www.sapientia.uji.es | 166

Resolució de problemes matemàtics per a mestres d'Educació Primària (Mètode de Polya)

Manuel Alcalde Esteban
Pedro Nieves Merideño

UNIVERSITAT JAUME I

Col·lecció «Sapientia», núm. 166

RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MATEMÀTICS PER A MESTRES D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA (MÈTODE DE POLYA)

Manuel Alcalde Esteban
Pedro Nieves Merideño

Àrea de Didàctica de la Matemàtica
Departament d'Educació i Didàctiques Específiques

■ Codi de l'assignatura: MP1806 Didàctica de les Matemàtiques

UNIVERSITAT JAUME I

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 166. Resolució de problemes matemàtics per a mestres d'Educació Primària. (Mètode de Polya)
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Col·lecció Sapientia 171. Resolución de problemas matemáticos para maestros de educación primaria. (Método de Polya)
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2020

ISBN: 978-84-17900-44-1

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

Reconeixement-CompartirIgual
CC BY-SA
Aquest text està subjecte a una llicència Reconeixement-CompartirIgual de Creative Commons, que permet copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra sempre que s'especifique l'autoria i el nom de la publicació fins i tot amb objectius comercials i també permet crear obres derivades, sempre que siguen distribuïdes amb aquesta mateixa llicència.
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDEX

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Pròleg

Presentem un document per a la formació inicial i permanent dels i les mestres d'Educació Primària, on es mostra una proposta didàctica per a treballar la resolució de problemes matemàtics en aquesta etapa educativa.

Al mateix temps es facilita una ferramenta per a propiciar o consolidar aprenentatges corresponents a l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (Pla d'Estudis 2010 del Grau en Mestre/a d'Educació Primària a la Universitat Jaume I) o a l'assignatura MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (de la reforma/modificació de 2018 del Pla d'Estudis 2010), així com també per a reforçar alguns conceptes de la publicació d'Alcalde, Pérez i Lorenzo (2014) referida als nombres naturals (col·lecció Sapientia, números 89 i 90, en valencià i castellà, respectivament), la qual és convenient conèixer per a una millor comprensió del present text.

Els continguts treballats també estan en publicacions d'altres autors, però en aquesta, que recull el nostre aprenentatge i ensenyament d'aquests darrers anys, els oferim de manera unificada als lectors i lectores.

En el tema 1, «Introducció», tractem el concepte de problema, què s'entén per resolució de problemes matemàtics, la seua utilitat, i la resolució de problemes matemàtics en el Grau en Mestre/a d'Educació Primària en la Universitat Jaume I.

El tema 2, «El mètode de resolució de problemes matemàtics», conté l'explicació del nostre mètode, que complementem amb un conjunt de problemes numèrics, anomenats «generals» (per diferenciar-los dels que apareixen en els altres temes) i un altre conjunt de problemes geomètrics, per deixar-lo totalment clarificat.

Cadascun dels temes següents compta amb un seguit de problemes, amb una probable ordenació de dificultat creixent (encara que aquesta pot ser subjectiva) per tal de treballar-los en les aules de la Universitat amb l'estudiantat o en les dels centres d'Educació Primària amb l'alumnat, i aconseguir d'aquesta manera, el desenvolupament de la competència matemàtica dels discents.

Els problemes estan classificats per continguts; així, en el tema 3, «Problemes de nombres naturals-Sistema de Numeració Decimal», utilitzem la descomposició polinòmica dels nombres en la resolució.

En el tema 4, «Problemes d'operacions amb nombres naturals», aquestes són el seu nexe d'unió.

Presentem en el tema 5, «Problemes de divisibilitat en nombres naturals», exemples on treballem amb els divisors, els múltiples, el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple.

L'últim tema, anomenat «Altres problemes», conté l'exposició d'uns problemes que tenen vinculació amb les assignatures MP1019 Didàctica de les

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Matemàtiques II i/o MP1025 Didàctica de les Matemàtiques III (Universitat Jaume I, Pla d'Estudis 2010).

L'objectiu del llibre és proporcionar un instrument per als i les docents i per a l'estudiantat del Grau en Mestre/a, que els ajude a reflexionar sobre els fets i successos que ocorren en la resolució de problemes de matemàtiques en l'aula escolar i els permeta enfrontar-se a ella des d'un plantejament que considera l'ensenyament-aprenentatge de les Matemàtiques com una tasca interdisciplinària i globalitzadora, que parteix d'una concepció sociocultural de l'educació en general i de l'educació matemàtica en particular.

Respecte a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària de la Universitat Jaume I, aquesta obra representa un material complementari per les classes presencials, en les quals s'aprofundeix en la didàctica de la resolució de problemes al temps que es relaciona amb la fonamentació matemàtica dels conceptes i continguts que intervenen en la resolució, a més, proporcionem un material de suport a l'estudi de l'assignatura en la qual s'inclouen els continguts del document.

Convençuts de la creativitat didàctica que un o una docent ha de tenir en les seues classes, aquest llibre no esgota les activitats de resolució de problemes matemàtics que els i les mestres poden realitzar a les aules, el nostre interés és posar l'atenció en el que poden treballar per a fonamentar, didàcticament i matemàticament, els procediments emprats per l'alumnat i donar indicacions de com poden fer-ho.

Volem agrair als companys i companyes de l'àrea Didàctica de la Matemàtica en la Universitat Jaume I que també han participat en la impartició de l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I durant altres cursos i, per descomptat, en l'elaboració d'algun exercici proposat en el document.

Finalment, cal dir que aquest text ha sigut realitzat dins la «Convocatòria de procediment selectiu per al programa de suport a l'elaboració i publicació de materials docents lliures per al curs 2018/19» de la Universitat Jaume I de Castelló de la Plana.

Tema 1: Introducció

1.1. Què és un problema

Tractant-se d'un llibre de resolució de problemes, tal vegada el primer que caldria fer és diferenciar entre «exercici» i «problema» en Matemàtiques. Un exercici és una activitat on s'aplica directament un contingut matemàtic conegut per a trobar la solució. Un problema és una activitat matemàtica en la qual per a trobar la solució, si la té, no es pot aplicar directament cap contingut matemàtic conegut, cal combinar conceptes i continguts matemàtics coneguts, relacionant-los de manera probablement inèdita, per a trobar la solució.

De manera tradicional, la utilització de la paraula «problema» dins de l'aula de matemàtiques ha coincidit més amb el primer significat assenyalat per Webster's (1979) que amb el segon: «qualsevol tipus d'activitat procedimental que es realitza dins o fora de l'aula», la «definició mínima» que diu Puig (1996).

Malgrat l'èmfasi posat en la solució de problemes des de la dècada dels vuitanta del segle XX, a l'aula se segueix dedicant molt més temps a la resolució d'exercicis que a la resolució de problemes. Això no obstant, els dos tipus de tasques tenen conseqüències molt diferents en l'aprenentatge i responen a diferents tipus d'objectius escolars. Així, els exercicis serveixen per a consolidar i automatitzar certes tècniques, destreses i procediments que són necessaris per a la posterior resolució de problemes, però difícilment poden ajudar al fet que aquestes tècniques s'utilitzen en diferents contextos dels que s'han aprés o exercitat, o difícilment poden servir per a l'aprenentatge i comprensió de conceptes.

1.2. La resolució de problemes matemàtics

La resolució de problemes ha sigut i continua sent, la major font d'inspiració per a l'obtenció de nous coneixements i tècniques matemàtiques. En la història de les Matemàtiques determinats problemes han sigut l'inici de noves teories, nous teoremes i, fins i tot, han suposat el naixement de noves branques de la Matemàtica. L'obstinació en resoldre alguns problemes ha sigut fonamental per al desenvolupament de la Matemàtica.

Avui en dia, la major quantitat d'avanços en les Matemàtiques són conseqüència dels intents de resolució dels problemes que planteja la tecnologia.

La importància de la resolució de problemes en l'ensenyament-aprenentatge de la Matemàtica és reconeguda per tothom, i dona idea d'ella expressions com «és el cor de les matemàtiques» (Halmos 1980), opinions com «la finalitat de la memorització, de l'aprenentatge d'algoritmes i de conceptes és permetre

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

a l'alumnat operar amb la matemàtica i, per tant, resoldre problemes» (Orton 1988), o manifestacions com «l'objectiu de les Matemàtiques escolars hauria de ser que tots els i les alumnes estiguin cada vegada més capacitats per resoldre problemes, i desitgen comprometre en això» (NCTM 2000, 186).

Abans de continuar convindria aclarir el que en aquest context s'entén per «resolució de problemes matemàtics» (RPM). Potser resulta millor dir primer el que no s'entén per això. Freqüentment, al final de cada lliçó o tema d'un llibre de text de matemàtiques es presenten una sèrie d'exercicis rutinaris, als quals és possible que s'anomene problemes encara que no és probable que impliquen la «resolució de problemes» amb el significat comunament acceptat. La pràctica usual proporcionada per aquests exercicis és possiblement important i pot ser concebuda com una manera de promoure la memorització-automatització dels continguts matemàtics treballats. Alguns requeriran que l'estudiantat o l'alumnat aplique les seues matemàtiques a situacions que sorgeixen en el món real i, com a tals, podriem dir-ne aplicacions. Determinades aplicacions comporten la resolució de problemes.

La RPM es concep normalment com un procés «en què les condicions del problema i els objectius desitjats es relacionen intencionada i substancialment amb l'estructura cognoscitiva existent» (Ausubel, Novak i Hanesian 1978, 488), procés que permet combinar els coneixements previs sobre conceptes, procediments, regles, tècniques, destreses, etc., per a produir un coneixement nou, per a donar solució a una situació nova. En altres paraules, consisteix a trobar una manera d'arribar a un objectiu que no és directament assequible.

Se la considera útil per tres raons: en primer lloc, perquè es resolen molts problemes matemàtics en la vida diària; en segon lloc, perquè l'experiència adquirida en la RPM és aplicable a la resolució d'altres problemes no matemàtics, i en tercer lloc, perquè és un procés de raonament que ajuda a pensar millor.

Correctament enfocada la RPM satisfà certs requisits de l'aprenentatge científic amb els tres components que considera Kilpatrick (1985): cal que l'alumnat dispose d'una informació teòrica, que posseïsca un coneixement profund de la matèria, d'uns procediments, una sèrie de tècniques (estratègies) heurístiques i, finalment, d'una actitud favorable cap a la tasca i/o cap a la disciplina en qüestió que el faça capaç de regular el procés de resolució pel que fa a l'aplicació dels seus coneixements i estratègies. És a dir, la resolució de problemes comporta la convergència de les tres dimensions bàsiques del coneixement i la seua activació (Perales 2000).

Entre les seues qualitats podrien incorporar també arguments socials, com el fet que l'estudiantat o l'alumnat pot, mitjançant la resolució de problemes, anar aproximant la seua activitat acadèmica a la vida real, font de contínues «situacions problemàtiques», i incloent-hi la comunicació entre individus (quan s'afronta col·lectivament) i la pròpia presa de decisions, aspectes tots ells essencials per a la integració plena de l'alumnat en el context social, cultural i laboral.

A més, podria constituir-se en una activitat idònia per al diagnòstic o el canvi conceptual, en precisar el contrast entre els coneixements previs i els matemàtics, així com una activitat de gran significació en l'avaluació dels aprenentatges, i la seua influència hauria d'assolir la millora del currículum per part del professorat a partir de l'anàlisi minuciosa dels resultats generats per aquesta avaluació.

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166
ISBN: 978-84-17900-44-1

Hi ha, per tant, sobrades raons reals i potencials per a dedicar una especial atenció a aquesta tasca, i tractar de rendibilitzar aquestes potencialitats, promovent l'aprehensió matemàtica de la realitat per part de l'estudiantat o l'alumnat i apropar, d'aquesta manera, els contextos quotidià i acadèmic, autèntica aspiració del que hauria de ser l'educació del segle XXI.

La importància en la resolució de l'estructura cognoscitiva que posseeix la persona, es deu al fet que la solució suposa la reorganització del residu de l'experiència prèvia, de manera que s'ajuste als requisits concrets de la situació problema present. Com les idees de l'estructura cognoscitiva constitueixen la matèria bruta de la resolució, la transferència que tinga lloc, positiva o negativa, reflectirà la naturalesa i la influència de les variables de l'estructura cognoscitiva.

Quan s'ha resolt un problema, s'ha aprés. Potser concretament només s'ha aprés a resoldre'l, però el més probable és que s'ha aprés a solucionar una sèrie d'ells anàlegs i, potser, fins i tot, d'altres que posseeixen algunes característiques semblants.

Per aprendre a resoldre problemes en Matemàtiques, l'estudiantat o l'alumnat hauria d'adquirir formes de pensar, hàbits de perseverança i curiositat, i confiança en situacions no familiars que els servira fora de la classe. Ser una persona que soluciona els problemes de manera eficient proporciona grans beneficis en la vida diària i en el treball.

Pensar en veu alta, com escoltar-se al parlar a un altre, és una forma de fer-se conscient dels propis pensaments, que gairebé sempre és una ajuda quan s'està treballant sobre un problema (Skemp 1971).

Podem ensenyar als i les escolars estratègies generals per a resoldre problemes (ús de materials, tempteig, elaboració de taules, diagrames, recerca de regularitats, etc.); després, hi haurà qui podrà desenvolupar els seus mètodes personals, ja que això crearà confiança en les seues possibilitats de fer matemàtica, per a assentar-se sobre els sabers que podran controlar i potser resoldran alguns problemes; però l'important no és que els resolguen tots, més aviat és important que tracten de resoldre'ls tots.

L'ús de materials manipulatius pot ajudar els xiquets i les xiquetes a la comprensió i resolució dels problemes, ja que s'afavoreix el procés per a realitzar operacions intel·lectuals, encara que sense cap material didàctic el nen o la nena pot per si sol arribar-hi.

No s'ha d'obligar l'estudiantat o l'alumnat a fer servir un mètode o un altre, «més aviat s'instarà a provar diversos mètodes per treure informació i així planificar la resolució» (Alsina et al. 1996, 111). A través del treball en grup els professors podem facilitar la discussió de quin dels mètodes emprats resulta el més adequat, analitzar les estratègies, formular conjectures, estimar resultats, delimitar errors, examinar alternatives i conseqüències i veure la pertinència dels resultats en relació amb la situació plantejada; tot això farà que l'estudiantat o l'alumnat madure els seus conceptes i procediments i, alhora, els iniciarà en les regles socials del debat i de la presa de decisions.

Els problemes constitueixen una novetat per a qui aprén i la seua solució és en certa mesura un procés creatiu, que depén que la persona no només tinga el coneixement i les destreses requerits, sinó que també siga capaç d'utilitzar-los i relacionar-los eficientment. De vegades, sembla produir-se un petit indici, una intuïció intel·lectual, una visió interior (*insight*) que ens porta a la solució.

Aquest fenomen no entés del tot, implica en general la comprensió d'alguna relació anteriorment inadvertida dins de l'estructura del coneixement (Skemp 1971, Orton 1988).

Diuen aquests mateixos autors que aquesta activitat no pot realitzar-se per mandat, ja que la part central és inconscient i involuntària. No obstant això, sembla necessari un període preliminar de concentració en el problema: donar conscientment voltes al problema en la ment, provar diferents línies d'acció, aplicar mètodes que poden resultar apropiats; si tot i això no arriba la solució, a continuació hi ha generalment un període en el qual el problema es deixa de banda, almenys conscientment. En aparença, durant aquest període, continua l'activitat mental inconscient relacionada amb el problema, com si el subconscient, lliure de l'exigència conscient per resoldre'l, seguira experimentant amb combinacions d'elements del coneixement; doncs aviat, una intuïció intel·lectual, relativa al problema –potser la solució completa– ve a la ment en un moment en què no es fa un treball deliberat sobre el problema.

Segons Ausubel, Novak i Hanesian (1978, 500):

> [...] les principals fonts de variació de la capacitat de resoldre problemes són: a) coneixement de la matèria i la familiaritat amb la lògica distintiva d'una disciplina; b) determinants cognoscitius com la sensibilitat al problema, l'originalitat i la curiositat intel·lectual; l'estil cognoscitiu; el coneixement general sobre la resolució eficaç del problema; el domini d'estratègies especials de resolució de problemes dins de les disciplines particulars; i c) trets de personalitat com la pulsió, la persistència, la flexibilitat i l'ansietat.

Afegint que en determinants com la sensibilitat al problema, l'originalitat, l'estil cognitiu i els factors de personalitat, la major part de la variació potser estarà en funció de la dotació genètica i de l'experiència acumulada; per la qual cosa, aquests aspectes de la capacitat de resolució no siguen sensibles a l'ensinistrament. Per tant, el treball més eficient d'instrucció en resolució de problemes es concentra en el coneixement de la matèria, en la lògica i estratègia de la resolució particulars de la disciplina i en els principis generals de la resolució vàlida de problemes (Ausubel 1968; Ausubel, Novak i Hanesian 1978).

1.3. La resolució de problemes matemàtics en el Grau en Mestre/a d'Educació Primària en la Universitat Jaume I

El Pla d'Estudis 2010 de la Universitat Jaume I (UJI) per al Grau en Mestre/a d'Educació Primària, s'iniciava en primer curs la formació matemàtica dels futurs docents amb l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I. En el seu programa, el tema 2 es dedicava a la resolució de problemes, el seu ensenyament-aprenentatge de manera genèrica per, més endavant, en els temes corresponents als altres continguts d'aquesta assignatura, abordar la resolució de problemes específics, de la mateixa manera que ocorre en les restants assignatures de l'àrea en el grau, MP1019 Didàctica de les Matemàtiques II en segon curs i MP1025 Didàctica de les Matemàtiques III en tercer, amb els problemes referents als seus continguts.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Aleshores, la formació en RPM en el Grau en Mestre/a no era només responsabilitat dels professors de Didàctica de la Matemàtica que impartien l'assignatura del primer curs, sinó que havia de ser compartida per tot el professorat de l'àrea en aquesta titulació, raó per la qual es feia necessària una coordinació general en els aspectes referents a aquest contingut matemàtic, que anara més enllà de la ja existent entre els diferents professors de cadascuna de les assignatures.

El curs 2012/2013 l'àrea Didàctica de la Matemàtica a l'UJI estava formada per professorat amb experiència docent i investigadora en titulacions de Mestre/a, professorat amb experiència universitària en altres àrees de coneixement de Matemàtiques, professorat amb experiència en educació secundària i professorat amb poca experiència docent, però amb formació en didàctica matemàtica adquirida en cursar el Màster Universitari en Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes. Davant tal diversitat competencial i donat el nombre important de professorat a concertar, decidírem constituir el Seminari d'Investigació Educativa «Resolució de Problemes Matemàtics» amb els objectius següents:

- Coordinar els continguts de les diferents assignatures de l'àrea de Didàctica de la Matemàtica corresponents a la RPM.
- Millorar la formació didàctica del professorat de l'àrea.
- Millorar la formació inicial en RPM de l'estudiantat del grau.
- Ajudar l'estudiantat universitari a aconseguir un canvi actitudinal davant els continguts de RPM que facilitara els seus processos d'estudi i aprenentatge.
- Elaborar materials docents sobre RPM que puguen ser utilitzats en diferents assignatures de l'àrea.

La plasmació immediata d'aquest Seminari d'Investigació Educativa va ser l'adopció d'un model-esquema de RPM i la comunicació «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos» presentada a les *XVI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM), celebrades a Palma de Mallorca en juliol de 2013 (Alcalde et al. 2013), en la qual l'explicàvem.

Finalment, cal dir que la reforma/modificació de 2018 del Pla d'Estudis 2010 del Grau en Mestre/a d'Educació Primària a l'UJI, ha transformat l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I en l'assignatura MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I, en la qual també el tema 2 es dedica a la resolució de problemes.

Tema 2: El mètode de resolució de problemes matemàtics

2.1. Introducció

La RPM pot tenir tres funcionalitats: objectiu, contingut o metodologia. Com a objectiu perquè l'ensenyament de les Matemàtiques va dirigit a l'estudiantat o l'alumnat per a que aprenga a resoldre problemes; com a contingut perquè es refereix a tècniques, heurístiques i estratègies per a aconseguir-la, i com a metodologia perquè se la considera un dels millors camins per a aprendre Matemàtiques (García Jiménez 2002). En aquest llibre la considerem des de la segona de les funcionalitats, com a contingut, amb la finalitat d'arribar a la primera d'elles, perquè l'estudiantat o l'alumnat aprenga a resoldre problemes, i així, tractar de millorar dades com les referides als futurs i futures mestres d'Educació Primària de primer curs de la Universitat de Granada, proporcionades per Sánchez Mendías, Segovia i Miñán (2011, 309):

> […] resulta significativo que un 80,28 % sientan preocupación por su capacidad para resolver problemas, tengan sentimientos negativos e incluso reconozcan situaciones de bloqueo ante esta actividad matemática.

En aquest tema presentem el nostre mètode de RPM, algunes consideracions didàctiques i, a continuació, un conjunt de problemes numèrics, anomenats «generals» (per diferenciar-los dels que apareixen en els altres temes), i un altre conjunt de problemes geomètrics, amb la finalitat de deixar totalment aclarit el mètode i mostrar exemples de la seua aplicació.

El contingut, per tant, podria ser una gran ajuda per al treball del tema 2 de l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (UJI, Pla d'Estudis 2010) i també per a l'assignatura MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (reforma/modificació de 2018).

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2.2. El mètode

Com hem dit en el tema 1, el curs 2012/2013 en l'àrea Didàctica de la Matemàtica a l'UJI constituírem un Seminari d'Investigació Educativa «Resolució de Problemes Matemàtics» (SIE RPM) on vam adoptar un model-esquema de RPM que detallàrem en la comunicació «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos» (Alcalde et al. 2013), partint dels punts següents:

a) La concepció sobre la Didàctica de la Matemàtica exposada a Pérez, Alcalde i Lorenzo (2012).
b) Els models de RPM descrits en Alcalde (2010): Dewey (1910), Polya (1945), Mason, Burton i Stacey (1982), Schoenfeld (1985), Puig i Cerdán (1988), i Carrillo (1998).
c) Com es contempla la RPM a les normes legals dels currículums d'Educació Primària i d'Educació Secundària Obligatòria (ESO). Poguérem comprovar que suggerien unes fases que s'assemblaven més a les del model de Polya que a les dels altres.
d) Les orientacions per a la RPM que apareixen en els textos utilitzats a les escoles i instituts, per ser Educació Primària l'etapa en què desenvoluparà el seu treball l'estudiantat del Grau en Mestre/a, i Secundària l'etapa de la seua procedència en ingressar a la Universitat. Orientacions que també suggerien unes fases en la RPM que s'assemblaven més a les de Polya que a les dels altres models.

Pel que fa al punt *c*), avui dia, amb el Decret 108/2014, de 4 de juliol, del Consell, per l'Educació Primària, i el Decret 87/2015, de 5 de juny, del Consell, per l'Educació Secundària, es mantenen els mateixos supòsits: les estratègies/fases suggerides per a la RPM s'assemblen més a les del model de Polya que a les dels altres.

I referent al punt *d*), com hem comprovat recentment amb la tutorització de Treballs de Final de Grau en Mestre/a d'Educació Primària (GMEP) (Traver 2015, Sobrino 2016, García Granell 2017), també es mantenen els mateixos supòsits: les orientacions per a la RPM en els textos s'assemblen més al de Polya que a les dels altres models.

Doncs, com els punts *a*), *b*), *c*) i *d*), són els mateixos referents avui que en el curs 2012/2013, continuem subscrivint el model-esquema de RPM del SIE RPM de l'àrea Didàctica de la Matemàtica a l'UJI, que passem a explicar a continuació, al que hem incorporat l'aprenentatge i l'ensenyament des d'aleshores.

El nostre mètode, el model-esquema de RPM, parteix de la proposta de Polya (1945), de les seues quatre fases, anomenant-les d'una forma molt similar, introduint-hi algunes subfases que complementen la visió que treballem amb l'estudiantat de GMEP.

En els problemes que presentem en els apartats 2.3. i 2.4., així com en el temes següents del llibre, abordem la RPM des de dues perspectives: la de l'estudiantat de GMEP, i la de l'alumnat de 5é i/o 6é d'Educació Primària, per ser aquesta l'etapa en la qual desenvoluparà el seu treball l'estudiantat.

Aquestes perspectives comporten formes de resolució generalment distintes, ja que l'estudiantat, amb uns coneixements matemàtics fins a l'ESO, està capacitat

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

amb eines matemàtiques més potents que les de l'alumnat de Primària, com per exemple, una iniciació a l'àlgebra.

En triar aquesta manera de treballar la RPM en les aules de l'UJI pretenem que l'estudiantat puga contemplar cada un dels problemes des del seu propi punt de vista i des del qual tindria l'alumnat de Primària. En pensar la RPM com si foren xiquets i xiquetes de Primària, han de fer un treball reflexiu que analitze les diferents possibilitats que l'alumnat té a la hora d'enfrontar-se a un problema, cosa que implicarà una important millora en la seua forma de veure la RPM i un reconeixement de les diferents maneres de resoldre'ls que enriquirà tant la seua formació matemàtica com la seua preparació didàctica.

Passem ja a explicar el mètode.

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat cal explicitar la informació del text del problema en la subfase *A) Dades i incògnites.* D'aquesta manera podrem aconseguir una major consciència del que tenim, les dades, i del que volem trobar, la o les incògnites.

En les nostres classes comprovem que l'estudiantat, de vegades, comença a resoldre el problema i arriba a un punt en què no pot seguir, bé perquè no sap el que convindria continuar fent, bé perquè el problema no té solució, per aquest motiu pensem que és necessària una subfase com *B) El problema és resoluble?*, que creiem que és el que Polya (1945) tracta d'indicar quan en la pàgina 19 de la traducció espanyola, en les preguntes o suggeriments corresponents a la primera fase diu: «És la condició suficient per a determinar la incògnita? És insuficient? Redundant? Contradictòria?».

Perquè l'estudiantat del Grau en Mestre/a comprenga la necessitat de formular-se la pregunta de la resolubilitat del problema i tractar de respondre-la, de tant en tant, els proposem problemes irresolubles, com, per exemple, l'A.8 o el B.13.

En aquesta subfase poden haver-hi diferències entre la resolució de l'estudiantat i de l'alumnat d'Educació Primària, per exemple, en un problema en què el futur mestre/a traduiria les dades a un sistema d'equacions, veuria que el problema és resoluble comprovant la resolubilitat del sistema, mentre que l'escolar, en no saber equacions, possiblement comprovaria que el problema és resoluble mitjançant un tempteig, per exemple.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Aquí cal explicitar els passos que, partint de les dades, ens conduiran a obtenir la o les incògnites, la solució del problema. Es tracta d'indicar ordenadament les accions que, encadenades, hem d'executar, però sense fer càlculs, sols hem de dir què cal fer.

Evidentment, podrà haver-hi una diferència entre el que expressa l'estudiantat i el que expressaria l'alumnat, conseqüència lògica del major domini del llenguatge dels universitaris, però pensem que és convenient aquesta fase, ja

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

que reforça el que perseguim en *B) El problema és resoluble?*, per si de cas la resposta no s'havia fet del tot bé.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Aquesta part consisteix a fer el que s'ha dit en la fase anterior, seguir els passos indicats, però ara sí, fent els càlculs i tot el que siga necessari per a obtenir la solució del problema.

En el cas que s'haja resolt un sistema d'equacions, proposem que una vegada obtinguda la solució del sistema es comprove la correcció de dita solució, per a evitar continuar amb la resolució del problema i, més tard, veure, detectar o adonar-nos que la seua solució no està bé.

És una pràctica bastant comuna que una vegada obtinguda la solució del problema, és a dir, finalitzada la 3a fase, es done per acabada la resolució del problema, sense plantejar-se la correcció del resultat, que de vegades no està bé per haver comés alguna errada en els càlculs, en l'aplicació d'algun contingut matemàtic, per no correspondre al context del problema, etc., per tant, considerem necessària la fase següent amb la intenció de corregir aquesta pràctica i, per tant, que qui resol un problema esdevinga en «matemàtic» (Chevallard, Bosch i Gascón 1997) responsable i segur de la seua feina.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

Per a examinar la solució, cal veure si el resultat és correcte, el que Polya (1945) tracta d'indicar quan en la pàgina 19 de la traducció espanyola, en les preguntes o suggeriments corresponents a la 4a fase diu: «Pot vostè verificar-ne el resultat?», la primera cosa que devem plantejar-nos, el primer filtre, és el que preguntem en la subfase *A) La solució és raonable?*, perquè d'una manera bastant intuïtiva, aproximada, tractem de detectar si la solució és pertinent.

En algunes ocasions, serà el context mateix de l'enunciat del problema el que ens podrà dir si la solució és adient, altres vegades fent un càlcul aproximatiu, o mitjançant una estimació d'entre quins valors podria estar la solució.

Posats que la solució siga raonable, pot ocórrer que no siga precisa, exacta, per això proposem la subfase *B) Comprovar la solució*. Una de les possibilitats és, com diu Polya (1945), just a continuació de la referència anterior: «Pot obtenir el resultat de forma diferent?», per exemple, un problema en què s'ha calculat la solució mitjançant la resolució d'un sistema d'equacions, aleshores, trobar la solució per mitjà d'un tempteig, o la comprovació de la solució en l'estudiantat de Grau en Mestre/a podria ser resolent el problema com ho fa l'alumnat d'Educació Primària, si és que hi ha diferència entre ambdues resolucions.

A vegades, ja és suficient resoldre un problema com per, a més, obtenir la solució d'una altra forma, de manera que en aquests casos podem comprovar la solució per mitjà del procediment «canviar les dades proporcionalment» o aquest altre «canviar dades per incògnita i viceversa». En ambdós casos s'ha d'enunciar un nou problema anàleg a l'original i just a continuació del nou enunciat cal dir quina és la solució

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

que lògicament esperem d'eixe nou problema, perquè si obtinguérem un altre resultat, poder detectar que o bé ens hem equivocat en els càlculs de la nova solució o, si aquest no és el cas, aleshores el problema original té una solució que no és la que estem comprovant i, per tant, el problema original està mal resolt.

En qualsevol de les tres formes diferents de comprovar la solució del problema original, la resolució que cal fer ara en la 4a fase, no comença novament amb la 1a i 2a fases del mètode que estem explicant, sinó que sols es fa el que correspon a una 3a fase, és a dir, els càlculs necessaris per a trobar la solució que busquem.

El procediment «canviar les dades proporcionalment» és bastant particular, per la qual cosa cal tenir molta precaució en la seua aplicació. Per començar, en l'enunciat del nou problema cal canviar les dades en la mateixa proporció, és a dir, no es pot duplicar una o unes dades, altra o altres dividir-les per tres, etc., cal canviar-les totes per igual. A més, no s'han de canviar les proporcions, les raons que hi ha entre les dades de l'enunciat. Per últim, en els problemes geomètrics s'ha de tenir molta cura amb el que passa, segons si estem treballant amb 1, 2 o 3 dimensions, cal raonar bé la modificació que fem a les dades com afectarà a la incògnita del nou problema, és a dir, si les dades són d'una dimensió, per exemple, com afectaran a la incògnita si aquesta és d'una, dues o tres dimensions. En els problemes que segueixen quedaran aclarits aquests extrems.

L'aplicació del procediment «canviar dades per incògnita i viceversa» per a comprovar la solució consisteix a enunciar un nou problema anàleg a l'original, on la incògnita del problema original serà ara una de les dades del nou enunciat i, una o algunes de les dades del problema original desapareixen per a convertir-se en la incògnita o incògnites del nou problema. És com formalitzar la prova de la subtracció o de la divisió, però enunciant un nou problema.

Per exemple, si en resoldre una subtracció de minuend «m» i de subtrahend «s» amb resta o diferència «d»: «m – s = d», per a comprovar-la, calculem «s + d» per a veure si ens dona «m», aleshores, si hem resolt un problema de dades «m» i «s» amb incògnita «d», per a comprovar la solució («d») enunciem un nou problema de dades «s» i «d» amb incògnita «m».

En el cas de la divisió seria: si en resoldre una divisió de dividend «D» i de divisor «d» amb quocient «q» i residu «r»: $\begin{array}{l|l} \mathbf{D} & \underline{\mathbf{d}\quad} \\ \mathbf{r} & \mathbf{q} \end{array}$ per a comprovar-la, calculem «d · q + r» per a veure si ens dona «D», aleshores, si hem resolt un problema de dades «D» i «d» amb incògnita «q» i «r», per a comprovar la solució («q» i «r») enunciem un nou problema, de dades «d», «q» i «r» amb incògnita «D».

Fins aquí l'explicació del nostre mètode de RPM, que confiem que quede aclarit totalment en els problemes que, amb aquesta intenció, resolem en aquest tema.

2.3. Algunes consideracions didàctiques

Els enunciats dels problemes han d'estar contextualitzats en la vida i/o en els aprenentatges que estan fent els i les discents, perquè generen una major motivació i a fi que tinguen un major interés en la seua resolució.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Partirem de les idees prèvies de l'estudiantat o de l'alumnat sobre cadascun dels problemes a treballar i, en particular, de les seues propostes personals de resolució de les diferents situacions que s'hi plantegen, per a continuar amb la recerca dels procediments generals, estàndards, com a forma d'oferir-los les eines matemàtiques que s'utilitzen en la resolució dels problemes.

