Tema 4

Series de Potencias

Una expresión de la forma

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

recibe el nombre de *serie de potencias* centrada en c.

Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

cuyo dominio es el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie es convergente y el valor de $f(x)$ es, precisamente, la suma de la serie en ese punto x.

Las series de potencias, vistas como funciones, tienen un comportamiento bueno, en el sentido de que son funciones continuas y derivables de cualquier orden. Más aún, su función derivada es, otra vez, una serie de potencias. Desde un punto de vista más práctico, las series de potencias aproximan a su función suma. Es decir, la suma parcial de orden n, que no es más que un polinomio de grado n a lo sumo, representa una aproximación a la función suma en su dominio de convergencia. En la siguiente figura, Fig. 4.1, puede verse la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ junto con algunas aproximaciones mediante sumas parciales de su serie de potencias.

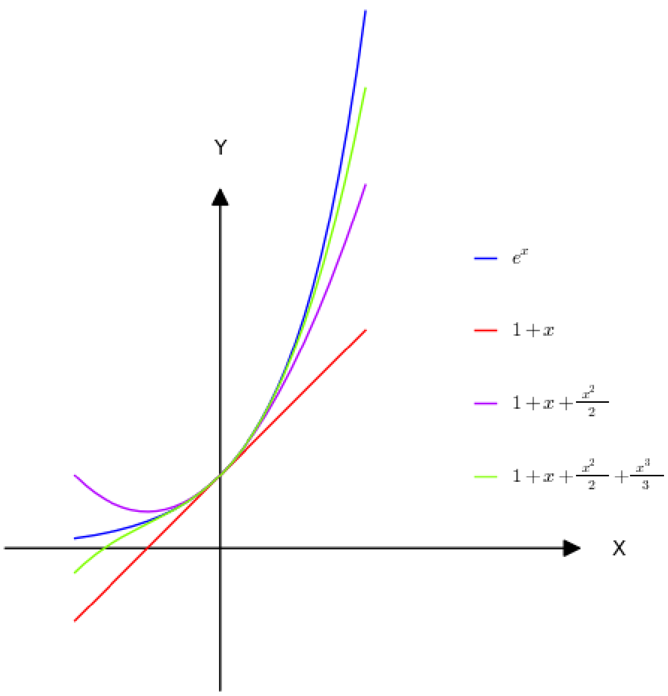

Figura 4.1: Aproximación a e^x por su serie de potencias

4.1. Radio de convergencia

Nuestro objetivo ahora será determinar el dominio de una serie de potencias. Por una parte está claro que el centro c siempre está en el dominio ya que

$$f(c) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c-c)^n = a_0$$

Puede ocurrir que la serie sólo sea convergente en $x = c$, pero, en general, el campo de convergencia será un intervalo; como nos indica el resultado siguiente.

Teorema 4.1 Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$. Entonces es cierta una, y sólo una, de las tres afirmaciones siguientes:

1. La serie sólo converge en $x = c$.
2. Existen $R > 0$ de manera que la serie converge (absolutamente) si $|x-c| < R$ y diverge si $|x-c| > R$.
3. La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Al número R se le llama *Radio de convergencia* de la serie. Para unificar todos los casos, entendemos en el caso (1) que $R = 0$, y en el caso (3) que $R = +\infty$.

Por tanto el dominio o campo de convergencia de una serie de potencias es siempre un intervalo, ocasionalmente un punto, que llamaremos *intervalo de convergencia*. Notar que el teorema precedente no afirma nada respecto de la convergencia en los extremos del intervalo, $c - R$ y $c + R$.

