Tema 2

Sucesiones Numéricas

Imaginemos la cola de entrada a un espectáculo formada por personas que han sido numeradas de la forma habitual; el primero de la cola lleva el número 1, el segundo el número 2 y así sucesivamente; pero con la diferencia respecto del mundo real de que la fila es infinita. ¿Cómo podría saber un espectador que observa la cola que dicha fila es infinita? Naturalmente, podría responderse que porque no alcanza con la vista el final de la cola (que por cierto no existe tal final); pero podríamos objetar que tal vez es un problema de vista y no de infinitud; ¿acaso en una cola de miles de millones de personas alcanzaríamos a ver el final? Una respuesta más adecuada matemáticamente es que en esta fila toda persona tiene siempre alguien detrás; es decir, siempre existe un *sucesor* a cualquier persona que esté haciendo cola. Esto resulta del hecho de que para numerar la cola hemos empleado el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y ésta es, precísamente, una de sus características esenciales. Acabamos de formar una *sucesión* (de personas).

Intuitivamente hablando, pues, una sucesión es una lista infinita de objetos que están numerados (ordenados) siguiendo el orden de los números naturales, $1, 2, \ldots$. Así al primer término de la sucesión le corresponde el índice (número en la cola) 1; el siguiente lleva el índice 2 y así sucesivamente. Cabe decir que, en ocasiones, será conveniente empezar con el índice 0 en vez de con 1.

En este tema, se tratarán las sucesiones numéricas; es decir aquellas listas cuyos objetos numerados son, a su vez, números. Aunque el título hace referencia a sucesiones numéricas en general; es decir, reales y complejas, nos limitaremos a estudiar las sucesiones reales, ya que el estudio de las sucesiones complejas se reduce a áquel mediante el análisis de las partes reales y complejas de los respectivos términos.

2.1. Sucesiones reales. Subsucesiones

Definición 2.1 Una *sucesión* de números reales es una aplicación

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

El rango de esta aplicación es el conjunto (ordenado)

$$\{a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \ldots\}$$

y denotando $a_n = a(n)$ lo podemos representar abreviadamente como $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$. También se utiliza la notación $\{a_n\}$ para representar a una sucesión, sobretodo si no nos importa señalar desde que término n empezamos. En general, las sucesiones pueden empezar desde un natural $n_0 > 0$, pero en las disquisiciones teóricas entendemos que empiezan desde $n = 1$.

Por tanto, una forma de escribir una sucesión es dando la fórmula del término general a_n.

Ejemplo 2.1

- $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$; es decir, $a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$.
- $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ es decir, $a_n = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1$.
- $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\}$; es decir, $a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 0$.

Sin embargo, en algunos casos la sucesión se define o bien por comprensión o bien por recurrencia; esta última significa que el término general a_n se define en función de uno o varios términos anteriores.

Ejemplo 2.2

- La sucesión formada por la unidad y los números primos. No es posible escribir a_n en función de n: $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$.
- $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$; que da la conocida sucesión de Fibonacci donde cada término es la suma de los dos anteriores: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots\}$

Una forma de representar gráficamente las sucesiones reales es como funciones, es decir, como pares ordenados (n, a_n), lo que puede ser útil en ocasiones para el estudio de sus propiedades. En el eje de abcisas se representan los números naturales n y en el eje de ordenadas los valores reales a_n. Dado que la variable n sólo admite valores naturales, la representación gráfica se visualizará, entonces, como un conjunto de puntos aislados, Fig 2.1

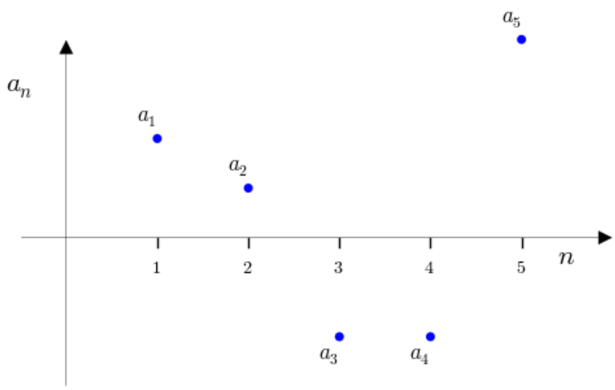

Figura 2.1: Representación gráfica de una sucesión

Definición 2.2 Una *subsucesión* de números naturales es una aplicación estrictamente creciente:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ j &\mapsto n_j \end{aligned}$$

es decir que se cumple

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p < n_{p+1} < \ldots$$

Esto permite definir, dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, una subsucesión de $\{a_n\}$ como la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} &\xrightarrow{a} \mathbb{R} \\ j \mapsto n_j &\mapsto a_{n_j} \end{aligned}$$

Es decir, donde los nuevos índices n_j forman una subsucesión de $\mathbb{N}$. Por tanto, la subsucesión, que denotaremos por $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$, puede entenderse como un subconjunto infinito (y ordenado) de $\{a_n\}$.