Les resolucions presentades són algunes de les possibles. Per no fer excessivament gran la publicació no hi hem desenvolupat les diverses que poden haver-hi en alguns casos, però quan hi hem aplicat diferents maneres de solucionar els problemes per l'estudiantat del Grau que per l'alumnat de Primària, sempre l'estudiantat podria utilitzar la resolució de l'alumnat i, en alguns casos, els i les escolars podrien fer-ho com les i els universitaris.

En les nostres classes podem ensenyar a l'estudiantat i/o a l'alumnat estratègies generals per a resoldre problemes com l'ús de materials, tempteig, elaboració de taules, diagrames, recerca de regularitats, etc.

Finalment, cal dir que en la selecció dels enunciats i la corresponent resolució dels problemes com a alumnat d'Educació Primària, hem tingut en consideració les competències, els continguts, els criteris d'avaluació, així com les recomanacions de metodologia didàctica per als cursos de l'etapa del Decret 108/2014, de 4 de juliol, del Consell, pel qual estableix el currículum i desplega l'ordenació general de l'Educació Primària, pel que fa a l'àrea de Matemàtiques. A més, per a major seguretat en l'adequació als nivells establerts pel decret, alguns problemes han sigut contrastats amb la resolució per l'alumnat d'alguns centres de la província de Castelló.

2.4. Problemes numèrics «generals»

Problema A.1

Iolanda ha comprat un cotxe per 8.200 €. L'ha pagat en tres parts: primer va pagar un 60 % del valor del cotxe, després el 25 % i, finalment, la resta. Quant va pagar Iolanda l'última vegada?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Iolanda ha comprat un cotxe per 8.200 €.
  - o L'ha pagat en tres parts.
  - o Primer va pagar un 60 % del valor del cotxe.
  - o Després va pagar un 25 % del valor del cotxe.
  - o Finalment, va pagar-ne la resta.

- Incògnites:
  - Quant va pagar Iolanda l'última vegada?

B) És resoluble?

Si sabem el preu del cotxe, 8.200 €, que l'ha pagat en tres parts i el percentatge del preu que ha pagat en la primera i segona parts, aleshores, sabem quin percentatge del preu ha pagat i, per tant, podem calcular el percentatge que li falta per pagar, per això podrem esbrinar quants euros devia del preu del cotxe, que és el que va pagar l'última vegada.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Sumarem els percentatges que ha pagat en la primera i segona parts.
b) Calcularem el percentatge que li falta per pagar, restant l'anterior al 100 %.
c) Esbrinem quants euros són el percentatge calculat dels 8.200 €, del preu del cotxe.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 60 % + 25 % = 85 %
b) 100 % − 85 % = 15 %
c) 15 % de 8.200 € = 0,15 · 8.200 = 1.230 €

Per tant, la solució: Iolanda va pagar 1.230 € l'última vegada.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, perquè és una quantitat inferior al preu del cotxe i, com havia pagat un poc menys del 90 % en les dues parts, devia una quantitat que supera el 10 % del preu del cotxe, una quantitat més gran que 820 €, com és la que va pagar Iolanda l'última vegada.

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «canvi de dada per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem quant va pagar Iolanda l'última vegada, 1.230 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem el percentatge del total que havia pagat n la primera part

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

(era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*Iolanda ha comprat un cotxe per 8.200 €. L'ha pagat en tres parts. Va pagar el 25 % en la segona part i 1.230 € l'última vegada. Quin percentatge va pagar Iolanda en la primera part?*». Esperem que la resposta siga el 60 %.

Fem els càlculs necessaris:

Si l'última vegada ha pagat 1.230 €, sabem que del total és 1.230 : 8.200 = = 0,15 que expressat en percentatge seria el 15 %.

Per tant, entre la segona i la tercera part ha pagat 25 % + 15 % = 40 %.

Aleshores, en la primera part ha pagat 100 % − 40 % = 60 %; com esperàvem, doncs, la solució obtinguda creiem que és correcta.

❏ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Iolanda ha comprat un cotxe per 8.200 €.
  - L'ha pagat en tres parts.
  - Primer va pagar un 60 % del valor del cotxe.
  - Després va pagar un 25 % del valor del cotxe.
  - Finalment, va pagar-ne la resta.
- Incògnites:
  - Quant va pagar Iolanda l'última vegada?

B) És resoluble?

Si sabem el preu del cotxe, 8.200 €, que l'ha pagat en tres parts i el percentatge del preu que ha pagat en la primera i segona parts, aleshores, podem saber quants euros ha pagat en la primera i segona parts, per tant, podem calcular quants euros li falta per pagar del preu del cotxe, que és el que va pagar l'última vegada.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem quants euros ha pagat en la primera part.
b) Calcularem quants euros ha pagat en la segona part.
c) Sumarem quants euros ha pagat en la primera i segona parts.
d) Restarem la quantitat anterior al preu del cotxe per a saber el que va pagar la tercera i última vegada.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 60 % de 8.200 = (60 : 100) · 8.200 = 0,6 · 8.200 = 4.920 €
b) 25 % de 8.200 = (25 : 100) · 8.200 = 0,25 · 8.200 = 2.050 €
c) 4.920 + 2.050 = 6.970 €
d) 8.200 – 6.970 = 1.230 €

Per tant, solució: Iolanda va pagar 1.230 € l'última vegada.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, atés que és una quantitat inferior al preu del cotxe i, com havia pagat un poc menys del 90 % en les dues parts, devia una quantitat major del 10 % del preu del cotxe, una quantitat que supera els 820 €, com es la que va pagar Iolanda l'última vegada.

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», per percentatges en lloc de mitjançant les quantitats d'euros. Esperem que la resposta siga igualment 1.230 €.

Fem els càlculs necessaris:

Sumem els percentatges que ha pagat en la primera i segona parts: 60 % + + 25 % = 85 %.

Calculem el percentatge que li falta per pagar: 100% – 85 % = 15 %.

Esbrinem quants euros són el percentatge calculat dels 8.200 €, del preu del cotxe: 15 % de 8.200 € = (15 : 100) · 8.200 = 0,15 · 8.200 = 1.230 €.

Com esperàvem, doncs, creiem que la solució obtinguda és correcta.

Problema A.2

Dels 25 alumnes de la classe de 6é de Primària, el 40 % de l'alumnat es queda al menjador. Ahir només va prendre les postres el 60 % de l'alumnat que s'hi quedà. Quants/es alumnes de 6é que van anar al menjador no les van prendre ahir?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - 25 alumnes de la classe de 6é de Primària.
  - El 40 % de l'alumnat es queda al menjador.
  - Ahir només va prendre les postres el 60 % de l'alumnat que s'hi quedà.
- Incògnites:
  - Quants/es alumnes de 6é que es van quedar al menjador no van prendre les postres ahir?

B) És resoluble?

Sabem quants/es alumnes hi ha en 6é de Primària, 25, com el 40 % de l'alumnat es queda al menjador, sabem quants/es dinen en el col·legi, però va prendre les postres només el 60 %, per tant, podem saber quants/es en menjaren ahir, aleshores, la resta de l'alumnat de 6é que es va quedar al menjador és el que no va prendre les postres ahir, amb la qual cosa el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem el 40 % de 25 per a saber quants/es alumnes de 6é de Primària es quedaren al menjador.
b) D'aquests calcularem el 60 %, que són els/les que van prendre les postres.
c) Així doncs, per a calcular els/les alumnes de 6é que es van quedar al menjador i no van prendre les postres ahir, del nombre obtingut en el 1r pas restarem l'obtingut en el 2n pas.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnes de 6é que es quedaren al menjador.
b) 60 % de 10 = (60 : 100) · 10 = 0,6 · 10 = 6 alumnes de 6é que es quedaren al menjador van prendre les postres ahir.
c) 10 – 6 = 4 alumnes.

Solució: 4 alumnes de 6é que van anar al menjador no van prendre les postres ahir.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és una quantitat inferior al nombre d'alumnes que es quedaren al menjador, i també perquè no tots/es van menjar les postres.

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «canvi de dada per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem quants alumnes no van prendre les postres (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem el percentatge d'alumnes de 6é que es quedaren al menjador i van prendre les postres ahir (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: *«Dels 25 alumnes de la classe de 6é de Primària, el 40 % de l'alumnat es queda al menjador. Ahir 4 no van prendre les postres. Quin percentatge d'alumnes de 6é que s'hi queden van prendre les postres ahir?»*. Esperem que la resposta siga el 60 %.

Fem els càlculs necessaris:

a) 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnes de 6é que es queden al menjador.
b) 10 – 4 = 6 alumnes de 6é que es queden al menjador van prendre les postres ahir.
c) 6 alumnes de 10 és la mateixa proporció que 60 de 100, per tant, el 60 % d'alumnes de 6é que es queden al menjador van prendre les postres ahir.

Així doncs, creiem que la solució obtinguda és correcta.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució podria ser la mateixa que en l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, encara que tal vegada la diferència podria estar en:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera».

Calculem quants alumnes de la classe de 6é de Primària es queden al menjador: 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnes.

Si el 60 % prengué les postres, aleshores, no en prengué: 100 % – 60 % = = 40 %.

Per tant, el nombre d'alumnes de la classe de 6é de Primària que es quedà al menjador i no prengué les postres fou: 40 % de 10 = (40 : 100) · 10 = = 0,4 · 10 = 4 alumnes.

És un resultat que coincideix amb la solució obtinguda en la 3a fase, per la qual cosa creiem que el problema està ben resolt.

Problema A.3

Set amics anaren a un restaurant i cadascun va demanar un menú. Hi havia dos tipus de menú per a elegir, el menú tipus A costava 8 euros, el menú tipus B costava 11 euros i pagaren un total de 65 euros. Quants menús de cada tipus demanaren?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Set amics anaren a un restaurant i cadascun va demanar un menú.
  - Hi havia dos tipus de menú per a elegir, el menú tipus A costava 8 euros, el menú tipus B costava 11 euros i pagaren un total de 65 euros.
- Incògnites:
  - Quants menús de cada tipus demanaren.

B) El problema és resoluble?

Si anomenem «x» el nombre de menús de tipus A i «y» el nombre de menús de tipus B, sent *x* i *y* nombres naturals, les dades de l'enunciat les podem traduir en el sistema d'equacions $\begin{cases} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{cases}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x - 8y = -56 \\ 8x + 11y = 65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x - 8y = -56 \\ 3y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 3y = 9 \end{cases}$$

Que és un sistema compatible determinat, per la qual cosa el sistema és resoluble, i com «y» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement, el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 8x + 11y = 65 \end{cases}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3y = 9 \end{cases}$.

De l'equació $3y = 9$, obtenim $y = 3$.
Aleshores, substituint en l'altra equació: $x + 3 = 7 \rightarrow x = 7 - 3 = 4$.

Comprovem que el sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{cases}$ està ben resolt:

$$\begin{cases} x + y = 4 + 3 = 7 \\ 8x + 11y = 8 \cdot 4 + 11 \cdot 3 = 32 + 33 = 65 \end{cases}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt i la solució del problema és la següent: demanaren 4 menús tipus A i 3 menús tipus B.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un total de 7 menús.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la quantitat de menús de cada tipus demanats (eren incògnites i passen a ser dades en el nou problema) i calcularem quant es pagaria pel menjar (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Quant es pagaria pel menjar de set amics si han demanat 4 menús de 8 euros i 3 menús d'11 euros?*». Esperem que el resultat siga 65 €.

Fem els càlculs:

Com han demanat 4 menús de 8 euros pagaran $8 \cdot 4 = 32$ € i com han demanat 3 menús d'11 euros pagaran $11 \cdot 3 = 33$ €.

Així doncs, pagarien en total $32 + 33 = 65$ € i com esperàvem, per tant el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Set amics anaren a un restaurant i cadascun va demanar un menú.
  - Hi ha dos tipus de menú per a elegir: A i B.
  - El menú tipus A costava 8 euros.
  - El menú tipus B costava 11 euros.
  - Pagaren un total de 65 euros pels 7 menús.
- Incògnites:
  - Quants menús de cada tipus demanaren.

B) El problema és resoluble?

Vegem-ho per tempteig.

Si dividim el total pagat entre el nombre d'amics veiem que dona aproximadament 9 €; com la mitjana del preu és més pròxima a 8 € (preu del menú tipus

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A) que a 11 € (preu del menú tipus B), podem suposar que es van demanar més menús tipus A que tipus B i sabem que es van demanar un total de 7 menús, per tant, recollint les proves en una taula:

Nombre de menús de tipus A	Nombre de menús de tipus B	Preu de tots els menús tipus A	Preu de tots els menús tipus B	¿Preu total = = 65 €?
7	0	56	0	56 → NO
6	1	48	11	59 → NO
5	2	40	22	62 → NO

Veiem que tal com disminuïm el nombre de menús tipus A i augmentem el nombre de menús tipus B, el preu total s'aproxima a 65 €, per això possiblement el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre de menús de tipus A	Nombre de menús de tipus B	Preu de tots els menús tipus A	Preu de tots els menús tipus B	¿Preu total = = 65 €?
5	2	40	22	62 → NO
4	3	32	33	65 → SÍ
3	4	24	44	68 → NO

Trobem que 4 menús tipus A i 3 menús tipus B és solució.

Veiem també en la taula que si el nombre de menús tipus A segueix disminuint i el nombre de menús tipus B segueix augmentant, el preu total del menjar augmenta, de manera que només hi ha una solució: entre els 7 amics van demanar 4 menús tipus A i 3 menús tipus B.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un total de 7 menús.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- o Set amics anaren a un restaurant i cadascun va demanar un menú? 4 menús de tipus A i 3 menús de tipus B: 4 + 3 = 7 menús. Sí.
- o Hi havia dos tipus de menú per a elegir, el menú tipus A costava 8 euros, el menú tipus B costava 11 euros i pagaren un total de 65 euros? Pels 4 menús de tipus A es van pagar: 8 · 4 = 32 €, i, pels 3 menús de tipus B: 11 · · 3 = 33 €, de manera que, en total, pagaren: 32 + 33 = 65 €.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

Problema A.4

Anna necessita 35 passos i la seua mare, només 25, per a creuar un carrer pel pas de zebra. Si un pas de la mare és 20 cm més llarg que un d'Anna, quant mesura el pas de cadascuna?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Anna necessita 35 passos i la seua mare només 25 per a creuar un carrer pel pas de zebra.
  - o Un pas de la mare és 20 cm més llarg que un d'Anna.
- Incògnites:
  - o Quant mesura el pas de cadascuna.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) El problema és resoluble?

Com Anna i la seua mare caminen el mateix tros, el pas de zebra, el producte de la longitud del pas de cadascuna pel nombre de passos que fa cadascuna ha de ser igual. Per tant, si anomenem «A» la longitud del pas d'Anna i «M» la longitud del pas de la seua mare, aleshores tindrem: A · 35 = M · 25.

Com un pas de la mare és 20 cm més llarg que un pas d'Anna, tindrem M = = A + 20.

És a dir, tenim un sistema de dues equacions amb dues incògnites $\left\{\begin{array}{l} A\cdot 35 = M\cdot 25 \\ A + 20 = M \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} A\cdot 35 = M\cdot 25 \\ A + 20 = M \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 35A - 25M = 0 \\ A - M = -20 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 35A - 25M = 0 \\ -35A + 35M = 700 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 35A - 25M = 0 \\ 10M = 700 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que és resoluble i, per tant, possiblement, el problema també.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema anterior.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$$\left\{\begin{array}{l} A\cdot 35 = M\cdot 25 \\ A + 20 = M \end{array}\right\} \rightarrow 35A = (A + 20)\cdot 25 \rightarrow 35A = 25A + 20\cdot 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 35A - 25A = 20\cdot 25 \rightarrow 10A = 500 \rightarrow A = 500 : 10 = 50.$$

$$A + 20 = M \rightarrow M = 50 + 20 = 70.$$

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} A\cdot 35 = M\cdot 25 \\ A + 20 = M \end{array}\right\}$ està ben resolt:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A\cdot 35 = 50\cdot 35 = 1.750 \\ M\cdot 25 = 70\cdot 25 = 1.750 \end{array}\right\} \\ A + 20 = 50 + 20 = 70 = M \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt i la solució del problema és la següent: longitud del pas d'Anna 50 cm i longitud del pas de la seua mare 70 cm.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que són mesures possibles per al pas de persones.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la longitud del pas d'Anna (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem quant mesura més el pas de la mare que el d'Anna (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Anna necessita 35 passos i la seua mare, només 25 per a creuar un carrer pel pas de zebra. Si un pas d'Anna mesura 50 cm, quant fa més el pas de la seua mare?*». Esperem que la resposta siga 20 cm més.

Fem els càlculs:

Com no sabem quant mesura el pas de la mare de l'Anna, haurem de començar per calcular-lo.

La longitud del pas d'Anna és de 50 cm, per tant, el pas de zebra té $50 \cdot 35 = 1.750$ cm.

Com la seua mare fa 25 passos per a creuar-lo, $25 \cdot M = 1.750$ cm, aleshores, $M = 1.750 : 25 = 70$ cm.

La diferència entre la longitud del pas de la mare d'Anna i la del pas d'Anna és: $M - A = 70 - 50 = 20$ cm.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer resolent un sistema d'equacions.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Anna necessita 35 passos i la seua mare només 25 per a creuar un carrer pel pas de zebra.
  - Un pas de la mare és 20 cm més llarg que un d'Anna.
- Incògnites:
  - Quant mesura el pas de cadascuna.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) El problema és resoluble?

Com Anna i la seua mare caminen el mateix tros, el pas de zebra, el producte de la longitud del pas de cadascuna pel nombre de passos que fa cadascuna ha de ser igual.

Com el pas de la mare és 20 cm més llarg que el d'Anna, tenint a més en compte el paràgraf d'abans, farem proves per a veure si el problema és resoluble.

Recollim les proves en una taula i com que no sabem la longitud del pas d'Anna començarem el tempteig suposant, per exemple, que té un pas de 20 cm:

Mesura pas d'Anna (cm)	Mesura pas mare: 20 + el d'Anna (cm)	Longitud caminada per Anna en 35 passos (cm)	Longitud caminada per la seua mare en 25 passos (cm)	Igualtat longituds caminades
20	20 + 20 = 40	20 · 35 = 700	40 · 25 = 1.000	NO
30	20 + 30 = 50	30 · 35 = 1.050	50 · 25 = 1.250	NO
40	20 + 40 = 60	40 · 35 = 1.400	60 · 25 = 1.500	NO

Podem veure en la taula que a mesura que creix la longitud del pas d'Anna, la diferència entre la distància recorreguda per la seua mare i per ella, en els 25 i 35 passos, respectivament, va disminuint, de manera que pensem que hi haurà una longitud del pas d'Anna en el qual la distància recorreguda per la seua mare i per ella, serà la mateixa, és a dir, que el problema serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem temptejant per trobar-ne la solució.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Com havíem arribat a mida del pas d'Anna 40 cm, seguim en 50 cm.

Mesura pas d'Anna (cm)	Mesura pas mare: 20 + el d'Anna (cm)	Longitud caminada per Anna en 35 passos (cm)	Longitud caminada per la seua mare en 25 passos (cm)	Igualtat longituds caminades
50	20 + 50 = 70	50 · 35 = 1.750	70 · 25 = 1.750	SÍ
60	20 + 60 = 80	60 · 35 = 2.100	80 · 25 = 2.000	NO
70	20 + 70 = 90	70 · 35 = 2.450	90 · 25 = 2.250	NO

Trobem que 50 cm de mesura del pas d'Anna i 70 cm del de la seua mare és solució.

Veiem també en la taula que, si la longitud dels passos seguís creixent, la distància recorreguda per ella i la seua mare, en els 35 i 25 passos respectivament, seria cada vegada més diferent, per la qual cosa hi ha només una solució: 50 cm de longitud el pas d'Anna i 70 cm el de la seua mare.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són mesures possibles per al pas de persones.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- Anna necessita 35 passos i la seua mare, només 25, per a creuar un carrer pel pas de zebra? Ana camina 35 · 50 = 1.750 cm i la seua mare 25 · 70 = = 1.750 cm. Per tant, la distància que caminen mare i filla és la mateixa.
- Un pas de la mare és 20 cm més llarg que un d'Anna? 70 – 50 = 20 cm. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

Problema A.5

Anna té cinc anys més que el seu germà Ferran. Quan passen sis anys, entre les edats dels dos germans igualaran la del pare, que en l'actualitat té 41 anys. Quina edat tenen actualment els dos fills?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Anna té cinc anys més que el seu germà Ferran.
  - Quan passen sis anys, entre les edats dels dos germans igualaran la del pare, que en l'actualitat té 41 anys.

- Incògnites:
  - Edat que tenen actualment els dos fills.

B) El problema és resoluble?

Anomenem «A» l'edat d'Anna i «F» l'edat del seu germà Ferran, sent A i F nombres naturals.

Aleshores tenim el sistema següent de dues equacions i dues incògnites $\left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ (A+6)+(F+6) = 41+6 \end{matrix}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ (A+6)+(F+6) = 41+6 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ A + F + 12 = 47 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A - F = 5 \\ A + F = 35 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A - F = 5 \\ 2A = 40 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que és resoluble i, com A serà un nombre natural, per tant, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema anterior.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$$\left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ (A+6)+(F+6) = 41+6 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ A + F + 12 = 47 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A - F = 5 \\ A + F = 35 \end{matrix}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{matrix} A - F = 5 \\ 2A = 40 \end{matrix}\right\} \to A = 40 : 2 = 20.$$

$20 = F + 5 \rightarrow F = 20 - 5 = 15.$

Comprovem que el sistema $\left.\begin{cases} A = F + 5 \\ (A + 6) + (F + 6) = 41 + 6 \end{cases}\right\}$ està ben resolt:

$$\left.\begin{cases} A = 20;\ F + 5 = 15 + 5 = 20 \\ (A + 6) + (F + 6) = (20 + 6) + (15 + 6) = 26 + 21 = 47 \end{cases}\right\}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt i la solució del problema és la següent: edat d'Anna 20 anys i edat de Ferran 15 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són valors possibles per a les edats de fills d'un pare de 41 anys.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat d'Anna (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem quants anys més té Anna que el seu germà Ferran (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: *«Anna té 20 anys i el seu pare 41. Quan passen sis anys, entre les edats dels dos germans, Anna i Ferran, igualaran la del pare. Sabent que Anna és més gran que Ferran, quants anys més té Anna que Ferran?»*. Esperem que la resposta siga 5 anys més.

Fem els càlculs:

Com que no sabem quina és l'edat de Ferran, haurem de començar per calcular-la.

D'aquí a 6 anys Anna tindrà $20 + 6 = 26$, Ferran $(F + 6)$ anys i el seu pare $41 + 6 = 47$ anys, aleshores, $26 + (F + 6) = 47$, equació que resolem:

$$26 + (F + 6) = 47 \rightarrow 26 + F + 6 = 47 \rightarrow F + 32 = 47 \rightarrow F = 47 - 32 = 15.$$

La diferència entre l'edat d'Anna i la de Ferran és: $A - F = 20 - 15 = 5$ anys.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer resolent un sistema d'equacions.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Anna té cinc anys més que el seu germà Ferran.
  - o Quan passen sis anys, entre les edats dels dos germans igualaran la del pare, que en l'actualitat té 41 anys.
- Incògnites:
  - o Edat que tenen actualment els dos fills.

B) El problema és resoluble?

Com Anna té 5 anys més que el seu germà Ferran donarem valors a l'edat actual de Ferran i completarem una taula fins a trobar dues edats que la suma d'aquí a 6 anys siga l'edat que tindrà el pare: 41 + 6 = 47 anys.

Edat en l'actualitat		Edat d'aquí a 6 anys		
Ferran	*Anna*	*Ferran*	*Anna*	*¿Ferran + Anna = 47?*
5	10	11	16	11 + 16 = 27 → NO
6	11	12	17	12 + 17 = 29 → NO
8	13	14	19	14 + 19 = 33 → NO
10	15	16	21	16 + 21 = 37 → NO

Podem veure en la taula que a mesura que augmenta l'edat de Ferran, la suma de les edats dels germans d'aquí a 6 anys s'aproxima a 47, de manera que pensem que hi haurà una edat de Ferran per a la qual la suma de les edats de Ferran i d'Anna d'aquí a 6 anys serà l'edat que tindrà el pare, 47 anys; és a dir, posiblement el problema serà resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem temptejant per trobar la solució.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Com havíem arribat a edat de Ferran 10 anys, seguim en 11 anys.

Edat en l'actualitat		Edat d'aquí a 6 anys		
Ferran	*Anna*	*Ferran*	*Anna*	*¿Ferran + Anna = 47?*
11	16	17	22	17 + 22 = 39 → NO
13	18	19	24	19 + 24 = 43 → NO
15	20	21	26	21 + 26 = 47 → SÍ
17	22	23	28	23 + 28 = 51 → NO

Trobem que l'edat d'Anna, 20 anys, i els 15 anys d'edat del seu germà Ferran són solució.

Veiem també en la taula que si l'edat de Ferran continuara augmentant, la suma de la seua edat i la d'Anna d'aquí a 6 anys seguiria augmentant i no tornaria a donar 47, de manera que hi ha només una solució: edat d'Anna 20 anys i edat de Ferran 15 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són valors possibles per a les edats de fills d'un pare de 41 anys.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- Anna té cinc anys més que el seu germà Ferran? 20 − 15 = 5 anys. Sí.
- Quan passen sis anys, entre les edats dels dos germans igualaran la del pare, que en l'actualitat té 41 anys? D'aquí a sis anys, Anna tindrà 20 + + 6 = 26 anys, el seu germà Ferran 15 + 6 = 21 anys, i el seu pare 41 + 6 = = 47 anys. La suma de les edats d'Anna i de Ferran serà: 26 + 21 = 47 anys, que és l'edat que tindrà el pare.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema A.6

Comprem 100 kg de café per 485 euros. Torrar-los costa 95 euros, amb una pèrdua del 20 % del seu pes. Si venem tot el café torrat, a quin preu haurem de vendre el quilogram de café per a obtenir un benefici del 12 %?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Comprem 100 kg de café per 485 euros.
  - Torrar-los costa 95 euros.
  - En el torrat es perd un 20 % del pes del café.
  - Amb la venda de tot el café volem obtenir un benefici del 12 %.
- Incògnites:
  - Preu de venda del quilogram de café.

B) *El problema és resoluble?*

Amb les dues primeres dades podem calcular quant ens ha costat comprar i torrar el café. Com el preu de compra i torrat és el 100 % i volem obtenir un benefici del 12 % amb la venda de tot el café, hem de calcular el 112 % del preu de compra i torrat, que serà el preu pel que volem vendre tot el café.

Al torrar es perd un 20 % del pes del café, podem calcular el 80 % del pes del café comprat per a obtenir el pes del café torrat.

Finalment, calcularem el preu de venda del quilogram de café dividint el preu de venda de tot el café entre els quilos de café torrat que tenim.

Per tant, el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Sumem el que ens ha costat el café i el que hem pagat pel torrat.
b) Com el preu de compra i torrat és el 100 % i volem obtenir un benefici del 12 % amb la venda de tot el café, calculem el 112 % del preu de compra i torrat, que serà el preu pel que volem vendre tot el café.
c) Calculem el 80 % del pes del café, ja que el 20 % es perd en el torrat i així obtindrem el pes del café que ens queda després de torrar-lo.
d) Dividim la quantitat obtinguda en l'apartat *b*) entre l'obtinguda en l'apartat *c*), i així obtindrem el preu de venda del quilo de café per a obtenir el benefici del 12 %.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 485 + 95 = 580 €
b) 112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 €
c) 80 % de 100 = 0,8 · 100 = 80 kg
d) 649,60 : 80 = 8,12 €/kg

Solució: per a obtenir un benefici del 12 % haurem de vendre el café a 8,12 €/kg.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que la solució obtinguda és un preu raonable per a un quilo de café de qualitat mitjana.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el preu de venda del quilogram de café (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la quantitat de quilos de café que vam comprar (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Comprem una determinada quantitat de quilos de café per 485 euros. Torrar-los costa 95 euros, amb una pèrdua del 20 % del seu pes. Si venem tot el café torrat a 8,12 €/kg obtenim un benefici del 12 %, quina és la quantitat de quilograms de café que comprem?*». Esperem que la resposta siga 100 kg de café.

Fem simplement els càlculs:

Siga «y» la quantitat de café (en kg) que comprem al principi.

Siga «x» la quantitat de café (en kg) que venem.

485 + 95 = 580 € és el cost de comprar i torrar tot el café.

112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 € és el preu pel qual venem tot el café torrat.

8,12 €/kg és el preu al que venem el café, per tant, 8,12 · x = 649,60 → → x = 649,60 : 8,12 = 80 kg de café torrat.

Com que al torrar-lo es perd un 20 % del pes, s'aprofita un 80 %, aleshores, «80 % de y» ha de ser 80 kg, 80 % de y = 80 → 0,8 · y = 80 → y = 80 : 0,8 = 100.

Per tant, comprem 100 kg de café, com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Comprem 100 kg de café per 485 euros.
  - Torrar-los costa 95 euros.
  - En el torrat es perd un 20 % del pes del café.
  - Amb la venda de tot el café volem obtenir un benefici del 12 %.
- Incògnites:
  - Preu de venda del quilogram de café.

B) *El problema és resoluble?*

Amb les dues primeres dades podem calcular quant ens ha costat comprar i torrar el café. Com volem obtenir un benefici del 12 % amb la venda de tot el café, podem calcular el 12 % del preu de compra i torrat, i sumar-lo al preu de compra i torrat, que serà el preu de venda de tot el café.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

De la mateixa manera, podem calcular el 20 % del pes del café comprat i restar-lo als 100 kg comprats, i així obtenir el pes del café torrat.

Finalment, calcularem el preu de venda del quilo de café dividint el preu de venda de tot el café entre els quilos de café torrat que tenim.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Sumem el que ens ha costat el café i el que hem pagat pel torrat.
b) Calculem el 12 % de la suma obtinguda en l'apartat *a*), i li ho sumem a la suma obtinguda en l'apartat *a*).
c) Calculem el 20 % del pes del café i li ho restem als quilos comprats.
d) Dividim la quantitat obtinguda en l'apartat *b*) entre l'obtinguda en l'apartat *c*).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 485 + 95 = 580 € és el cost de comprar i torrar tot el café.
b) 12 % de 580 € = (12 : 100) · 580 = 69,60 € → 580 + 69,60 = 649,60 €.
c) 20 % de 100 kg = (20 : 100) · 100 = 20 kg → 100 – 20 = 80 kg de café torrat.
d) 649,60 : 80 = 8,12 €/kg.

Solució: per a obtenir un benefici del 12 % haurem de vendre el café a 8,12 €/kg.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que la solució obtinguda és un preu raonable per a un quilo de café de qualitat mitjana.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «resoldre-ho d'una altra manera», per percentatges en lloc de mitjançant les quantitats d'euros. Esperem que la resposta siga igualment 8,12 €/kg.

ISBN: 978-84-17900-44-1 DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs necessaris:

Sumem el que ens ha costat el café i el que hem pagat pel torrat: 485 + 95 = = 580 €, i així obtenim el cost per a la seua venda.

El preu de compra i torrat és el 100 % del cost per a la venda i volem obtenir un benefici del 12% amb la venda, per obtenir per quant volem vendre tot el café, sumem 100 % + 12 % = 112 %, i calculem el 112 % del cost, que serà 112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 €.

Es perd el 20 % del pes en el torrat, ja que tenim el 100 % – 20 % = 80 % del pes del café per a vendre, i havíem comprat 100 kg, per tant: 80 % de 100 = = 0,8 · 100 = 80 kg és la quantitat de café que vendrem.

Per a calcular el preu de venda del quilo dividirem la quantitat que hem obtingut com a preu de venda de tot el café, 649,60 €, entre els quilos que ens queden després de torrar-lo, 80 kg, i obtindrem 649,60 : 80 = 8, 12 €/kg.

Que coincideix amb la solució obtinguda en la 3a fase, per la qual cosa creiem que el problema està ben resolt.

Problema A.7

Dues veïnes es troben a l'escala i una li pregunta a l'altra quants anys tenen els seus nets, a la qual cosa respon: «Josep té el doble d'edat que Raül, i Laura tres anys més que Josep. La suma de les tres edats és 38 anys». La veïna es va quedar perplexa, ja que no sabia que l'altra va ser professora de Matemàtiques. Quina és l'edat de cadascun dels nets?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Josep té el doble d'edat que Raül.
  - Laura té tres anys més que Josep.
  - La suma de les tres edats és de 38 anys.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - Quina és l'edat de cadascú.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «J» a l'edat de Josep, «R» a la de Raül i «L» a la de Laura, sent J, R i L nombres naturals, aleshores traduïm les dades al sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{l} J = 2\cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{array}\right\}.$$

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} J = 2\cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} J - 2R = 0 \\ -J + L = 3 \\ -J - R - L = -38 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -3R - L = -38 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -5R = -35 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, raó per la qual el sistema és resoluble i, com R serà un nombre natural; aleshores, possiblement, el problema també ho serà.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l} J = 2\cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -5R = -35 \end{array}\right\}$.