Veremos seguidamente una fórmula para calcular el radio de convergencia:

Teorema 4.2 (Cauchy-Hadamard) Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ y sea $A := \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces,

- $A = 0 \quad \Rightarrow \quad R = +\infty$
- $A = +\infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$
- $0 < A < +\infty \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{1}{A}$

Nota: El símbolo $\overline{\lim}\ a_n$ representa el límite superior de la sucesión $\{a_n\}$ el cual viene definido como el mayor de los límites de las subsucesiones convergentes de $\{a_n\}$. Obviamente, si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\overline{\lim}\ a_n = \lim_n a_n$ por lo que concluimos que

- Si existe $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = A \Rightarrow R = \dfrac{1}{A}$
- Si existe $\lim\limits_{n} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A \Rightarrow R = \dfrac{1}{A}$

La utilización de un criterio u otro dependerá de la forma que tenga el término a_n.

Ejemplo 4.1 Considera la serie de potencias

$$1 + x + (2!)x^2 + (3!)x^3 + \ldots + (n!)x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (n!)x^n$$

En esta serie $a_n = n!$ de donde

$$A = \lim_{n} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n}(n+1) = +\infty \Rightarrow \ R = 0$$

Así pues, la serie sólo converge en $x = 0$.

Ejemplo 4.2 Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2n+1}}{2^{n^2+1}} x^n$. Para calcular su radio de convergencia llamamos $a_n = \dfrac{n^{2n+1}}{2^{n^2+1}}$ y obtenemos

$$A = \lim_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n} \sqrt[n]{\frac{n^{2n+1}}{2^{n^2+1}}} = \lim_{n} \frac{n^{2+\frac{1}{n}}}{2^{n+\frac{1}{n}}} = 0 \Rightarrow \ R = +\infty$$

Así pues, la serie es convergente para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. Luego el intervalo de convergencia es $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Ejemplo 4.3 Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} x^n$. Para calcular su radio de convergencia llamamos $a_n = \dfrac{n^3}{4^n}$ y obtenemos

$$A = \lim_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n} \sqrt[n]{\frac{n^3}{4^n}} = \lim_{n} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ R = 4$$

Así pues, la serie es (absolutamente) convergente si $|x| < 4$ y divergente si $|x| > 4$. Para averiguar la convergencia en los extremos del intervalo será necesario hacer el estudio particular.

$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \quad \text{(divergente)}$$

$$x = -4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^3 \quad \text{(divergente)}$$

Concluimos, finalmente, que el intervalo de convergencia es $I =]-4, 4[$.

Ejemplo 4.4 Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Para calcular su radio de convergencia llamamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y obtenemos

$$A = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow \; R = 1$$

Así pues, la serie es (absolutamente) convergente si $|x| < 1$ y divergente si $|x| > 1$. Para averiguar la convergencia en los extremos del intervalo será necesario realizar el estudio particular.

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(divergente)}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(convergente)}$$

Concluimos, finalmente, que el intervalo de convergencia es $I = [-1, 1[$.

Ejercicio 4.1 Calcula el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$.

(**Sol.:** $R = \dfrac{1}{2}$)

Ejercicio 4.2 Calcula el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(**Sol.:** $I = \mathbb{R}$)

Ejercicio 4.3 Calcula el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{(2n)!}$, incluyendo el estudio de la convergencia en los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$)

Ejercicio 4.4 Calcula el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{4n}$, incluyendo el estudio de la convergencia en los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]-1, 1]$)

Ejercicio 4.5 Calcula el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{(2n)!}$, incluyendo el estudio de la convergencia en los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$)

Ejercicio 4.6 Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$, incluyendo el estudio de la convergencia en los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]0, 10]$)

Ejercicio 4.7 Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-c)^n}{nc^n}$ $c \in \mathbb{R}$, incluyendo el estudio de la convergencia en los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]0, 2c]$ si $c > 0$, $I = [2c, 0[$ si $c < 0$)

Cuando las potencias no son consecutivas se utiliza un cambio de variable para calcular el radio de convergencia.

Ejemplo 4.5 Sea la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} x^{2n}$. Como las potencias no son consecutivas, no puede aplicarse directamente el criterio del teorema de Cauchy-Hadamard. Realizaremos, previamente, un cambio de variable.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} (x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} t^n$$

para esta última calculamos el radio de convergencia, llamando $a_n = \frac{n^3}{4^n}$, y obtenemos $R = 4$ (es justo el Ejemplo 4.3).

