, 0)$)

Ejemplo 5.11 Calcula el valor de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)$.

Solución: Si intentamos resolver este límite siguiendo el procedimiento del Ejemplo 5.9, encontramos una dificultad que antes no aparecía. Las variables

x e y están ambas cerca de 0, por lo que el factor xy estará cercano a 0. Sin embargo, el valor de la expresión $\frac{5}{x^2+y^2}$ tiende a infinito, al estar el denominador cercano a 0 y el seno de esta expresión no se acerca a ningún valor concreto, por lo que la técnica de substituir x e y por 0 no es aplicable en este caso.

No obstante, si es cierto que, independientemente, del valor de x e y la función $\sin\left(\frac{5}{x^2+y^2}\right)$ se encuentra acotada (en valor absoluto) por 1; por lo que podemos aplicar el Teorema 5.5 y deducir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{xy}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{5}{x^2+y^2}\right)}_{\text{acotada}} = 0$$

$\square$

Para el caso de funciones vectoriales, las funciones componentes permiten reducir el estudio de límites al estudio de campos escalares.

Definición 5.7 Si $\mathbf{f}\colon D \subset R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial con componentes $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, diremos que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$$

si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = l_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

5.3.2. Funciones continuas

El concepto de continuidad se define, de nuevo, como una generalización del caso de funciones de una variable.

Definición 5.8 Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in D$. Diremos que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ \text{si } \mathbf{x} \in D \text{ y } d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$$

Si f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0 \in D$, diremos que f es continua en D y lo escribiremos $f \in \mathcal{C}(D)$

Una función vectorial $\mathbf{f}\colon D \subset R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si todas sus funciones componentes son continuas en $\mathbf{x}_0$.

Ejemplo 5.12 Consideremos la proyección $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $1 \leq j \leq n$, definida por

$$\pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_j$$

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\epsilon > 0$. Tomando $\delta = \epsilon$, se cumple que si $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$, entonces al ser

$$|x_j - a_j| = \sqrt{|x_j - a_j|^2} < \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + \dots + |x_j - a_j|^2 + \dots + |x_n - a_n|^2}$$

y como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + \dots + |x_j - a_j|^2 + \dots + |x_n - a_n|^2} < \delta$$

concluimos de las dos condiciones anteriores que $|x_j - a_j| < \delta$; es decir,

$$|\pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) - \pi_j(a_1, a_2, \dots, a_n)| = |x_j - a_j| < \delta = \epsilon$$

y como este razonamiento es válido para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, concluimos que las proyecciones π_j son continuas en $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, 2, \dots, n$.

Incluso en casos sencillos como el del ejemplo anterior el estudio de la continuidad de una función a partir de la definición puede ser bastante difícil. Afortunadamente, al igual que sucede en el caso de funciones de una variable, la definición de continuidad es totalmente análoga a la de límite tomando $\lambda = f(\mathbf{x}_0)$, por lo que el estudio de la continuidad se reduce al estudio de límites.

Teorema 5.9 f es continua en un punto $\mathbf{x_0}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) f está definida en $\mathbf{x_0}$.

b) Existe $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$.

c) $f(\mathbf{x}_0) = l$.

Como consecuencia, es fácil deducir las propiedades de las funciones continuas, totalmente análogas a las de los límites.

Teorema 5.10 (Álgebra de funciones continuas) Si las funciones f y g son continuas en $\mathbf{x}_0 \in D$, también lo son

- la suma $f+g$ y el producto por un escalar $\alpha f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- el producto $f \cdot g$ y el cociente $\dfrac{f}{g}$, siempre y cuando $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$;

Además, la composición de funciones continuas es continua:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ continua en } \ \mathbf{x}_0 \in D \\ \mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ continua en } \ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in B \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{g} \circ \mathbf{f} \text{ es continua en } \ \mathbf{x}_0$$

Las funciones elementales matemáticas son continuas en su dominio de definición. Esto, junto con el hecho de que la composición de funciones continuas es continua, permite razonar la continuidad de numerosas funciones. Por ejemplo,

Ejemplo 5.13 $f(x,y,z) = x^2yz - x^2 + y^3z^2 - 8$ es continua en $\mathbb{R}^3$ por ser productos y sumas de funciones continuas. De hecho podemos escribir f en función de las proyecciones π_j.

$$f = (\pi_1)^2 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 - (\pi_1)^2 + (\pi_2)^3 \cdot (\pi_3)^2 - 8$$

Podemos generalizar este resultado diciendo que toda función polinómica de n-variables es continua en $\mathbb{R}^n$ por ser producto y sumas de proyecciones.

Ejemplo 5.14 Razona la continuidad de la función $f(x,y) = \sin(xy)$ en su dominio.

Solución: La estrategia consiste en razonar la continuidad de las diversas funciones que integran la función f. Se sabe que la función $g(x,y) = xy$ es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser una función polinómica. La función f es la composición de esta función g y la función elemental seno (que son ambas continuas), por lo que la función f es continua.

$\square$

Ejemplo 5.15 Razona la continuidad de la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ en su dominio.

Solución: Se sabe que la funciones xy y x^2+y^2 son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. La función f es el cociente de ambas, por lo que la función f es continua en todos los puntos en los que el denominador no se anula (que es, precisamente, su dominio).

$\square$

Ejercicio 5.3 Razona la continuidad de las funciones siguientes en su dominio:

1. $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 2$
2. $g(x,y) = \sqrt{y^2 + x^2y - 2xy - 2x^3}$
3. $h(x,y) = \sqrt{x}\ \log\left(1 + \sqrt{x^2+y^2} + \left|\dfrac{y}{x}\right|\right)$

Ejercicio 5.4 Halla el dominio y razona la continuidad en él de las funciones:

(a) $\mathbf{f}(x,y) = (x^2y - 1, \sin xy, 0)$

(b) $\mathbf{f}(x,y) = \left(\log(1+x^2+y^2), \sqrt{1-(x^2+y^2)}\ \right)$

(**Sol.:** (a) $D = \mathbb{R}^2$; (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$ (disco unidad))

5.4. Problemas adicionales

Ejercicio 5.5 Sabiendo que $1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan(xy)}{xy} < 1$; ¿qué puedes decir sobre el valor de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy}$? (H: Aplica el Teorema 5.4)

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 5.6 ¿Qué puedes decir sobre el valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$? (H: Aplica el Teorema 5.5)

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 5.7 Si $f(\mathbf{x})$ es una función continua en $\mathbf{x_0}$ y $g(\mathbf{x})$ es una función discontinua en $\mathbf{x_0}$, ¿qué sucede con la suma $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$? (H: Aplica el Teorema 5.10)

Ejercicio 5.8 Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, ¿es cierto que existe el valor $f(x_0, y_0)$? Razona la respuesta.

Ejercicio 5.9 Halla el dominio de $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x-y}$ y razona su continuidad.

(**Sol.:** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq y\}$)

Ejercicio 5.10 Halla el dominio de $f(x,y) = xy \sin\left(\dfrac{2}{xy}\right)$ y razona su continuidad.

(**Sol.:** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 0\}$)

Ejercicio 5.11 Halla el dominio de $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + |z|)$ y razona su continuidad.

(**Sol.:** $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$)

Ejercicio 5.12 Razona la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

(b) $f(x,y) = \log\left(|x^2 - xy + \sin(xy) - \log(x+y)|\right)$