De l'equació $-5R = -35$, obtenim $R = 7$.
Aleshores, substituint en les altres dues equacions:

$$\left\{\begin{array}{l} J - 2\cdot 7 = 0 \\ -2\cdot 7 + L = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} J = 2\cdot 7 = 14 \\ L = 3 + 2\cdot 7 = 17 \end{array}\right\}.$$

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} J = 2\cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{array}\right\}$ està ben resolt:

$$\left\{\begin{array}{l} J = 14;\ 2\cdot R = 2\cdot 7 = 14 \\ L = 17;\ 3 + J = 3 + 14 = 17 \\ J + R + L = 14 + 7 + 17 = 38 \end{array}\right\}.$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Efectivament, el sistema està ben resolt, per tant, la solució és la següent: edat de Josep, 14 anys; edat de Raül, 7 anys, i edat de Laura, 17 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí perquè són nombres naturals corresponents a l'edat de tres persones joves que són nets.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat de Laura (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la suma de les edats (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: *«Dues veïnes es troben a l'escala i una li pregunta a l'altra quants anys tenen els seus nets, a la qual cosa respon: "Josep té el doble d'edat que Raül, i Laura té 17 anys, tres anys més que Josep". La veïna es va quedar perplexa, ja que no sabia que l'altra va ser professora de Matemàtiques. Quina és la suma de les edats*?». Esperem que la suma de les edats siga 38 anys.

Fem els càlculs necessaris:

Laura té tres anys més que Josep, així: $17 = J + 3 \rightarrow J = 17 - 3 = 14$ anys.

Josep té el doble d'edat que Raül, aleshores: $14 = 2 \cdot R \rightarrow R = 14 : 2 = 7$ anys.

La suma de les edats dels tres germans serà: $J + R + L = 14 + 7 + 17 = 38$ anys; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer resolent un sistema d'equacions.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Josep té el doble d'edat que Raül.
  - Laura té tres anys més que Josep.
  - La suma de les tres edats és 38.

- Incògnites:
    - Quina és l’edat de cadascun.

B) El problema és resoluble?

Farem proves amb edats que satisfacen les condicions de la relació d’edats entre cada dues persones i mirarem si la suma pot donar 38 anys.

Per a saber més o menys quines edats podrien tenir, com la suma de les tres edats és 38, d’entrada considerarem un nombre el triple del qual s’aproxime a 38 (per allò de les «tres edats»), per exemple, el 13, doncs, $13 \cdot 3 = 39$.

Com la relació de les edats ve donada a partir de l’edat de Josep és d’aquesta de la que partirem.

L’edat de Josep és doble que la de Raül, és a dir, l’edat de Josep és un nombre parell, com el nombre el triple del qual s’aproxima a 38 és 13, que és imparell, considerem que l’edat de Josep és 12 anys, raó per la que la de Raül seria $12 : 2 = 6$ anys i, aleshores, la de Laura $12 + 3 = 15$ anys.

La suma de les tres edats seria $12 + 6 + 15 = 33$ anys, que és menys de 38 anys.

Així doncs, aquestes edats, 12, 6 i 15 anys no són solució, i com l’edat de Josep ha de ser un nombre parell, per això considerem ara que Josep té més edat: 14 anys.

Si l’edat de Josep fora 14 anys, la de Raül seria $14 : 2 = 7$ anys i la de Laura $14 + 3 = 17$ anys.

La suma de les tres edats seria, per tant, $14 + 7 + 17 = 38$ anys, com cal, aleshores, el problema és resoluble i, a més, aquestes edats són una solució del problema.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per a veure si hi ha més solucions seguirem fent proves amb edats que satisfacen les condicions de la relació d’edats entre cada dues persones i mirarem si la suma dona 38 anys.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Com si l’edat de Josep és 12 anys la suma de les tres edats és menys de 38 anys, no provarem en una edat menor.

L’edat de Josep ha de ser un nombre parell, com que ja hem provat amb 14 anys, provarem ara amb 16 anys, raó per la qual la de Raül seria $16 : 2 = 8$ anys i la de Laura $16 + 3 = 19$ anys.

La suma de les tres edats seria $16 + 8 + 19 = 43$ anys, que és més de 38 anys.

Per tant, no val la pena continuar provant amb edats de Josep majors de 14 anys, perquè la suma de les tres edats seguirà sent major de 38 anys, per això creiem

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

que podem afirmar que només hi ha una solució que complisca les condicions de l'enunciat, la que hem trobat: Josep 14 anys, Raül 7 anys i Laura 17 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí, perquè com hem dit en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, les edats han de ser valors que estiguen al voltant de 13, encara que modificats per algunes de les altres condicions, com és el cas, i, a més, són edats pròpies de persones que són nets.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- Josep té el doble d'edat que Raül? 14 = 7 · 2, aleshores, sí.
- Laura té tres anys més que Josep? 17 – 14 = 3, per tant, sí.
- La suma de les tres edats és 38? 14 + 7 +17 = 38, doncs, sí.

Com veiem que es verifiquen les dades del problema, creiem que està ben resolt.

Problema A.8

En una caixa de la secretaria del Departament d'Educació hi ha 82 bolígrafs blaus, rojos i negres. El nombre de bolígrafs blaus és el doble que el de negres i el de color roig és igual a la tercera part dels negres. Volem demanar una remesa igual per a dotar cadascuna de les secretàries de l'UJI. Calcula la quantitat de bolígrafs de cada color que hem de demanar per a cada secretària.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - En total hi ha 82 bolígrafs entre blaus, rojos i negres.
  - El nombre de bolígrafs blaus és el doble que el de negres.
  - El nombre de bolígrafs rojos és igual a la tercera part dels negres.

- Incògnites:
  - Quantitat de bolígrafs que hi ha de cada color.

B) El problema és resoluble?

Anomenem «A» el nombre de bolígrafs blaus, «N» el nombre de bolígrafs negres i «R» el nombre de bolígrafs rojos, sent A, N i R nombres naturals, aleshores, les dades del problema es tradueixen en el sistema de tres equacions i tres incògnites $\left\{\begin{array}{l} A=2\cdot N \\ R=\frac{1}{3}\cdot N \\ A+N+R=82 \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} A=2\cdot N \\ R=\dfrac{1}{3}\cdot N \\ A+N+R=82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=2N \\ N=3R \\ A+N+R=82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A-2N=0 \\ N-3R=0 \\ A+N+R=82 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A-2N=0 \\ N-3R=0 \\ -3N-R=-82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A-2N=0 \\ 3N-9R=0 \\ -3N-R=-82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A-2N=0 \\ 3N-9R=0 \\ -10R=-82 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A-2N=0 \\ N-3R=0 \\ 10R=82 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, raó per la qual el sistema és resoluble.

Veiem que R, que ha de ser un nombre natural, multiplicat per 10 ha de donar 82, i no hi ha cap nombre natural que en multiplicar-lo per 10 done 82. Per tant, el problema és irresoluble.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - En total hi ha 82 bolígrafs entre blaus, rojos i negres.
  - El nombre de bolígrafs blaus és el doble que el de negres.
  - El nombre de bolígrafs rojos és igual a la tercera part dels negres.

- Incògnites:
  - Quantitat de bolígrafs que hi ha de cada color.

B) El problema és resoluble?

Farem proves amb el nombre de bolígrafs de cada color que satisfacen les condicions de la relació de quantitats entre cada dos colors i mirarem si la suma pot donar 82 bolígrafs, sent, evidentment, la quantitat de bolígrafs de cada color un nombre natural.

Posem aquestes proves en una taula.

Com que el nombre de bolígrafs de color roig és igual a la tercera part dels negres, de bolígrafs negres hauria d'haver-hi el triple que de rojos: de les dues maneres equivalents d'expressar la relació entre els bolígrafs rojos i negres, és més fàcil i còmoda la multiplicativa, de manera que serà la que farem servir, ja que si partim d'una quantitat de vermells (1, 2, 3...) sabrem quants n'hi haurà de negres i com que el nombre de bolígrafs blaus és doble que el de negres, donada una quantitat de bolígrafs rojos sabrem quants de negres hauria d'haver-hi i quants bolígrafs blaus hauria d'haver-hi també; per tant, començarem la taula per la quantitat de bolígrafs rojos i les quantitats dels altres colors les calcularem a partir d'ells.

Rojos	Negres	Blaus	Suma
1	3	6	10
2	6	12	20
3	9	18	30
…	…	…	…
8	24	48	80
9	27	54	90

Veiem que la suma de bolígrafs rojos, negres i blaus en les proporcions de l'enunciat sempre és un múltiple de 10. Per tant, com la quantitat de bolígrafs de cada color ha de ser un nombre natural, la suma no pot ser 82. És a dir, el problema és irresoluble.

2.5. Problemes de geometria plana

Problema B.1

En una taula circular d'1 m i 20 cm d'ample, posem dos cobretaules circulars, el més grans possible, de la mateixa mida, tangents entre ells i amb la vora de la taula. Calcula quanta superfície de la taula queda sense cobrir.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

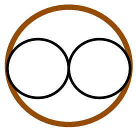
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Una taula circular d'1 m i 20 cm d'ample.
  - Dos cobretaules circulars, el més grans possible, de la mateixa mida, tangents entre ells i amb la vora de la taula.

Ho representem proporcionalment en el següent dibuix:

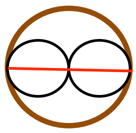


- Incògnites:
  - Quanta superfície de la taula queda sense cobrir.

B) *El problema és resoluble?*

Com sabem la mesura del diàmetre del cercle de la taula, amb dimensions reals o a escala 1:10, per exemple, amb un compàs o programes de geometria dinàmica, podem dibuixar la circumferència que limita el cercle, la vora de la taula.

Com els cobretaules són circulars, el més grans possible, de la mateixa mida, tangents entre ells i amb la vora de la taula, la suma dels seus diàmetres, corresponents al punt de tangència entre ells i als punts de tangència amb la vora de la taula, tenen la mateixa mesura que el diàmetre de la taula, com podem veure en la figura. Per tant, la mesura del diàmetre de cada cobretaula és la meitat de la mesura del diàmetre del cercle de la taula, amb el qual podem dibuixar anàlogament la vora dels cobretaules.



Mitjançant centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, podríem mesurar la superfície del cercle de la taula que no cobreixen els cobretaules, per tant, el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com sabem la mesura del diàmetre del cercle de la taula, 1 m i 20 cm, calculem el radi, que li direm «R».
b) Calculem l'àrea del cercle de la taula, que li direm «A_T».
c) Pel que s'ha explicat en *B) El problema és resoluble?*, a la mesura del radi dels cobretaules li direm «r», que és la meitat de la mesura del radi del cercle de la taula, i aleshores farem el càlcul.
d) Calculem l'àrea del cercle dels cobretaules, que anomenarem «A_C».
e) Finalment, a l'àrea del cercle de la taula li restarem el doble de l'àrea del cercle dels cobretaules, i així obtindrem la mesura de la superfície del cercle de la taula que no cobreixen els cobretaules, que denominarem «A».

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $R = 1{,}20 : 2 = 0{,}60$ m
b) $A_T = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0{,}60^2 = 1{,}1304$ m^2
c) $r = R : 2 = 0{,}60 : 2 = 0{,}30$ m
d) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}30^2 = 0{,}2826$ m^2
e) $A = A_M - 2 \cdot A_C = 1{,}1304 - 2 \cdot 0{,}2826 = 0{,}5652$ m^2

Solució: 0,5652 m^2 és la quantitat de superfície del cercle de la taula que no cobreixen els cobretaules.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí, perquè com podem veure en el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema, la superfície del cercle de la taula que no cobreixen els cobretaules, com a mínim, és tanta com un cobretaula.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, reduirem les dades a la meitat, és a dir, considerem el nou problema: «*En una taula circular de 0,60 m d'ample, posem dos cobretaules circulars, el més grans possible, de la mateixa mida, tangents entre ells i amb la vora de la taula. Calcula quanta superfície de taula queda sense cobrir*». Hem reduït a la meitat una mesura de longitud, d'una magnitud lineal, i la incògnita és la mesura d'una superfície, d'una magnitud quadràtica, esperem per tant, que la nova solució siga la quarta part de la solució inicial: $A = 0{,}5652 : 4 = 0{,}1413$ m^2.

Fem els càlculs necessaris:

a) R = 0,60 : 2 = 0,30 m
b) $A_T = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0{,}30^2 = 0{,}2826$ m²
c) r = R : 2 = 0,30 : 2 = 0,15 m
d) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}15^2 = 0{,}07065$ m²
e) $A = A_T - 2 \cdot A_C = 0{,}2826 - 2 \cdot 0{,}07065 = 0{,}1413$ m²

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament la mateixa, ja que els conceptes i continguts utilitzats són propis dels darrers cursos de l'Educació Primària i la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:10, per exemple, mesuraríem la superfície del cercle de la taula que no cobreixen els cobre-taules mitjançant centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, obtenint una mesura molt aproximada a 56,52 cm^2, que en «desfer l'escala» són els 0,5652 m^2 solució del problema en la 3a fase, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.2

Un castell amb forma de rectangle de 100 m d'ample i doble de llarg, està defensat per un batalló de soldats els fusells dels quals tenen un abast de 100 m. Determina la longitud del contorn de la zona protegida pels soldats i l'àrea d'aquesta zona.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

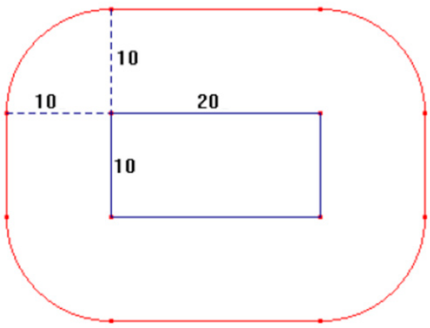
A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un castell amb forma de rectangle de 100 m d'ample i doble de llarg.
  - El castell està defensat per un batalló de soldats els fusells dels quals tenen un abast de 100 m.
- Incògnites:
  - Longitud del contorn de la zona protegida pels soldats.
  - Àrea de la zona protegida.

B) *El problema és resoluble?*

Podem construir/dibuixar el rectangle del castell mitjançant programes de geometria dinàmica o a escala.

Per exemple, cada 10 m en la realitat serà 1 cm en el plànol, escala 1:1000, és a dir, el rectangle tindrà 10 cm d'ample i 20 cm de llarg i, de la mateixa manera, els fusells dels soldats tindran un abast de 10 cm. Tallem un tros de corda de 10 cm de longitud, lliguem un llapis en un dels extrems i, posant l'altre extrem sobre la vora del castell i mantenint la corda tensa i perpendicular als costats del castell, recorrem la vora, marcant així amb el llapis el contorn de la zona sota el control dels soldats.



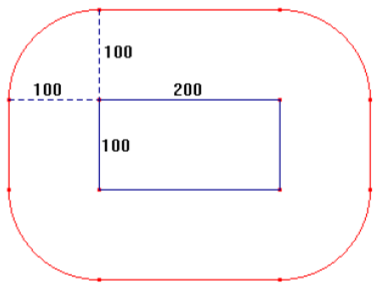
Un vegada marcat el contorn de la zona sota el control dels soldats, podem mesurar-lo, aproximadament, superposant un cordó, que després mesurarem, i la superfície, l'àrea de la zona sota el control dels soldats, que podem recobrir amb decímetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en decímetres quadrats i/o centímetres quadrats, que comptarem. Per tant, el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Amb l'ajuda del dibuix al·lusiu:

a) El contorn del territori sota control dels soldats és la línia vermella del dibuix, formada per dos segments de 200 m, a la part superior i inferior, respectivament, dos segments de 100 m, a la part esquerra i dreta, respectivament, i pels quatre quarts de circumferència, de 100 m de radi, que es formen en els cantons del recinte fortificat. Per tant, per a calcular la mesura del contorn del territori sota control dels soldats, el perímetre «P», hem de sumar les mesures de totes les línies que el formen.



b) Com veiem en el dibuix, tenim el rectangle del recinte del castell (de dimensions 100 m d'ample i 200 m de llarg) i es formen, a la seua part superior i inferior, dos rectangles iguals. A la mesura de la superfície de tots els rectangles l'anomenarem «A_1» i per a obtenir-la calculem l'àrea del rectangle del recinte del castell, que denominarem «A_R», i la multiplicarem per 3.

c) A la dreta i esquerra del recinte del castell es formen dos quadrats amb unes dimensions de 100 m per cada costat. A la mesura de la superfície dels dos quadrats li direm «A_2» i per obtenir-la calculem l'àrea d'un d'aquests quadrats, que anomenarem «A_Q», i la multiplicarem per 2.

d) En cada vèrtex del recinte del castell es forma un quart de cercle de radi de 100 m, que, com els vèrtexs són quatre, completaran un cercle, de manera que calculem l'àrea d'un cercle de radi de 100 m que anomenarem «A_3».

e) La superfície sota el control dels soldats està composta per les superfícies descrites en els tres punts anteriors. Si sumem les tres àrees anteriors tindrem la mesura de la superfície sota el control dels soldats, que anomenarem «A_T». Així, calculem $A_T = A_1 + A_2 + A_3$.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $P = 2 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot \pi \cdot 100 = 400 + 200 + 628{,}32 = 1.228{,}32$ m

b) $A_R = 200 \cdot 100 = 20.000\ m^2 \rightarrow A_1 = 3 \cdot 20.000 = 60.000\ m^2$

c) $A_Q = 100^2 = 10.000\ m^2 \rightarrow A_2 = 2 \cdot 10.000 = 20.000\ m^2$

d) $A_3 = \pi \cdot 100^2 = \pi \cdot 10.000 = 31.415{,}93\ m^2$

e) $A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 60.000 + 20.000 + 31.415{,}93 = 111.415{,}93 \rightarrow$
$\rightarrow A_T = 111.415{,}93\ m^2$

ISBN: 978-84-17900-44-1

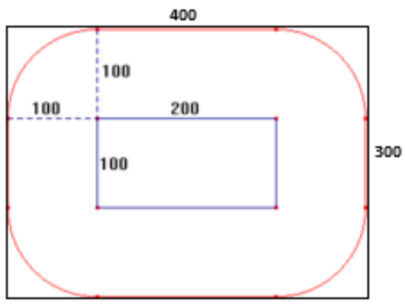
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Solució: longitud del contorn del territori sota control dels soldats: 1.228,32 m; àrea del territori sota control dels soldats: 111.415,93 m^2.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Si ampliem l'ample i el llarg del recinte del castell a 100 m a cada extrem, obtenim un rectangle de 300 m d'ample i 400 m de llarg, més gran que la zona sota control, com podem veure en el dibuix.



El perímetre de la zona sota control dels soldats, 1.228,32 m, és més gran que el perímetre del recinte del castell, 600 m, i més petita que la del rectangle de dimensions, 400 m de llarg i 300 m d'ample: 1.400 m.

També, del dibuix anterior, podem deduir que l'àrea de la zona sota control dels soldats, 111.415,93 m^2, és més gran que l'àrea del recinte del castell, 20.000 m^2, i més petita que la del rectangle de dimensions 300 m d'ample i 400 m de llarg: 120.000 m^2.

Per tant, les solucions són raonables.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució del problema és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», per tant, triem la de duplicar les dades, de manera que el nou problema és: «*Un castell amb forma de rectangle de 200 m d'ample i doble de llarg, està defensat per un batalló de soldats els fusells dels quals tenen un abast de 200 m. Determina la longitud del contorn de la zona protegida pels soldats i l'àrea d'aquesta zona*». Com hem duplicat mesures de longitud, d'una magnitud lineal, la incògnita «longitud del contorn de la zona protegida pels soldats», la mesura d'una longitud, d'una magnitud lineal, esperem, per tant, que la nova solució siga dues vegades la solució inicial: 2 · 1.228,32 m = 2.456,64 m; i la incògnita «àrea de la zona protegida pels soldats», la mesura d'una superfície, d'una magnitud quadràtica, esperem, per tant, que la nova solució siga quatre vegades la solució inicial: 4 · 111.415,93 m^2 = 445.663,72 m^2.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem simplement els càlculs:

a) = 2 · 400 + 2 · 200 + 2 · π · 200 = 800 + 400 + 1.256,64 = 2.456,64 m
b) A_R = 400 · 100 = 80.000 m² → A_1 = 3 · 80.000 = 240.000 m²
c) A_Q = 200^2 = 40.000 m² → A_2 = 2 · 40.000 = 80.000 m²
d) A_3 = π · 200^2 = π · 40.000 = 125.663,71 m²
e) $A_T = A_1 + A_2 + A_3$ = 240.000 + 80.000 + 125.663,71 = 445.663,71 →
→ A_T = 445.663,71 m²

Les dues noves solucions coincideixen amb les estimacions realitzades, per tant, creiem que la solució del problema és correcta.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual, ja que els conceptes i continguts utilitzats són propis dels últims cursos de l'Educació Primària i la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:1000, per exemple, mesuraríem la longitud del contorn de la zona sota el control dels soldats, per exemple, amb un cordó, obtenint una mesura molt aproximada a 122,8 cm, que en «desfer l'escala» serien 1.228 m, que aproximadament són els 1.228,32 m solució del problema.

Anàlogament, mesurarem la superfície, l'àrea de la zona sota el control dels soldats, que podem recobrir amb decímetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en decímetres quadrats i/o centímetres quadrats, que comptem, obtenint 1.114,2 cm², que en «desfer l'escala» serien 111.420 m², que aproximadament són els 111.415,93 m² solució del problema.

Per tant, creiem que la solució del problema és correcta.

Problema B.3

En el disseny de la tapa circular d'un pot s'ha pensat inscriure una etiqueta quadrada. Si la tapa té 10 centímetres de diàmetre, es vol saber l'àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta, per a pintar només eixe tros.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

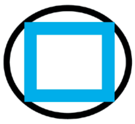
❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - La tapa té forma de cercle i el seu diàmetre és 10 centímetres.
  - L'etiqueta és quadrada i està inscrita en el cercle.

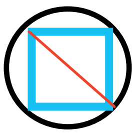
Ho representem proporcionalment en el dibuix següent: 

- Incògnites:
  - L'àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta.

B) *El problema és resoluble?*

Per saber el diàmetre de la part superior de la tapa, del cercle, o de la circumferència que el limita, sabem el radi, per la qual cosa podem dibuixar la circumferència.

Com s'aprecia en el dibuix, el diàmetre de la circumferència és la diagonal del quadrat inscrit, aleshores, podem dibuixar el contorn del quadrat, mitjançant un cartabó o un goniòmetre, o programes de geometria dinàmica, traçant segments que formen 45° amb el diàmetre.



Al tenir físicament la circumferència i el contorn del quadrat inscrit, podem mesurar la superfície del recinte que queda entre una i l'altre, mitjançant centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, raó per la qual el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per a calcular l'àrea de la superfície de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta, que li direm «A», haurem de calcular l'àrea del cercle que és la part superior de la tapa i restar-li l'àrea del quadrat inscrit que és l'etiqueta, per això farem els càlculs següents:

a) Com sabem la mesura del diàmetre de la tapa, li direm «d», en dividir per dos tenim la mesura del radi, que anomenarem «r».
b) Obtenim l'àrea del cercle, que li direm «A_C».
c) Per a calcular l'àrea del quadrat inscrit necessitem la mesura del costat del quadrat, i el designarem «c». El diàmetre del cercle és la diagonal del quadrat inscrit, diagonal que com apreciem en el dibuix forma un triangle rectangle amb dos costats, podem aplicar-hi el teorema de Pitàgores, atés que els dos costats del quadrat són iguals, aleshores, en la igualtat del teorema tenim una dada, la mesura de la hipotenusa, la diagonal, i una incògnita, la mesura del costat.
d) Obtenim l'àrea del quadrat, que nomenarem «A_Q».
e) Restem a l'àrea del cercle l'àrea del quadrat inscrit.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $d = 10\ cm \rightarrow r = d : 2 = 10 : 2 = 5\ cm$
b) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,5\ cm^2$
c) $d^2 = c^2 + c^2 \rightarrow d^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 10^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 100 = 2 \cdot c^2 \rightarrow c^2 = 100 : 2 = 50\ cm^2 \rightarrow$
$\rightarrow c = \sqrt{50} = 7,07\ cm$
d) $A_Q = c^2 = 7,07^2 = 50\ cm^2$
e) $A = A_C - A_Q = 78,5 - 50 = 28,5\ cm^2$

Solució: l'àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta és de $28,5\ cm^2$.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, doncs, com veiem en el dibuix al·lusiu, la superfície de la part superior de la tapa, del cercle, és més gran que la de l'etiqueta, el quadrat inscrit, com ens ha eixit en la fase d'abans.

B) *Comprovar la solució*

Per a afermar la solució aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, duplicarem la dada numèrica, és a dir, considerem el nou

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

problema: «*En el disseny de la tapa circular d'un pot s'ha pensat inscriure una etiqueta quadrada. Si la tapa té 20 centímetres de diàmetre, es vol saber l'àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta, per a pintar només aquest tros*». Hem duplicat una mesura de longitud, d'una magnitud lineal, i la incògnita és la mesura d'una superfície, d'una magnitud quadràtica, esperem, per tant, que la nova solució siga quatre vegades la solució inicial: A = 28,5 · 4 = 114 cm^2.

Fem els nous càlculs.

a) $d = 20\ cm \rightarrow r = d : 2 = 20 : 2 = 10\ cm$
b) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314\ cm^2$
c) $d^2 = c^2 + c^2 \rightarrow d^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 20^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 400 = 2 \cdot c^2 \rightarrow$
$\rightarrow c^2 = 400 : 2 = 200\ cm^2 \rightarrow c = \sqrt{200} = 14{,}14\ cm$
d) $A_Q = c^2 = 14{,}14^2 = 200\ cm^2$
e) $= A_C - A_Q = 314 - 200 = 114\ cm^2$

Veiem que el resultat és l'esperat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❏ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Segons el Decret 108/2014 que estableix el currículum d'Educació Primària, en el 3r curs d'Educació Primària, en el bloc 3: Dibuix geomètric, de l'àrea Educació Artística, trobem el contingut «Construcció de polígons a partir del costat i del radi de la circumferència», cosa que permet la construcció d'alguns polígons regulars, concepte de «Polígons regulars» que apareix en el 4t curs d'Educació Primària en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, segons el mateix decret.

Ambdues referències justifiquen que els conceptes «polígon inscrit en una circumferència o en un cercle» i el de «circumferència circumscrita o cercle circumscrit a un polígon», deuen figurar entre els coneixements de l'alumnat dels cursos 5é i 6é d'Educació Primària.

Considerem que, segons el Decret 108/2014, en el 6é curs d'Educació Primària, en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, pel contingut «Regularitat i simetries: reconeixement de regularitats», criteri d'avaluació BL4.2 «Calcular l'àrea i el perímetre de qualsevol figura plana (en entorns naturals, artístics, arquitectònics, etc.) utilitzant diverses estratègies (fórmules, descomposició, etc.) per a explicar el món que ens rodeja», es pot ensenyar el teorema de Pitàgores en aquest curs, com així fan alguns i algunes mestres, i aplicar-lo per a calcular la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle conegudes les mides dels catets ($h^2 = a^2 + b^2$), el que hem aplicat en la resolució d'aquest problema i alguns altres.

Per tant, creiem que el problema es pot plantejar en 6é curs d'Educació Primària.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

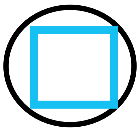
Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*:

- Dades:

  - La tapa té forma de cercle i el seu diàmetre és de 10 centímetres.
  - L'etiqueta és quadrada i està inscrita en el cercle.

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:



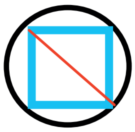
- Incògnites:

  - L'àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta.

B) *El problema és resoluble?*

Per saber el diàmetre de la part superior de la tapa, del cercle o de la circumferència que el limita, sabem el radi, per la qual cosa podem dibuixar la circumferència.

Com s'aprecia en el dibuix, el diàmetre de la circumferència és la diagonal del quadrat inscrit, aleshores, podem dibuixar el contorn del quadrat, mitjançant un cartabó o un goniòmetre, o programes de geometria dinàmica, traçant segments que formen 45° amb el diàmetre.



Al tenir físicament la circumferència i el contorn del quadrat inscrit podem mesurar la superfície del recinte que queda entre una i l'altre, mitjançant centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, i per això creiem que el problema és resoluble.

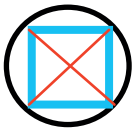
2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per a calcular l'àrea de la superfície de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta, que anomenarem «A», haurem de calcular l'àrea del cercle, que és la

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

part superior de la tapa, i restar-li l’àrea del quadrat inscrit, que és l’etiqueta, i per això farem els càlculs següents:

a) Sabem la mesura del diàmetre de la tapa, que designarem «d», en dividir-la per dos tenim la mesura del radi, que denominarem «r».
b) Obtenim l’àrea del cercle, que anomenarem «A_C».
c) Per a calcular l’àrea del quadrat inscrit necessitem la mesura del costat del quadrat, a la qual designarem «c». Com apreciem en el dibuix, dos radis del cercle formen un triangle rectangle amb un costat del quadrat, podem aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular la mesura del costat.



d) Obtenim l’àrea del quadrat, que anomenarem «A_Q».
e) Restem a l’àrea del cercle l’àrea del quadrat inscrit.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $d = 10 \text{ cm} \rightarrow r = d : 2 = 10 : 2 = 5 \text{ cm}$
b) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$
c) $r^2 + r^2 = c^2 \rightarrow 5^2 + 5^2 = c^2 \rightarrow 25 + 25 = c^2 \rightarrow c^2 = 50 \text{ cm}^2 \rightarrow c = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}$
d) $A_Q = c^2 = 7{,}07^2 = 50 \text{ cm}^2$
e) $A = A_C - A_Q = 78{,}5 - 50 = 28{,}5 \text{ cm}^2$

Solució: l’àrea de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l’etiqueta és de $28{,}5 \text{ cm}^2$.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, perquè com veiem en el dibuix al·lusiu, la superfície de la part superior de la tapa, del cercle, és més gran que la de l’etiqueta, el quadrat inscrit, com ens ha eixit en la fase d’abans.

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d’una altra manera», en concret, experimentalment.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema, mesuraríem la superfície de la part superior de la tapa que queda sense cobrir per l'etiqueta mitjançant centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, obtenint una mesura molt aproximada a 28,5 cm^2, solució del problema obtinguda en la 3a fase, per això pensem que el problema està ben resolt.

Problema B.4

En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula circular d'1 metre de radi sobre la qual han posat un cobretaula quadrat, que centrat en la taula és tangent a la seua vora. Calcula la mesura de la diagonal del cobretaula.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

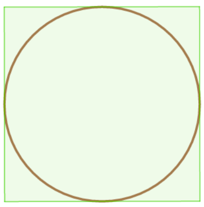
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - El radi de la taula circular és d'1 metre.
  - El cobretaula és quadrat i tangent a la vora de la taula.

Ho representem proporcionalment en el següent dibuix:



- Incògnites:
  - La mesura de la diagonal del cobretaula.

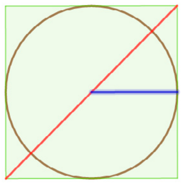
B) El problema és resoluble?

Podem construir o fer el dibuix al·lusiu mitjançant programes de geometria dinàmica o a escala.

Si, per exemple, triem l'escala 1:10, 10 cm en el dibuix equivaldran a 1 m en la realitat.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Aleshores, amb un compàs o amb una corda i un llapis, amb un radi de 10 cm, podem dibuixar la circumferència que és la vora de la taula i mitjançant un regle i un escaire o cartabó el contorn del quadrat, tangent al cercle que és la taula.

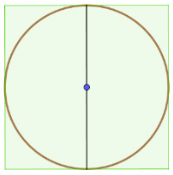


Així doncs, podrem mesurar la diagonal del quadrat, per tant, el problema és resoluble.

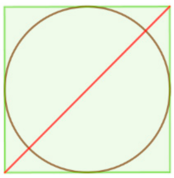
2a FASE: ELABORAR UN PLA

A partir del dibuix al·lusiu:

a) Veiem que el diàmetre del cercle, que és el doble del radi, té la mateixa longitud que el costat del quadrat (l'anomenarem «c»), per tant, sabem les dimensions del cobretaula.



b) Pel teorema de Pitàgores podem calcular la mesura de la diagonal del cobretaula quadrat (l'anomenarem «d»), ja que dos costats consecutius del quadrat i la diagonal del quadrat que uneix els extrems, no comuns, d'aquests costats, formen un triangle rectangle, del qual coneixem els dos catets (costats del quadrat) i desconeixem la hipotenusa (diagonal del quadrat).



3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $r = 1 \text{ m} \rightarrow c = 2 \cdot r = 2 \text{ m}$
b) Utilitzem el t. de Pitàgores: $d^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8} \text{ m} = 2{,}82 \text{ m}$

Per tant, la solució és: la diagonal del cobretaula mesura 2,82 m.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

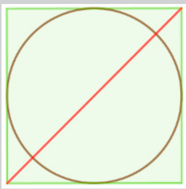
La mesura de la diagonal és més gran que la del costat del quadrat i més petita que la suma de les dimensions de dos costats, per tant, és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la longitud de la diagonal del cobretaula (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem quant mesura el radi de la taula (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent «*En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula circular sobre la qual han posat un cobretaula quadrat, que centrat en la taula és tangent a la seua vora i que té per diagonal 2,82 m. Quina és la mesura del radi de la taula?*». Esperem que el resultat siga 1 m.