Ejemplo 2.3 Dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}$ son subsucesiones:

- $\{a_{2n}\}$, la subsucesión de los términos de orden par;
- $\{a_{2n+1}\}$, la subsucesión de los términos de orden impar;
- $\{a_{2^n}\}$, la subsucesión de los términos de orden potencias de 2;
- $\{a_{n+3}\}$, la subsucesión formada desechando los tres primeros términos.

Ejemplo 2.4 Considera la sucesión $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Entonces,

- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\}$ es subsucesión, con $n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 6, \ldots$
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$ es subsucesión, con $n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 8, \ldots$.
- $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ no es subsucesión. (No respeta el orden)
- $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\}$ no es subsucesión. (No es subconjunto)

2.2. Sucesiones monótonas

Al observar la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cuyos términos escribimos a continuación

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$$

vemos como cada término es mayor que su sucesor; es decir que la sucesión decrece; Fig. 2.2.

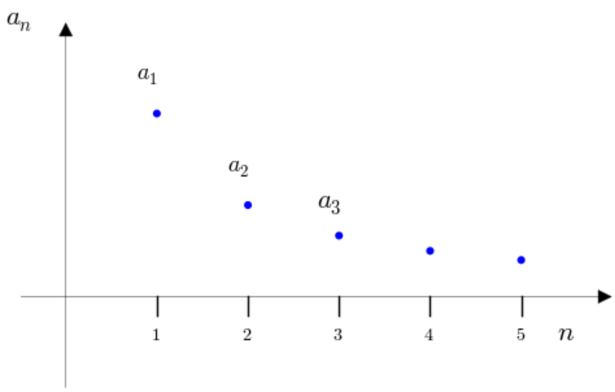

Figura 2.2: Sucesión decreciente

Por el contrario, la sucesión $\{n\}$

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

cumple que cada término es menor que su sucesor; es decir, la sucesión *crece*; Fig. 2.3.

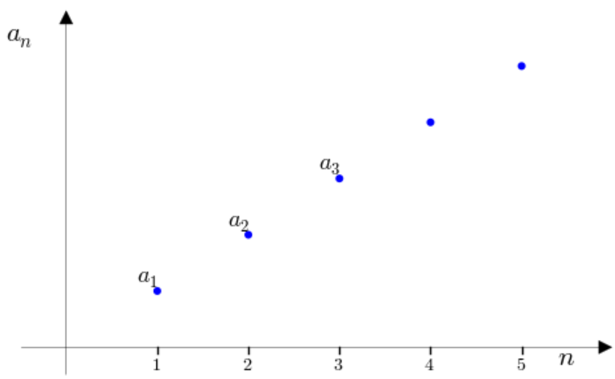

Figura 2.3: Sucesión creciente

Formalizamos estos conceptos en la siguiente definición.

Definición 2.3 Diremos que $\{a_n\}$ es :

- *monótona creciente* si, y sólo si, $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *monótona decreciente* si, y sólo si, $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *monótona* cuando es creciente o decreciente.

Cuando las desigualdades son estrictas se dirá que las sucesiones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, según el caso.

Ejemplo 2.5 Si consideramos de nuevo las sucesiones anteriores

- $\{n\}$ es creciente, porque $n \leq n+1$, para todo n
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente, porque $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, para todo n

En ocasiones el estudio de la monotonía no es tan evidente y requiere realizar algunas operaciones.

Ejemplo 2.6 Determina si la sucesión $\left\{\frac{n^2+3}{n^3-1}\right\}_{n\geq 2}$ es monótona.

Solución: Primero calculamos algunos de los primeros términos para determinar si es monótona y en qué sentido. Para no complicar la notación asumimos que el primer término será denotado por a_2 (en vez de por a_1):

$$a_2 = \frac{4}{7};\ a_3 = \frac{12}{26};\ a_4 = \frac{19}{63}$$

por lo que,

$$a_2 > a_3 > a_4$$

lo cual parece indicar que es monótona decreciente. Para probarlo, debemos verificar que $a_n > a_{n+1}$. Si escribimos esta condición

$$\frac{n^2+3}{n^3-1} > \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)^3-1}$$

y ahora, se trata de desarrollar esta expresión hasta llegar a una condición que sea cierta. Empezamos por quitar denominadores (ambos son positivos por lo que la desigualdad permanece)

$$(n^2+3)((n+1)^3-1) > ((n+1)^2+3)(n^3-1)$$

y, desarrollando los paréntesis,

$$n(9+9n+6n^2+3n^3+n^4) > -4-2n-n^2+4n^3+2n^4+n^5$$

que equivale a

$$4+11n+12n^2+2n^3+n^4 > 0$$

lo cual es cierto para cualquier valor de n al ser todos los sumandos positivos. Queda así comprobado que $a_n > a_{n+1}$, para todo n, por lo que la sucesión resulta ser monótona decreciente.

$\square$

Ejemplo 2.7 Determina si la sucesión $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$ es monótona.