Así,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} t^n \text{ es convergente para } |t| < 4,$$

por lo que, deshaciendo el cambio,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} (x^2)^n \quad \text{es convergente para } \; |x^2| < 4,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n} x^{2n} \quad \text{es convergente para } \; |x| < 2,$$

y concluimos que el radio de convergencia es $R = 2$. Faltaría estudiar el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo, pero ésto se deja como ejercicio al lector.

Ejercicio 4.8 Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1}$.

(**Sol.:** $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$)

Ejercicio 4.9 Calcula el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$.

(**Sol.:** $I = \mathbb{R}$)

4.2. Propiedades

Hemos visto que una serie de potencias define una función en un intervalo. Veremos ahora que propiedades cumple esta función.

Teorema 4.3 Sea $f(x)$ la función definida como una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces,

1. f es continua en todo punto interior del intervalo de convergencia.
2. f es derivable en todo punto interior del intervalo de convergencia y, además,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$
teniendo esta última serie radio de convergencia R (derivación término a término).
3. f es integrable en el intervalo de convergencia y, además,
$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (a_n(x-c)^n)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + C$$
teniendo esta última serie radio de convergencia R (integración término a término).

Ejemplo 4.6 Consideramos la función $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Hemos visto en un ejemplo anterior que el intervalo de convergencia era $[-1, 1[$.

Entonces la función derivada puede calcularse derivando término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

Sabemos, por la propiedad anterior, que el radio de convergencia para esta nueva serie continúa siendo $R = 1$. Veamos qué ocurre en los extremos del intervalo:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 \ \text{ que es divergente,}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \text{ que es divergente.}$$

Así pues, la serie derivada converge en $]-1, 1[$.

Veamos ahora qué ocurre con la integración. De nuevo, podemos integrar término a término.

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + C$$

De nuevo sabemos que el radio de convergencia para esta nueva serie continúa siendo $R = 1$. Veamos qué ocurre en los extremos del intervalo:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ \text{ que es convergente;}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \ \text{ que es convergente.}$$

Así pues, la serie integral converge en $[-1, 1]$.

Nota: Observa en el ejemplo anterior que al derivar hemos perdido un punto del intervalo de convergencia, mientras que al integrar hemos ganado uno. En general, sin embargo, el resultado correcto es

- Al derivar una serie no se pueden ganar extremos del intervalo de convergencia.
- Al integrar una serie no se pueden perder extremos del intervalo de convergencia.

Ejercicio 4.10 Siendo $f(x)$ la función definida por las serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$, calcula el intervalo de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ y

$\int f(x)\ dx$,incluyendo el estudio de los puntos extremos.

(**Sol.:** $I =]0, 10]$ para f y f'; $I = [0, 10]$ para $\int f$)

Ejercicio 4.11 Siendo $f(x)$ la función definida por la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^n$, calcula el intervalo de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ y $\displaystyle\int f(x)\ dx$,incluyendo el estudio de los puntos extremos.

(**Sol.:** $I = [-1, 1]$ para f y $\int f$; $I =]-1, 1]$ para f')

Ejercicio 4.12 Siendo $f(x)$ la función definida por las serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$, calcula el intervalo de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ y $\displaystyle\int f(x)\ dx$, incluyendo el estudio de los puntos extremos.

(**Sol.:** $I = [-1, 1]$ para f y $\int f$; $I =]-1, 1[$ para f')

Otras propiedades interesantes son las siguientes.

Teorema 4.4 Sean $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ y $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-c)^n$ definidas en el mismo intervalo I. Entonces,

1. $f(x) + g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n, \quad \forall x \in I$
2. $\alpha f(x) = \alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n (x-c)^n, \quad \forall x \in I$

En el caso de series de potencia centradas en $c = 0$, se cumple además

Teorema 4.5 Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ definida en el intervalo I. Entonces,

1. $f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n, \ \ \forall x \ / \ \alpha x \in I$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^N)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{Nn}, \ \ \forall x \ / \ x^N \in I$

Ejemplo 4.7 Calcular una primitiva de la función $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Solución: Sabemos que $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Entonces aplicando la proposición anterior:

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Ahora, integrando

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$$

En particular, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ es una primitiva de e^{x^2}.