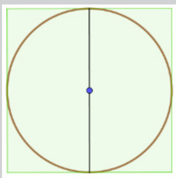
Fem els càlculs:

Pel teorema de Pitàgores, podem calcular la mesura del costat del cobretaula (l'anomenarem «c»), ja que dos costats consecutius del quadrat i la diagonal del quadrat que uneix els extrems, no comuns, d'aquests costats, formen un triangle rectangle del qual coneixem la hipotenusa (diagonal del quadrat) i desconeixem els dos catets (costats del quadrat) que mesuren el mateix.



$d^2 = c^2 + c^2 = 2\ c^2 \rightarrow 2{,}82^2 = 2\ c^2 \rightarrow 8 = 2\ c^2 \rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = 2$ m

Com el costat del cobretaula mesura el mateix que el diàmetre de la taula, podem calcular el seu radi dividint la longitud del costat del cobretaula entre 2:



$2 \cdot r = 2$ m $\rightarrow r = 1$ m, que és el valor esperat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària i la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

> Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:10, per exemple, mesuraríem la longitud de la diagonal del cobretaula mitjançant un regle, obtenint una mesura molt aproximada a 28,2 cm, que al «desfer l'escala» són els 2,82 m solució del problema, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.5

En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula rectangular d'1,20 metres per 0,80 metres posant-li un tapet circular que, centrat en la taula, arriba just als seus quatre cantons. Calcula els metres quadrats de tapet que penja, que sobresurt, de la taula.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

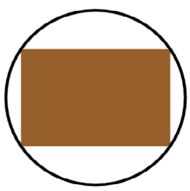
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Les dimensions de la taula rectangular són 1,20 metres per 0,80 metres.
  - o El tapet és un cercle que està circumscrit al rectangle.

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:

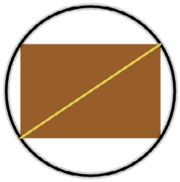


ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - Els metres quadrats de tapet que penja, que sobresurt, de la taula, és a dir, l'àrea de la part del tapet que penja.

B) El problema és resoluble?

Sí, perquè amb dimensions reals o a escala (1:10, per exemple), amb un escaire o un cartabó, o programes de geometria dinàmica, podem dibuixar el rectangle. La diagonal és el diàmetre del cercle circumscrit, aleshores podem mesurar-la, i al dividir-la per dos obtindrem la mesura del radi del cercle, amb què podrem dibuixar la circumferència, la vora del cercle.



Mitjançant centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, podríem mesurar la superfície del cercle i del rectangle, sent la diferència de les dues àrees l'àrea de la part del tapet que penja. Finalment, transformaríem aquesta mesura a metres quadrats («desfem l'escala»).

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) A partir del dibuix al·lusiu, veiem que la diagonal del rectangle és el diàmetre del cercle circumscrit, aleshores pel teorema de Pitàgores calcularem la mesura de la diagonal, que denominarem «d».

b) Com hem dit abans, la meitat serà la mesura del radi del cercle, que anomenarem «r», amb què calcularem l'àrea del cercle circumscrit, a la qual li direm «A_C».

c) Calcularem també l'àrea del rectangle, que denominarem «A_R», multiplicant les seues dimensions.

d) Restarem l'àrea del rectangle a l'àrea del cercle circumscrit i obtindrem l'àrea de la part del tapet que penja, que anomenarem «A», és a dir, la quantitat de tapet que sobresurt de la taula.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $d^2 = 1{,}2^2 + 0{,}8^2 = 1{,}44 + 0{,}64 = 2{,}08 \text{ m}^2$; $d = \sqrt{2{,}08} = 1{,}44 \text{ m}$

b) $r = \dfrac{1{,}44}{2} = 0{,}72 \text{ m}$

$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0{,}72)^2 = 0{,}52\pi = 1{,}63 \text{ m}^2$

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

c) $A_R = 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96\ m^2$
d) $A = A_C - A_R = 1{,}63 - 0{,}96 = 0{,}67\ m^2$

Solució: la quantitat de tapet que penja, que sobresurt, de la taula, és de 0,67 m^2.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Com podem veure en el dibuix al·lusiu, la superfície del cercle, del tapet, és més gran que la del rectangle de la taula, fet que també passa amb les respectives àrees, 1,63 m^2 i 0,96 m^2, així doncs, la solució és raonable.

B) Comprovar la solució

Per a afermar la solució, utilitzem el mètode «canviar les dades proporcionalment», de manera que dupliquem les mesures dels costats del rectangle, aleshores el nou problema seria: «*En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula rectangular de 2,40 metres per 1,60 metres posant-li un tapet circular, que centrat en la taula arriba just als quatre cantons. Calcula la quantitat de tapet que penja, que sobresurt, de la taula*». Com l'àrea és una magnitud quadràtica i les dades duplicades són d'una magnitud lineal, estimem que la nova solució serà quatre vegades major, és a dir, $4 \cdot 0{,}67 = 2{,}68\ m^2$.

Fem els càlculs:

a) $d^2 = 2{,}4^2 + 1{,}6^2 = 5{,}76 + 2{,}56 = 8{,}32\ m^2$; $d = \sqrt{8{,}32} = 2{,}88\ m$
b) $r = \dfrac{2{,}88}{2} = 1{,}44\ m.$
$A_C = \pi \cdot (1{,}44)^2 = 2{,}08\pi = 6{,}53\ m^2$
c) $A_R = 2{,}4 \cdot 1{,}6 = 3{,}84\ m^2$
d) $A = A_C - A_R = 6{,}53 - 3{,}84 = 2{,}69\ m^2$

Que és, aproximadament, el valor de l'estimació realitzada, de manera que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Com hem justificat en el problema B.3, els conceptes de polígon inscrit, cercle circumscrit i la utilització del teorema de Pitàgores deuen figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària, per la qual cosa, creiem que el problema es pot plantejar en aquest nivell escolar.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Aleshores, la resolució és pràcticament la mateixa, la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:10, per exemple, mesuraríem la superfície de tapet que penja de la taula mitjançant centímetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, i obtendríem una mesura molt aproximada a 67 cm^2, que al «desfer l'escala» són els 0,67 m^2 solució del problema en la 3a fase, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.6

En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula rectangular sobre la qual han posat un tapet circular de 10 decímetres de diàmetre que, centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons. Calcula les dimensions de la taula sabent que l'ample és 3/4 de la llargària.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

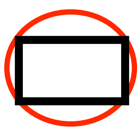
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Una taula rectangular.
  - Un tapet circular de 10 dm de diàmetre, que centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons.
  - En les dimensions de la taula, l'ample és 3/4 de la llargària.

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:



ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

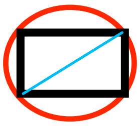
- Incògnites:

  - Les dimensions de la taula.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «a» a la mesura de l'amplària de la taula i «b» a la mesura de la llargària, la condició que lliga les dimensions de la taula es pot expressar per l'equació: $a = (3/4) \cdot b$.

Com el tapet circular està centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons, com es veu en el dibuix, aleshores, la mesura de la diagonal del rectangle de la taula coincideix amb la del diàmetre del tapet, 10 dm.



Dos costats contigus del rectangle juntament amb la diagonal que uneix els seus extrems no coincidents, determina un triangle rectangle, i pel teorema de Pitàgores ho expressem per mitjà de l'equació: $10^2 = a^2 + b^2$.

Per tant, les dades del problema es tradueixen en un sistema de dues incògnites amb dues equacions $\left\{\begin{matrix} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}\right\}$.

La representació gràfica, en dues dimensions, de la primera equació és una recta que passa per l'origen de coordenades i, la de la segona equació, és una circumferència centrada en l'origen de coordenades i radi 10, raó per la qual ambdues figures es tallaran en dos punts, que seran les solucions del sistema d'equacions, per tant el sistema és resoluble, i aleshores creiem que, possiblement, el problema també és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$$\left\{\begin{matrix} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow 10^2 = \left[\left(\frac{3}{4}\right) \cdot b\right]^2 + b^2 = \left(\frac{3b}{4}\right)^2 + b^2 = \frac{9b^2}{16} + b^2 =$$

$$= \frac{9b^2 + 16b^2}{16} = \frac{25b^2}{16} \rightarrow 100 = \frac{25b^2}{16} \rightarrow b^2 = \frac{100 \cdot 16}{25} = 64 \rightarrow b = 8$$

$$\left\{\begin{matrix} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ b = 8 \end{matrix}\right\} \rightarrow a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6$$

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\}$ està ben resolt:

$$\left\{\begin{array}{c} a = 6;\ \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6 \\ a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 \end{array}\right\}.$$

Per tant, solució: l'amplària de la taula és de 6 decímetres, la llargària de 8 decímetres.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

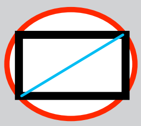
Les mesures dels costats de la taula són menors que la de la seua diagonal, per això creiem que les solucions, les dimensions de la taula, són raonables.

B) *Comprovar la solució*

Apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i recíprocament», de manera que suposem que coneixem les dimensions de la taula (eren incògnita i passen a ser dada en el nou problema) i calcularem el diàmetre del tapet (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*En un restaurant, per la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula rectangular de 8 dm de llargària i 6 dm d'amplària. La cobreix un tapet circular, que centrat en la taula, la seua vora arriba just als quatre cantons d'aquesta. Quina mesura té el diàmetre del tapet circular? Quina és la proporció entre l'ample i el llarg de la taula?*». Esperem que el tapet circular tinga 10 decímetres de diàmetre i que la proporció siga 3/4.

Fem els càlculs necessaris:

Amb el tapet circular centrat en la taula, la seua vora arriba just als quatre cantons d'aquesta, la diagonal del rectangle de la taula coincidirà amb un diàmetre del tapet (d), com es veu en el dibuix.



Dos costats contigus del rectangle juntament amb la diagonal que uneix els seus extrems no coincidents, determina un triangle rectangle; pel teorema de Pitàgores tenim: $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, aleshores d = 10 dm, com esperàvem.

La proporció entre l'ample i el llarg de la taula és: $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$, com esperàvem.

Per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores deu figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària, per la qual cosa creiem que el problema es pot plantejar en aquest nivell escolar.

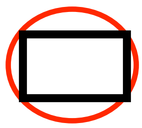
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - Una taula rectangular.
    - Un tapet circular de 10 dm de diàmetre, que centrat en la taula, la seua vora arriba just als quatre cantons d'aquesta.
    - En les dimensions de la taula, l'ample és 3/4 de la llargària.

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:

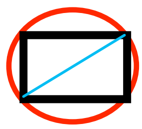


- Incògnites:
    - Les dimensions de la taula.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «a» a la mesura de l'amplària de la taula i «b» a la mesura de la llargària, tenim: «a és 3/4 de b».

Com el tapet circular està centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons, com es veu en el dibuix, aleshores, la mesura de la diagonal del rectangle de la taula coincidirà amb la del diàmetre del tapet, 10 dm.



Dos costats contigus del rectangle juntament amb la diagonal que uneix els seus extrems no coincidents, determina un triangle rectangle, que pel teorema de Pitàgores ho podem expressar per la igualtat: $a^2 + b^2 = 10^2$.

Farem proves amb mesures que satisfacen les condicions de la relació entre les dimensions de la taula i mirarem si la suma dels seus quadrats pot donar 10

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

al quadrat, com estableix el teorema de Pitàgores. Ho apuntarem en una taula per a visualitzar-ho millor.

Com l'amplària és de 3/4 de la llargària, començarem donant valors a la llargària. Si la suma dels quadrats de dos nombres ha de ser 10 al quadrat, els dos han de ser menors de 10, per això comencem provant que la llargària siga de 9 decímetres.

LLARGÀRIA: «b»	AMPLÀRIA: «a» a és 3/4 de b	a^2; b^2	$a^2 + b^2 = 10^2$?
9	a = (3/4) · 9 = 6,75	45,56; 81	45,56 + 81 = 126,56 > 100
7	a = (3/4) · 7 = 5,25	27,56; 49	27,56 + 49 = 76,56 < 100

De la taula de valors deduïm que si les mesures de la taula rectangular foren 9 dm i 6,75 dm, la diagonal del rectangle, i per tant, el diàmetre del tapet, mesuraria més de 10 dm, mentre que si les dimensions de la taula rectangular foren 7 dm i 5,25 dm, el diàmetre del tapet mesuraria menys de 10 dm; per consegüent, podem pensar que hi haurà unes mesures de la taula rectangular per a les quals el diàmetre del tapet mesuraria 10 dm, aleshores el problema seria resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Considerant les dades del problema, continuarem provant amb mesures de la llargària entre 9 i 7 dm, tractant de trobar les dimensions de la taula rectangular que fan que el diàmetre del tapet mesure 10 dm.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Com la llargària de la taula deu estar entre 9 i 7 dm, començarem provant en 8 dm i, segons els resultats provarem amb 8,5 o 7,5 dm, per agafar nombres el més arrodonits possible.

LLARGÀRIA: «b»	AMPLÀRIA: «a» a és 3/4 de b	a^2; b^2	$a^2 + b^2 = 10^2$?
8	a = (3/4) · 8 = 6	36; 64	$36 + 64 = 100 = 10^2$
8,5	a = (3/4) · 8,5 = 6,37	40,64; 72,25	40,64 + 72,25 = = 112,89 > 100
7,5	a = (3/4) · 7,5 = 5,62	27,56; 56,25	27,56 + 56,25 = = 87,89 < 100

Veiem que 8 dm de llargària i 6 dm d'amplària és solució del problema i que, amb valors per a la llargària majors de 8 dm (9 dm, 8,5 dm) el diàmetre del tapet supera els 10 dm, mentre que amb valors per a la llargària menors de 8 dm (7 dm, 7,5 dm) el diàmetre del tapet és menor de 10 dm.

Per tant, l'única solució del problema és: amplària de la taula rectangular 6 decímetres, llargària 8 decímetres.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Les mesures dels costats de la taula rectangular són menors que la de la seua diagonal, per això creiem que les solucions, les dimensions de la taula, són raonables.

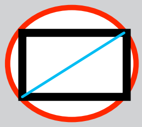
B) *Comprovar la solució*

Apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem les dimensions de la taula (eren incògnita i passen a ser dada en el nou problema) i calcularem el diàmetre del tapet (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema «*En un restaurant, per a la Nit de Cap d'Any, han preparat una taula rectangular de 8 dm de llargària i 6 dm d'amplària. La cobreix un tapet circular, que centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons. Quina mesura té el diàmetre del tapet circular? Quina és la proporció entre l'ample i el llarg de la taula?*». Esperem que tinga 10 decímetres de diàmetre i que la proporció siga 3/4.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs necessaris:

Com el tapet circular està centrat en la taula, la seua vora arriba just als seus quatre cantons, de manera que la diagonal del rectangle de la taula coincidirà amb un diàmetre del tapet (d), com es veu en el dibuix.



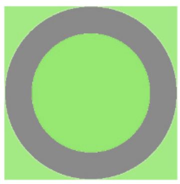
Dos costats contigus del rectangle juntament amb la diagonal que uneix els seus extrems no coincidents, determinen un triangle rectangle, i pel teorema de Pitàgores tenim: $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, aleshores d = 10 dm, com esperàvem.

La proporció entre l'ample i el llarg de la taula és: $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$, com esperàvem.

Per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.7

En el poble, una plaça de nova creació, quadrada de 70,71 metres de diagonal, es vol urbanitzar segons mostra la figura. La zona de color gris, de 8 metres d'ample, serà de llambordes, i les zones de color verd seran enjardinades. El pressupost és de 60 € per cada metre quadrat de zona enjardinada i 50 € per cada metre quadrat de zona empedrada. Quant costarà la urbanització de la plaça?



❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - La figura representació de la plaça.
  - La diagonal de la plaça quadrada mesura 70,71 m.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- La zona enjardinada (la més fosca) són els 4 cantons i el cercle central.
- La zona empedrada (la més clara) té 8 m d'ample.
- Cada metre quadrat de la zona enjardinada costa 60 €.
- Cada metre quadrat de la zona empedrada costa 50 €.

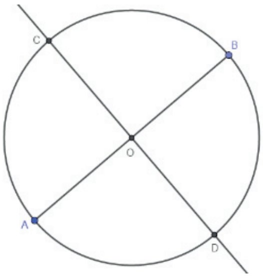
• Incògnites:

- Cost de la urbanització de la plaça.

B) *El problema és resoluble?*

Podem fer un dibuix a escala prenent com a unitat de mesura el mil·límetre, és a dir, 1 mil·límetre en el dibuix és 1 metre de la realitat (escala 1:1000).

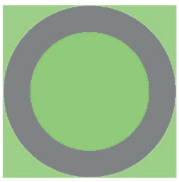
Com coneixem la mesura de la diagonal del quadrat, dibuixem amb escaire i cartabó o programes de geometria dinàmica, un segment «AB» que mesure aproximadament 70,71 mm. A continuació tracem la seua mediatriu i anomenem «O» el punt de tall.



Per a dibuixar l'altra diagonal del quadrat, com 70,71 mm : 2 = 35,35 mm, amb el compàs i una obertura de 35,35 mm, aproximadament, amb centre en el punt O, tracem una circumferència que tallarà la mediatriu en els punts «C» i «D». Ja tenim l'altra diagonal, CD.

Unim els punts A, B, C, D i formem el contorn del quadrat, quadrat que anomenarem «Q».

Dibuixem ara la circumferència inscrita en aquest quadrat que denominarem «C_i», i que, com podem veure en el dibuix al·lusiu de la plaça, tindrà com a mesura del radi la meitat de la mida del costat del quadrat i per centre, el punt O.



Tracem una altra circumferència concèntrica amb C_i, de radi 8 mm menor.

Ja tenim el dibuix a escala de la plaça del poble. La zona compresa entre ambdues circumferències correspon a una corona circular i és la zona de llambordes, empedrada, la resta del quadrat és la zona enjardinada.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A continuació, podem mesurar aquestes superfícies amb centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats de tela o de paper, o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, i transformar aquestes mesures a metres quadrats, «desfem l'escala», després multiplicarem cadascuna d'elles pel seu cost per metre quadrat i sumarem els dos resultats obtinguts. Així calcularem el cost aproximat de la urbanització de la plaça.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com coneixem la mesura de la diagonal del quadrat que forma la plaça, li direm «d», podem calcular la mesura del costat de la plaça, que anomenarem «c», fent servir el teorema de Pitàgores: $c^2 + c^2 = d^2$.

b) Podem veure, en el dibuix al·lusiu a la plaça, que la mesura del radi de la circumferència inscrita, C_i, és la meitat de la mesura del costat, que denominarem «R», $R = \frac{c}{2}$.

Com la zona empedrada té 8 m d'ample, la mesura del radi de la circumferència concèntrica interior, que anomenarem «r», és 8 m menys que el radi de C_i.

c) Aquestes dues circumferències limiten la zona de llambordes, amb forma de corona circular, a la qual direm «CC». Procedirem a calcular la seua àrea, «A_{CC}», restant a l'àrea del cercle associat a la circumferència inscrita l'àrea del cercle associat a la circumferència concèntrica interior: $A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$.

d) Calculem l'àrea del quadrat Q, que anomenarem «A_Q»: $A_Q = c^2$.

e) Del dibuix al·lusiu a la plaça podem deduir que, de la zona enjardinada, «ze», l'àrea, «A_{ze}», s'obté restant a l'àrea del quadrat l'àrea de la corona circular: $A_{ze} = A_Q - A_{CC}$.

f) Obtenim el cost d'empedrar la corona circular, al qual denominarem «$Cost_{CC}$», multiplicant la seua àrea pel preu del metre quadrat, i obtenim el cost d'enjardinar la resta de la plaça, «$Cost_{ze}$», multiplicant la seua àrea pel preu del metre quadrat.

g) Finalment, sumarem ambdós resultats per a obtenir el cost total de la urbanització, que denominarem «$Cost_T$».

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Pel teorema de Pitàgores:

$$c^2 + c^2 = d^2 \rightarrow 2c^2 = (70{,}71)^2 \rightarrow c^2 = \frac{5.000}{2} = 2.500 \rightarrow c = \sqrt{2.500} = 50 \text{ m}$$

b) Calculem els radis de les circumferències concèntriques:

$$R = \frac{c}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m} \rightarrow r = R - 8 = 25 - 8 = 17 \text{ m}$$

c) Ara calculem l'àrea de la corona circular formada, que és la superfície a empedrar:

$$A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 17^2 = 1.055{,}57 \text{ m}^2$$

d) L'àrea del quadrat és: $A_Q = c^2 = 50^2 = 2.500 \text{ m}^2$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

e) Calculem l'àrea de la zona enjardinada:

$A_{ze} = A_Q - A_{CC} = 2.500 - 1.055{,}57 = 1.444{,}43\ m^2$

f) El cost de cada zona de la plaça és:

$Cost_{CC} = 1.055{,}57 \cdot 50 = 52.778{,}50$ €; $Cost_{ze} = 1.444{,}43 \cdot 60 = 86.665{,}80$ €

g) El cost total de la plaça és:

$Cost_T = 52.778{,}50 + 86.665{,}80 = 139.444{,}30$ €

Solució: la urbanització de la plaça costarà 139.444,30 € .

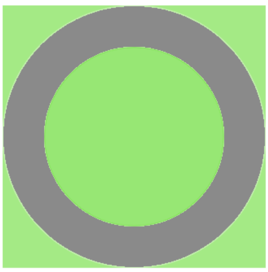
4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

La plaça que té 2.500 m² de superfície, si haguérem d'urbanitzar-la tota al preu de 50 €/m², costaria 125.000 €. Per altra banda, si tota la urbanització fora a 60 €/m², costaria 150.000 €. Evidentment, el cost real d'urbanitzar la plaça on una part és a 50 €/m² i una altra part és a 60 €/m², haurà de ser un cost entre 125.000 i 150.000 €, com és el cas que ens ocupa (139.444 €), per això la solució del problema és raonable.

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, elegim la de «canvi de dada per incògnita i viceversa». Suposem que coneixem el cost d'urbanitzar la plaça (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem quant s'ha pagat per cada metre quadrat de zona enjardinada (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, l'enunciat del nou problema és: «*En el poble, una plaça de nova creació, quadrada de 70,71 metres de diagonal, es vol urbanitzar segons mostra la figura. La zona de color gris, de 8 metres d'ample, serà de llambordes, i les zones de color verd seran enjardinades. S'ha pagat 50 € per cada metre quadrat de zona empedrada i la urbanització total de la plaça ha costat 139.444,30 €. Quant s'ha pagat per cada metre quadrat de zona enjardinada de la plaça?*». Esperem que el preu del metre quadrat de zona enjardinada haja sigut de 60 €.



ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs necessaris:

Com que totes les dades de la plaça i les figures considerades en ella són les mateixes que en el problema original, podem aprofitar algun dels resultats obtinguts en la 3a fase, com per exemple les mesures de diferents figures. Aleshores, sabem també el cost de la zona de llambordes, 52.778,50 €.

Coneixem el cost total, 139.444,30 €, per això el cost de la zona enjardinada, $Cost_{ze}$, serà la diferència del total i de la zona empedrada: 139.444,30 € – – 52.778,50 € = 86.665,80 €.

Com s'ha dit dos paràgrafs més amunt, sabem quant mesura la zona enjardinada, 1.444,43 m^2, per tant, el preu del metre quadrat de zona enjardinada serà: 86.665,80 € : 1.444,43 m^2 = 60 €/m^2.

Que coincideix amb el valor esperat, aleshores, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució seria molt semblant a la de l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores deu figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària i, segons el Decret 108/2014, en el 6é curs d'Educació Primària, en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, pel contingut «Formes planes. Construcció i reproducció», criteri d'avaluació BL4.1 «Reproduir i classificar figures de l'entorn (natural, artístic, arquitectònic, etc.) basant-se en alguna de les seues propietats, amb els recursos apropiats (cinta mètrica, fotografies, programes de geometria dinàmica, etc.), utilitzant el vocabulari adequat per a explicar el món que ens rodeja», probablement sols hauríem d'introduir la denominació de la figura geomètrica «corona circular», atés que el concepte forma part del bagatge cultural de l'alumnat d'aquesta etapa educativa, per la qual cosa, creiem que el problema es pot plantejar en aquest nivell escolar.

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites:

- Dades:
  - La figura representació de la plaça.
  - La diagonal de la plaça quadrada mesura 70,71 m.
  - La zona enjardinada (la més fosca) són els quatre cantons i el cercle central.
  - La zona empedrada (la més clara) té 8 m d'ample.
  - Cada metre quadrat de la zona enjardinada costa 60 €.
  - Cada metre quadrat de la zona empedrada costa 50 €.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

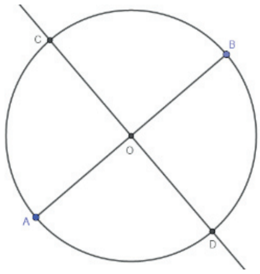
- Incògnites:

    - Cost de la urbanització de la plaça.

B) *El problema és resoluble?*

Podem fer un dibuix a escala prenent com a unitat de mesura el mil·límetre, és a dir, 1 mil·límetre en el dibuix és 1 metre de la realitat (escala 1:1000).

Com coneixem la mesura de la diagonal del quadrat, dibuixem amb escaire i cartabó, o programes de geometria dinàmica, un segment «AB» que mesure aproximadament 70,71 mm. A continuació tracem la seua mediatriu i anomenem «O» el punt de tall.

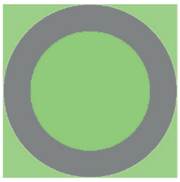


Per a dibuixar l'altra diagonal del quadrat, com 70,71 mm : 2 = 35,35 mm, amb el compàs i una obertura de 35,35 mm, aproximadament, amb centre en el punt O, tracem una circumferència que tallarà la mediatriu en els punts «C» i «D». Ja tenim l'altra diagonal, CD.

Unim els punts A, B, C, D i formem el contorn del quadrat, quadrat que li direm «Q».

Dibuixem ara la circumferència inscrita en aquest quadrat que denominarem «Ci», i que, com podem veure en el dibuix al·lusiu a la plaça, tindrà com a mesura del radi la meitat de la mida del costat del quadrat i per centre, el punt O.

Tracem una altra circumferència concèntrica amb C_i, de radi 8 mm menor.



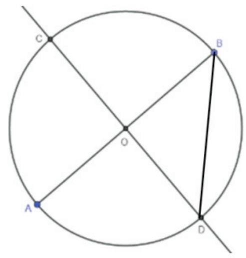
Ja tenim el dibuix de la plaça del poble a escala. La zona compresa entre ambdues circumferències correspon a una corona circular i és la zona de llambordes, empedrada, la resta del quadrat és la zona enjardinada.

A continuació, podem mesurar aquestes superfícies amb centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats de tela o de paper, o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, i transformar aquestes mesures a metres quadrats, «desfem l'escala», després multiplicarem cadascuna d'elles pel seu cost per metre quadrat i sumarem els dos resultats obtinguts. Així calcularem el cost aproximat de la urbanització de la plaça.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com coneixem la mesura de la diagonal del quadrat que forma la plaça, que denominarem «d», podem calcular la mesura del costat de la plaça, que anomenarem «c», fent servir el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle BOD, ja que la mesura dels seus costats $\overline{BO}$ i $\overline{DO}$ és la meitat de 70,71 mm (35,35 mm) i la hipotenusa $\overline{BD}$ és el costat del quadrat, mesura que, per tant, podem calcular: $35{,}35^2 + 35{,}35^2 = c^2$.



b) Podem veure, en el dibuix al·lusiu a la plaça, que la mesura del radi de la circumferència inscrita, C_i, és la meitat de la mesura del costat, que denominarem «R», $R = \frac{c}{2}$.
Com la zona empedrada té 8 m d'ample, la mesura del radi de la circumferència concèntrica interior, denominada «r», és 8 m menys que el radi de C_i.

c) Aquestes dues circumferències limiten la zona de llambordes, amb forma de corona circular, a la qual direm «CC». Procedirem a calcular la seua àrea, «A_{CC}», restant a l'àrea del cercle associat a la circumferència inscrita l'àrea del cercle associat a la circumferència concèntrica interior: $A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

d) Calculem l'àrea del quadrat Q, que anomenarem «A_Q»: $A_Q = c^2$.

e) Del dibuix al·lusiu de la plaça podem deduir que, de la zona enjardinada, «ze», l'àrea, «A_{ze}», s'obté restant a l'àrea del quadrat l'àrea de la corona circular: $A_{ze} = A_Q - A_{cc}$.

f) Obtenim el cost d'empedrar la corona circular, al qual denominarem «$Cost_{CC}$», multiplicant la seua àrea pel preu del metre quadrat, i obtenim el cost d'enjardinar la resta de la plaça, «$Cost_{ze}$», multiplicant la seua àrea pel preu del metre quadrat.

g) Finalment, sumarem ambdós preus per a obtenir el cost total de la urbanització, que denominarem «$Cost_T$».

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Pel teorema de Pitàgores en el triangle rectangle BOD:
$35{,}35^2 + 35{,}35^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 1.250 + 1.250 = 2.500 \rightarrow c = \sqrt{2.500} = 50$ m

b) Calculem els radis de les circumferències concèntriques:
$R = \frac{c}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m} \rightarrow r = R - 8 = 25 - 8 = 17 \text{ m}$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

c) Ara calculem l'àrea de la corona circular formada, que és la superfície a empedrar:
$A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 17^2 = 1.055{,}57\ m^2$

d) L'àrea del quadrat és: $A_Q = c_2 = 50^2 = 2.500\ m^2$

e) Calculem l'àrea de la zona enjardinada:
$A_{ze} = A_Q - A_{CC} = 2.500 - 1.055{,}57 = 1.444{,}43\ m^2$

f) El cost de cada zona de la plaça és:
$Cost_{CC} = 1.055{,}57 \cdot 50 = 52.778{,}50$ €; $Cost_{ze} = 1.444{,}43 \cdot 60 = 86.665{,}80$ €

g) El cost total de la plaça és:
$Cost_T = 52.778{,}50 + 86.665{,}80 = 139.444{,}30$ €

Per tant, la urbanització de la plaça costarà 139.444,30 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Si haguérem d'urbanitzar tota la plaça, que té 2.500 m^2 de superfície, al preu de 50 €/m^2, costaria 125.000 €. Per altra banda, si tota la urbanització fora a 60 €/m^2, costaria 150.000 €. Evidentment, el cost real d'urbanitzar la plaça on una part és a 50 €/m^2 i una altra part és a 60 €/m^2, haurà de ser un cost d'entre 125.000 i 150.000 €, com és el cas que ens ocupa (139.444 €), per això la solució del problema és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:1000, mesuraríem les superfícies amb centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats de tela o de paper, o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, obtenint, aproximadament, 1.055 mm^2 per a la corona circular i 1.444 mm^2 per a la zona enjardinada, transformaríem aquestes mesures a metres quadrats, «desfem l'escala», 1.055 m^2 i 1.444 m^2, respectivament.

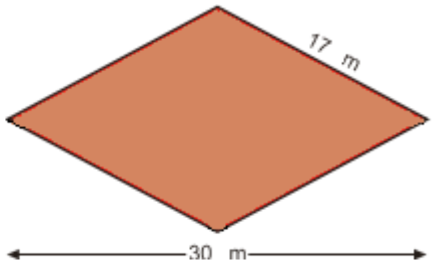
Per tant, el cost de la urbanització de la plaça és:

1.055 $m^2 \cdot$ 50 €/m^2 + 1.444 $m^2 \cdot$ 60 €/m^2 = 52.750 € + 86.640 € = 139.390 €, aproximadament els 139.444,30 € que havíem obtingut en la 3a fase; aleshores podem pensar que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema B.8

En la urbanització d'una zona d'ampliació de la ciutat conflueixen quatre carrers que formen un rombe com el que s'indica en la figura adjunta. La Regidoria d'Urbanisme dubta entre simplement asfaltar la superfície romboïdal o fer una rotonda formada per una zona central enjardinada, que seria, un cercle el diàmetre del qual seria la diagonal menor del rombe, i la zona asfaltada estaria limitada per la circumferència el diàmetre de la qual seria la diagonal major del rombe, de manera que volen esbrinar els metres quadrats a asfaltar en cadascuna de les dues opcions. Calcula la quantitat de metres quadrats que cal asfaltar en els dos casos.



❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

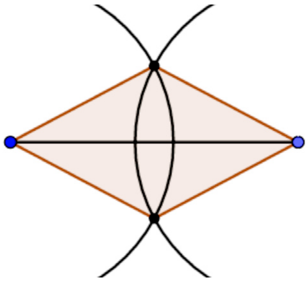
- Dades:
  - o Rombe de 17 m de costat i 30 m de diagonal major.
  - o Rotonda formada per una zona central enjardinada, és a dir, un cercle el diàmetre del qual seria la diagonal menor del rombe.
  - o La zona asfaltada de la rotonda estaria limitada per la circumferència el diàmetre de la qual seria la diagonal major del rombe.
- Incògnites:
  - o o L'àrea, en metres quadrats, del rombe i de la zona asfaltada de la rotonda.