Solución: Primero calculamos algunos de los primeros términos para determinar si es monótona y en qué sentido:

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{4};\ a_3 = \frac{6}{8};\ a_4 = \frac{24}{16};$$

por lo que,

$$a_1 \leq a_2 < a_3 < a_4$$

y parece indicar que es monótona creciente. Para probarlo, debemos verificar que $a_n < a_{n+1}$, para todo n. Dado que todos los términos son positivos y que involucran factoriales y potencias vamos a probar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}} = \frac{n+1}{2} \geq 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Queda así comprobado que $a_n < a_{n+1}$, para todo n, por lo que la sucesión resulta ser monótona creciente.

$\square$

Ejercicio 2.1 Estudia la monotonía de la sucesión $a_n = \dfrac{n^2+3}{3n+2}$, $n \geq 1$.

(**Sol.:** $\{a_n\}$ es monótona creciente)

Ejercicio 2.2 Estudia la monotonía de la sucesión $a_n = \dfrac{5n+3}{n^2+1}$, $n \geq 1$.

(**Sol.:** $\{a_n\}$ es monótona decreciente)

Ejercicio 2.3 Estudia la monotonía de la sucesión $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n!\,2^n}$, $n \geq 1$ (H: $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1$; es decir, es el producto de todos los impares menores o iguales a $2n-1$).

(**Sol.:** $\{a_n\}$ es monótona decreciente)

2.3. Sucesiones acotadas

Definición 2.4 Sea $\{a_n\}$ una sucesión real y $M \in \mathbb{R}$.

- Si $a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ diremos que $\{a_n\}$ está *acotada superiormente*. En este caso el número M se llama *cota superior*.
- Si $a_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ diremos que $\{a_n\}$ está *acotada inferiormente*. En este caso el número M se llama *cota inferior*.
- Diremos que $\{a_n\}$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a decir que
$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Gráficamente, una sucesión acotada es, pues, aquella cuyos términos se encuentran situados en una banda horizontal de anchura $2M$, como puede observarse en la Fig. 2.4.

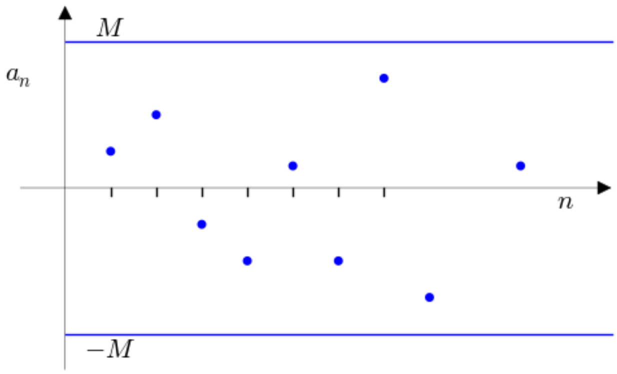

Figura 2.4: Sucesión acotada $|a_n| \leq M$

Ejemplo 2.8 Veamos algunos ejemplos de sucesiones acotadas.

- $\{\dfrac{1}{n}\}$ está acotada porque $|\dfrac{1}{n}| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{(-1)^{n+1}\}$ está acotada porque $|(-1)^{n+1}| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{n\}$ no está acotada superiormente.
- $\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\}$ no está acotada inferiormente (se verá más adelante que $\lim \ln(1/n) = -\infty$).

Ejemplo 2.9 Determina si la sucesión $\left\{\dfrac{n^2+3}{n^3-1}\right\}_{n\geq 2}$ está acotada.

Solución: Puesto que los términos de la sucesión siempre son positivos, queda claro que está acotada inferiormente por 0; es decir,

$$0 \leq \frac{n^2+3}{n^3-1}, \quad n \geq 2$$

Para acotarla superiormente, se utiliza un pequeño artificio: aumentar el grado del numerador para que coincida con el del denominador y poder realizar la división.

$$\frac{n^2+3}{n^3-1} \leq \frac{n^3}{n^3+3} = 1 + \frac{4}{n^3-1} \leq 1 + 1 = 2$$

$\square$

Ejercicio 2.4 Determina si la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

(**Sol.:** $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$)

Ejercicio 2.5 Determina si la sucesión $\left\{\dfrac{n^4+n+1}{n^3-2n}\right\}_{n\geq 1}$ está acotada.

(**Sol.:** $-3 \leq \dfrac{n^4+n+1}{n^3-2n}$ y no acotada superiormente)

2.4. Sucesiones convergentes

Observamos de nuevo la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{+\infty}$, escribiendo algunos de sus términos:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Cuanto más avanzamos, más pequeño es el término correspondiente. Parece que la sucesión va acercándose a cero y, por tanto, se dice que tiene límite cero. Por contra en la sucesión $\{n\}$ pasa lo contrario:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

cuanto más avanzamos más grande se hace el término correspondiente y, entonces, se dice que tiene límite $+\infty$. Finalmente, si tomamos la sucesión:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$$

se observa que por mucho que avancemos la sucesión siempre oscila entre 0 y 1 y se dice que es oscilante.