$\square$

4.3. Desarrollo de funciones en serie de potencias

Hemos visto que una serie de potencias define una función en un intervalo I. Se aborda ahora el problema contrario. Dada una función $f(x)$ se trata de encontrar un serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

de manera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

para todo x del intervalo de convergencia.

Evidentemente, tales funciones deben ser continuas e indefinidamente derivables en su intervalo de convergencia y esto permite deducir además como deben ser los términos de una serie de potencias cuya suma es una determinada función f:

Teorema 4.6 Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \quad \forall x \in]c-R, c+R[$ entonces,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

A la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ la llamaremos *serie de Taylor* de f en c.

4.3.1. Desarrollos de Taylor

Conviene recordar ahora el conocido teorema de Taylor que permite aproximar una función por un polinomio de grado n.

Teorema 4.7 (Taylor) Sea f una función continua y con derivada continua hasta el orden n en un intervalo $I = [c-R, c+R]$ y derivable de orden $n+1$ en $]c-R, c+R[$. Si $x \in I$, existe un punto ξ entre c y x tal que

$$f(x) = \underbrace{f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}_{T_n(x)}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^(n+1)}_{R_n(x)}$$

Los términos $T_n(x)$ forman un polinomio de grado n a lo sumo, llamado polinomio de Taylor, mientras que el último término $R_n(x)$ se llama el resto de Lagrange.

Este teorema permite aproximar el valor de una función mediante un polinomio.

Ejemplo 4.8 Aproxima la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}2}}$. Da una cota del error cometido.

Solución:

1. Basta calcular las derivadas hasta el orden 4. Tomaremos como punto de cálculo el valor $a = 0$.

$$\begin{array}{lcl} f(x) = (1+x)^{-1/2} & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\dfrac{1}{2}(1+x)^{-3/2} & \Rightarrow & f'(0) = -\dfrac{1}{2} \\ f''(x) = \dfrac{3}{4}(1+x)^{-5/2} & \Rightarrow & f''(0) = \dfrac{3}{4} \\ f'''(x) = -\dfrac{15}{8}(1+x)^{-7/2} & \Rightarrow & f'''(0) = -\dfrac{15}{8} \\ f^{(4)}(x) = \dfrac{105}{16}(1+x)^{-9/2} & \Rightarrow & f^{(4)}(\xi) = \dfrac{105}{16}(1+\xi)^{-9/2} \end{array}$$

Finalmente,

$$f(x) \approx T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

por lo que,

$$f(x) \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48}$$

2. Como $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}2}} = f(0{,}2)$ basta tomar $x = 0{,}2$ en el polinomio anterior. Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}2}} \approx 1 - \frac{0{,}2}{2} + \frac{3(0{,}2)^2}{8} - \frac{15(0{,}2)^3}{48} \approx 0{,}9125$$

3. El error viene dado por el término

$$|\epsilon| = \left| \frac{f^4(\xi)}{4!} x^4 \right|$$

siendo $x = 0{,}2$ y $0 < \xi < 0{,}2$. Podemos escribir, pues,

$$|\epsilon| = \left| \frac{105}{4! \cdot 16(1+\xi)^{9/2}} (0{,}2)^4 \right| = \frac{105(0{,}2)^4}{384(1+\xi)^{9/2}}$$

Ahora hay que eliminar ξ de la fórmula anterior acotando la función por su valor máximo (en este caso, se trata de escribir el denominador más pequeño posible, teniendo en cuenta que $0 < \xi < 0{,}2$):

$$|\epsilon| = \frac{105(0{,}2)^4}{384(1+\xi)^{9/2}} < \frac{105(0{,}2)^4}{384} \approx 0{,}0004375$$

La aproximación es regular (2 o 3 cifras exactas).