B) *El problema és resoluble?*

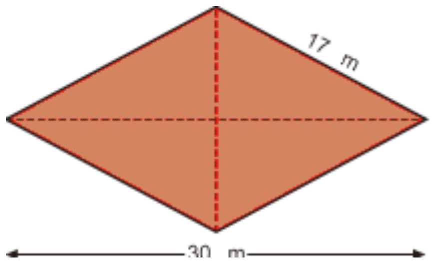
Podem fer un dibuix amb programes de geometria dinàmica o a escala. Per exemple, a escala 1:100; per tant, 1 cm en el dibuix correspondrà a 1 m en la realitat.

Amb el regle dibuixem un segment de 30 cm, que serà la diagonal major del rombe, de manera que els extrems del segment seran dos dels vèrtexs del rombe.

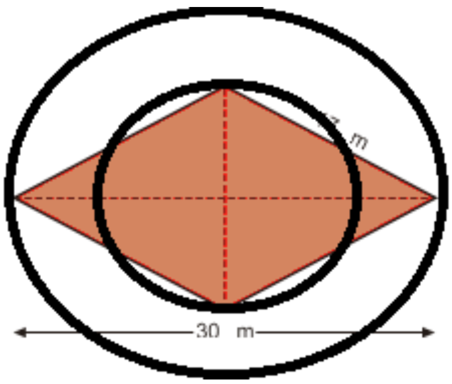
Agafem el compàs i amb una obertura de 17 cm, un radi de 17 cm, des d'un extrem del segment tracem un arc de circumferència de radi 17 cm. Des de l'altre extrem del segment tracem, anàlogament, un altre arc de circumferència del mateix radi, de manera que en els punts de tall de tots dos arcs, tindrem els altres dos vèrtexs del rombe.



Unint els quatre vèrtexs amb el regle tindrem el contorn del rombe, el límit de la seua superfície.



Com que tenim construït el rombe, podem traçar la diagonal menor (com es veu en la figura), que al tallar-se amb la diagonal major ens determinarà el centre del cercle zona central enjardinada i de la circumferència que limita la zona asfaltada de la rotonda. Fent centre amb el compàs en aquest punt, traçarem les dues circumferències, la que determina la zona central enjardinada i la que limita la zona asfaltada de la rotonda (com es veu en la figura). La zona asfaltada és la superfície entre les dues circumferències.



ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Com que hem pogut construir les dues superfícies a mesurar, les recobrirem amb centímetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, que hi comptarem. Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Per a calcular l'àrea del rombe, que anomenarem «A_R», aplicarem la seua fórmula.
La mesura de la diagonal major, que denominem «D», la sabem: 30 m; després haurem de calcular la mesura de la diagonal menor, que anomenarem «d».
Com es veu en la figura del rombe amb les diagonals, aquestes formen triangles rectangles amb els costats del rombe, triangles en els quals coneixem la mesura de la hipotenusa, 17 m, i la mesura de la base, la meitat de la mesura de la diagonal major, 15 m; per tant, podem aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular la longitud del catet desconegut, al qual anomenarem «x».

b) El valor obtingut el multiplicarem per 2 per a obtenir la mesura de la diagonal menor, *d*, amb la qual cosa ja podrem calcular l'àrea del rombe, A_R.

c) Per a calcular l'àrea de la zona asfaltada de la rotonda, que anomenarem «A», haurem de determinar la mesura de la superfície del cercle gran, que denominarem «A_{CG}», el que limita la circumferència el diàmetre de la qual és la diagonal major del rombe, D; per tant, calcularem la mesura del radi, que anomenarem «r_{CG}», i després aplicarem la fórmula de l'àrea del cercle.

d) També calcularem la mesura de la superfície del cercle petit, de la zona central enjardinada de la rotonda, que anomenarem «A_{cp}», el diàmetre del qual és la diagonal menor del rombe (d), per tant, calcularem la mesura del radi, que denominarem «r_{cp}», i després aplicarem la fórmula de l'àrea del cercle.

e) Finalment, per a calcular la superfície de la zona asfaltada de la rotonda, A, simplement haurem de restar-li a la mesura de la superfície del cercle gran, A_{CG}, la mesura de la superfície del cercle petit, A_{cp}: $A = A_{CG} - A_{cp}$.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $x^2 + 15^2 = 17^2 \rightarrow x^2 + 225 = 289 \rightarrow x^2 = 289 - 225 = 64 \rightarrow x = 8$ m

b) $d = 2 \cdot x = 2 \cdot 8 = 16$ m

$$A_R = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 16}{2} = \frac{480}{2} = 240\ m^2$$

c) $D = 30\,m \rightarrow r_{CG} = \frac{30}{2}\,m = 15\,m$

$$A_{CG} = \pi \cdot (r_{CG})^2 = \pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi\ m^2 = 706{,}5\ m^2$$

d) $d = 16\,m \rightarrow r_{cp} = \frac{d}{2} = 8\ m$

$$A_{cp} = \pi \cdot (r_{cp})^2 = \pi \cdot 8^2 = 64 \cdot \pi\ m^2 = 200{,}96\ m^2$$

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

e) $A = A_{CG} - A_{cp} = (225 \cdot \pi \ - \ 64 \cdot \pi)\ m^2 = 161 \cdot \pi \ \ m^2 = 505{,}54\ m^2$

Si la superfície asfaltada fora la romboïdal, seria de 240 m^2 i si la superfície asfaltada fora la rotonda, seria de 505,54 m^2.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí, perquè com es veu en la imatge de les circumferències i el rombe, la superfície del rombe és una mica més gran que la del cercle menor, la zona central enjardinada de la rotonda, com diuen les respectives àrees.

I també perquè el radi del cercle gran és gairebé el doble que el radi del cercle petit, de manera que l'àrea del cercle gran hauria de ser gairebé quatre vegades l'àrea del cercle petit, i ho és.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, hem repassat tots els càlculs i creiem que estan bé, i com que l'única dada que hem hagut de calcular ha sigut la diagonal menor del rombe, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposarem que coneixem la longitud de la diagonal menor del rombe (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la longitud del costat del rombe (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Calcula la mesura del costat d'un rombe les diagonals del qual mesuren 30 i 16 metres*». Esperem que la solució siga 17 m.

Fem simplement els càlculs:

$$8^2 + 15^2 = c^2 \rightarrow 64 + 225 = c^2 \rightarrow c^2 = 289 \rightarrow c = \sqrt{289} = 17\ m$$

Que coincideix amb el valor esperat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària.

Però en aquest en concret, hem aplicat el teorema per a calcular la mesura d'un catet conegudes la mesura de la hipotenusa i la de l'altre catet ($a^2 = h^2 - b^2$). Pensem que és possible aquesta utilització perquè quan s'ensenya a l'alumnat d'Educació Primària les diferents conceptualitzacions de la subtracció de nombres naturals (Alcalde, Pérez, Lorenzo 2014), una d'elles és la corresponent a la de «La subtracció com una addició incompleta», coneixem la suma i un dels sumands i desconeixem l'altre sumand; per tant, estem aplicant coneixements que l'alumnat d'Educació Primària tindrà assolits.

La diferència en la resolució podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:100, per exemple, mesuraríem les superfícies amb decímetres quadrats i/o centímetres quadrats de tela o paper, o plantilles quadriculades en decímetres quadrats i/o centímetres quadrats, obtenint aproximadament 240 cm^2 per al rombe i 505 cm^2 per a la zona asfaltada de la rotonda, que al «desfer l'escala» serien els 240 m^2 i 505,54 m^2, respectivament, solucions del problema; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.9

Una escala de pintor té una alçària d'1,80 m quan està tancada, però oberta totalment la seua alçària només arriba a 1,60 m. Calcula la distància que hi ha entre els peus de l'escala quan està totalment oberta.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

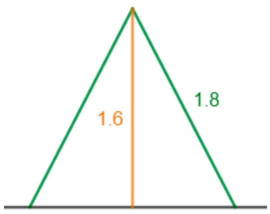
Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - L'escala tancada té una alçària d'1,80 m.
  - L'escala totalment oberta arriba a una alçària d'1,60 m.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:



- Incògnites:

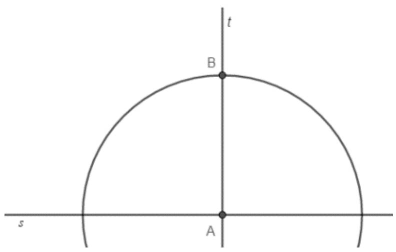
  - Distància que hi ha entre els peus de l'escala quan està totalment oberta.

A) *El problema és resoluble?*

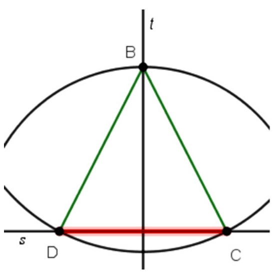
Si podem dibuixar l'escala totalment oberta, amb escaire, cartabó i compàs, o programes de geometria dinàmica, podrem mesurar la distància que separa els seus peus; per tant, el problema seria resoluble, aleshores veurem si amb les dades donades podem dibuixar-la.

Considerem l'escala 1:10, per la qual cosa 1 decímetre en el nostre dibuix correspon a 1 metre en la realitat.

Tracem una recta horitzontal, que anomenarem «*s*», que representarà el sòl on es recolza l'escala, i una perpendicular a aquesta, que anomenarem «*t*». Marquem el punt de tall de dues rectes, que anomenarem «A». Amb centre en el punt A i una obertura d'1,6 dm dibuixem un arc de circumferència que talle la recta *t* per damunt de la recta *s*, denominarem a aquest punt «B».



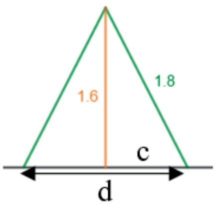
Amb centre en B i una obertura d'1,8 dm dibuixem un arc de circumferència que talle la recta *s* en un costat i a l'altre de la recta *t*, punts que anomenarem «C» i «D». El segment CB i el segment DB representen els costats de l'escala i la longitud del segment CD seria la distància que separa els seus peus. Doncs podrem mesurar-lo amb un regle, i desfent l'escala sabrem la mesura real; per tant, el problema és resoluble.



ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Per a calcular la distància entre els peus de l'escala, la longitud del segment DC, que anomenarem «d», podem dividir el triangle isòsceles DBC en dos triangles rectangles iguals i així, utilitzant el teorema de Pitàgores, obtindrem la mesura del catet desconegut del triangle (que anomenarem «c»), que serà la meitat de la distància.

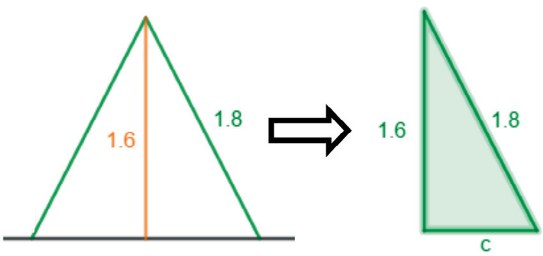


b) La distància entre els peus de l'escala és el doble de la mesura calculada en l'apartat *a*).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Utilitzem el teorema de Pitàgores:

a) $(1{,}8)^2 = (1{,}6)^2 + c^2 \rightarrow 3{,}24 = 2{,}56 + c^2 \rightarrow c^2 = 3{,}24 - 2{,}56 \rightarrow c^2 = 0{,}68 \rightarrow$
$\rightarrow c = 0{,}8246$ m



b) $d = 2 \cdot c = 2 \cdot 0{,}8246 = 1{,}6492$ m $= 1{,}65$ m

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

a) *La solució és raonable?*

En el triangle isòsceles que forma l'escala totalment oberta coneixíem la longitud dels costats iguals, 1,8 m, i el costat desigual mesura 1,65 m. Aquestes mesures verifiquen les condicions que han de complir les dimensions dels costats d'un triangle «la diferència entre les mesures de dos dels seus costats és més

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

petita que la del tercer costat i la suma de les mesures de dos dels seus costats és més gran que la del tercer costat»:

$1,8 - 1,8 = 0 < 1,65$ i $1,8 + 1,8 = 3,6 > 1,65$
$1,8 - 1,65 = 0,15 < 1,8$ i $1,8 + 1,65 = 3,45 > 1,8$

per tant, la solució és raonable.

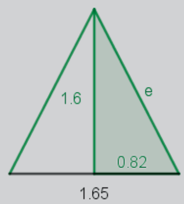
B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les condicions del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposarem que coneixem la distància entre els peus de la escala quan està totalment oberta (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem quant mesura l'escala quan està tancada (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Una escala de pintor té una alçària d'1,60 m quan està totalment oberta i en aquesta posició la distància entre els seus peus és d'1,65 m. Calcula la longitud de l'escala quan està tancada*». Esperem que la resposta siga 1,80 m.

Fem els càlculs:

Anomenem «e» la longitud de l'escala quan està tancada.

Per a calcular aquesta longitud podem dividir el triangle isòsceles, que es forma en obrir-la totalment, en dos triangles rectangles iguals, dels que coneixem el catet horitzontal, que mesura la meitat de la distància entre els seus peus, i el catet vertical, que és l'alçària que aconsegueix l'escala totalment oberta; i així, utilitzant el teorema de Pitàgores, obtindrem la mesura desconeguda de la hipotenusa del triangle rectangle.



$1,65 : 2 = 0,825$
$e^2 = (1,6)^2 + (0,825)^2 \rightarrow e^2 = 2,56 + 0,68 = 3,24 \rightarrow \sqrt{3,24}$ m, com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària i la diferència en la resolució podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) *Comprovar la solució*

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:10, per exemple, mesuraríem la longitud entre els peus de l'escala amb un regle, obtenint una mesura molt aproximada a 16,5 cm, que al «desfer l'escala» són els 1,65 m, solució del problema; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.10

En una taula rectangular de 120 cm de llarg per 80 cm d'ample s'han col·locat, disposats en dues fileres, 6 tapets circulars iguals de color roig, tangents entre ells i amb els costats de la taula. Calcula la superfície de taula que queda sense cobrir.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

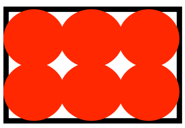
1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Taula de dimensions de 120 cm per 80 cm.
  - Disposats en dues fileres, 6 tapets circulars iguals de color roig, tangents entre ells i amb els costats de la taula.

Ho representem proporcionalment en el dibuix següent:

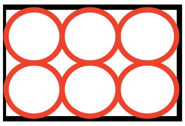


ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - L'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir.

B) E*l problema és resoluble?*

Per a poder dir si el problema és resoluble, com podem deduir del dibuix al·lusiu, en ser els tapets iguals, la condició de tangència entre ells i amb els costats de la taula hauria de ser possible, és a dir, que el diàmetre dels tapets, dues vegades, tinguera la mateixa dimensió que l'ample de la taula i, que el diàmetre dels tapets, tres vegades, tinguera la mateixa dimensió que el llarg de la taula.



Si dividim 80 cm entre 2 (quantitat de tapets tangents a l'ample) i si dividim 120 cm entre 3 (quantitat de tapets tangents al llarg), la mesura del diàmetre dels tapets que es troba en els dos casos és 40 cm; per tant, la situació plantejada és possible.

Aleshores, el problema és resoluble, perquè podem mesurar la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets mitjançant centímetres quadrats i/o decímetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o decímetres quadrats.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per a calcular l'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets, haurem de:

a) Calcular l'àrea de la taula, del rectangle, que anomenarem «A_R».
b) Calcular la mesura del radi d'un tapet, que anomenarem «r».
c) Obtenir l'àrea d'un tapet, del cercle, que anomenarem «A_C».
d) Multiplicar per 6 l'àrea d'un tapet per a saber quanta superfície ocupen els tapets, que anomenarem «A_T».
e) Calcular l'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets, que anomenarem «A», pel que restarem a l'àrea de la taula l'àrea dels sis tapets.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $A_R = 120 \cdot 80 = 9.600\ cm^2$
b) En la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, hem calculat que la mesura del diàmetre dels tapets és 40 cm; per tant, r = 40 : 2 = 20 cm.
c) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1.256\ cm^2$
d) $A_T = 1.256 \cdot 6 = 7.536\ cm^2$
e) $A = A_R - A_T = 9.600 - 7.536 = 2.064\ cm^2$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Solució: l'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets és de 2.064 cm^2.

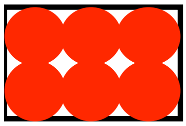
4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, perquè com veiem en el dibuix al·lusiu, la superfície de la taula, del rectangle, és més gran que la dels 6 tapets, com ens ha eixit en la fase d'abans, per això queda una petita part de la taula sense cobrir.

B) *Comprovar la solució*

Per a confirmar la solució aplicarem el mètode «canviar la dada per incògnita i viceversa», concretament, suposarem que coneixem l'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets (abans era incògnita i ara serà dada en el nou problema) i calcularem quant fa d'ample la taula (abans era dada i ara serà incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*En una taula rectangular de 120 cm de llarg s'han col·locat, disposats en dues fileres, 6 tapets circulars iguals de color roig, tangents entre ells i amb els costats de la taula. La superfície de taula que queda sense cobrir pels tapets és de 2.064 cm*^{2}*. Quant mesura d'ample la taula?*». Esperem que la nova solució siga 80 cm.



Fem els càlculs.

Com que els tapets són iguals, tangents entre ells i amb els costats de la taula, podem veure en el dibuix al·lusiu que els diàmetres de tres tapets alineats tenen la mateixa mesura que la llargària de la taula; aleshores, 120 : 3 = 40 cm, que serà la mesura del diàmetre d'un tapet.

Per tot això la mesura del radi, que anomenarem «r», serà, r = 40 : 2 = 20 cm; per tant, l'àrea d'un tapet, d'un cercle, que denominarem «A_C», serà: $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1.256$ cm^2.

Multiplicarem per 6 l'àrea d'un tapet per a saber quanta superfície ocupen els tapets, que anomenarem «A_T»: $A_T = 1.256 \cdot 6 = 7.536$ cm^2.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Aleshores, si els tapets cobreixen 7.536 cm^2 i l'àrea de la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets és de 2.064 cm^2, l'àrea de la superfície de la taula, que denominarem «A_R», serà: $A_R = 7.536 + 2.064 = 9.600$ cm^2.

La taula és rectangular, per la qual cosa, per a calcular-ne l'amplària, que li direm «a», l'aïllarem de la fórmula de l'àrea del rectangle:

$A_R = 120 \cdot a = 9.600\ cm^2 \rightarrow a = 9.600 : 120 = 80$ cm

Veiem que el resultat és l'esperat, per tant, creiem que el problema està bé.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament la mateixa que com a estudiantat del Grau en Mestre/a de Educació Primària; tanmateix, la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

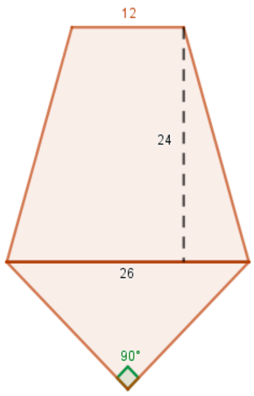
Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix del problema a escala 1:10, és a dir, la taula seria un rectangle de 12 cm per 8 cm, mesuraríem la superfície de la taula que queda sense cobrir pels tapets mitjançant centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats (de paper, tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats i/o mil·límetres quadrats, obtenint una mesura molt aproximada a 20,64 cm^2, que «desfent l'escala» serien 2.064 cm^2 en la realitat, solució del problema obtinguda en la 3a fase; és per això que pensem que el problema està bé.

Problema B.11

La imatge següent és l'esbós en centímetres d'una quadra que volem construir. L'escala és 1:100, és a dir, 1 cm en l'esbós equival a 1 m en la realitat. La quadra té dues parts: una zona de terreny descoberta, amb forma de trapezi isòsceles, i l'estable cobert, on es resguardaran els cavalls a la nit, format per un terreny amb forma de triangle rectangle isòsceles. Quants metres lineals de tanca es necessiten per a delimitar la quadra?

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166



❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Quadra de forma pentagonal, formada per un trapezi isòsceles i un triangle rectangle isòsceles, com indica la imatge.
  - La mesura de la base menor del trapezi isòsceles: 12 cm.
  - La mesura de l'altura del trapezi isòsceles: 24 cm.
  - La mesura de la base major del trapezi isòsceles i de la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles: 26 cm.

- Incògnites:
  - Els metres lineals de tanca que es necessiten per a delimitar la quadra, és a dir, el perímetre del pentàgon.

B) *El problema és resoluble?*

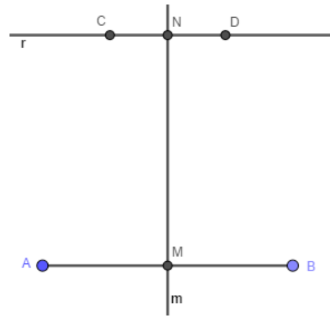
Si podem construir el pentàgon, podrem mesurar el contorn i, per tant, el problema seria resoluble, aleshores veurem si amb les dades donades podem dibuixar-lo.

Tracem un segment de 26 cm de longitud d'extrems «A» i «B», i la seua mediatriu («m»).

Des del punt de tall dels elements anteriors, que anomenarem «M», mesurem 24 cm sobre la mediatriu i marquem el punt «N».

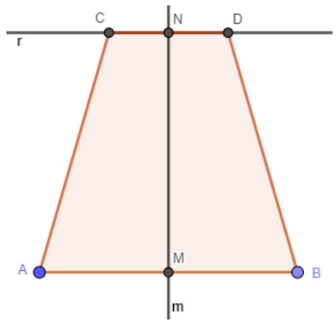
ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Dibuixem una perpendicular a la mediatriu pel punt N, que li diem «r», i en ella mesurem 6 cm a un costat i a l'altre de N, marcant els punts «C» i «D», que seran els extrems d'un segment, de longitud 12 cm, paral·lel al segment inicial AB.

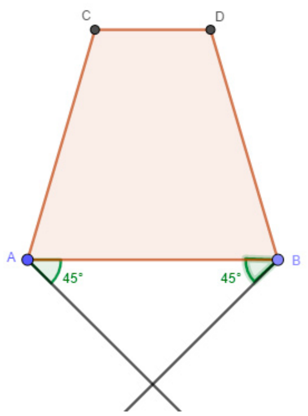


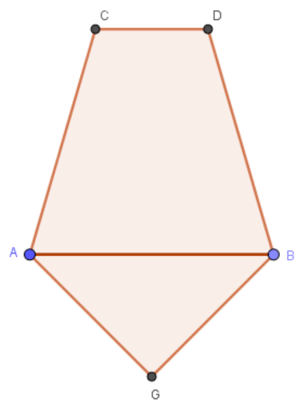
Aquests segments seran les bases del nostre trapezi isòsceles. Sent els punts A, B, C i D els extrems de les bases major i menor, respectivament, del trapezi.

Unint els extrems del mateix costat de les bases del trapezi isòsceles (respecte de la mediatriu) ja tenim construït el trapezi.



Per a dibuixar el triangle rectangle isòsceles farem el següent: els dos angles aguts són iguals (triangle isòsceles) i com que la suma dels angles interns del triangle és de 180°, a més, per ser rectangle el triangle, cadascú dels dos angles aguts mesurarà 45°, aleshores, amb el semicercle graduat traçarem, des dels extrems de la base major del trapezi isòsceles, dues semirectes que formen 45° amb la base, que, en tallar-se, formaran el contorn del triangle rectangle isòsceles.





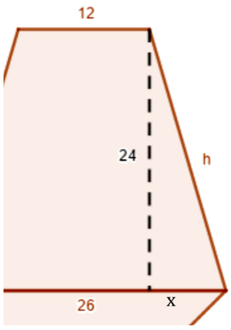
ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Hem pogut construir el pentàgon amb les condicions de l'enunciat, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per a calcular el perímetre del pentàgon, que denominarem «P», amb les dades que tenim, sols necessitem conèixer la mesura dels costats no bàsics del trapezi isòsceles i la mesura dels catets del triangle rectangle isòsceles.

a) Per a calcular la mesura dels costats no bàsics del trapezi, que anomenarem «h», com que els costats són iguals per ser un trapezi isòsceles, aplicarem el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle que forma un d'ells amb l'altura del trapezi i part de la base major.



Pot aplicar-s'hi el teorema de Pitàgores perquè, a més de la mesura del catet vertical (24 cm) d'aquest triangle rectangle considerat, podem calcular la mesura del catet horitzontal, que denominarem «x», ja que, per ser un trapezi isòsceles, dita mesura és la meitat de la diferència entre les longituds de les bases major i menor del trapezi.

b) Per a calcular la mesura dels catets del triangle rectangle isòsceles, que anomenarem «c», aplicarem el teorema de Pitàgores, perquè en ser isòsceles el triangle rectangle, els dos catets són iguals; per tant, en l'expressió del teorema de Pitàgores sols hi ha dos valors, en lloc de tres com és normal: la hipotenusa, que la coneixem (26 cm) i la mesura del catet del triangle rectangle isòsceles (c), aleshores, $26^2 = c^2 + c^2$; és a dir, tenim una equació i una incògnita.

c) Finalment, calcularem P sumant les mesures de tots els costats del contorn del pentàgon.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $26 - 12 = 14$ cm $\rightarrow x = 14 : 2 = 7$ cm
$h^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625\ cm^2 \rightarrow h = \sqrt{625}$ cm $= 25$ cm

b) $26^2 = c^2 + c^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow c^2 = 26^2 : 2 \rightarrow c = 26 : \sqrt{2} = 18{,}38$ cm

c) $P = 12 + 25 + 18{,}38 + 18{,}38 + 25 = 98{,}76$ cm

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Repassem que els càlculs estiguen bé.

Aleshores, com l'escala és 1:100, es necessiten 98,76 metres lineals de tanca per a delimitar la quadra.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Farem una estimació del perímetre a partir de les dades de l'enunciat.

Mirant la figura del problema, com que l'altura del trapezi isòsceles mesura 24 cm, el costat no bàsic haurà de ser major, per això estimem que podria ser de 25 cm. Com que la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles mesura 26 cm i els catets han de mesurar menys, estimem que fan 20 cm; aleshores, l'estimació del perímetre seria: P = 12 + 25 + 20 + 20 + 25 = 102 cm, que no és tant diferent del valor que hem trobat; per tant, la solució P = 98,76 cm creiem que és un valor raonable.

B) *Comprovar la solució*

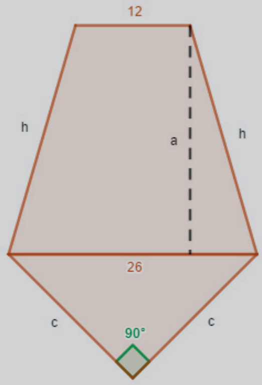
Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa». Suposem que coneixem el perímetre (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem l'altura del trapezi isòsceles (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*Sent l'escala 1:100, l'esbós d'una quadra de forma pentagonal s'ha format fent coincidir la base major d'un terreny, amb forma de trapezi isòsceles, i la hipotenusa d'un altre, amb forma de triangle rectangle isòsceles, les quals mesuren 26 cm. La base menor del trapezi fa 12 cm i el perímetre del pentàgon es de 98,76 cm. Quant mesura l'altura del trapezi?*». Esperem que la mesura de l'altura del trapezi siga 24 cm.

Fem els càlculs necessaris:

El perímetre és la suma de tots els costats del pentàgon: P = 98,76 = 12 + h + + c + c + h.

Per a calcular la mesura de l'altura del trapezi, que denominarem «a», en el triangle rectangle que forma amb el costat no bàsic del trapezi isòsceles i part de la base major , podrem aplicar el teorema de Pitàgores si calculem la mesura del costat no bàsic del trapezi isòsceles (h) de la igualtat anterior del perímetre, però primer hauríem de calcular la mesura dels catets del triangle rectangle isòsceles (c).

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166



Podem calcular «c», ja que ara tenim les mateixes dades que hem utilitzat en la 2a i 3a fases per fer allí aquest càlcul, per tant, fent el mateix: c = 18,38 cm.

Aleshores:

$P = 98,76 = 12 + h + c + c + h = 12 + h + 18,38 + 18,38 + h = 12 + 36,76 +$
$+ 2 \cdot h = 48,76 + 2 \cdot h \rightarrow 2 \cdot h = 98,76 - 48,76 = 50 \text{ cm} \rightarrow h = 50 : 2 = 25 \text{ cm}$

Ara, ja, aplicarem el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle que forma l'altura del trapezi isòsceles amb el costat no bàsic del trapezi i part de la base major.

Per a calcular la mesura de la part de la base major (x), com tenim les mateixes dades que hem utilitzat en la 2a i 3a fases, fent el mateix que allí: x = 7 cm.

Aleshores, apliquem el teorema de Pitàgores:

$a^2 + 7^2 = 25^2 \rightarrow a^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \text{ cm}^2 \rightarrow a = \sqrt{576} \text{ cm} = 24 \text{ cm}$; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual que en l'estudiant de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, la qual cosa justifiquem en la resolució amb l'alumnat indicant alguns dels continguts utilitzats, que podrien semblar impropis d'Educació Primària, a quin nivell/curs corresponen del bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, segons el decret vigent que estableix el currículum d'Educació Primària, el Decret 108/2014.

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Quadra de forma pentagonal, formada per un trapezi isòsceles i un triangle rectangle isòsceles, com indica la imatge.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- o La mesura de la base menor del trapezi isòsceles, 12 cm.
- o La mesura de l'altura del trapezi isòsceles, 24 cm.
- o La mesura de la base major del trapezi isòsceles i de la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles, 26 cm.

- Incògnites:

  - o Els metres lineals de tanca que es necessiten per a delimitar la quadra, és a dir, el perímetre del pentàgon.

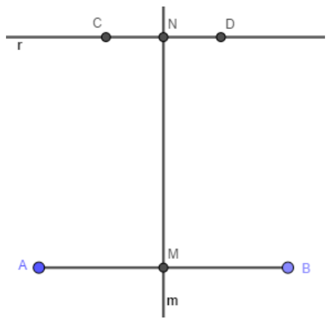
B) *El problema és resoluble?*

Si podem construir el pentàgon podrem mesurar el contorn i, per tant, el problema seria resoluble. Aleshores veurem si amb les dades donades es pot dibuixar.

Tracem un segment de 26 cm de longitud d'extrems «A» i «B», i la seua mediatriu («m»).

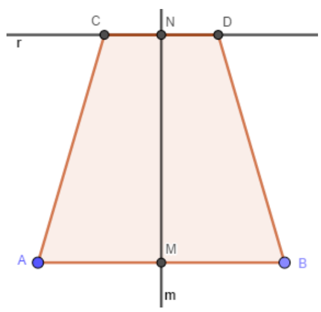
Des del punt de tall dels elements anteriors, que denominarem «M», mesurem 24 cm sobre la mediatriu i marquem el punt «N».

Dibuixem una perpendicular a la mediatriu pel punt N, que li diem «r», i en ella mesurem 6 cm a un costat i a l'altre de N, marcant els punts «C» i «D», que seran els extrems d'un segment de longitud de 12 cm, paral·lel al segment inicial AB.

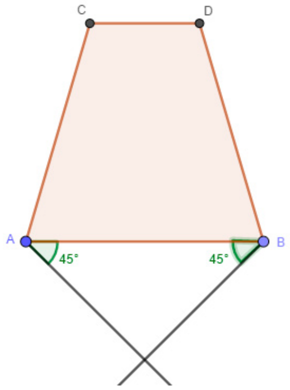


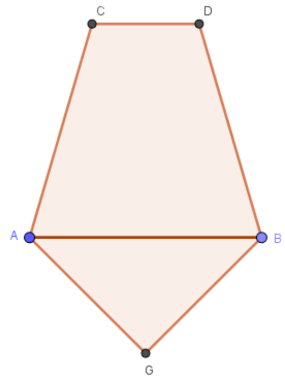
Aquests segments seran les bases del nostre trapezi isòsceles. Sent els punts A, B, C i D els extrems de la base major i menor, respectivament, del trapezi.

Unint els extrems del mateix costat de les bases del trapezi isòsceles (respecte de la mediatriu) ja tenim construït el trapezi.



Per a dibuixar el triangle rectangle isòsceles farem el següent: en ser isòsceles el triangle, els dos angles aguts són iguals i com que la suma dels angles interns del triangle és de 180° (Decret 108/2014, 6é de Primària, bloc 4: Geometria, contingut «Regularitats i simetries: reconeixement de regularitats»), i a més, per ser rectangle el triangle, cadascú dels dos angles aguts mesurarà 45°; aleshores, amb el semicercle graduat traçarem des dels extrems de la base major del trapezi isòsceles dues semirectes que formen 45° amb la base, que, en tallar-se, perfilaran el contorn del triangle rectangle isòsceles.



