Tema 1

Campos Numéricos

Se supone al lector familiarizado con las propiedades usuales de los números naturales $\mathbb{N}$, los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$. Los números *naturales* son los que utilizamos para contar $0, 1, 2, \ldots$. Los números *enteros* se obtienen al añadir a los anteriores los números negativos $-1, -2, \ldots$ Los números *racionales* son las fracciones o proporciones de números enteros $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{12}{5}, \ldots$. Como cada número entero m puede ser escrito como la fracción $\frac{m}{1}$, se tienen las inclusiones

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Los números racionales además admiten una expresión decimal finita o periódica. Pero ya desde muy antiguo es sabido que existen números que no son así; por ejemplo, $\sqrt{2}$. A los números que tienen una representación decimal infinita y no periódica se les llama números *irracionales*. Al conjunto de los números racionales e irracionales se les llama números *reales* $\mathbb{R}$ y sus propiedades van a jugar un papel primordial en todos los temas de este texto, puesto que vamos a estudiar funciones cuyas variables van a ser, precisamente, números reales debido a que representan cantidades que pueden medirse. Sin embargo, muchos fenómenos físicos y químicos no pueden formularse adecuadamente sin conocer los números *complejos* $\mathbb{C}$. Aunque un estudio pormenorizado de estos números queda fuera del ámbito de este texto, sí que haremos una pequeña introducción a ellos en este tema para conocer algunas de sus propiedades.

1.1. El número real

Todo y que la construcción de los números reales a partir de los números racionales es interesante por ella misma, queda fuera del nivel que se pretende conseguir en este manual. Por tanto, nos limitaremos a decir que los números reales están formados por los números racionales y los irracionales.

1.1.1. Desigualdades

El conjunto de los números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}$, tiene la estructura de cuerpo ordenado y la relación de orden la representaremos por $\leq$ (la leeremos *menor o igual que*). Si dos números reales, x, y verifican la relación $x \leq y$ pero $x \neq y$ entonces escribiremos $x < y$ (y lo leeremos x *menor que* y). Enumeramos a continuación algunas de las propiedades relativas al comportamiento del orden frente a las operaciones aritméticas:

- $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $x \leq y \ \wedge \ z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad zx \leq zy$
- $x \leq y \ \wedge \ z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad zx \geq zy$
- $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

Ejemplo 1.1 Prueba la desigualdad $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Solución: Probamos en primer lugar que todo cuadrado es siempre no negativo; es decir, $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. En efecto, si $a = 0$ es evidente que $a^2 = 0 \geq 0$; si $a > 0$ entonces $a^2 = aa > a0 = 0$ y, finalmente, si $a < 0$ entonces $a^2 = aa > a0 = 0$. Luego en cualquier caso $a^2 \geq 0$.

Ahora, para probar la desigualdad del ejemplo, basta observar que debe ser $(a-b)^2 \geq 0$ y, al desarrollar el cuadrado,

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$\square$

Las propiedades del orden permiten resolver desigualdades de forma similar a como se resuelven las ecuaciones. La idea consiste en aislar la variable x, con la diferencia de que la solución suele ser un intervalo o una unión de intervalos.

Ejemplo 1.2 Resuelve la desigualdad $-4 < -2x - 3 \leq 4$.

Solución: La inequación $-4 < -2x - 3 \leq 4$ corresponde en realidad a dos desigualdades $-4 < -2x - 3$ y $-2x - 3 \leq 4$; aunque en este caso, podemos resolverlas conjuntamente. La idea es aislar x, para ello empezamos sumando 3 a cada miembro de la desigualdad:

$$-4 < -2x-3 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4+3 < -2x-3+3 \leq 4+3 \quad \Rightarrow \quad -1 < -2x \leq 7$$

Ahora dividiremos cada miembro por -2 y, siendo un número negativo, debemos cambiar el sentido de las desigualdades:

$$-1 < -2x \leq 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{-2} > x \geq \frac{7}{-2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$

que nos da como solución el intervalo $[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}[$.

$\square$

Ejercicio 1.1 Resuelve la desigualdad $3x + 1 > 2x + 2$ y dibuja el conjunto solución en la recta real.

(**Sol.:** $]1, +\infty[$.)