$\square$

Ejercicio 4.13 Aproxima la función $f(x) = x \sin x$ mediante un polinomio de grado no mayor que 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{3} \right)$ con dos decimales de exactitud. Justifica la exactitud obtenida.

(**Sol.:** $f(x) \approx x^2$; $\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}11$; Error $< 0{,}00257$))

Hemos visto que si una función admite desarrollo en serie de potencias, esta serie debe ser necesariamente su correspondiente serie de Taylor. No obstante, la serie de Taylor de f en c no tiene porque tener de suma a la propia función f. Para garantizarlo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.8 Si f es una función indefinidamente derivable en un intervalo abierto centrado en c y si $R_n(x)$ representa el resto de Lagrange de la fórmula de Taylor, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \Leftrightarrow \lim_n R_n(x) = 0$$

Con el siguiente corolario tendremos una forma más fácil de aplicar la propiedad anterior:

Corolario 4.9 Si existe una constante $K > 0$ de forma que

$$|f^{(n)}(x)| \leq K, \quad \forall x \in I, \ \forall n \geq 0$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad \forall x \in I$$

Ejemplo 4.9 Sea $f(x) = \sin x$. Encuentra un desarrollo en serie de potencias.

Solución: Como

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces,

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \ (n \text{ impar}) \\ 0 & \text{si } n = 2k \ (\ n \text{ par}) \end{cases}$$

y obtenemos, pues, que la serie de Taylor de f en $x = 0$ es

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Calculamos el radio de convergencia de esta serie. Como las potencias no son consecutivas realizaremos un cambio de variable.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{(2n+1)!} \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Para esta última serie, llamando $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ se tiene

$$A = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_n \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

Es decir, la serie converge $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces, deshaciendo el cambio, la serie original es convergente $\forall x^2 \in \mathbb{R}$, o sea, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Falta demostrar que la serie suma exactamente $\sin x$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

Ahora bien, como

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, \ldots$$

basta aplicar el Corolario 4.9 para concluir que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

□

De forma similar se prueba que

- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1$ (serie binómica).

  siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$\binom{\alpha}{0} := 1; \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1) \overset{\text{n factores}}{\cdots} (\alpha-(n-1))}{n!}, \quad \text{si } n \geq 1$$

4.3.2. Otros desarrollos

En general, el método de calcular la serie de Taylor no resulta muy operativo, dada la dificultad de encontrar la derivada n–ésima, o aunque esto sea posible, la dificultad de demostrar que $\lim\limits_{n} R_n(x) = 0$.

Veremos ahora otros procedimientos para encontrar el desarrollo de una función en serie de potencias. Básicamente se trata de obtener por derivación, integración o transformaciones elementales una función de la cual conozcamos su desarrollo.

Ejemplo 4.10 Desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Solución: Recordemos que para una serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Por tanto,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

Este problema también se podría haber resuelto teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

que corresponde a una serie binómica de exponente $\alpha = -1$ y aplicando el desarrollo conocido (pág. 92) se llega a la misma conclusión sin más que tener en cuenta que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.

□

Ejemplo 4.11 Desarrollo de $f(x) = \log x$

Solución: Recordemos que la serie binómica de exponente $\alpha = -1$ verifica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$$

Por tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n, \quad |x-1|<1$$

Recuperamos la función f integrando:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int(-1)^n(x-1)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}+C, \ \ |x-1|<1$$

Así,

$$\log x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}+C, \quad |x-1|<1$$

Para calcular C basta evaluar la expresión anterior en un valor de x. Por sencillez, se elige el centro de la serie, $x=1$. Antes de substituir, desarrollamos el sumatorio:

$$\log x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}+C = (x-1)+\frac{-1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\ldots+C$$

por lo que al evaluar la serie en $x=1$, obtenemos

$$\log 1 = 0 + C \quad \Rightarrow \ C = 0$$

y, finalmente,

$$\log x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

$\square$

En el ejemplo anterior, hemos probado que

$$\log x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}, \ \ |x-1|<1$$

Estudiemos ahora qué pasa con los extremos del intervalo:

$$x=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{n+1} \text{ que es divergente.}$$

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(2-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ que es convergente.}$$

Pero, ¿podemos afirmar que en $x = 2$ la serie suma exactamente $\log 2$? En general, la respuesta es no. El teorema que veremos a continuación nos dará una condición suficiente para que podamos garantizarlo.