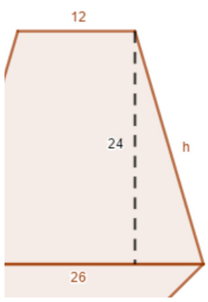


Hem pogut construir el pentàgon en les condicions de l'enunciat, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

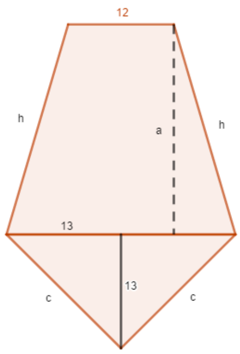
Per a calcular el perímetre del pentàgon, que deniminarem «P», amb les dades que tenim, sols necessitem conèixer la mesura dels costats no bàsics del trapezi isòsceles i la mesura dels catets del triangle rectangle isòsceles.

a) Per a calcular la mesura dels costats no bàsics del trapezi isòsceles, que anomenarem «h», que són iguals per ser isòsceles, aplicarem el teorema de Pitàgores (justificat en el problema B.3) en el triangle rectangle que forma un d'ells amb l'altura del trapezi i part de la base major.



Pot aplicar-s'hi el teorema de Pitàgores perquè, a més de la mesura del catet vertical (24 cm) d'aquest triangle rectangle considerat, podem calcular la mida del catet horitzontal, que denominarem «x», ja que, per ser el trapezi isòsceles, dita mesura és la meitat de la diferència entre les mesures de les bases major i menor del trapezi.

b) Per a calcular la mesura dels catets del triangle rectangle isòsceles, que anomenarem «c», veurem si aquests segments podrien ser la hipotenusa d'un triangle rectangle.
En ser isòsceles el triangle rectangle original, és simètric respecte a l'altura relativa a la hipotenusa. En dibuixar aquesta altura, parteix el triangle rectangle isòsceles en altres dos triangles rectangles iguals, que tenen com a hipotenusa el segment que és el catet del triangle rectangle isòsceles original (c). Així doncs, veurem si en aquests nous triangles rectangles podem aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular la mesura de la seua hipotenusa (c).



Com l'angle que tenen en comú els nous triangles rectangles amb el triangle original és de 45°, fa que l'altre angle agut d'ells siga també de 45° (ja que la suma de la mesura dels angles interns dels triangles és de 180°), és a dir, en partir el triangle rectangle isòsceles original hem obtingut dos triangles rectangles isòsceles iguals.
Per ser isòsceles aquests nous triangles, els dos catets (l'horitzontal i el vertical) són iguals i, el catet horitzontal és, per la forma com hem obtingut aquests triangles, la meitat de la hipotenusa del triangle rectangle original; per tant, aquest catet mesura 13 cm, aleshores el catet vertical també fa 13 cm.
Si sabem quant mesuren el dos catets d'aquests nous triangles rectangles podem aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular la mesura de la seua hipotenusa (c).

c) Finalment, calcularem P sumant les mesures de tots els costats del contorn del pentàgon.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $26 - 12 = 14$ cm $\rightarrow x = 14 : 2 = 7$ cm
$h^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \text{ cm}^2 \rightarrow h = \sqrt{625}$ cm $= 25$ cm
b) $13^2 + 13^2 = c^2 \rightarrow 169 + 169 = c^2 \rightarrow 338 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{338} = 18{,}38$ cm
c) $P = 12 + 25 + 18{,}38 + 18{,}38 + 25 = 98{,}76$ cm

Aleshores, com l'escala és 1:100, es necessiten 98,76 metres lineals de tanca per a delimitar la quadra.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Farem una estimació del perímetre a partir de les dades de l'enunciat.

Mirant la figura del problema, com l'altura del trapezi isòsceles mesura 24 cm, el costat no bàsic haurà de ser major, per això estimem que podria ser de 25 cm. Com que la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles mesura 26 cm, els catets han de mesurar menys, estimem que mesuren 20 cm; aleshores, l'estimació del perímetre seria: P = 12 + 25 + 20 + 20 + 25 = 102 cm, que no és tant diferent del valor que hem trobat; per tant, la solució P = 98,76 cm creiem que és un valor raonable.

B) Comprovar la solució

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Com que hem construït el pentàgon, mesurem el seu perímetre i ens dona un poc més de 98 cm, però menys de 99 cm; ja que els costats del triangle mesuren poc més de 18 cm, no arriben a 18,5 cm.

Aleshores, el valor del perímetre que hem calculat amb les operacions numèriques i el que hem mesurat en la figura són pràcticament iguals, per això creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.12

Uns dissenyadors de taulellets volen pintar amb esmalt un hexàgon regular, inscrit en una circumferència, el diàmetre de la qual és el mateix que la diagonal d'un quadrat de 100 m^2 d'àrea. Es pregunten quants metres quadrats seran, per a saber quanta pintura han d'encarregar a l'esmaltadora per a poder pintar-lo. Els pots ajudar calculant la quantitat de metres quadrats?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Hexàgon regular inscrit en una circumferència.
  - o El diàmetre de la circumferència és el mateix que la diagonal d'un quadrat de 100 m^2 d'àrea.

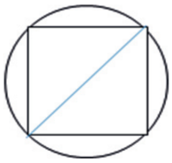
- Incògnites:

    - L'àrea en metres quadrats de l'hexàgon regular.

B) *El problema és resoluble?*

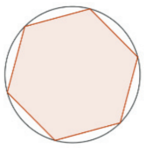
Si amb les dades donades es pot dibuixar les figures, el problema seria resoluble. Considerem l'escala 1:100, doncs 1 centímetre en el dibuix correspon a 1 metre en la realitat.

En tenir l'àrea del quadrat, podem calcular la mesura dels costats del quadrat usant la fórmula de l'àrea ($A_Q = q^2$) i, amb un escaire o un cartabó, o amb programes de geometria dinàmica, dibuixaríem el quadrat, la diagonal del qual és el diàmetre de la circumferència.



Una vegada construït el quadrat, mesuraríem la diagonal, obtenint la mesura del radi al dividir per dos, amb què podrem dibuixar la circumferència, posant el punter del compàs en el punt mitjà de la diagonal.

Per a dibuixar l'hexàgon regular inscrit en la circumferència, amb el compàs i amb l'obertura de traçar la circumferència, posem l'agulla del compàs sobre qualsevol punt de la circumferència i tracem dos arcs menuts que tallen la circumferència, punts de tall que amb el punt de subjecció del compàs determinen tres dels vèrtexs de l'hexàgon. Anàlogament, fent centre amb el compàs en aquests vèrtexs, marquem els tres vèrtexs restants. Unint amb segments els vèrtexs consecutius obtindrem el contorn de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència.



Hem pogut construir l'hexàgon regular inscrit en la circumferència, aleshores podem mesurar la seua superfície, calcular-ne l'àrea, recobrint-lo amb decímetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en decímetres quadrats i/o centímetres quadrats, que finalment comptaríem; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

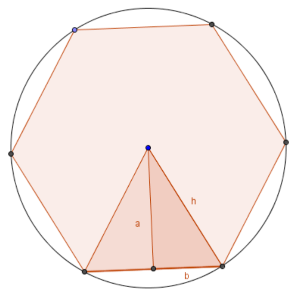
Per a calcular l'àrea de l'hexàgon seguirem els passos següents:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

a) Usarem l'expressió de l'àrea d'un quadrat per tal de calcular la mesura del costat, que denominarem «q».
b) Posteriorment, pel teorema de Pitàgores, amb el valor obtingut, calcularem la mesura de la diagonal del quadrat, que nomenarem «d».
c) La mesura del diàmetre de la circumferència, que denominarem «D», és la mateixa que la de la diagonal del quadrat (d). Calcularem també la mesura del radi de la circumferència, que anomenarem «r».
d) El costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència té la mateixa mesura que el radi (r) de la circumferència i li direm «c».
e) Amb aquesta darrera dada, caldrà calcular l'àrea de l'hexàgon regular, que denominarem A_H, mitjançant la fórmula:

$$A_H = \frac{\text{Perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Calcularem el perímetre de l'hexàgon regular, que denominarem «P», i la mesura de l'apotema, que anomenarem «a». L'apotema coincideix amb l'altura del triangle equilàter de vèrtexs, el centre de la circumferència i dos vèrtexs consecutius de l'hexàgon.



La mesura de l'altura l'obtindríem pel teorema de Pitàgores, aplicat en el triangle rectangle (més fosc en la figura) que es forma al traçar l'altura i que té com a hipotenusa (a la seua mesura l'anomenarem «h») un segment de la mateixa mida que el costat de l'hexàgon i com a catet bàsic (a la seua mesura l'anomenarem «b») la meitat del costat de l'hexàgon.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $100 \text{ m}^2 = q^2 \rightarrow q = 10 \text{ m}$

b) $d = \sqrt{10^2 + 10^2} \rightarrow d = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ m}$

c) $D = 14{,}14 \text{ m} \rightarrow r = \dfrac{14{,}14}{2} = 7{,}07 \text{ m}$

d) $c = r = 7{,}07 \text{ m}$

e) $P = 6 \cdot c = 6 \cdot 7{,}07 \text{ m} = 42{,}42 \text{ m}$

$h = c = 7{,}07 \text{ m}; \; b = \dfrac{c}{2} = \dfrac{7{,}07}{2} = 3{,}53 \text{ m}$

Apliquem el teorema de Pitàgores:

$7{,}07^2 = 3{,}53^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 50 - 12{,}5 = 37{,}5 \text{ m}^2 \rightarrow a = \sqrt{37{,}5} \cong 6{,}12 \text{ m}$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Per tant, l'àrea de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència serà:

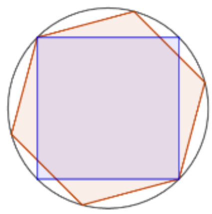
$$A_H = \frac{42{,}42 \cdot 6{,}12}{2} \cong 129{,}90 \text{ m}^2$$

Solució: els dissenyadors de taulellets han de pintar 129,90 m^2.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Com es veu en la imatge, el cercle limitat per la circumferència de l'enunciat del problema té més superfície que l'hexàgon regular, i aquest comprèn més superfície que el quadrat, és a dir, la superfície del cercle és més gran que la de l'hexàgon, i la d'aquest, més gran que la del quadrat.



Passant als nombres, a les àrees, l'àrea del cercle és $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 7{,}07^2 = 156{,}95 \text{ m}^2$, la de l'hexàgon, 129,90 m^2, i la del quadrat, 100 m^2. Veiem que mantenen la mateixa relació que les corresponents superfícies, per això la solució del problema és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment». Dupliquem l'àrea del quadrat, amb la qual cosa tindrem el nou problema: «*Uns dissenyadors de taulellets volen pintar amb esmalt un hexàgon regular*, *inscrit en una circumferència*, *el diàmetre de la qual és el mateix que la diagonal d'un quadrat de 200 m^2 d'àrea. Es pregunten quants metres quadrats seran, per a saber quanta pintura han d'encarregar a l'esmaltadora per a poder pintar-lo. Els pots ajudar calculant la quantitat de metres quadrats?*». Com la dada modificada ja és una àrea i la incògnita del problema també, la solució del nou problema serà el doble de la solució del problema original; és a dir, esperem que la nova solució, l'àrea de l'hexàgon regular inscrit a la circumferència, siga: $2 \cdot 129{,}90 \text{ m}^2 = 259{,}80 \text{ m}^2$.

Fem simplement els càlculs:

a) $200 \text{ m}^2 = q^2 \rightarrow q = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ m}$

b) $d = \sqrt{14{,}14^2 + 14{,}14^2} \rightarrow d = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$

c) $D = d = 20 \text{ m} \rightarrow r = \frac{20}{2} = 10 \text{ n}$

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

d) c = r = 10 m

e) P = 6 · c = 6 · 10 m = 60 m

$h = c = 10\ m;\ b = \frac{c}{2} = \frac{10}{2} = 5\ m$

Apliquem el teorema de Pitàgores:

$10^2 = 5^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} \cong 8{,}66\ m$

Aleshores, l'àrea de l'hexàgon regular inscrit a la circumferència és:

$$A_H = \frac{60 \cdot \sqrt{75}}{2} \cong 259{,}80\ m^2$$

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

En el Decret 108/2014 que estableix el currículum d'Educació Primària, en el 4t curs, en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, apareix el concepte de «Polígons regulars».

A més a més, segons el mateix decret, en el 3r curs, en el bloc 3: Dibuix geomètric, de l'àrea Educació Artística, trobem el contingut «Construcció de polígons a partir del costat i del radi de la circumferència».

Ambdues referències justifiquen que el concepte «hexàgon regular inscrit en una circumferència», de l'enunciat del problema, deu figurar entre els coneixements de l'alumnat dels 5é i 6é cursos d'Educació Primària, per la qual cosa creiem que el problema es pot plantejar en els darrers cursos d'aquesta etapa escolar.

La resolució és pràcticament igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària en aplicar-lo per a calcular la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle conegudes les mesures dels catets ($h^2 = a^2 + b^2$), el que hem aplicat en la resolució d'aquest problema i alguns altres.

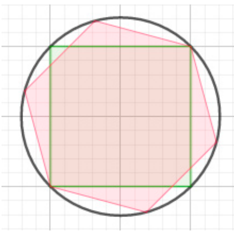
Però, en aquest en concret, també hem aplicat el teorema per a calcular la mesura d'un catet conegudes la mesura de la hipotenusa i la de l'altre catet ($a^2 = h^2 - b^2$), el que hem justificat en el problema B8; per tant, en utilitzar el teorema de Pitàgores d'aquesta manera estem aplicant coneixements que l'alumnat de 6é curs deu tenir assolits.

Per tot açò, la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.



Com hem dibuixat l'hexàgon regular a escala 1:100, és a dir, amb la dada numèrica del problema en centímetres quadrats, mesurarem la seua superfície, calcularem l'àrea, recobrint-lo amb centímetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o plantilles quadriculades en centímetres quadrats, que comptaríem, obtenint aproximadament 129 o 130 cm^2, que «desfent l'escala» passarem a metres quadrats, i serien 129 o 130 m^2, en la realitat.

Aleshores, el valor de l'àrea que hem calculat amb les operacions numèriques en la 3a fase i el que hem tret experimentalment, mesurant en la figura, són pràcticament iguals, per això creiem que el problema està ben resolt.

Problema B.13

Uns dissenyadors de rajoles volen pintar amb esmalt un hexàgon irregular inscrit en una circumferència; el diàmetre és el mateix que la diagonal d'un quadrat de 100 m^2 d'àrea. Es pregunten quants metres quadrats seran, per a saber quanta pintura han d'encarregar a l'esmaltadora per a poder pintar-lo. Els pots ajudar calculant la quantitat de metres quadrats?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Hexàgon irregular inscrit en una circumferència.
  - El diàmetre de la circumferència és el mateix que la diagonal d'un quadrat de 100 m^2 d'àrea.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:

    - Metres quadrats que s’han de pintar.

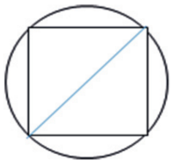
A) *El problema és resoluble?*

Si podem construir l’hexàgon irregular inscrit en la circumferència, podrem mesurar la seua superfície, calcular-ne l’àrea, recobrint amb decímetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, de tela, etc.) o amb plantilles quadriculades en decímetres quadrats i/o centímetres quadrats, que finalment comptaríem; per tant, el problema seria resoluble.

Aleshores, veurem si amb les dades donades podem dibuixar-lo.

Considerem l’escala 1:100, per la qual cosa 1 centímetre en el dibuix correspon a 1 metre en la realitat.

En tenir l’àrea del quadrat podem calcular la mesura dels costats del quadrat usant la fórmula de l’àrea ($A_Q = c^2$) i, amb un escaire o un cartabó, o amb programes de geometria dinàmica, dibuixaríem el quadrat, la diagonal del qual és el diàmetre de la circumferència.

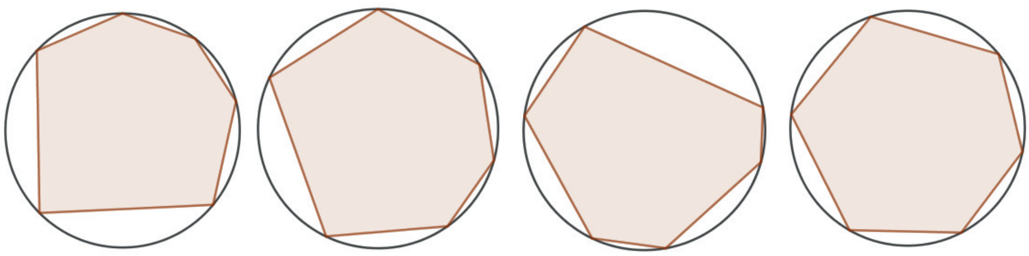


Una vegada construït el quadrat, mesuraríem la diagonal, i obtendríem la mesura del radi al dividir-la per dos, amb què podrem dibuixar la circumferència.

Per a dibuixar un hexàgon inscrit en la circumferència, triarem sis punts de la circumferència, que seran els vèrtexs de l’hexàgon i, perquè siga irregular, ho farem de manera que els punts no siguen equidistants. Elegint un sentit de gir en la circumferència, unirem cada un d’aquests punts amb l’anterior i posterior, respectivament, i obtindrem un total de 6 costats, que formaran el contorn de l’hexàgon irregular inscrit en la circumferència.

Finalment, mesuraríem la superfície de l’hexàgon irregular.

Com que la circumferència té infinits punts, serien infinits els «conjunts de 6 punts de la circumferència no equidistants» per a dibuixar els costats d’hexàgons irregulars. En la figura podem veure alguns d’ells.



En haver-hi infinits hexàgons irregulars inscrits en la circumferència, fa que no puguem calcular les àrees de tots ells, és a dir, no podem saber si calculem concretament l’àrea de l’hexàgon irregular inscrit en la circumferència que

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

han fet els dissenyadors; per tant, no sabem si els podem ajudar, aleshores, el problema és irresoluble.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

En el problema B.12 hem justificat que en el currículum d'Educació Primària, per a l'alumnat de 4t curs, apareix el concepte de «Polígons regulars» i, per al de 3r curs, el contingut «Polígons inscrits en la circumferència».

La primera referència justifica la presència del concepte «Polígon irregular» i, aquest fet, junt a la segona referència, que «hexàgon irregular inscrit en una circumferència» haja de figurar entre els sabers de l'alumnat de 5é i 6é curs d'Educació Primària.

De manera que pensem que el problema es pot plantejar en els últims cursos d'aquesta etapa escolar i, que la resolució, podria ser igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Tema 3: Problemes de nombres naturals-Sistema de Numeració Decimal

3.1. Introducció

«Nombres naturals. Sistemes de numeració» és el títol del tema 3 de l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (UJI, Pla d'Estudis 2010) o MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (reforma/modificació de 2018), doncs bé, en aquest tecer tema apareixen els problemes en els que en la resolució utilitzem la descomposició polinòmica dels nombres naturals, per això a més de treballar la RPM esperem complementar l'explicació donada en el tema 1 d'Alcalde, Pérez i Lorenzo (2014) on es desenvolupa el contingut de les referides assignatures, i ajudar a aconseguir en l'estudiantat i/o en l'alumnat una millor comprensió de com estan compostos els nombres.

Generalment són problemes amb numerals de dues xifres, per evitar que siga massa pesada la resolució, però també hi ha algun problema en què arribem als de tres xifres.

3.2. Problemes

Problema C.1

Una nena de 5é nivell d'Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020, que no ha complert anys el 2020, li pregunta al seu mestre quina edat té i aquest li respon: «Si sumem les dues xifres dona la teua edat i, a més, si canviem l'ordre de les xifres amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant». Quina edat té el mestre?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L’edat del mestre és un nombre de dues xifres.
  - La nena fa 5é nivell d’Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020 i no ha complert anys en 2020.
  - Si sumem les xifres de l’edat del mestre dona l’edat de la nena.
  - Si canviem l’ordre de les xifres de l’edat del mestre amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant.

- Incògnites:
  - L’edat del mestre.

B) *El problema és resoluble?*

Provarem fent temptejos, si es poden donar les dades de l’enunciat.

Com que els xiquets i xiquetes que fan 5é curs d’Educació Primària en l’any escolar 2019-2020 en 2019 compleixen 10 anys, i la nena el 2020 no ha complert anys, el 2020 segueix tenint 10 anys; per tant, la suma de les xifres de l’edat del mestre és 10.

Si les dues xifres sumen 10, podrien ser (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) o (5, 5) formant els nombres 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

19 no és una edat possible per a un mestre d’Educació Primària.

A més, com que encara és mestre, no està jubilat, la seua edat és inferior o igual a 65 anys; per tant, 91, 82 i 73 no són edats possibles del mestre.

D’altra banda, si canviem l’ordre de les xifres amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant, és a dir, el nou nombre ha de ser inferior o igual a 65 anys, aleshores descartem també 28 i 37. Per tant, tenim les possibilitats següents: 46, 64 i 55 anys.

Provem si aquests nombres compleixen les dades del problema:

Si l’edat fora 46 anys, 46 és un nombre de dues xifres, $4 + 6 = 10$ i si invertim l’ordre de les seues xifres dona 64, edat en què encara pot treballar. És a dir, compleix les dades del problema, per tant, 46 anys és una solució, i per això el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig per a veure si la solució és única.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Si l'edat fora 55 anys, 55 és un nombre de dues xifres, 5 + 5 = 10 i si invertim l'ordre de les seues xifres dona 55, edat en què encara pot treballar. És a dir, compleix les dades del problema, aleshores, 55 anys és una solució.

Si l'edat fora 64 anys, 64 és un nombre de dues xifres, 6 + 4 = 10 i si invertim l'ordre de les seues xifres dona 46, edat en què encara pot treballar. També compleix les dades del problema, aleshores, 64 anys és una solució.

Les tres edats, 46, 55 i 64, compleixen les dades del problema, per això no podem determinar concretament l'edat del mestre, per tant, la nena no pot saber quina és l'edat del mestre amb certesa.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són nombres de dues xifres i edats possibles per a un mestre en actiu.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem les possibles edats del mestre, 46, 64 i 55 anys (eren incògnita i passen a ser dada en el nou problema), i anem a calcular quant sumen les seues xifres i veure si, canviant-ne l'ordre, amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*En les edats 46, 55 i 64 anys, si sumem les dues xifres quant dona? i, a més, si canviem l'ordre de les xifres amb aquesta nova edat el mestre encara podria continuar treballant?*». Esperem que les respostes siguen, respectivament, 10 i sí.

- Si l'edat és 46 anys, 4 + 6 = 10 i, a més, si invertim l'ordre de les seues xifres és 64, per la qual cosa sí que podria continuar treballant.
- Si l'edat és 55 anys, 5 + 5 = 10 i, a més, si invertim l'ordre de les seues xifres és 55, per la qual cosa sí que podria continuar treballant.
- Si l'edat és 64 anys, 6 + 4 = 10 i, a més, si invertim l'ordre de les seues xifres és 46, per la qual cosa sí que podria continuar treballant.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - o L'edat del mestre és un nombre de dues xifres.
    - o La nena fa 5é nivell d'Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020 i no ha complert anys en 2020.
    - o Si sumem les xifres de l'edat del mestre dona l'edat de la nena.
    - o Si canviem l'ordre de les xifres de l'edat del mestre amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant.

- Incògnites:
    - o L'edat del mestre.

B) *El problema és resoluble?*

Provarem fent temptejos, si es poden donar les dades de l'enunciat.

Com que els xiquets i xiquetes que fan 5é curs d'Educació Primària durant l'any escolar 2019-2020 en 2019 compleixen 10 anys, i la nena en 2020 no ha complert anys, el 2020 segueix tenint 10 anys; per tant, la suma de les xifres de l'edat del mestre és 10.

La segona dada ens diu que les dues xifres sumen 10, aleshores, els nombres podrien ser: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

Descartem el 19, ja que no és una edat possible per a un mestre. També descartem els nombres 91, 82 i 73, ja que a aquestes edats un mestre ja està jubilat.

Ens queden els nombres 28, 37, 46, 64 i 55.

Farem proves amb aquests nombres, que recollim en una taula:

Edat mestre	Edat mestre canviant l'ordre de les xifres	Edat mestre canviant l'ordre de les xifres ≤ 65 anys?
28	82	NO
37	73	NO
46	64	SÍ

Veiem que és resoluble, ja que hem trobat una solució.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Esgotarem el tempteig per a veure si hi ha més solucions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Edat mestre	Edat mestre canviant l'ordre de les xifres	Edat mestre canviant l'ordre de les xifres ≤ 65 anys?
28	82	NO
37	73	NO
46	64	SÍ
64	46	SÍ
55	55	SÍ

Aleshores, l'edat del mestre podria ser 46 anys, 64 anys o 55 anys, però no podem determinar l'edat concreta del mestre, per tant, la nena no pot saber quina és l'edat del mestre amb certesa.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són nombres de dues xifres i edats possibles per a un mestre.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem veient si es compleixen les dades de l'enunciat amb cadascuna de les solucions trobades:

Si l'edat del mestre és 46 anys:

- L'edat del mestre és un nombre de dues xifres? 46, sí.
- La nena fa 5é nivell d'Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020 i no ha complert anys el 2020, per tant, té 10 anys.
- Si sumem les xifres de l'edat del mestre dona l'edat de la nena? $4 + 6 = 10$, sí.
- Si canviem l'ordre de les xifres de l'edat del mestre amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant?, és a dir, el nou nombre és inferior o igual a 65 anys? 64, sí.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Si l'edat del mestre és 64 anys:

- o L'edat del mestre és un nombre de dues xifres? 64, sí.
- o La nena fa 5é nivell d'Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020 i no ha complert anys el 2020, per tant, té 10 anys.
- o Si sumem les xifres de l'edat del mestre dona l'edat de la nena? 6 + 4 = 10, sí.
- o Si canviem l'ordre de les xifres de l'edat del mestre amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant?, és a dir, el nou nombre és inferior o igual a 65 anys? 46, sí.

Si l'edat del mestre és 55 anys:

- o L'edat del mestre és un nombre de dues xifres? 55, sí.
- o La nena fa 5é nivell d'Educació Primària en el curs acadèmic 2019-2020 i no ha complert anys el 2020, per tant, té 10 anys.
- o Si sumem les xifres de l'edat del mestre dona l'edat de la nena? 5 + 5 = 10, sí.
- o Si canviem l'ordre de les xifres de l'edat del mestre amb aquesta nova edat encara podria continuar treballant?, és a dir, el nou nombre és inferior o igual a 65 anys? 55, sí.

Els nombres 46, 64 i 55 verifiquen les dades de l'enunciat, per tant, el problema està ben resolt.

Problema C.2

Un estudiant de Matemàtiques demana el preu d'una jaqueta a una dependenta, la qual li respon: «El preu és un nombre de dues xifres de manera que si se sumen les xifres ens dona 9, i si es canvia l'ordre d'aquestes el nombre augmenta 9 unitats». El client no sabia que la dependenta era la dona d'un matemàtic. Quin és el preu de la jaqueta?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o El preu és un nombre de dues xifres.
  - o Si se sumen les xifres ens dona 9.
  - o Si es canvia l'ordre de les xifres, el nombre augmenta 9 unitats.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - El preu de la jaqueta.

B) *El problema és resoluble?*

Com que el preu que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats, de manera que l'expressió polinòmica del nombre buscat és: $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres del preu té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\}.$$

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D - (10 \cdot D + U) = 9 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D - 10 \cdot D - U = 9 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ -9D + 9U = 9 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ -D + U = 1 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 2U = 10 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «U» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement, el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{c} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 2U = 10 \end{array}\right\}.$$

De l'equació $2U = 10$, obtenim $U = 5$.

Substituint en l'altra equació: $D + U = 9 \to D + 5 = 9 \to D = 9 - 5 = 4$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Comprovem que el sistema $\begin{cases} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{cases}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 4 + 5 = 9 \\ \left\{\begin{array}{l} 10U + D = 10 \cdot 5 + 4 = 50 + 4 = 54 \\ (10D + U) + 9 = (10 \cdot 4 + 5) + 9 = (40 + 5) + 9 = 45 + 9 = 54 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i la solució del problema és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 4 + 5 = 45$, aleshores el preu de la jaqueta és de 45 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, és un preu possible per a una jaqueta.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

Les dues xifres sumen 9, per tant, podran ser (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) que formen, respectivament, els nombre 18, 81; 27, 72; 36, 63; 45, 54.

Com que en canviar l'ordre de les xifres el nombre augmenta en 9 unitats, és més gran que el nombre inicial, de manera que, de les parelles de nombres que generen cada parell de xifres que sumen 9, les possibles solucions serien: 18, 27, 36 i 45.

Les diferències que tenim entre el nombre que resulta d'invertir les xifres i l'inicial són: 81 – 18 = 63; 72 – 27 = 45; 63 – 36 = 27; 54 – 45 = 9.

L'únic nombre que verifica l'augment en 9 unitats és 45. Per tant, el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - o El preu és un nombre de dues xifres.
    - o Si se sumen les xifres ens dona 9.
    - o Si es canvia l'ordre de les xifres, el nombre augmenta 9 unitats.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - El preu de la jaqueta.

B) *El problema és resoluble?*

Farem proves per a veure si es poden satisfer les dades de l'enunciat.

El nombre que busquem és de dues xifres i la suma d'aquestes és 9. Aleshores, farem un tempteig amb nombres que les seues xifres sumen 9, per tant, podran ser: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 o 90.

Com que en canviar l'ordre de les xifres el nombre augmenta en 9 unitats, el nombre és més gran que el nombre inicial, per tant, les possibles solucions serien: 18, 27, 36 o 45.

Recollirem les proves en una taula:

Nombre	Nombre canviant l'ordre de las xifres	Nombre augmentat en 9 unitats	¿Si es canvia l'ordre de las xifres, el nombre augmentat en 9 unitats?
18	81	18 + 9 = 27	NO
27	72	27 + 9 = 36	NO
36	63	36 + 9 = 45	NO

Veiem que el nombre amb les xifres canviades d'ordre cada vegada s'aproxima més al nombre inicial més 9 unitats, de manera que creiem que, possiblement, el problema siga resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig de l'apartat anterior.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Nombre canviant l'ordre de las xifres	Nombre augmentat en 9 unitats	¿Si es canvia l'ordre de las xifres, el nombre augmentat en 9 unitats?
18	81	18 + 9 = 27	NO
27	72	27 + 9 = 36	NO
36	63	36 + 9 = 45	NO
45	54	45 + 9 = 54	SÍ

Hem trobat la solució, per tant, el preu de la jaqueta és 45 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, és un preu possible per a una jaqueta.

B) Comprovar la solució

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- o El preu és un nombre de dues xifres? És 45 €. Sí.
- o Si se sumen les xifres ens dona 9? 4 + 5 = 9. Sí.
- o Si es canvia l'ordre de les xifres, el nombre augmenta 9 unitats? 54 = 45 + 9. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

Problema C.3

Calcula un nombre de dues xifres sabent que la suma d'aquestes és 15 i si intercanviem l'ordre de les xifres, la diferència entre l'inicial i aquest nou nombre és de 9 unitats.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o El nombre té dues xifres.
  - o La suma de les xifres és 15.
  - o Si intercanviem l'ordre de les xifres, la diferència entre l'inicial i aquest nou nombre és de 9 unitats.
- Incògnites:
  - o Un nombre de dues xifres.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *El problema és resoluble?*

Com que el preu que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats, de manera que l'expressió polinòmica del nombre buscat és: $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres del preu té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 10D + U - 10U - D = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 9D - 9U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ D - U = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 2D = 16 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «D» serà un nombre natural d'una xifra; aleshores, possiblement, el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 2D = 16 \end{array}\right\}$.

De l'equació $2D = 16$, obtenim $D = 8$.

Aleshores, substituint en l'altra equació: $D + U = 15 \rightarrow 8 + U = 15 \rightarrow \rightarrow U = 15 - 8 \rightarrow U = 7$.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 8 + 7 = 15 \\ (10D + U) - (10U + D) = (10 \cdot 8 + 7) - (10 \cdot 7 + 8) = 87 - 78 = 9 \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i la solució del problema és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 8 + 7 = 87$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

La solució és raonable, ja que és un nombre de dues xifres.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

Les possibilitats que tenim, atés que les dues xifres del nombre han de sumar 15, són: 96, 87, 78 o 69.

De la dada: «si intercanviem l'ordre de les xifres, la diferència entre l'inicial i aquest nou nombre és de 9 unitats», deduïm que el minuend ha de ser més gran que el subtrahend, de manera que, al nombre buscat, la xifra de les desenes haurà de ser més gran que la de les unitats; per tant, només ens queden dues de les opcions anteriors: 96 i 87.

Les diferències que tenim entre el nombre inicial i el que resulta d'invertir l'ordre de les seues xifres són: 96 – 69 = 27; 87 – 78 = 9.