Estos conceptos se formalizan a continuación en las siguientes definiciones.

Definición 2.5 Diremos que $\{a_n\}$ es *convergente* y tiene límite $\lambda \in \mathbb{R}$ sii

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad / \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \lambda| < \epsilon$$

y lo escribiremos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lambda$.

Si una sucesión no es convergente, entonces se dice que es divergente; pero distinguiremos algunos tipos de divergencia.

Diremos que $\{a_n\}$ es *divergente* y tiene límite $+\infty$ sii

$$\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad / \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n > K$$

y lo escribiremos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = +\infty$.

Diremos que $\{a_n\}$ es *divergente* y tiene límite $-\infty$ sii

$$\forall K < 0 \quad \exists n_0 \in N \quad / \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n < K$$

y lo escribiremos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = -\infty$.

Diremos que $\{a_n\}$ es *divergente* y tiene límite ∞ sii

$$\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad / \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| > K$$

y lo escribiremos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \infty$.

Diremos que $\{a_n\}$ es *oscilante* si no es convergente ni divergente a $\pm\infty$ o ∞

Nota: En realidad, una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite ∞ si la sucesión de los valores absolutos $\{|a_n|\}$ tiene límite $+\infty$. Por eso, toda sucesión divergente a $+\infty$ o $-\infty$, también tiene límite ∞, pero el recíproco no es cierto (véase el Ejemplo 2.10).

Ejemplo 2.10 Veamos algunos ejemplos de sucesiones convergentes y divergentes.

1. $\{\frac{1}{n}\}$ es convergente y $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \; = \; 0$
2. $\{n\}$ es divergente y $\lim\limits_{n} n \; = \; +\infty$
3. $\{-n\}$ es divergente y $\lim\limits_{n}(-n) \; = \; -\infty$
4. $\{1, -1, 2, -2, \ldots, (-1)^{n+1}n, \ldots\}$ es divergente y $\lim\limits_{n}(-1)^{n+1}n \; = \; \infty$
5. $\{1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$ es oscilante (y acotada)
6. $\{1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots\}$ es oscilante (y no acotada)
7. $\{\sin n\}$ es oscilante (y acotada)

Gráficamente el concepto de límite se interpreta como que la cola de la sucesión se aproxima a una recta horizontal de ecuación $y = L$, si $\lim a_n = L$; Fig. 2.5,

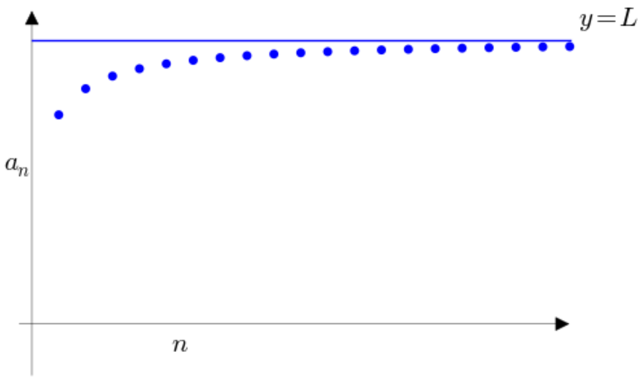

Figura 2.5: Sucesión convergente

o por el contrario, la cola supera cualquier cota K si $\lim a_n = +\infty$; Fig. 2.6.

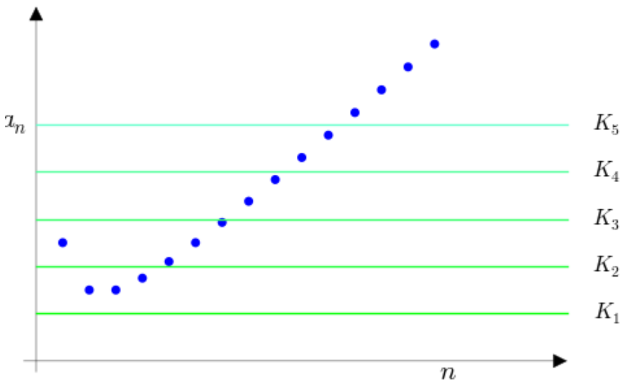

Figura 2.6: Sucesión divergente

En el siguiente teorema se resumen algunas propiedades básicas de los límites.

Teorema 2.6 Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente. Entonces,

1. El límite es único.
2. La sucesión es acotada.
3. Cualquier subsucesión es convergente y tiene el mismo límite.
4. $\lim\limits_n a_n = \lambda \iff \lim\limits_n (a_n - \lambda) = 0 \iff \lim\limits_n |a_n - \lambda| = 0$

Por otra parte, si la sucesión $\{a_n\}$ es divergente a $\pm\infty$ entonces cualquier subsucesión es divergente y tiene el mismo límite.