Teorema 4.10 (Abel) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n, \quad |x-c| < R$.

Si f es continua en $c+R$ y la serie es convergente en $x = c+R$ entonces se verifica que

$$f(c+R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c+R-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Análogamente para el extremo inferior: si f es continua en $c-R$ y la serie es convergente en $x = c-R$ entonces se verifica que

$$f(c-R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c-R-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$$

Ejemplo 4.12 Volviendo al ejemplo anterior, habíamos visto que

$$\log x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}, \quad |x-1| < 1$$

Ahora, la serie es convergente en $x = 2$ y la función $f(x) = \log x$ es continua en $x = 2$, entonces aplicando el teorema de Abel resulta que

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ejercicio 4.14 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $\dfrac{3}{x+2}$.

(**Sol.:** $\dfrac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n x^n \quad |x| < 2$)

Ejercicio 4.15 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1} \quad |x| < 1 \ )$$

Ejercicio 4.16 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $\dfrac{2}{(1+x)^3}$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2} \quad |x| < 1 \ )$$

Ejercicio 4.17 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $\log(x+1)$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in]-1, 1] \ )$$

Ejercicio 4.18 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $\dfrac{1}{4x^2+1}$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 4^n x^{2n} \quad |x| < \frac{1}{2} \ )$$

Ejercicio 4.19 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $\cos x$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ )$$

4.4. Problemas adicionales

Ejercicio 4.20 Calcula el intervalo de convergencia de las series siguientes, incluyendo el estudio de los puntos extremos:

$(a)\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{k})^n \quad k\in\mathbb{R};$ $\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n};$

$(c)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n;$ $\qquad (d)\sum_{n=0}^{\infty}(2n)!(\frac{x}{2})^n;$

$(e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)};$ $\qquad (f)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{3^n};$

$(g)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{n+1}};$ $\qquad (h)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1};$

$(i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1};$ $\qquad (j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}x^{2n+1}.$

$(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$

(**Sol.:** (a) $I=]-|k|,|k|[$, (b) $I=]-1,1[$, (c) $I=]-1,1[$, (d) $I=\{0\}$, (e) $I=[-1,1]$, (f) $I=]1,7[$, (g) $I=[-1,5[$, (h) $I=]0,2]$, (i) $I=[-1,1]$, (j) $I=]-1,1[$ y (k) $I=\mathbb{R}$.)

Ejercicio 4.21 Siendo $f(x)$ la función definida por la serie $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n$, calcula el intervalo de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ y $\int f(x)\,dx$, incluyendo el estudio de los puntos extremos.

(**Sol.:** $I=]-2,2[$ para f y f'; $I=[-2,2[$ para $\int f$)

Ejercicio 4.22

Considera la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{11\cdot 17\cdots(11+6n)}{7\cdot 13\cdot 19\cdot 25\cdots(19+6n)}x^n$$

(a) Calcula el radio de convergencia de la serie.

(b) Estudia la convergencia en $x = -1$, y en caso de ser convergente, calcula la suma.

(c) ¿Verifica, en $x = 1$, las hipótesis del criterio de Leibnitz para series alternadas?

(d) ¿Es absolutamente convergente en $x = 1$?

(**Sol.:** (a) $R = 1$; (b) Convergente y suma $\dfrac{11}{2 \cdot 7 \cdot 13}$; (c) Si; (d) Si.)

Ejercicio 4.23 Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}{n!}\, x^n$.

(a) Determina el radio de convergencia de la serie.