L'únic nombre que verifica que la diferència és 9 és el 87. Per tant, el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - El nombre té dues xifres.
  - La suma de les xifres és 15.
  - Si intercanviem l'ordre de les xifres, la diferència entre l'inicial i aquest nou número és de 9 unitats.
- Incògnites:
  - Un nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

El nombre que busquem és de dues xifres i la suma d'aquestes és 15. Aleshores, farem un tempteig amb nombres les xifres dels quals sumen 15, que podran ser: 96, 87, 78 o 69.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Recollim el tempteig en una taula:

Nombre	Nombre intercanviant l'ordre de las xifres	Diferència entre el nombre i el nombre intercanviant l'ordre de les xifres	La diferència entre el nombre i el nombre intercanviant l'ordre de les xifres = 9?
96	69	96 – 69 = 27	NO
87	78	87 – 78 = 9	SÍ

Hem trobat una solució, 87; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig per a veure si trobem una altra solució.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Nombre intercanviant l'ordre de las xifres	Diferència entre el nombre i el nombre intercanviant l'ordre de les xifres	La diferència entre el nombre i el nombre intercanviant l'ordre de les xifres = 9?
96	69	96 – 69 = 27	NO
87	78	87 – 78 = 9	SÍ
78	87	78 – 87 = –9	NO
69	96	69 – 96 = –27	NO

Per tant, tret de 87, no trobem cap altra solució. Així doncs, la solució del problema és el nombre 87.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- El nombre té dues xifres? 87, sí.
- La suma de les xifres és 15? 8 + 7 = 15, sí.
- Si intercanviem l'ordre de les xifres, la diferència entre l'inicial i aquest nou nombre és de 9 unitats? 87 – 78 = 9, sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

Problema C.4

Un nen de 6é nivell d'Educació Primària li pregunta a la seua mestra quina edat té i aquesta li respon: «És un nombre que si sumem les seues dues xifres dona 10, i que si invertim l'ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l'inicial». Quina edat té la mestra?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres.
  - Si sumem les seues dues xifres dona 10.
  - Si invertim l'ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l'inicial.
- Incògnites:
  - L'edat de la mestra.

B) *El problema és resoluble?*

Com que l'edat que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats, de manera que l'expressió polinòmica del nombre buscat és: $10 \cdot D + U$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres de l'edat té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 10U + D - 10D - U = 36 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ -9D + 9U = 36 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ -D + U = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 2U = 14 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «U» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 2U = 14 \end{array}\right\}$.

De l'equació $2U = 14$, obtenim $U = 7$.

Aleshores, substituint en l'altra equació: $D + U = 10 \rightarrow D + 7 = 10 \rightarrow$ $\rightarrow D = 10 - 7 \rightarrow D = 3$.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{array}\right\}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 3 + 7 = 10 \\ \left\{\begin{array}{l} 10 \cdot U + D = 10 \cdot 7 + 3 = 70 + 3 = 73 \\ 36 + (10 \cdot D + U) = 36 + (10 \cdot 3 + 7) = 36 + 37 = 73 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i la solució del problema és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 3 + 7 = 37$; per conseqüent, l'edat de la mestra és de 37 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i és una edat raonable per a una mestra.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

Les dues xifres sumen 10, per tant, podran ser (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) o (5, 5), formant, respectivament, els nombres: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

Però, d'una banda, 19 no és una edat possible d'una mestra d'Educació Primària i, de l'altra, com que en invertir l'ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l'inicial, la xifra de les unitats de l'edat és més gran que la de les desenes; per tant, les possibles solucions seran: 28, 37 o 46.

Les diferències que tenim entre el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres i l'inicial són: 82 – 28 = 54; 73 – 37 = 36; 64 – 46 = 18.

L'únic nombre que verifica l'augment donat és 37. Per tant, el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o L'edat és un nombre de dues xifres.
  - o Si sumem les seues dues xifres dona 10.
  - o Si invertim l'ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l'inicial.
- Incògnites:
  - o L'edat de la mestra.

B) *El problema és resoluble?*

El nombre que busquem és de dues xifres i la suma d'aquestes és 10. Aleshores, farem un tempteig amb nombres les xifres dels quals sumen 10; per tant, podran ser: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

El 19 no és una edat possible d'una mestra d'Educació Primària; d'altra banda, com que en invertir l'ordre de les xifres el nou nombre ha de ser més gran que l'inicial, la xifra de les unitats de l'edat és més gran que la de les desenes; per tant, descartem 91, 82, 73, 64 i 55, així que les possibles solucions seran: 28, 37 o 46.

Recollim en una taula les proves realitzades:

Nombre	Nombre més 36	Nombre amb les xifres invertides d’ordre	Si invertim l’ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l’inicial?
28	28 + 36 = 64	82	NO
37	37 + 36 = 73	73	SÍ

Hem trobat una solució, 37; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig per a veure si trobem una altra solució.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Nombre més 36	Nombre amb les xifres invertides d’ordre	Si invertim l’ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l’inicial?
28	28 + 36 = 64	82	NO
37	37 + 36 = 73	73	SÍ
46	46 + 36 = 82	64	NO

Per tant, tret de 37, no trobem cap altra solució. Així doncs, solució del problema: l’edat de la mestra és 37 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i és una edat raonable per a una mestra.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem verificant les dades de l’enunciat del problema:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- L’edat és un nombre de dues xifres? 37. Sí.
- Si sumem les seues dues xifres dona 10? 3 + 7 = 10. Sí.
- Si invertim l’ordre de les xifres, el nombre obtingut és 36 unitats més gran que l’inicial? 73, 36 + 37 = 73. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

Problema C.5

Un nen li pregunta al seu avi, que era matemàtic, quina edat té, i aquest li respon: «És un nombre de dues xifres, de manera que la xifra de les desenes és el doble que la de les unitats i, per altra banda, si invertim l’ordre de les xifres del nombre, el doble del nou nombre, menys nou unitats, és la meua edat». Quina edat té l’avi?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D’EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l’enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L’edat és un nombre de dues xifres.
  - La xifra de les desenes és el doble que la de les unitats.
  - Si invertim l’ordre de les xifres del nombre, el doble del nou nombre, menys nou unitats, és l’edat.
- Incògnites:
  - L’edat de l’avi.

B) *El problema és resoluble?*

Com l’edat que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» a la xifra de les desenes i «U» a la de les unitats, de manera que l’expressió polinòmica del nombre buscat és 10 · D + U.

El nombre que resulta d’invertir l’ordre de les xifres del preu té com a expressió polinòmica 10 · U + D.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\begin{cases} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{cases}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\begin{cases} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{cases} \to \begin{cases} D - 2U = 0 \\ 20U + 2D - 9 = 10D + U \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} D - 2U = 0 \\ 20U + 2D - 10D - U = 9 \end{cases} \to \begin{cases} D - 2U = 0 \\ -8D + 19U = 9 \end{cases} \to \begin{cases} 8D - 16U = 0 \\ -8D + 19U = 9 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 8D - 16U = 0 \\ 3U = 9 \end{cases} \to \begin{cases} D - 2U = 0 \\ 3U = 9 \end{cases}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «U» va a ser un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\begin{cases} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{cases}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\begin{cases} D - 2U = 0 \\ 3U = 9 \end{cases}$.

De l'equació $3U = 9$, obtenim $U = 3$.

Aleshores, substituint en l'altra equació: $D - 2 \cdot 3 = 0 \to D = 2 \cdot 3 = 6$.

Comprovem que el sistema $\begin{cases} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{cases}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\begin{cases} D = 6;\ 2 \cdot U = 2 \cdot 3 = 6 \\ \begin{cases} 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 2 \cdot (10 \cdot 3 + 6) - 9 = 2 \cdot 36 - 9 = 72 - 9 = 63 \\ 10 \cdot D + U = 10 \cdot 6 + 3 = 60 + 3 = 63 \end{cases} \end{cases}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt i la solució del problema és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 6 + 3 = 63$, doncs, l'edat de l'avi és 63 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, una edat possible pel seu avi.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

Com la xifra de les desenes és el doble que la de les unitats, haurà de ser un nombre parell: 2, 4, 6 o 8, doncs, l'edat de l'avi pot ser 84, 63, 42 o 21. Descartem 21 per no ser una edat possible d'una persona que és avi. Aleshores, les edats podran ser 84, 63 o 42.

Comprovem si alguna d'elles compleix la tercera dada:

- Si l'edat fora 84 anys: $2 \cdot 48 - 9 = 96 - 9 = 87 \neq 84$, doncs, 84 anys no és solució.
- Si l'edat fora 63 anys: $2 \cdot 36 - 9 = 72 - 9 = 63$, per tant, 63 anys és solució.
- Si l'edat fora 42 anys: $2 \cdot 24 - 9 = 48 - 9 = 39 \neq 42$, doncs, 42 anys no és solució.

Aleshores, 63 és el nombre buscat.

Que és la mateixa solució que havíem obtingut, per tant, el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres.
  - La xifra de les desenes és el doble que la de les unitats.
  - Si invertim l'ordre de les xifres del nombre, el doble del nou nombre, menys nou unitats, és l'edat.
- Incògnites:
  - L'edat de l'avi.

B) *El problema és resoluble?*

Comprovarem si, considerant nombres de dues xifres en què la xifra de les desenes és el doble que la de les unitats, algun d'ells compleix la tercera dada.

Recollirem les proves en una taula:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Nombre	Doble del nombre amb les xifres canviades d'ordre, menys nou	El doble del nombre amb les xifres canviades d'ordre, menys nou, és el nombre inicial?
84	$2 \cdot 48 - 9 = 87$	NO
63	$2 \cdot 36 - 9 = 63$	SÍ

Hem trobat una solució, 63; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig per a veure si trobem una altra solució.

3a FASE: EJECUTAR EL PLA

Nombre	Doble del nombre amb les xifres canviades d'ordre, menys nou	El doble del nombre amb les xifres canviades d'ordre, menys nou, és el nombre inicial?
84	$2 \cdot 48 - 9 = 87$	NO
63	$2 \cdot 36 - 9 = 63$	SÍ
42	$2 \cdot 24 - 9 = 39$	NO
21	$2 \cdot 12 - 9 = 15$	NO

Per tant, tret de 63, no trobem cap altra solució. Així doncs, solució del problema: l'edat del seu avi és 63 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i és una edat possible per al seu avi.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- L'edat és un nombre de dues xifres? 63. Sí.
- La xifra de les desenes és el doble que la de les unitats? $6 = 2 \cdot 3$. Sí.
- Si invertim l'ordre de les xifres del nombre, el doble del nou nombre, menys nou unitats, és l'edat? $2 \cdot 36 - 9 = 72 - 9 = 63$. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema C.6

En l'àrea de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat ha entrat una professora, graduada en Matemàtiques. Una companya li pregunta l'edat i, com la conversa és entre matemàtiques, li respon que «la suma de les xifres de la meua edat és set i, el doble de la meua edat és deu vegades la xifra de les unitats». Quina edat té?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres, ja que es tracta d'una persona que ha fet una carrera universitària.
  - Les xifres de l'edat sumen 7.
  - El doble de l'edat és igual a 10 vegades la xifra de les unitats.
- Incògnites:
  - L'edat de la professora contractada.

B) *El problema és resoluble?*

Com l'edat que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats, de manera que l'expressió polinòmica del nombre buscat és: $10 \cdot D + U$.

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left.\begin{cases} D + U = 7 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U \end{cases}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 2\cdot(10\cdot D+U)=10\cdot U \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 20D+2U=10U \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 20D-8U=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 5D-2U=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2D+2U=14 \\ 5D-2U=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2D+2U=14 \\ 7D=14 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 7D=14 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «D» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 2\cdot(10\cdot D+U)=10\cdot U \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 7D=14 \end{array}\right\}$.

De l'equació 7D = 14, obtenim D = 2.

Aleshores, substituint en l'altra equació: 2 + U = 7 → U = 7 – 2 = 5.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D+U=7 \\ 2\cdot(10\cdot D+U)=10\cdot U \end{array}\right\}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} D+U=2+5=7 \\ \left\{\begin{array}{l} 2\cdot(10\cdot D+U)=2\cdot(10\cdot 2+5)=2\cdot 25=50 \\ 10\cdot U=10\cdot 5=50 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt, i la solució del problema és: 10 · D + U = = 10 · 2 + 5 = 25, doncs, l'edat de la professora contractada és 25 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, és una edat raonable per a una professora.

B) *Comprovar la solució*

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Les dues xifres sumen 7, aleshores podran ser (0, 7), (1, 6), (2, 5) o (3, 4), que formen, respectivament, els nombres: 07, 70; 16, 61; 25, 52, i 34, 43.

Però, 07 s'escriu 7, que no és nombre de dues xifres, 70 és l'edat de jubilació forçosa del professorat universitari, de manera que no podria estar en actiu. A més, 16 no és una edat possible d'una graduada.

Per tant, les possibles solucions són: 61, 52, 43, 34 o 25.

Recollim el tempteig amb aquests nombres en una taula:

$10 \cdot D + U$	$2 \cdot (10 \cdot D + U)$	$10 \cdot U$	$¿2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U?$
61	$2 \cdot 61 = 122$	$10 \cdot 1 = 10$	NO
52	$2 \cdot 52 = 104$	$10 \cdot 2 = 20$	NO
43	$2 \cdot 43 = 86$	$10 \cdot 3 = 30$	NO
34	$2 \cdot 34 = 68$	$10 \cdot 4 = 40$	NO
25	$2 \cdot 25 = 50$	$10 \cdot 5 = 50$	SÍ

Aleshores, 25 és el nombre buscat.

Que és la mateixa solució que havíem obtingut; per tant, el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres, ja que es tracta d'una persona que ha fet una carrera universitària.
  - Les xifres de l'edat sumen 7.
  - El doble de l'edat és igual a 10 vegades la xifra de les unitats.
- Incògnites:
  - L'edat de la persona contractada.

B) El problema és resoluble?

Comprovem si, considerant nombres de dues xifres que les xifres sumen 7, algun d'ells compleix la tercera dada.

Com les xifres del nombre sumen 7, podran ser: 70, 61, 52, 43, 34 o 25.

Recollim els resultats en una taula:

Edat	Doble de l'edat	10 vegades la xifra de les unitats	Doble de l'edat és igual a 10 vegades la xifra de les unitats?
70	2 · 70 = 140	10 · 0 = 0	NO
61	2 · 61 = 122	10 · 1 = 10	NO
52	2 · 52 = 104	10 · 2 = 20	NO
43	2 · 43 = 86	10 · 3 = 30	NO

Veiem que el doble de l'edat i el valor de 10 vegades la xifra de les unitats, cada vegada s'aproximen més, per això creiem que, possiblement, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig de l'apartat anterior.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Edat	Doble de l'edat	10 vegades la xifra de les unitats	Doble de l'edat és igual a 10 vegades la xifra de les unitats?
70	2 · 70 = 140	10 · 0 = 0	NO
61	2 · 61 = 122	10 · 1 = 10	NO
52	2 · 52 = 104	10 · 2 = 20	NO
43	2 · 43 = 86	10 · 3 = 30	NO
34	2 · 34 = 68	10 · 4 = 40	NO
25	2 · 25 = 50	10 · 5 = 50	SÍ

Aleshores, 25 és el nombre buscat. Així doncs, l'edat de la professora contractada és de 25 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, és una edat raonable per a una professora.

B) Comprovar la solució

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- L'edat és un nombre de dues xifres? 25. Sí.
- Les xifres de l'edat sumen 7? $2 + 5 = 7$. Sí.
- El doble de l'edat és igual a 10 vegades la xifra de les unitats? $2 \cdot 25 = 50 = 10 \cdot 5$. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema; per tant, creiem que està ben resolt.

Problema C.7

Quin és el nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000, que en invertir l'ordre de les xifres resulta un nombre 99 unitats més petit que l'original i que en sumar les seues xifres ens dona 18?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000.
  - En invertir l'ordre de les xifres del nombre resulta un nombre 99 unitats més petit que l'original.
  - En sumar les seues xifres ens dona 18.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
    - Un nombre de tres xifres.

B) El problema és resoluble?

Es busca un nombre de tres xifres i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim com a incògnites les xifres, però com ens diuen que el nombre està comprés entre 900 i 1.000, la xifra de les centenes serà 9, per la qual cosa no tenim tres incògnites, sinó sols dues. Si a la xifra de les desenes li diem «D» i a la de les unitats de primer ordre «U», aleshores, la descomposició polinòmica del nombre seria $100 \cdot 9 + 10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres té com a expressió polinòmica $100 \cdot U + 10 \cdot D + 9$.

Les dades del enunciat del problema les traduïm en el sistema d'equacions
$$\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\}.$$

Procedim a triangularitzar el sistema de equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 100U + 10D + 9 = 900 + 10D + U - 99 \\ D + U = 18 - 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 100U + 10D - 10D - U = 900 - 99 - 9 \\ D + U = 18 - 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 99U = 792 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 9U = 72 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, per això el sistema és resoluble i, com «U» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} 9U = 72 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació $9U = 72$ obtenim $U = 72 : 9 = 8$.

Aleshores, substituint en l'altra equació: $D + 8 = 9 \rightarrow D = 9 - 8 = 1$.

Comprovem que el sistema $\begin{cases} 100 \cdot U + 10 \cdot D + 9 = (100 \cdot 9 + 10 \cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{cases}$ està correctament resolt substituint els valors calculats:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 100U + 10D + 9 = \ 100 \cdot 8 + 10 \cdot 1 + 9 = 800 + 10 + 9 = 819 \\ (100 \cdot 9 + 10D + U) - 99 = (900 + 10 \cdot 1 + 8) - 99 = 918 - 99 = 819 \end{array}\right\} \\ 9 + 1 + 8 = 18 \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i el nombre que s'ha obtingut com a solució és: $100 \cdot 9 + 10 \cdot D + U = 100 \cdot 9 + 10 \cdot 1 + 8 = 918$.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és encertada, aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el nombre, 918 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem quant hem d'afegir al nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres per a obtenir el nombre original i, també, la suma de les xifres (eren dades i ara passen a ser incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*En el 918, quantes unitats és menor el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres?, i quant sumen les xifres?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta siga 99, i a la segona, 18.

Fem els càlculs:

Per a la primera pregunta: $819 + x = 918 \rightarrow x = 918 - 819 = 99$.

Per a la segona pregunta: $9 + 1 + 8 = 18$.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000.

- o En invertir l'ordre de les xifres del nombre resulta un nombre 99 unitats més petit que l'original.
- o En sumar les seues xifres ens dona 18.

• Incògnites:

- o Un nombre de tres xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Es busca un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000, que en sumar les seues xifres ens dona 18; per tant, sabem que els possibles serien: 990, 981, 972, 963, 954, 945, 936, 927, 918 i 909, aleshores veurem en una taula qui o quins d'ells acompleixen l'altra dada de l'enunciat:

Nombre	Nombre que resulta en invertir l'ordre de les xifres	Nombre original menys 99	En invertir l'ordre de les xifres del nombre original resulta un nombre 99 unitats més petit que ell?
990	99	990 – 99 = 891	NO
981	189	981 – 99 = 882	NO
972	279	972 – 99 = 873	NO
963	369	963 – 99 = 864	NO
954	459	954 – 99 = 855	NO
945	549	945 – 99 = 846	NO
936	639	936 – 99 = 837	NO

Veiem en la taula que, a mesura que anem provant, la diferència s'aproxima més cap al nombre resultant d'invertir l'ordre de les xifres, per la qual cosa esperem que el problema tinga solució.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem amb les proves intentant trobar la solució.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Esgotarem el tempteig.

Nombre	Nombre que resulta en invertir l'ordre de les xifres	Nombre original menys 99	En invertir l'ordre de les xifres del nombre original resulta un nombre 99 unitats més petit que ell?
…	…	…	…
945	549	945 – 99 = 846	NO
936	639	936 – 99 = 837	NO
927	729	927 – 99 = 828	NO
918	819	918 – 99 = 819	SÍ
909	909	909 – 99 = 810	NO

Aleshores, sols hi ha una solució, 918.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

La solució és raonable ja que és un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000.

B) Comprovar la solució

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- Un nombre de tres xifres comprés entre 900 i 1.000? Sí.
- En invertir l'ordre de les xifres resulta un nombre 99 unitats més petit que el nombre original? 918 – 819 = 99. Sí.
- En sumar les seues xifres ens dona 18? 9 + 1 + 8 = 18. Sí.

El nombre 918 verifica les dades de l'enunciat; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema C.8

Un amic li pregunta a un altre, tots dos matemàtics: «Quant t'ha costat l'ordinador que t'has comprat?», i l'amic li contesta: «El preu és un nombre capicua de tres xifres que sumen 19, i si s'intercanvia la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats més gran que l'inicial». Quin és el preu de l'ordinador?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o El preu és un nombre capicua de tres xifres, que sumen 19.
  - o Si s'intercanvia la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats més gran que l'inicial.
- Incògnites:
  - o El preu de l'ordinador.

B) El problema és resoluble?

Es busca un nombre de tres xifres i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim com a incògnites les xifres, però com que ens diuen que el nombre és capicua, la xifra de les unitats ha de ser igual a la de les centenes, raó per la qual no tenim tres incògnites, sinó sols dues: la xifra de les desenes i la de les unitats.

Si a la xifra de les desenes li diem «D» i a la de les unitats «U», per ser capicua el nombre, la xifra de les centenes també serà «U»; aleshores, la descomposició polinòmica del nombre seria $100 \cdot U + 10 \cdot D + U$.

Les dades del problema les traduïm en el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema de equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} U + D + U = 19 \\ \quad 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{array}\right\} \rightarrow$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
Manuel Alcalde Esteban i Pedro Nieves Merideño
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}2U + D = 19 \\ 100D + 11U = (101U + 10D) + 90\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}2U + D = 19 \\ 100D + 11U - (101U + 10D) = 90\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}2U + D = 19 \\ 100D + 11U - 101U - 10D = 90\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}2U + D = 19 \\ 90D - 90U = 90\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}2U + D = 19 \\ D - U = 1\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}D + 2U = 19 \\ D - U = 1\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}D + 2U = 19 \\ 3U = 18\end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, raó per la qual el sistema és resoluble i, com «U» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l}U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90\end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l}D + 2U = 19 \\ 3U = 18\end{array}\right\}$.

De l'equació 3U = 18 obtenim U = 6.

Substituint en l'altra equació: D + 2 · 6 = 19 → D + 12 = 19 → D = 19 – 12 → D = 7.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l}U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90\end{array}\right\}$ està correctament resolt substituint els valors calculats:

$$\left\{\begin{array}{l}U + D + U = 6 + 7 + 6 = 19 \\ \left\{\begin{array}{l}100 \cdot D + 10 \cdot U + U = 100 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 6 = 766 \\ (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 = 100 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 6 + 90 = 766\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i el nombre que s'ha obtingut com a solució és: 100 · U + 10 · D + U = 100 · 6 + 10 · 7 + 6 = 676; aleshores, el preu de l'ordinador és de 676 €.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de tres xifres capicua i és un preu raonable per a un ordinador.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és encertada, aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el nombre, 676 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la suma de les xifres i, també, quant hem d'afegir-li per a obtenir el nombre que resulta d'intercanviar la xifra de les centenes amb la de les desenes (eren dades i ara passen a ser incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*En el 676, quant sumen les xifres?, i quantes unitats és major el nombre que resulta d'intercanviar la xifra de les centenes amb la de les desenes?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta siga 19, i a la segona, 90.

Fem els càlculs:

Per a la primera pregunta: $6 + 7 + 6 = 19$.

Per a la segona: $x + 676 = 766 \rightarrow x = 766 - 676 = 90$.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - El preu és un nombre capicua de tres xifres, que sumen 19.
  - Si s'intercanvien la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats més gran que l'inicial.
- Incògnites:
  - El preu de l'ordinador.

B) *El problema és resoluble?*

Fent proves veurem si es poden donar les dades que diu l'enunciat.

Les tres xifres han de sumar 19 i, com el nombre ha de ser capicua, la xifra de les centenes i la de les unitats han de ser la mateixa, aleshores, la primera xifra no pot ser 1, ja que, el nombre capicua més gran que podríem formar seria 191 i 1 + 9 + 1 = 11, anàlogament no pot ser 2, ni 3, ni 4, puix tindríem: 494 i 4 + 9 + + 4 = 17, per això els possibles nombres serien: 595, 676, 757, 838 i 919.

Recollim en una taula les proves per a veure si es pot donar, acomplir, l'altra dada de l'enunciat:

Nombre	Intercanviem les xifres de les desenes i les centenes	Nombre més 90	Si intercanviem la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats més gran que l'inicial?
595	955	685	NO
676	766	766	SÍ

Com que hem trobat una solució, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Veurem si hi ha més solucions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Esgotarem el tempteig per a veure si hi ha més nombres de tres xifres que sumen 19 perquè acomplisquen la segona dada de l'enunciat.

Nombre	Intercanviem les xifres de les desenes i les centenes	Nombre més 90	Si intercanviem la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats més gran que l'inicial?
595	955	685	NO
676	766	766	SÍ
757	577	847	NO
838	388	928	NO
919	199	1009	NO

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Aleshores, sols hi ha una solució, el preu de l'ordinador és de 676 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre capicua de tres xifres i, és un preu raonable per a un ordinador.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- El preu és un nombre capicua de tres xifres, que sumen 19? 6 + 7 + + 6 = 19, sí.
- Si s'intercanvien la xifra de les centenes amb la de les desenes, el nou nombre és 90 unitats major? 766, 676 + 90 = 766, sí.

Comprovem que el nombre 676 verifica les dades de l'enunciat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

Problema C.9

Un nombre té dues xifres que sumen 9. Si el doble d'aquest nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre, de quin nombre es tracta?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un nombre de dues xifres que sumen 9.
  - El doble d'aquest nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - El nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Es busca un nombre de dues xifres i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats de primer ordre.

Diem «D» a la xifra de les desenes i «U» a la de les unitats de primer ordre, aleshores, l'expressió polinòmica del nombre que volem calcular és 10 · D + U.

Per tant, les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2\cdot(10\cdot D + U) = 4 + 4\cdot U \end{matrix}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema de equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2\cdot(10\cdot D + U) = 4 + 4\cdot U \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D + 2U = 4 + 4\,U \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D + 2U - 4U = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D - 2U = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 10D - U = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 11D = 11 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, i com que «D» serà un nombre que és d'una xifra, el sistema és resoluble; aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2\cdot(10\cdot D + U) = 4 + 4\cdot U \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 11D = 11 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació 11D = 11 obtenim D = 1.

Aleshores, substituint en l'altra equació: 1 + U = 9 → U = 9 – 1 = 8.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2\cdot(10D + U) = 4 + 4\cdot U \end{matrix}\right\}$ està correctament resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 1 + 8 = 9 \\ \left\{\begin{matrix} 2\cdot(10D + U) = 2\cdot(10\cdot 1 + 8) = 2\cdot(10 + 8) = 2\cdot(18) = 36 \\ 4 + 4\cdot 8 = 4 + 32 = 36 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Per tant, el sistema està correctament resolt i la solució és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 1 + 8 = 18$.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

B) Comprovar la solució

Per a confirmar que la solució és encertada, aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el nombre, 18 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), calcularem la suma de les xifres i, també, quant és 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre (eren dades i ara passen a ser incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Si tenim el nombre 18, quant és la suma de les xifres?, i el doble de 18 és 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta siga 9, i a la segona, sí.

Fem els càlculs:

Per a la primera pregunta: $1 + 8 = 9$.

Per a la segona: $4 + 4 \cdot 8 = 4 + 32 = 36 = 2 \cdot 18$, aleshores, sí.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Un nombre de dues xifres que sumen 9.
  - El doble d'aquest nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - El nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Com que les dues xifres del nombre han de sumar 9, els nombres podrien ser 90; 81, 18; 72, 27; 63, 36, o 54, 45.

Provem a veure si es pot donar, acomplir, l'altra dada de l'enunciat, fet que recollim en una taula:

Nombre	Doble del nombre	4 més 4 vegades la xifra de les unitats	El doble del nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre?
90	180	$4 + 4 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$	NO
81	162	$4 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8$	NO
18	36	$4 + 4 \cdot 8 = 36$	SÍ

Com que hem trobat una solució, evidentment, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Per si hi hagueren més solucions, continuarem fent tots els temptejos en els nombres de dues xifres que abans hem dit que les xifres sumen 9.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Doble del nombre	4 més 4 vegades la xifra de les unitats	El doble del nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre?
90	180	$4 + 4 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$	NO
81	162	$4 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8$	NO
18	36	$4 + 4 \cdot 8 = 36$	SÍ
27	54	$4 + 4 \cdot 7 = 4 + 28 = 32$	NO

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Nombre	Doble del nombre	4 més 4 vegades la xifra de les unitats	El doble del nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre?
72	144	$4 + 4 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$	NO
36	72	$4 + 4 \cdot 6 = 4 + 24 = 28$	NO
63	126	$4 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16$	NO
45	90	$4 + 4 \cdot 5 = 4 + 20 = 24$	NO
54	108	$4 + 4 \cdot 4 = 4 + 16 = 20$	NO

Aleshores, no tenim cap més solució que el nombre 18.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

B) Comprovar la solució

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- Un nombre de dues xifres que sumen 9? $1 + 8 = 9$, sí.
- El doble d'aquest nombre és igual a 4 més 4 vegades la xifra de les unitats de primer ordre? $4 + 4 \cdot 8 = 4 + 32 = 36 = 2 \cdot 18$, sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema C.10

Cal trobar un nombre de dues xifres sabent que la suma d'aquestes és 12 i que, si invertim l'ordre de les xifres, el nombre que en resulta és igual a quatre setens d'ell.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Un nombre de dues xifres la suma de les quals és 12.
  - o Si invertim l'ordre de les xifres el nombre que en resulta és igual a quatre setens de l'original.
- Incògnites:
  - o Un nombre de dues xifres.

B) El problema és resoluble?

Es vol calcular un nombre de dues xifres i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats de primer ordre.

Diem «D» a la xifra de les desenes i «U» a la de les unitats de primer ordre, aleshores, l'expressió polinòmica del nombre que volem calcular és $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les seus xifres té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

Les dades de l'enunciat del problema es tradueixen en el sistema d'equacions

$$\left.\begin{cases} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{cases}\right\}.$$

Procedim a triangularitzar el sistema de equacions per a veure si és resoluble:

$$\left.\begin{cases} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} D + U = 12 \\ (10U + D) \cdot 7 = 4 \cdot (10D + U) \end{cases}\right\} \rightarrow$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 70U + 7D = 40D + 4U \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 70U + 7D - 40D - 4U = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 66U - 33D = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} U + D = 12 \\ 2U - D = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} U + D = 12 \\ 3U = 12 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, raó per la qual el sistema és resoluble i, com «U» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} U + D = 12 \\ 3U = 12 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació $3U = 12$ obtenim $U = 4$.
Aleshores, substituint en l'altra equació: $4 + D = 12 \rightarrow D = 12 - 4 \rightarrow D = 8$.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ està correctament resolt substituint els valors calculats:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 8 + 4 = 12 \\ \left\{\begin{matrix} 10U + D = 10 \cdot 4 + 8 = 48 \\ \frac{4}{7} \cdot (10D + U) = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot 8 + 4) = \frac{4}{7} \cdot 84 = 48 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i el nombre que s'ha obtingut com a solució és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 8 + 4 = 84$.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *Comprovar la solució*

Per a verificar la solució aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment». Si duplicàrem les dades, les xifres haurien de sumar 24, la qual cosa no és possible en els nombres de dues xifres; per tant, reduirem les dades a la meitat, que les xifres sumen 6, el que sí és possible en els nombres de dues xifres, és a dir, considerem el nou problema: «*Cal trobar un nombre de dues xifres sabent que la suma d'aquestes és 6 i que, si invertim l'ordre de les xifres, el nombre que en resulta és igual a quatre setens d'ell*». Esperem que la resposta siga la meitat de 84, és a dir, 42.

Fem els càlculs:

$$\left.\begin{cases} D+U=6 \\ 10\cdot U+D=\frac{4}{7}\cdot(10\cdot D+U) \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} D+U=6 \\ (10U+D)\cdot 7=4\cdot(10D+U) \end{cases}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{cases} D+U=6 \\ 70U+7D=40D+4U \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} D+U=6 \\ 70U+7D-40D-4U=0 \end{cases}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{cases} D+U=6 \\ 66U-33D=0 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} U+D=6 \\ 2U-D=0 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} U+D=6 \\ 3U=6 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} U+D=6 \\ U=2 \end{cases}\right\} \to$$

$$\to 2+D=6 \to \quad D=6-2=4.$$

Aleshores, $10 \cdot D + U = 10 \cdot 4 + 2 = 42$, com esperàvem; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un nombre de dues xifres que la suma d'aquestes és 12.
  - Si invertim l'ordre de les xifres el nombre que resulta és igual a quatre setens de l'original.
- Incògnites:
  - Un nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Es busca un nombre de dues xifres que la suma d'aquestes és 12, per tant, tenim les parelles de xifres següents que sumen 12: 3 i 9, 4 i 8, 5 i 7, a més de 6 i 6, amb les que podem formar, respectivament, els nombres de dues xifres: 39, 93; 48, 84; 57, 75, i 66.

La dada «si invertim l'ordre de les xifres el nombre que resulta és igual a quatre setens d'ell» ens diu que el nombre que obtenim és més xicotet que l'inicial, doncs, els possibles nombre inicial seran: 93, 84 i 75. El 66 ja no el considerem perquè en invertir l'ordre de les seues xifres no canvia.