La propiedad (2) anterior proporciona un método para determinar si una sucesión está acotada; es decir, las sucesiones con límite finito están acotadas; aunque el recíproco no es cierto, en general: la sucesión oscilante $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ está acotada pero no tiene límite.

La propiedad (3) anterior permite eliminar un número finito de términos al calcular el límite de una sucesión. En particular, el límite no depende de los primeros términos sino de la cola de la sucesión; lo cual ya estaba implícito en la definición de límite.

Teorema 2.7 La relación de los límites con el orden de los números reales es la siguiente:

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$ y existen $\lim\limits_n a_n$ y $\lim\limits_n b_n$, entonces
$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$$
2. Si $\lim\limits_n a_n = \lambda < \alpha$, entonces existe n_0 tal que
$$a_n < \alpha, \text{ para cada } n \geq n_0$$
3. Si $\lim\limits_n a_n = \lambda > \alpha$, entonces existe n_0 tal que
$$a_n > \alpha, \text{ para cada } n \geq n_0$$

En particular, si $\lim\limits_n a_n \neq 0$, la sucesión $\{a_n\}$ tiene el mismo signo que su límite excepto, como mucho, en un número finito de términos.

Ya vimos que toda sucesión con límite finito está acotada y que el recíproco no es cierto en general. Si añadimos una condición de monotonía obtenemos dicho recíproco

Teorema 2.8 La relación entre la convergencia y la monotonía se resume en las siguientes propiedades.

1. Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.
2. Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.
3. Si $\{a_n\}$ es creciente y no acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ es divergente a $+\infty$.
4. Si $\{a_n\}$ es decreciente y no acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ es divergente a $-\infty$.

Teorema 2.9 (Aritmética de sucesiones convergentes) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces,

1. $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$
2. $\lim_n (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim_n a_n$
3. $\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$
4. $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$ si $\lim_n b_n \neq 0$
5. $\lim_n (a_n)^{b_n} = (\lim_n a_n)^{\lim_n b_n}$ si $\lim_n a_n > 0$

Para conocer el valor del límite cuando una o las dos sucesiones anteriores tienen límite infinito, se aplica la llamada *aritmética infinita* que se resume en la tabla siguiente.

En lo que sigue debe entenderse que $a \in \mathbb{R}$ representa el límite de una sucesión $\{a_n\}$ y $\pm\infty$ el de una sucesión $\{b_n\}$.

Suma:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty \qquad\qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$a\ +(+\infty)=+\infty \qquad\qquad a+(-\infty)=-\infty$$

Producto:

$$a(+\infty)=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>0 \\ -\infty & \text{si} \quad a<0 \end{cases} \qquad\qquad a(-\infty)=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a>0 \\ +\infty & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$$

$$(+\infty)(+\infty)=+\infty \qquad\qquad (-\infty)(-\infty)=+\infty$$

$$(+\infty)(-\infty)\ =\ -\infty$$

Cociente:

$$\frac{+\infty}{a}=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>0 \\ -\infty & \text{si} \quad a<0 \\ \infty & \text{si} \quad a=0 \end{cases} \qquad\qquad \frac{-\infty}{a}=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a>0 \\ +\infty & \text{si} \quad a<0 \\ \infty & \text{si} \quad a=0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{+\infty}=0 \qquad\qquad \frac{a}{-\infty}=0$$

$$\frac{a}{0}=\infty, \quad \text{si } a\neq 0$$

Potencias:

$$a^{+\infty}=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>1 \\ 0 & \text{si} \quad 0\leq a<1 \end{cases} \qquad\qquad a^{-\infty}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad a>1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0\leq a<1 \end{cases}$$

$$(+\infty)^{+\infty}=+\infty \qquad\qquad (+\infty)^{-\infty}=0$$

$$(+\infty)^{a}=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>0 \\ 0 & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$$

2.5. Cálculo de límites

Con la aritmética infinita, pueden presentarse los siguientes tipos de indeterminaciones:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Veamos cómo resolver algunas de ellas:

Ejemplo 2.11 Calcula el límite $\lim\limits_{n} \dfrac{n^2+3n-5}{n+2}$.

Solución: En este caso, se tiene un cociente de polinomios y ambos tienden a $+\infty$ por lo que, en principio, estamos ante una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. El procedimiento a seguir es dividir numerador y denominador por la potencia de mayor grado; en este caso, n^2.

$$\lim_{n} \frac{n^2+3n-5}{n+2} = \lim_{n} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

basta observar, en este último paso, que los cocientes $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ tienden ambos a 0.

Si se quiere determinar el signo del ∞, aunque ello no es siempre posible, basta determinar el signo de la sucesión $\frac{n^2+3n-5}{n+2}$ cuando n es grande. En este caso, para valores grandes de n la sucesión es siempre positiva, por lo que puede afirmarse que el límite es $+\infty$.

$\square$

Ejemplo 2.12 Calcula el límite $\lim\limits_{n} \dfrac{\sqrt{n^2+2n-5}}{5-3n}$.