Ejercicio 1.2 Resuelve la desigualdad y dibuja el conjunto solución en la recta real: (a) $x > \frac{1}{x}$; (b) $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$.

(**Sol.:** (a) $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; (b) $]-3, -1[\cup]1, +\infty[$.)

1.1.2. Valor absoluto de un número real

Si $x \in \mathbb{R}$, se define el *valor absoluto* de x, y se denota por $|x|$, como

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

Se puede comprobar que, entonces, también se cumple

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades son

1. $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$

3. $|xy| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

5. $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6. $|x| \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad -r \leq x \leq r$

Ejemplo 1.3 Sean x, y números reales. Prueba que

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |y - x|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |y - x|}{2}$$

Solución: Suponemos $x \leq y$. Entonces, $\max\{x, y\} = y$. Por otra parte,

$$\frac{x + y + |y - x|}{2} = \frac{x + y + (y - x)}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

Además, $\min\{x, y\} = x$ y, por otra parte,

$$\frac{x + y - |y - x|}{2} = \frac{x + y - (y - x)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

La prueba en el otro caso, $x > y$, es totalmente análoga.

$\square$

Ejemplo 1.4 Vamos a encontrar el conjunto de puntos de la recta real que verifican la desigualdad:

$$|2x - 1| \leq |x - 3|$$

Solución: Aplicando la propiedad (6) anterior (tomando $r = |x - 3|$) deducimos:

$$|2x - 1| \leq |x - 3| \Leftrightarrow -|x - 3| \leq 2x - 1 \leq |x - 3|$$

Distinguimos ahora dos posibilidades:

$$\boxed{x \geq 3} \Rightarrow -(x - 3) \leq 2x - 1 \leq x - 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 - x \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq x - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3+1 \le 2x+x \\ 2x-x \le 1-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 4 \le 3x \\ x \le -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{4}{3} \le x \\ x \le -2 \end{array}\right\} \text{No tiene solución.}$$

$$\boxed{x<3} \Rightarrow -(-(x-3)) \le 2x-1 \le -(x-3) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3 \le 2x-1 \\ 2x-1 \le 3-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 1-3 \le 2x-x \\ 2x+x \le 3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2 \le x \\ 3x \le 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \boxed{x \ge -2} \\ \\ \boxed{x \le \dfrac{4}{3}} \end{array}\right\}$$

Es decir,

$$\left.\begin{array}{c} x<3 \\ -2 \le x \le \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \le x \le \frac{4}{3}$$

Así la solución es el intervalo $[-2, \dfrac{4}{3}]$.

$\square$

Ejercicio 1.3 Resuelve la desigualdad $|x-3| \ge |2x-1|$ y expresa la solución como un intervalo.

(**Sol.:** $[-2, \frac{4}{3}]$)

Ejemplo 1.5 Vamos ahora a acotar la siguiente función $\dfrac{2x+1}{1-3x}$ en el intervalo $]1,4[$:

Solución: Si $x \in]1,4[$ entonces $1 < x < 4$. A partir de esta desigualdad reconstruimos la función:

$$1 < x < 4 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 3 < 2x+1 < 9$$

$$1 < x < 4 \Rightarrow 3 < 3x < 12 \Rightarrow -12 < -3x < -3 \Rightarrow -11 < 1-3x < -2$$

Así,

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1-3x} < -\dfrac{1}{11} \\ \\ 3 < 2x+1 < 9 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} < \frac{2x+1}{1-3x} < -\frac{9}{11}$$

$\square$

Ejercicio 1.4 Acota la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ en el intervalo $1 < x < 4$.

(**Sol.:** $f(x) < -27$ y no acotada inferiormente)

Ejemplo 1.6 Prueba, por inducción finita, que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solución: Lo comprobamos para $n = 1, 2$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}, \quad 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Lo suponemos cierto para n: $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lo probamos para $n+1$:

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

□

Ejemplo 1.7 Prueba, por inducción finita, que $|x^n| = |x|^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Solución: Lo comprobamos para $n = 1, 2$:

$$|x| = |x|, \ |x^2| = |xx| = |x||x| = |x|^2$$

Lo suponemos cierto para n: $|x^n| = |x|^n$.