(b) Estudia la convergencia de la serie en $x = \dfrac{1}{4}$ y en $x = -1$.

(c) Estudia la convergencia en $x = -\dfrac{1}{4}$.

(**Sol.:** (a) $R = \dfrac{1}{4}$; (b) Divergente en $x = \dfrac{1}{4}$ y $x = -1$; (c) Divergente.)

Ejercicio 4.24 Aproxima la función $f(x) = x\ln(1 + x)$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $0{,}2\ln(1{,}2)$. Obtén una cota del error cometido.

(**Sol.:** $f(x) \approx x^2 - \dfrac{1}{2}x^3$; $0{,}2\ln(1,2) = 0{,}036 \pm 0{,}00053$)

Ejercicio 4.25 Aproxima la función $f(x) = x^2 \ln x$ mediante un polinomio de grado 2, expresado en potencias de $(x - 1)$. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ con dos decimales de exactitud. Justifica la exactitud obtenida.

(**Sol.:** $f(x) \approx x - 1 + \dfrac{3}{2}(x-1)^2$; $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}125 \pm 0{,}083$)

Ejercicio 4.26 Se considera la función $f(x) = \ln(\sqrt{1 + x})$.

(a) Aproxima la función por un polinomio de grado 4.

(b) Utiliza el polinomio anterior para aproximar $\ln(\sqrt{0{,}95})$ y acota el error cometido.

(**Sol.:** (a) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{8}$; (b) $\ln(\sqrt{0{,}95}) \approx -0{,}02564661 \pm 4{,}03861\,10^{-8}$)

Ejercicio 4.27 Se considera la función $f(x)=\ln(\sqrt{1+x})$.

(a) Desarrolla en serie de potencias la función $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

(b) Calcula la derivada de $f(x)$.

(c) Desarrolla en serie de potencias la función $f(x)$.

(**Sol.:** (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$; $|x|<1$; (b) $\dfrac{1}{2(1+x)}$; (c) $\dfrac{1}{2}\sum\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$; $|x|<1$)

Ejercicio 4.28 Desarrolla en serie de potencias la función $\sqrt{1+x+x^2}$ indicando cuál es el radio de convergencia. (H: Expresa el radicando $1+x+x^2$ en la forma $a^2+(x+b)^2$ para aplicar la serie binómica)

(**Sol.:** $\displaystyle\sqrt{\frac{3}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\frac{4^n}{3^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}$ si $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

Ejercicio 4.29 Aplica el ejercicio anterior para calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\dfrac{1}{3^n}$. (H: Toma un valor adecuado de x en el desarrollo anterior)

(**Sol.:** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$)

Ejercicio 4.30 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c=0$ la función $f(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}$.

(**Sol.:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}$ $\quad x\in\mathbb{R}$)

Ejercicio 4.31 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c=0$ la función $f(x)=\dfrac{4x-7}{2x^2+3x-2}$. (H: Expresa la fracción como suma de fracciones simples, hallando las raíces del denominador)

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{2^{n+1}} + 2^{n+1} \right) x^n \quad |x| < \frac{1}{2} \ )$$

En los ejercicios siguientes se trata de mediante derivación o integración de la función dada, relacionarla con una función de desarrollo conocido y a partir de éste hallar el desarrollo de la función original.

Ejercicio 4.32 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $f(x) = \arctan 2x$.

$$(\textbf{Sol.: } 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| \le \frac{1}{2} \ )$$

Ejercicio 4.33 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $f(x) = \arcsin x$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| \le 1 \ )$$

Ejercicio 4.34 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$ (H: Utiliza el ejercicio anterior).

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n+1} \quad |x| \le 1 \ )$$

Ejercicio 4.35 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $f(x) = \sin^2 x$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!(n+2)} x^{2n+2} \quad x \in \mathbb{R} \ )$$

Ejercicio 4.36 Desarrolla en serie de potencias centrada en $c = 0$ la función $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

$$(\textbf{Sol.: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} \quad x \in [-1, 1] \ )$$