Solución: En este caso, se tiene un cociente donde numerador y denominador tienden a ∞, por lo que, en principio, estamos ante una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. El procedimiento a seguir es dividir numerador y denominador por la potencia de mayor grado; en este caso, n (aunque el numerador no es un polinomio, se asimila a éste para el cálculo de límites, tomando como potencia de mayor grado $\sqrt{n^2} = n$).

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^2+2n-5}}{5-3n} = \lim_n \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}}{\frac{5}{n}-3} = \frac{\sqrt{1}}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$\square$

Ejercicio 2.6 Calcula $\lim_n \dfrac{n^2-n^3+2}{n+2}$.

(**Sol.:** $-\infty$)

Ejercicio 2.7 Calcula $\lim_n \dfrac{2n^3+3n^2-n+1}{n^3+3\sqrt{n}+2}$.

(**Sol.:** 2)

Ejercicio 2.8 Calcula $\lim_n \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n+2}$.

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.9 Calcula $\lim_n \dfrac{n^2+n-8}{\sqrt[3]{n^7+1}}$.

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 2.10 Calcula $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2^k+3^k-1}{3^{k-2}+2^{k+3}}}$ (H: Divide numerador y denominador por la mayor potencia).

(**Sol.:** 3)

Ejemplo 2.13 Calcula el límite $\lim_n \left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$.

Solución: En este caso, se tiene una diferencia de sucesiones donde ambas tienden a $+\infty$, por lo que, en principio, estamos ante una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Dado que puede verse como una diferencia de raíces cuadradas

($n = \sqrt{n^2}$), el procedimiento a seguir es multiplicar y dividir por la expresión *conjugada*:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right) &= \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} \\
&= \lim_n \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim_n \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} \\
&= \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

ya que en este último paso, volvemos a tener un cociente de polinomios que ya debemos saber resolver.

$\square$

Ejercicio 2.11 Calcula $\lim_n \left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right)$.

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.12 Calcula $\lim_n \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$.

(**Sol.:** $\dfrac{1}{2}$)

Ejercicio 2.13 Calcula $\lim_n \left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt[4]{n^2+n-1}\right)$ (H: Aplica dos veces la operación de multiplicar y dividir por el conjugado).

(**Sol.:** 0)

A continuación se exponen algunos métodos más para resolver éstas y otras indeterminaciones:

(a) tipo (1^∞): se aplica la fórmula de Euler.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_n & \longrightarrow & 1 \\ b_n & \longrightarrow & \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim a_n^{b_n} \; = \; \mathrm{e}^{\lim b_n(a_n-1)}$$

Ejemplo 2.14 Calcula el límite $\lim \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+n-1}\right)^n$.

Solución: En este caso, se tiene una potencia de sucesiones donde la base tiene límite 1 (debería ser claro ya) y el exponente tiene límite ∞, por lo que, estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞. El procedimiento consiste en aplicar la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\frac{n^2+3}{n^2+n-1}\right)^n &= \mathrm{e}^{\lim_n n\left(\frac{n^2+3}{n^2+n-1}-1\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim_n n\left(\frac{n^2+3-n^2-n+1}{n^2+n-1}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim_n \frac{4n-n^2}{n^2+n-1}} = \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 2.14 Calcula $\lim_n \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\dfrac{n^2+5}{n+2}}$.

(**Sol.:** e^7)

Ejercicio 2.15 Calcula $\lim_n \sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{n+1}}$.

(**Sol.:** $\mathrm{e}^{-2/3}$)

Ejercicio 2.16 Calcula $\lim_n \left(\dfrac{n^2+3}{2n^2-1}\right)^{n^2}$.

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 2.17 Calcula $\lim_n \left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$.

(**Sol.:** 1)

(b) tipo $(\frac{\infty}{\infty})$: se aplica el criterio de Stolz.

$$\left.\begin{array}{l} b_n \longrightarrow +\infty \\ (b_n) \text{ creciente} \\ b_n > 0, \quad \forall n \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Ejemplo 2.15 Calcula el límite $\lim_n \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Solución: En este caso, se observa que el numerador es una sucesión formada por una suma cuyo número de sumandos varía con el valor de n. Se aplica el criterio de Stolz, llamando a_n a la sucesión del numerador y b_n a la del denominador:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \\
&= \lim_n \frac{1+2+\ldots+n+(n+1)-(1+2+\ldots+n)}{(n+1)^2-n^2} \\
&= \lim_n \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.18 Calcula $\lim_n \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.19 Calcula $\lim_n \frac{4+\frac{1}{n}+4+\frac{2}{n}+4+\frac{3}{n}++\cdots+4+\frac{n}{n}}{n}$.

(**Sol.:** $\frac{9}{2}$)

Ejercicio 2.20 Calcula $\lim_n \frac{\log(n!)}{\log n^n}$

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.21 Calcula $\lim_n \frac{a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n}{n^2}$, sabiendo que a_n es una sucesión convergente con límite $\lim_n a_n = a$.