Lo probamos para $n+1$:

$$|x^{n+1}| = |x^n x| = |x^n||x| = |x|^n|x| = |x|^{n+1}$$

□

Ejercicio 1.5 Prueba, por inducción finita, que $2^n > n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.6 Prueba, por inducción finita, que $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = \dot{17}$, para cada $n \geq 1$; es decir, es de la forma $17k$ para un entero k (múltiplo de 17).

1.2. El número complejo

El conjunto de los número complejos, que denotaremos por $\mathbb{C}$, tiene estructura de cuerpo y puede identificarse con $\mathbb{R}^2$, de tal forma que cualquier número complejo se puede escribir de la forma

$$z = a + b\mathbf{i}$$

siendo a y b número reales y siendo $\mathbf{i}$ la unidad imaginaria (la cual viene definida por la igualdad $\mathbf{i}^2 = -1$). Al número a se le llama *parte real* de z y se representa por $\Re(z)$; al número b se le llama *parte imaginaria* de z y se representa por $\Im(z)$. Todo número complejo se puede identificar con un punto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (a, b) (Fig 1.1). A la expresión $z = a + b\mathbf{i}$ se le llama *expresión binómica* de z.

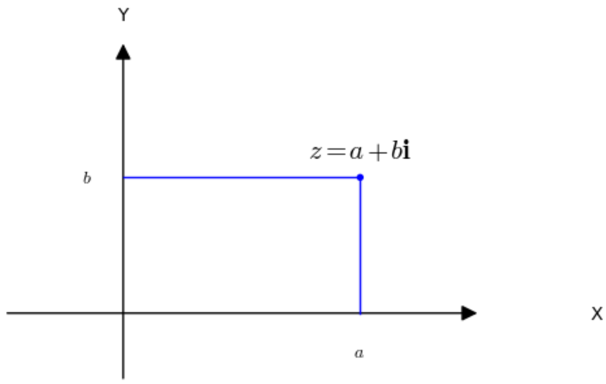

Figura 1.1: Representación cartesiana de un número complejo.

1.2.1. Aritmética de los números complejos

Vamos a definir ahora la suma y el producto de números complejos. Si $z = a + b\mathbf{i}$ y $w = c + d\mathbf{i}$ entonces definimos

- $z + w := \ (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$
- $z \cdot w := \ (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$

Notad que en realidad la suma y el producto se hace como si se tratara de binomios, por ejemplo,

$$z \cdot w = (a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2 = ac - bd + (ad + bc)\mathbf{i}$$

Definición 1.1 Si $z = a + b\mathbf{i}$ llamaremos *conjugado* de z a $\bar{z} = a - b\mathbf{i}$

Ejemplo 1.8 Veamos como desarrollar potencias y cocientes.

$$\begin{aligned} (1 - 2\mathbf{i})^2 &= 1^2 + (2\mathbf{i})^2 - 2 \cdot 2\mathbf{i} = 1 - 4 - 4\mathbf{i} = -3 - 4\mathbf{i} \\ \frac{1 - \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} &= \frac{(1 - \mathbf{i})(1 - \mathbf{i})}{(1 + \mathbf{i})(1 - \mathbf{i})} = \frac{1 + \mathbf{i}^2 - 2\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}^2} = \frac{-2\mathbf{i}}{2} = -\mathbf{i} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7 Expresa en forma binómica los complejos $w_1 = \dfrac{1}{\mathbf{i}}$ y $w_2 = \mathbf{i}\dfrac{(1 - \mathbf{i})^2}{1 - 2\mathbf{i}}$.

(**Sol.:** $w_1 = -\mathbf{i}$ y $w_2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\mathbf{i}$)

Ejercicio 1.8 Expresar el complejo $\dfrac{(1 - \mathbf{i})^4}{1 + \mathbf{i}}$ en forma binómica.

(**Sol.:** $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathbf{i}$)

1.2.2. Módulo y argumento de un número complejo

Si $z = a + b\mathbf{i}$, llamaremos *módulo* de z, y lo denotaremos como $|z|$, al número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Algunas propiedades del módulo son

1. $|z| \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$

5. $|z+w| \leq |z| + |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

6. $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

7. $|\Re(z)| \leq |z|, \quad |\Im(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Si $z = a + b\mathbf{i}$, existe un $\theta \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

A un tal θ se le llama *un argumento* de z (de hecho, si θ es un argumento, $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ también lo es). Si $0 \leq \theta < 2\pi$, diremos que θ es el *argumento* principal de z y lo representaremos por $Arg(z)$.