(**Sol.:** $\frac{a}{2}$)

(c) tipos (∞^0) y (0^0): se aplica el criterio de Stolz para la raíz.

$$\left.\begin{array}{l} b_n \longrightarrow +\infty \\ (b_n) \text{ creciente} \\ b_n > 0, \quad \forall n \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim \sqrt[b_n]{a_n} \; = \; \lim \sqrt[b_{n+1}-b_n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Ejemplo 2.16 Calcula el límite $\lim_n \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$.

Solución: En este caso, se aplica el criterio de Stolz para la raíz. Llamando a_n a la sucesión del radicando y b_n a la del radical:

$$\begin{aligned}
\lim_n \sqrt[b_n]{a_n} &= \lim_n \sqrt[b_{n+1}-b_n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_n \sqrt[n+1-n]{\frac{(n+1)!/(n+1)^{(}n+1)}{n!/n^n}} \\
&= \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{(}n+1)} = \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^{n})} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.22 Calcula $\lim_n \sqrt[n]{n}$.

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.23 Calcula $\lim_n \sqrt[n]{5n^2 - 6n + 3}$.

(**Sol.:** 1)

Ejercicio 2.24 Calcula $\lim_n \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1}\right)$.

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 2.25 Calcula $\lim_n \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

(**Sol.:** 1)

(d) tipos $(\frac{\infty}{\infty})$ y $(\frac{0}{0})$: cambiamos a límite de funciones para poder aplicarle la regla de L'Hopital:

Se buscan dos funciones reales f y g, continuas y derivables de forma que $f(n) = a_n$ y $g(n) = b_n$; entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 2.17 Calcula el límite $\lim_n \dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

Solución: El límite propuesto es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, puesto que ambas sucesiones no tienen relación, lo más sencillo es tomar las funciones $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = x$ y aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_n \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_n \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$
$$\lim_n \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty$$

por lo que, $\lim_n \frac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$.

$\square$

Ejercicio 2.26 Calcula el límite $\lim_n \frac{\ln(n)}{n}$.

(**Sol.:** 0)

2.6. Infinitésimos

Definición 2.10 Una sucesión $\{a_n\}$ se dice un *infinitésimo* si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dos infinitésimos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se dicen *equivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Las propiedades más usuales de los infinitésimos se resumen en los dos resultados siguientes.

Teorema 2.11 Si $\{a_n\}$ es un infinitésimo y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces

$$\lim_n a_n \cdot b_n = 0$$

es decir, $\{a_n b_n\}$ es un infinitésimo.

Teorema 2.12 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos infinitésimos equivalentes y $\{c_n\}$ una sucesión cualquiera. Entonces,

1. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$

Esta última propiedad nos dice que en el cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente (siempre y cuando aparezcan como productos o cocientes).

Por tanto, resulta conveniente conocer algunos infinitésimos equivalentes. Los más usuales son:

Infinitésimos Equivalentes. Si $\{a_n\}$ es un infinitésimo, entonces

$$\begin{array}{ccc}
\{\log(1+a_n)\} & \equiv & \{a_n\} \\
\{\sin(a_n)\} & \equiv & \{a_n\} \\
\{\tan(a_n)\} & \equiv & \{a_n\} \\
\{\arctan(a_n)\} & \equiv & \{a_n\} \\
\{1-\cos(a_n)\} & \equiv & \{\frac{a_n^2}{2}\} \\
\{b^{a_n}-1\} & \equiv & \{a_n \log b\}
\end{array}$$

Ejemplo 2.18 Vamos a calcular $\lim\limits_{n} n \log(1 + \frac{2}{n^2})$.

Solución: Aplicamos que, según la tabla anterior,

$$\left\{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right\} \equiv \left\{\frac{2}{n^2}\right\}$$

y, entonces, el Teorema 2.12 nos permite escribir

$$\lim_n n \log(1+\frac{2}{n^2}) = \lim_n n \frac{2}{n^2} = \lim_n \frac{2}{n} = 0$$

$\square$

Ejercicio 2.27 Calcula el límite $\lim\limits_{n} \dfrac{\arctan(\log(\frac{n^2+1}{n^2+2}))}{\tan(\frac{1}{n^2+3})}$.

(**Sol.:** -1)

Ejercicio 2.28 Calcula el límite $\lim_n n(\sqrt[n]{a} - 1)$, $a > 0$.

(**Sol.:** $\ln(a)$)

Ejercicio 2.29 Calcula el límite $\lim_n \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a, b > 0$.

(**Sol.:** $\sqrt{ab}$)

Ejercicio 2.30 Calcula el límite $\lim_n \left(\dfrac{\tan(a + \frac{b}{n})}{\tan a}\right)^n$ (H: Recuerda que $\tan(A + B) = \dfrac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}$).