A continuación veremos, gráficamente, la relación entre las partes real e imaginaria de un complejo y su módulo y argumento, Fig 1.2.

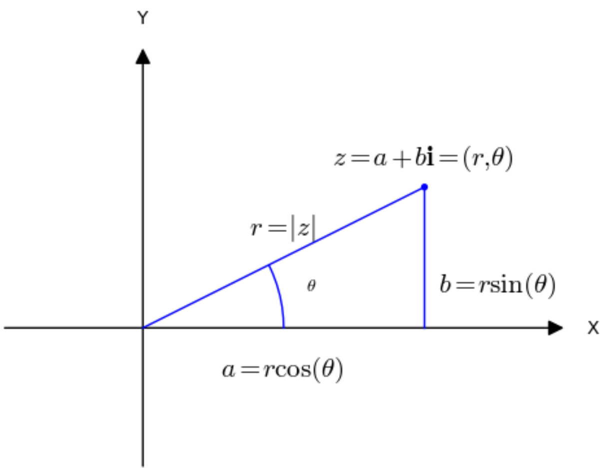

Figura 1.2: Módulo y argumento de un número complejo.

Dado que $r = |z|$, entonces cualquier número complejo $z = a + b\mathbf{i}$ verifica que $a = |z|\cos(\theta)$ y $b = |z|\sin(\theta)$, por lo que se puede representar también

de la forma
$$z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))$$
representación que recibe el nombre de *expresión trigonométrica* de z.

La expresión $\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$ se suele representar por $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ y así el complejo z de módulo $|z|$ y argumento θ también se puede escribir como
$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$$
la cual recibe el nombre de *expresión polar* de z. La ventaja de utilizar esta expresión es que las operaciones con complejos se pueden realizar como si se tratara de exponenciales, lo que facilita las operaciones de productos, cocientes y potencias. Si $z = r\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}$ y $w = s\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\beta}$, entonces

1. $z \cdot w = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right) \cdot \left(s\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\beta}\right) = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\alpha+\beta)}$
2. $z^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\alpha}$
3. $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = r^{-1} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\alpha}$
4. $\bar{z} = r\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\alpha}$

Ejemplo 1.9 Si $z = 1 - \mathbf{i}$, entonces
$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta \in [0, 2\pi[\;\Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$
y entonces,
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}$$

Ejercicio 1.9 Expresa en forma polar los complejos $w_1 = 1$ y $w_2 = \mathbf{i}$.

(**Sol.:** $w_1 = \mathrm{e}^{0\mathbf{i}} = 1$ y $w_2 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$)

Ejercicio 1.10 Expresa en forma polar los números complejos $w = 1 - \mathbf{i}$ y $w = (1 - \sqrt{3}\mathbf{i})$.

(**Sol.:** $w_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ y $w_2 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$)

Ejercicio 1.11 Expresa en forma polar el complejo $w = 4(1 + \mathbf{i})^4$.

(**Sol.:** $w = -16$)

Ejercicio 1.12 Expresa en forma polar el complejo $w = \dfrac{2 + 2i}{\mathbf{i}}$.

(**Sol.:** $w = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$)

Ejercicio 1.13 Calcula $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$, si $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$.

(**Sol.:** 4)

1.2.3. Raíces enteras de un número complejo

Dado el número complejo $z = r\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, no nulo, existen n números z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, que verifican

$$(z_k)^n = z;$$

es decir, existen, justamente, n raíces n-ésimas de z. Además, estos números se expresan en forma polar como

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

Estas fórmulas implican que todas las raíces de un número complejo tienen el mismo módulo y sus argumentos se obtienen empezando en θ/n e incrementando, sucesivamente, $2\pi/n$ radianes.

Ejemplo 1.10 Calcula las raíces cúbicas de $z = -8\mathbf{i}$.

Solución: Observamos primero que $z = 8\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathbf{i}}{2}}$. Por tanto, según las fórmulas anteriores, las tres raíces cúbicas de z son

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi/2+2k\pi}{3}}$$

para $k = 0, 1, 2$.