(**Sol.:** $e^{\frac{2b}{\sin(2a)}}$)

2.7. Infinitos

Definición 2.13 Una sucesión $\{a_n\}$ se dice un *infinito* si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\pm\infty)$

Dos infinitos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se dicen *equivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Diremos que $\{a_n\}$ es de *mayor orden* que $\{b_n\}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Teorema 2.14 Si $\{a_n\}$ es un infinito y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces

$$\lim_n (a_n + b_n) = \infty$$

es decir, $\{a_n + b_n\}$ es un infinito.

El concepto de infinito de mayor orden se utiliza a menudo en la resolución de límites indeterminados del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Por otra parte, los infinitos equivalentes se utilizan según la propiedad siguiente.

Teorema 2.15 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos infinitos equivalentes y $\{c_n\}$ una sucesión cualquiera. Entonces,

1. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$

Esta propiedad nos dice que en el cálculo de límites podemos substituir un infinito por un equivalente (siempre y cuando aparezcan como productos o cocientes).

Infinitos Equivalentes

$$n! \;\equiv\; n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{(Fórmula de Stirling)}$$

Ejemplo 2.19 Calculad $\lim_n \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!}$.

Teniendo en cuenta la fórmula de Stirling sabemos que

$$n! \;\equiv\; n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

por lo que también,

$$(3n+1)! \;\equiv\; (3n+1)^{3n+1} \, \mathrm{e}^{-(3n+1)} \sqrt{2\pi(3n+1)}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!} &= \lim_n \frac{3^{3n}(n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n})^3}{(3n+1)^{3n+1} \, \mathrm{e}^{-(3n+1)} \sqrt{2\pi(3n+1)}} \\
&= \lim_n \frac{3^{3n} n^{3n} \, \mathrm{e}^{-3n} (\sqrt{2\pi n})^3}{(3n+1)^{3n}(3n+1) \, \mathrm{e}^{-3n} \, \mathrm{e}^{-1} \sqrt{2\pi(3n+1)}} \\
&= \lim_n \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n} \cdot \mathrm{e} \cdot \frac{2\pi n\sqrt{2\pi n}}{(3n+1)\sqrt{2\pi(3n+1)}}
\end{aligned}$$

y como, $\lim_n \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n} = \mathrm{e}^{-1}$,

$$= \lim_n \frac{2\pi n\sqrt{2\pi n}}{(3n+1)\sqrt{2\pi(3n+1)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.8. Problemas adicionales

Ejercicio 2.31

(a) Demuestra que la suma de una sucesión convergente y una divergente es divergente (H: Supón que la suma fuera convergente y aplica la Propiedad 2.9 para llegar a una contradicción).

(b) Aplica lo anterior para estudiar el carácter de la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

(**Sol.:** (b) Divergente (oscilante).)

Ejercicio 2.32 Demuestra que la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

es convergente y calcula su límite.

(H: Demuestra que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente (Propiedad 2.8). Para el cálculo del valor del límite, toma límites en la relación de recurrencia)

(**Sol.:** $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente; y $\lim_n a_n = 2$.)

Ejercicio 2.33 Ídem con

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{2a_n + 3},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

(**Sol.:** $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente; y $\lim_n a_n = 3$.)

Ejercicio 2.34 Encuentra la relación entre a y b para que se verifique

$$\lim_n \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_n \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn+4}$$

(**Sol.:** $b = 2(a-1)$)

Ejercicio 2.35 Calcula los siguientes límites

(a) $\displaystyle \lim_n \frac{\sin^2(\frac{1}{n^2})\log(\frac{n}{n+1})}{(n+2)^5\cos(\frac{n\pi-1}{4n-1})}$.

(b) $\displaystyle \lim_n \left(\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$.

(**Sol.:** (a) $-\sqrt{2}$; (b) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$)

Ejercicio 2.36 Calcula $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}}{n^2}$.

(**Sol.:** $\mathrm{e}/2$)

Ejercicio 2.37 Calcula el límite:

$$\lim_n \left(\sqrt{\ 2}\cdot \sqrt[2^2]{2}\cdot \sqrt[2^3]{2}\cdot\ldots\cdot \sqrt[2^n]{2}\right)$$

(H: Calcula el logaritmo del límite)

(**Sol.:** 2)

Ejercicio 2.38 Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\displaystyle \{a_n\} = \left\{\left(\frac{\log n\alpha}{\log n\beta}\right)^{\log n}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (\alpha>0,\ \beta>0)$

(b) $\displaystyle \{b_n\} = \left\{\frac{1^2\cdot 2+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+\ldots+n^2\cdot 2^n}{2^n\cdot n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(**Sol.:** (a) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; (b) 2.)

Ejercicio 2.39 Calcula $\displaystyle \lim_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(**Sol.:** 0)

Ejercicio 2.40 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales positivos de manera que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Explica razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{b_n^2} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^n}{b_n^n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log a_n}{\log b_n} = 1$

Si alguna afirmación no es cierta basta dar un contraejemplo.

(**Sol.:** a) Cierta; (b) Falsa; (c) Falsa.)