$\square$

1.2.4. Exponencial compleja y Logaritmo complejo

Dado un número complejo $z = x + \mathbf{i}y$, la exponencial de z se define

$$Exp(z) = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathbf{i}\sin(y)).$$

Por otra parte, dado un número complejo $z = r\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, un logaritmo de z es un número complejo w tal que $\mathrm{e}^w = z$. Se denotará $w = \log(z)$ y se verifica que

$$\log(z) = \ln(r) + \mathbf{i}(\theta + 2k\pi);$$

es decir, $\log(z)$ es un número complejo cuya parte real es el logaritmo neperiano real del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z.

Ejemplo 1.11 Calcula $\log(3 + 3\mathbf{i})$.

Solución: Notemos primero que, expresando el complejo en forma polar,

$$3 + 3\mathbf{i} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

Por tanto,

$$\log(3 + 3i) = \ln(3\sqrt{2}) + \mathbf{i}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

$\square$

Ejercicio 1.14 Comprueba que si la forma polar de $z = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces, se cumple que $z = Exp(\mathbf{i}\theta)$.

1.3. Problemas adicionales

Ejercicio 1.15 Encuentra todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifiquen las siguiente expresiones: (a) $|x + 1| + |x + 2| < 2$; (b) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$; (c) $1 \leq \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2} \leq 2$.

(**Sol.:** (a) $]-2.5, 0.5[$; (b) $]3, 4[$; (c) $]0.29, 0.76[\cup]5.23, 6.7[$)

Ejercicio 1.16 Demuestra, por inducción, que si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, se verifica

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.17 Demuestra, por inducción, que

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.18 Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

(a) $\dfrac{(3 - 2\mathbf{i})(2 + 3\mathbf{i})}{(3 - 4\mathbf{i})}$; (b) $\mathbf{i}^{5787}$; (c) $(1 + 4\mathbf{i})^3$.

(**Sol.:** (a) $16/25 + 63\mathbf{i}/25$; (b) $-\mathbf{i}$; (c) $-47 - 52\mathbf{i}$)

Ejercicio 1.19 Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos tales que

$$r = \frac{(z_1 + z_2)\mathbf{i}}{z_1 - z_2}$$

Halla la relación que deben cumplir z_1 y z_2 para que r sea un número real.

(**Sol.:** $|z_1| = |z_2|$)

Ejercicio 1.20 Expresa en forma polar los números complejos $z_1 = 3 + 3\mathbf{i}$ y $z_2 = 4\mathbf{i}$.

(**Sol.:** $z_1 = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi\mathbf{i}/4}$ y $z_2 = 4\,\mathrm{e}^{\pi\mathbf{i}/2}$.)

Ejercicio 1.21 Expresa en forma binómica el número complejo $z = \sqrt{2}e^{5\pi\mathbf{i}/4}$.

(**Sol.:** $z = -1 - \mathbf{i}$)

Ejercicio 1.22 Halla la forma binómica de los siguientes números complejos:

(a) $(4+3\mathbf{i})^2$

(b) $\frac{3+2\mathbf{i}}{3-2\mathbf{i}}$

(c) $(\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}})^4$

(d) $Exp(1-\mathbf{i})$

(e) $\log(-2+2\mathbf{i})$

(**Sol.:** (a) $7+24\mathbf{i}$; (b)$5/13+12\mathbf{i}/13$; (c) -1; (d) $1.47-2.28\mathbf{i}$;
(e) $\ln(2\sqrt{2})+(3\pi/4+2k\pi)\mathbf{i}$)

Ejercicio 1.23 Halla los números complejos z tales que $z^6-9z^3+8=0$.

(**Sol.:** 1, $e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{3}}$, $e^{\frac{4\pi\mathbf{i}}{3}}$, 2, $2\,e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{3}}$, $2\,e^{\frac{4\pi\mathbf{i}}{3}}$.)

Ejercicio 1.24 Determinar los números complejos no nulos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

(**Sol.:** 1, $-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

Ejercicio 1.25 Demuestra que si $z+\frac{1}{z}$ es real, entonces la parte imaginaria de z es nula o $|z|=1$.