Ara comprovem si quan invertim l'ordre de les seues xifres el nombre que resulta és igual a quatre setens d'ell, fet que recollim en una taula:

Nombre	Nombre que resulta si invertim l'ordre de les xifres de l'original	Quatre setens del nombre original	Si invertim l'ordre de les xifres el nombre que resulta és igual a quatre setens de l'original?
93	39	$(4/7) \cdot 93 = 53{,}14$	NO
84	48	$(4/7) \cdot 84 = 48$	SÍ

Com que hem trobat una solució, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Veurem si hi ha més solucions esgotant el tempteig.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Nombre que resulta si invertim l'ordre de les xifres de l'original	Quatre setens del nombre original	Si invertim l'ordre de les xifres el nombre que resulta és igual a quatre setens de l'original?
93	39	$(4/7) \cdot 93 = 53{,}14$	NO
84	48	$(4/7) \cdot 84 = 48$	SÍ
75	57	$(4/7) \cdot 75 = 42{,}85$	NO

Aleshores, només hi ha una solució, 84.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, doncs és un nombre de dues xifres.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució verifica les dades de l'enunciat del problema:

- És un nombre de dues xifres la suma de les quals és 12? 84, 8 + 4 = 12. Sí.
- Si invertim l'ordre de les xifres el nombre que en resulta és igual a quatre setens de l'original? 48, (4/7) · 84 = 48. Sí.

Comprovem que el nombre 84 verifica les dades de l'enunciat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

Problema C.11

Un amic li pregunta a un altre, tots dos matemàtics: «Quant t'ha costat el videojoc que t'has comprat?», i l'amic li contesta: «El preu és un nombre de dues xifres, la diferència entre el triple de la xifra de les desenes i el doble de la xifra de les unitats és un, i si intercanvies la xifra de les unitats amb la de les desenes el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial». Quin és el preu del videojoc?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - El preu del videojoc és un nombre de dues xifres.
  - La diferència entre el triple de la xifra de les desenes i el doble de la xifra de les unitats és un.
  - Si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les desenes el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
    - El preu del videojoc.

B) *El problema és resoluble?*

Com que el preu que busquem és un nombre de dues xifres i les dades es refereixen precisament a les xifres que formen el nombre, realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats.

Anomenarem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats, de manera que l'expressió polinòmica del nombre buscat és: $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres del preu té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

Aleshores, tenim el següent sistema de dues equacions i dues incògnites que recull les dades del problema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ 10U + D = 18 + 10D + U \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ 10U + D - 10D - U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -9D + 9U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -D + U = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -3D + 3U = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ U = 7 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble, i com «U» es un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ U = 7 \end{matrix}\right\}$.

De la segona igualtat tenim $U = 7$.

Aleshores, substituint en la primera equació: $3D - 2U = 1 \rightarrow 3D - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 3D - 14 = 1 \rightarrow 3D = 1 + 14 \rightarrow 3D = 15 \rightarrow D = 5$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ està ben resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1 \\ \left\{\begin{matrix} 10 \cdot U + D = 10 \cdot 7 + 5 = 70 + 5 = 75 \\ 18 + (10 \cdot D + y) = 18 + (10 \cdot 5 + 7) = 18 + (50 + 7) = 18 + 57 = 75 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Per tant, el sistema està ben resolt i la solució del problema és: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 5 + 7 = 57$; així doncs, el preu del videojoc és de 57 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, el preu del videojoc és un preu possible.

B) Comprovar la solució

Per a veure que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, per tempteig.

Com que ha de ser un nombre de dues xifres, sabem que la xifra de les desenes, la «D», ha de ser diferent de zero, per tant, podrà ser: 1, 2, ..., 9.

Sabem que el triple de les desenes menys el doble de les unitats és 1. El doble de les unitats és un nombre parell, aleshores, el triple de les desenes hauria de ser imparell perquè la diferència siga 1; per tant, la xifra de les desenes hauria de ser imparell, aleshores podria ser: 1, 3, 5, 7 o 9.

Com que $3 \cdot D - 2 \cdot U$ ha de ser igual a 1, elegida la xifra de les desenes, la «D», calcularem la de les unitats, la «U».

Si $D = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot U = 1 \rightarrow 3 - 2U = 1 \rightarrow 3 - 1 = 2U \rightarrow 2 = 2U \rightarrow U = 1$.

Aleshores, $10 \cdot D + U = 10 \cdot 1 + 1 = 10 + 1 = 11$, i si intercanviem l'ordre de les xifres és 11, que no és 18 unitats més gran que 11. Per tant, 11 no és la solució.

Recollim en una taula els càlculs amb les diferents possibilitats de «D» i «U»:

D	3D – 2U = 1 U = ¿?	U	10D + U	10U + D	18 + + (10D + U)	10U + D = = 18 + (10D + + U)?
1	3 · 1 – 2U = = 1 2 = 2y U = 1	1	11	11	18 + 11 = = 29	NO

D	3D – 2U = 1 U = ¿?	U	10D + U	10U + D	18 + + (10D + U)	10U + D = = 18 + (10D + + U)?
3	3 · 3 – 2U = = 1 8 = 2U U = 4	4	34	43	18 + 34 = = 52	NO
5	3 · 5 – 2U = = 1 14 = 2U U = 7	7	57	75	18 + 57 = = 75	SÍ
7	3 · 7 – 2U = = 1 20 = 2U U = 10	No és xifra				
9	3 · 9 – 2U = = 1 26 = 2U U = 13	No és xifra				

Així doncs, 57 és el nombre buscat.

Que és la mateixa solució que havíem obtingut; per tant, el problema està ben resolt.

NOTA: La comprovació es podria haver fet sense utilitzar la taula, però pensem que seria menys clara.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades e incògnites*

- Dades:
  - o El preu del videojoc és un nombre de dues xifres.
  - o La diferència entre el triple de la xifra de les desenes i el doble de la xifra de les unitats és un.
  - o Si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les desenes el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial.

- Incògnites:
  - El preu del videojoc.

B) *El problema és resoluble?*

El nombre que busquem és de dues xifres, per tant, la xifra de les desenes, la «D», ha de ser diferent de zero; aleshores, podrà ser: 1, 2, ..., 9.

Sabem que si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les desenes el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial, ja que el nou nombre és gairebé dues desenes més gran que l'inicial; aleshores, en el nombre inicial la xifra de les unitats de primer ordre hauria de ser 2 unitats més gran que la xifra de les desenes, per tant, trobem les possibilitats següents: 13, 24, 35, 46, 57, 68 i 79.

Farem un tempteig amb aquests nombres:

Nombre	Triple de les desenes menys el doble de la xifra de les unitats és 1?	Nombre canviant l'ordre de les xifres	Si s'intercanvia l'ordre de les xifres el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial?
13	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3 \rightarrow$ NO		
24	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2 \rightarrow$ NO		
35	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1 \rightarrow$ NO		
46	$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \rightarrow$ NO		
57	$3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$ SÍ	75	$18 + 57 = 75 \rightarrow$ SÍ

Hem trobat una solució, 57; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig per a veure si trobem una altra solució.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Triple de les desenes menys el doble de la xifra de les unitats és 1?	Nombre canviant l'ordre de les xifres	Si s'intercanvia l'ordre de les xifres el nou número és 18 unitats més gran que l'inicial?
…	…	…	…
57	$3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$ SÍ	75	$18 + 57 = 75 \rightarrow$ SÍ
68	$3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 2 \rightarrow$ NO		
79	$3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 = 3 \rightarrow$ NO		

Per tant, tret de 57, no trobem cap altra solució. Així doncs, solució del problema: el preu del videojoc és 57 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres i, a més, és un preu possible per a un videojoc.

B) *Comprovar la solució*

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- El preu del videojoc és un nombre de dues xifres? 57. Sí.
- La diferència entre el triple de la xifra de les desenes i el doble de la xifra de les unitats és un? $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1$. Sí.
- Si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les desenes el nou nombre és 18 unitats més gran que l'inicial? $18 + 57 = 75$. Sí.

Veiem que es verifiquen les dades del problema, per tant, creiem que està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema C.12

Es troben dos veïns i un li pregunta a l'altre quina edat té, i obté la resposta següent: «La meua edat és un nombre de dues xifres en què les xifres es diferencien en una unitat i, si dividim la meua edat entre el nombre que resulte d'invertir l'ordre de les xifres que formen la meua edat, el quocient és 1,2». En vista de la resposta el veí va pensar: «Aquest deu ser matemàtic». Quina és l'edat?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres que, entre elles, es diferencien en una unitat.
  - Si dividim l'edat entre el nombre que resulte d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat, el quocient és 1,2.
- Incògnites:
  - L'edat del veí.

B) *El problema és resoluble?*

Es vol calcular una edat, un nombre de dues xifres, i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats de primer ordre.

Anomenem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats de primer ordre, aleshores, l'expressió polinòmica de l'edat que volem calcular és $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'intercanviar l'ordre de les xifres que formen l'edat té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

El quocient de dividir l'edat entre el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres és més gran que 1, amb la qual cosa l'edat és més gran que el nombre obtingut en intercanviar les xifres, per tant, la xifra de les desenes de l'edat buscada ha de ser més gran que la de les unitats. Com que les dues xifres de l'edat es diferencien en 1 unitat, aleshores, la dada de l'enunciat del problema referent a la diferència de les xifres es tradueix matemàticament en «$D - U = 1$»; per tant, les dades de l'enunciat del problema es tradueixen en el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{matrix} D - U = 1 \\ \dfrac{10 \cdot D + U}{10 \cdot U + D} = 1{,}2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D - U = 1 \\ 10 \cdot D + U = 1{,}2 \cdot (10 \cdot U + D) \end{matrix}\right\}.$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Procedim a triangularitzar el sistema de equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 10\cdot D + U = 1{,}2\cdot(10\cdot U + D) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 10D + U = 12U + 1{,}2D \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 10D + U - 12U - 1{,}2D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 8{,}8D - 11U = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 11D - 11U = 11 \\ 8{,}8D - 11U = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 11D - 11U = 11 \\ 2{,}2D = 11 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «D» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 10\cdot D + U = 1{,}2\cdot(10\cdot U + D) \end{array}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{array}{l} 11D - 11U = 11 \\ 2{,}2D = 11 \end{array}\right\}$.

De l'equació 2,2D = 11 obtenim D = 11 : 2,2 = 5.

Aleshores, en l'altra equació 11D – 11 U = 11, simplificada D – U = 1, substituint D = 5 tenim: 5 – U = 1 → –U = 1 – 5 = –4 → U = 4.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D - U = 1 \\ 10\cdot D + U = 1{,}2\cdot(10\cdot U + D) \end{array}\right\}$ està correctament resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} D - U = 5 - 4 = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} 10D + U = 10\cdot 5 + 4 = 54 \\ 1{,}2\cdot(10U + D) = 1{,}2\cdot(10\cdot 4 + 5) = 1{,}2\cdot 45 = 54 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i el nombre que es vol calcular, l'edat del veí, és: 10 · D + U = 10 · 5 + 4 = 54.

4a FASE EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

La solució és raonable, ja que és un nombre de dues xifres i, a més a més, una edat possible.

B) *Comprovar la solució*

Per a verificar la solució aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat del veí, 54 anys (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la diferència entre les xifres i, també, quin és el quocient entre l'edat i el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat (eren dades i ara passen a ser incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*El veí té 54 anys, quina és la diferència entre les xifres de l'edat?, i si dividim l'edat entre el nombre que resulte d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat, quin serà el quocient?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta siga 1, i a la segona, 1,2.

Fem els càlculs:

Per a la primera pregunta: $5 - 4 = 1$.

Per a la segona: $\frac{54}{45} = 1{,}2$.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - L'edat és un nombre de dues xifres que, entre elles, es diferencien en una unitat.
  - Si dividim l'edat entre el nombre que resultaria d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat, el quocient és 1,2.
- Incògnites:
  - L'edat del veí.

B) *El problema és resoluble?*

Les dues xifres de l'edat es diferencien en 1 unitat i el quocient és més gran que 1, amb la qual cosa l'edat ha de ser més gran que el nombre obtingut en intercanviar les xifres, per tant, la xifra de les desenes de l'edat buscada ha de ser més gran que la de les unitats; aleshores, els possibles nombres de dues xi-

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

fres, que aquestes es diferencien en 1 unitat i, que el nombre és més gran que l'obtingut en intercanviar les xifres, són: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 o 98.

Provem a veure si es pot donar, acomplir, l'altra dada de l'enunciat, fet que recollim en una taula:

Edat	Nombre obtingut en invertir l'ordre de les xifres	Quocient entre l'edat i el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat	El quocient és igual a 1,2?
10	1	10	NO
21	12	1,75	NO
32	23	1,39	NO
43	34	1,26	NO

Veiem en la taula que, a mesura que fem les proves, el quocient s'aproxima més cap al 1,2 de l'enunciat; per això esperem que el problema tinga solució.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Esgotarem el tempteig.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Edat	Nombre obtingut en invertir l'ordre de les xifres	Quocient entre l'edat i el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat	El quocient és igual a 1,2?
10	1	10	NO
21	12	1,75	NO
32	23	1,39	NO
43	34	1,26	NO
54	45	1,2	SÍ
65	56	1,16	NO

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Edat	Nombre obtingut en invertir l'ordre de les xifres	Quocient entre l'edat i el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat	El quocient és igual a 1,2?
76	67	1,13	NO
87	78	1,11	NO
98	89	1,10	NO

Una vegada esgotat el tempteig, 54 és el nombre buscat, l'edat del veí.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

La solució és raonable, ja que és un nombre de dues xifres i, a més a més, una edat possible.

B) Comprovar la solució

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- L'edat és un nombre de dues xifres que, entre elles, es diferencien en una unitat? 5 – 4 = 1. Sí.
- Si dividim l'edat entre el nombre que resultaria d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat, el quocient és 1,2? 54 : 45 = 1,2. Sí.

El nombre 54 verifica les dades de l'enunciat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

Problema C.13

Es vol calcular un nombre de dues xifres. La diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre és el desé nombre natural parell distint de zero. Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre desitjat.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - o Un nombre de dues xifres.
    - o La diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre és el desé nombre natural parell distint de zero.
    - o Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre desitjat.

- Incògnites:
    - o El nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Es vol calcular un nombre de dues xifres i les dades es refereixen a les xifres que el formen, per això realment tenim dues incògnites, la xifra de les desenes i la de les unitats de primer ordre.

Anomenem «D» la xifra de les desenes i «U» la de les unitats de primer ordre; aleshores, l'expressió polinòmica del nombre que volem calcular és $10 \cdot D + U$.

El nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres té com a expressió polinòmica $10 \cdot U + D$.

El desé nombre natural parell distint de zero és 20, per tant, les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} 3 \cdot D - U = 20 \\ 18 + (10 \cdot U + D) = 10 \cdot D + U \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \cdot D - U = 20 \\ 18 + (10 \cdot U + D) = 10 \cdot D + U \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3D - U = 20 \\ (10U - U) + (D - 10D) = -18 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3D - U = 20 \\ 9U - 9D = -18 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3D - U = 20 \\ U - D = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3D - U = 20 \\ -D + U = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3D - U = 20 \\ 2D = 18 \end{array}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, de manera que el sistema és resoluble i, com «D» serà un nombre natural d'una xifra, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR DEL PLA

El sistema $\begin{cases} 3\cdot D - U = 20 \\ 18 + (10\cdot U + D) = 10\cdot D + U \end{cases}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\begin{cases} 3D - U = 20 \\ 2D = 18 \end{cases}$.

De l'equació 2D = 18 obtenim D = 9.

Substituint en l'altra equació: 3 · 9 – U = 20 → 27 – U = 20 → – U = 20 – 27= = –7 → U = 7.

Comprovem que el sistema $\begin{cases} 3\cdot D - U = 20 \\ 18 + (10\cdot U + D) = 10\cdot D + U \end{cases}$ està correctament resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3D - U = 3\cdot 9 - 7 = 27 - 7 = 20 \\ \left\{ \begin{array}{l} 18 + (10U + D) = 18 + (10\cdot 7 + 9) = 18 + (70 + 9) = 18 + 79 = 97 \\ 10D + U = 10\cdot 9 + 7 = 97 \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Per tant, el sistema està correctament resolt i el nombre que es vol calcular és: 10 · D + U = 10 · 9 + 7 = 97.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és encertada, aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el nombre, 97 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i la xifra de les unitats de primer ordre i, també, quant hem d'afegir al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres per a obtenir el 97 (eren dades i ara passen a ser incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*En el 97, quant és la diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre?, i quant hem d'afegir-li al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres per a obtenir el 97?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta siga 20, i la segona, 18.

Fem els càlculs:

Per a la primera pregunta: 3 · 9 – 7 = 20.

Per a la segona: x + 79 = 97 → x = 97 – 79 = 18.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Un nombre de dues xifres.
  - o La diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre és el desé nombre natural parell distint de zero.
  - o Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre desitjat.
- Incògnites:
  - o El nombre de dues xifres.

B) *El problema és resoluble?*

Farem proves per a veure si es poden satisfer les dades de l'enunciat.

Com que la diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre és el desé nombre natural parell distint de zero, és a dir, 20, el triple de la xifra de les desenes haurà de ser major o igual que 20; per això haurem de començar les proves suposant que la xifra de les desenes és 7, puix $6 \cdot 3 = 18$ i $7 \cdot 3 = 21$, i continuar augmentant-la. Per a la xifra de les unitats de primer ordre elegirem la que corresponga per a que la diferència siga 20.

Per tant, les possibles solucions seran: 71, 84 o 97.

Recollim en una taula les proves per a veure si acompleixen la tercera dada:

Nombre	Nombre que resulta d'intercanviar les xifres	18 més nombre resultat d'intercanviar les xifres	Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre inicial?
71	17	$18 + 17 = 35$	NO
84	48	$18 + 48 = 66$	NO

Veiem en aquests nombres que si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, cada vegada la suma s'aproxima més al nombre inicial; per tant, és possible que el problema siga resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Esgotarem el tempteig per a veure si hi ha un nombre de dues xifres que compleix les dades de l'enunciat.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre	Nombre que resulta d'intercanviar les xifres	18 més nombre resultat d'intercanviar les xifres	Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre inicial?
71	17	18 + 17 = 35	NO
84	48	18 + 48 = 66	NO
97	79	18 + 79 = 97	SÍ

Esgotat el tempteig, 97 és el nombre buscat.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

Sí, ja que és un nombre de dues xifres.

B) Comprovar la solució

Ho fem verificant les dades de l'enunciat del problema:

- Un nombre de dues xifres? 97 és un nombre de dues xifres.
- La diferència entre el nombre que resulta de triplicar les desenes i el nombre de les unitats de primer ordre és el desé nombre natural parell distint de zero? $(9 \cdot 3) - 7 = 20$, sí.
- Si afegim divuit al nombre que resulta d'intercanviar les seues xifres, obtindrem el nombre desitjat? $18 + 79 = 97$, sí.

El nombre 97 verifica les dades de l'enunciat, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: Aquesta comprovació també es podria fer com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

Tema 4: Problemes d'operacions amb nombres naturals

4.1. Introducció

Presentem en aquest tema la RPM en diferents contextos, on el denominador comú dels problemes és la utilització de les operacions aritmètiques amb nombres naturals per a la seua resolució, corresponent-se, per tant, amb el tema 4 de MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (UJI, Pla d'Estudis 2010) o MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (reforma/modificació de 2018) i amb el tema 2 d'Alcalde, Pérez i Lorenzo (2014).

4.2. Problemes

Problema D.1

Carmen col·loca en les prestatgeries del magatzem 76 motxilles amb rodes i 94 sense rodes. Per a completar un prestatge posa 24 motxilles. Quants prestatges omplí? Si no arriba a emplenar un prestatge, quantes motxilles posarà per a que estiguen totes en les prestatgeries?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Carmen col·loca en les prestatgeries del magatzem 76 motxilles amb rodes i 94 sense rodes.
  - o A cada prestatge posa 24 motxilles.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:

    - o Nombre de prestatges que ompli.
    - o Nombre de motxilles que li sobren, és a dir, amb quantes no omplirà un altre prestatge.

B) *El problema és resoluble?*

Podem anar posant les motxilles una a una en les prestatgeries, fins que les haurem posades totes, o comptant-les de 24 en 24, fins que les haurem comptades totes. En eixe moment, comptarem el nombre de prestatges plens de motxilles, o quantes vegades hem comptat 24 motxilles, i sabrem quants prestatges ompli Carmen.

Finalment, comptarem les motxilles amb les quals no hem emplenat un altre prestatge, o amb quantes motxilles no hem pogut arribar a comptar fins a 24, que seran les que li sobren, les que no omplin un altre prestatge.

Així contestarem les preguntes, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem el nombre total de motxilles que tenim sumant el nombre de motxilles amb rodes i sense rodes.

b) En anar col·locant 24 motxilles en cada prestatge estem repartint en parts equipotents, o en anar comptant-les de 24 en 24, en qualsevol cas, numèricament el que estem fent és dividir el nombre total de motxilles que tenim per 24; per tant, com a segon pas farem aquesta divisió.

c) El quocient de la divisió anterior serà el nombre de prestatges que ompli Carmen i, el residu de la divisió, quantes motxilles li sobren, quantes no omplin un altre prestatge.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 76 + 94 = 170 motxilles en total.

b) $\begin{array}{r|l} 170 & 24 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$

c) Carmen ompli 7 prestatges i li sobren 2 motxilles, o amb 2 motxilles no emplena un altre prestatge.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Carmen col·loca en cada prestatge, arrodonint, 25 motxilles; si en foren 150 en total, ompliria 6 prestatges, i si en foren 200 en total, n'ompliria 8 prestatges. Com que només posa una motxilla menys en cada prestatge i hi ha 170 motxilles en total, el nombre de prestatges que ompliria deuria ser, aproximadament, entre 6 i 8, com és el cas, per això pensem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

L'operació realitzada per trobar la solució del problema ha sigut una divisió, per tant, per a comprovar la correcció dels resultats, farem la prova de la divisió:

$24 \cdot 7 + 2 = 168 + 2 = 170.$

Per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució podria ser la mateixa.

Problema D.2

En una ferreteria venen claus en caixes de tres mides diferents. La caixa gran conté el doble d'unitats que la mitjana, i aquesta, el doble que la petita. Si compres una caixa de cada mida, te n'emportes 350 unitats. Quants claus té cada caixa?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o En una ferreteria venen claus en caixes de tres mides diferents.
  - o La caixa gran conté el doble d'unitats que la mitjana, i aquesta, el doble que la petita.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- o Si compres una caixa de cada mida, t'emportes 350 unitats.

• Incògnites:

- o Nombre de claus que té cada caixa.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «G» a la quantitat de claus de la caixa gran, «M» a la quantitat de claus de la caixa mitjana i «P» a la de la petita, sent G, M i P nombres naturals, aleshores traduïm les dades al sistema d'equacions $\left\{\begin{matrix} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{matrix}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \\ 2M + 2P + P = 350 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \\ 2(2P) + 2P + P = 350 \end{matrix}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \\ 4P + 2P + P = 350 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \\ 7P = 350 \end{matrix}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, per això el sistema és resoluble i, com que P serà un nombre natural, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \\ 7P = 350 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació 7P = 350 obtenim P = 350 : 7 = 50.
Aleshores, substituint en les altres dues equacions:

$$\left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2P \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} G = 2M \\ M = 2\cdot 50 = 100 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} G = 2\cdot 100 = 200 \\ M = 100 \end{matrix}\right\}.$$

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{matrix}\right\}$ està ben resolt:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

$$\left\{\begin{array}{l} G = 200;\ 2 \cdot M = 2 \cdot 100 = 200 \\ M = 100;\ 2 \cdot P = 2 \cdot 50 = 100 \\ G + M + P = 200 + 100 + 50 = 350 \end{array}\right\}.$$

Efectivament, el sistema està ben resolt, per tant, la solució és la següent: quantitat de claus de la caixa gran, 200; quantitat de claus de la caixa mitjana, 100, i quantitat de claus de la petita, 50.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí, perquè són nombres naturals corresponents a caixes de tres mides diferents i que compleixen les dades del problema.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», en concret, duplicarem les dades, per això considerem el nou problema: «*En una ferreteria venen claus en caixes de tres mides diferents. La caixa gran conté el doble d'unitats que la mitjana, i aquesta, el doble que la petita. Si compres una caixa de cada mida, te n'emportes 700 unitats. Quants claus té cada caixa?*». Esperem que el nombre de claus de cada caixa siga el doble: quantitat de claus de la caixa gran, 400; de la caixa mitjana, 200, i de la petita, 100.

Fem els càlculs necessaris:

$$\left\{\begin{array}{l} G = 2 \cdot M \\ M = 2 \cdot P \\ G + M + P = 700 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = 2P \\ 2M + M + P = 700 \end{array}\right\} \rightarrow 2(2P) + 2P + P = 700 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4P + 2P + P = 700 \rightarrow 7P = 700 \rightarrow P = 100.$$

$M = 2 \cdot 100 = 200 \rightarrow G = 2 \cdot 200 = 400.$

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - En una ferreteria venen claus en caixes de tres mides diferents.
  - La caixa gran conté el doble d'unitats que la mitjana, i aquesta, el doble que la petita.
  - Si compres una caixa de cada mida, te n'emportes 350 unitats.
- Incògnites:
  - Nombre de claus que té cada caixa.

B) *El problema és resoluble?*

La suma de claus de les tres caixes és 350, per tant, d'entrada, considerarem un nombre que el triple s'aproxime a 350 i, com 350 dividit per 3 és, aproximadament, 117, aquesta podria ser la quantitat de claus de la caixa mitjana.

Com que el nombre de claus de la caixa mitjana és doble que el de la petita, aquest nombre haurà de ser parell, per tant, considerem que la quantitat de claus de la caixa mitjana és 116, de manera que la de la caixa petita seria $116 : 2 = 58$ claus i la de la caixa gran $116 \cdot 2 = 232$ claus.

La suma de les tres quantitats seria $58 + 116 + 232 = 406$ claus, més gran que 350 claus.

La suma anterior és bastant més gran que 350, per això ara considerem que el nombre de claus de la caixa mitjana és 100, per tant, la de la petita seria 50 i la de la gran 200.

La suma de les tres quantitats seria $50 + 100 + 200 = 350$ claus, com volem; aleshores, el problema és resoluble, ja que aquestes quantitats són una solució del problema.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Seguirem fent proves amb nombres que satisfacen les dades de l'enunciat per a veure si hi ha més solucions.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Si la quantitat de claus de la caixa mitjana és 100 la suma de les tres quantitats és 350 claus, provarem amb un nombre menor per a la caixa mitjana, i també un altre de major, però sempre nombres parells, per això que hem justificat abans.

Si la quantitat de claus de la caixa mitjana fora de 98, la quantitat de claus de la caixa petita seria de 49 i la de la caixa gran de 196. La suma del nombre de claus de les tres caixes seria 49 + 98 + 196 = 343 claus, que és menys que 350 claus.

Si la quantitat de claus de la caixa mitjana fora de 102, la quantitat de claus de la caixa petita seria de 51 i la de la caixa gran de 204. La suma del nombre de claus de les tres caixes seria 51 + 102 + 204 = 357 claus, que és més que 350 claus.

Per tant, no val la pena continuar provant amb altres quantitats de claus per a la caixa mitjana menors de 100, ja que la suma sempre serà més petita que 350, i tampoc val la pena continuar provant amb altres quantitats de claus per a la caixa mitjana majors de 100, ja que la suma sempre serà més gran que 350, per això creiem que podem afirmar que només hi ha una solució: la caixa petita tindrà 50 claus; la caixa mitjana, 100 claus, i la gran, 200 claus.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí perquè són nombres naturals corresponents a caixes de tres mides diferents i que compleixen les dades del problema.

B) *Comprovar la solució*

Aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la quantitat de claus de la caixa petita, 50 claus (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la quantitat total de claus si comprem una caixa de cada mida (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*En una ferreteria venen claus en caixes de tres mides diferents. La caixa gran conté el doble d'unitats que la mitjana, i aquesta, el doble que la petita. Sabem que la caixa petita té 50 claus. Si compres una caixa de cada mida, quants claus compres en total?*». Esperem que el nombre total de claus siga 350.

Fem els càlculs necessaris:

- Quantitat de claus de la caixa mitjana: 50 · 2 = 100.
- Quantitat de claus de la caixa gran: 100 · 2 = 200.
- Suma del nombre de claus de totes les caixes: 50 + 100 + 200 = 350; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema D.3

Rosa té 25 anys menys que el seu pare, Joan, i 26 anys més que el seu fill Albert. Entre les edats de tots tres sumen 98 anys. Quina és l'edat de cada un?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Rosa té 25 anys menys que el seu pare, Joan.
  - o Rosa té 26 anys més que el seu fill Albert.
  - o Entre les edats dels tres sumen 98 anys.
- Incògnites:
  - o L'edat de cada un.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «R» a l'edat de Rosa, «J» a la del seu pare Joan i «A» a la de el seu fill Albert; sent R, J i A nombres naturals, aleshores traduïm les dades al sistema d'equacions $\left.\begin{cases} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{cases}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left.\begin{cases} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} R - J = -25 \\ R - A = 26 \\ R + J + A = 98 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} R - J = -25 \\ A - J = -51 \\ 2J + A = 123 \end{cases}\right\} \to$$
$$\to \left.\begin{cases} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 2J + A = 123 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 3J = 174 \end{cases}\right\}.$$

Que és un sistema compatible determinat, per això el sistema és resoluble i, com que J serà un nombre natural, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 3J = 174 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació 3J = 174, obtenim J = 174 : 3 = 58.
Aleshores, substituint en les altres dues equacions:

$$\left\{\begin{matrix} 58 - R = 25 \\ 58 - A = 51 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -R = 25 - 58 = -33 \\ -A = 51 - 58 = -7 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} R = 33 \\ A = 7 \end{matrix}\right\}.$$

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{matrix}\right\}$ està ben resolt:

$$\left\{\begin{matrix} R = 33;\ J - 25 = 58 - 25 = 33 \\ R = 33;\ 26 + A = 26 + 7 = 33 \\ R + J + A = 33 + 58 + 7 = 98 \end{matrix}\right\}.$$

Efectivament, el sistema està ben resolt, per tant, la solució és la següent: edat de Rosa 33 anys; edat del seu pare, Joan, 58 anys, i edat del seu fill Albert, 7 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí perquè són nombres naturals corresponents a l'edat de tres persones que poden ser una dona, el seu pare i el seu fill.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat de Rosa (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la suma de les edats (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*Rosa té 33 anys, 25 anys menys que el seu pare, Joan, i 26 anys més que el seu fill Albert. Quina és la suma de les edats de tots tres*?». Esperem que la suma de les edats siga 98 anys.

Fem els càlculs necessaris:

Rosa té 25 anys menys que el seu pare, Joan; per tant, edat de Joan: R = = J – 25 → 33 = J – 25 → J = 33 + 25 = 58 anys.

Rosa té 26 anys més que el seu fill Albert; aleshores, edat d'Albert: R = 26 + A → 33 = 26 + A → A = 33 – 26 = 7 anys.

La suma de les edats de tots tres serà: R + J + A = 33 + 58 + 7 = 98 anys; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Rosa té 25 anys menys que el seu pare, Joan.
  - Rosa té 26 anys més que el seu fill Albert.
  - Entre les edats de tots tres sumen 98 anys.
- Incògnites:
  - L'edat de cada un.

B) *El problema és resoluble?*

Farem proves amb edats que satisfacen les condicions de la relació d'edats entre cada dues persones i mirarem si la suma pot donar 98 anys.

Com que Rosa és la persona l'edat de la qual és el referent, començarem per assignar-li una edat.

Té 26 anys més que el seu fill, per tant suposem que ella té 27 anys, per això el seu fill, Albert, tindria 1 any, i aleshores, el pare de Rosa, Joan, tindria 52 anys. Entre tots tres sumen: 27 + 1 + 52 = 80 anys, menys que la dada de l'enunciat.

Si Rosa tinguera 30 anys, el seu fill tindria 4 anys i son pare, 55 anys. Entre tots tres sumarien: 30 + 4 + 55 = 89 anys, menys que la dada de l'enunciat.

Si Rosa tinguera 35 anys, el seu fill tindria 9 anys i son pare, 60 anys. Entre tots tres sumarien: 35 + 9 + 60 = 104 anys, més que la dada de l'enunciat.

Veiem, doncs, que amb unes edats possibles la suma no arriba als 98 anys amb altres es passa, per tant, esperem que hi haja unes edats, respectant les relacions de l'enunciat, la suma de les quals siga 98 anys; és a dir, esperem que el problema siga resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Seguirem fent proves amb edats que satisfacen les condicions de la relació d'edats entre cada dues persones i mirarem si la suma dona 98 anys.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Si Rosa tinguera 30 anys, la suma de les edats és menys de 98 anys, i si Rosa tinguera 35 anys, la suma de les edats és més de 98 anys; per tant, probablement, l'edat de Rosa està entre 30 i 35 anys.

Provem amb 32 anys. El seu fill tindria 6 anys i son pare, 57 anys. Entre tots tres sumarien: 32 + 6 + 57 = 95 anys, menys que la dada de l'enunciat.

Si Rosa tinguera 33 anys, el seu fill tindria 7 anys i son pare, 58 anys. Entre tots tres sumarien: 33 + 7 + 58 = 98 anys, com cal; per tant, la solució és la següent: edat de Rosa 33 anys, edat del seu pare, Joan, 58 anys, i edat del seu fill Albert, 7 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Creiem que sí, perquè són nombres naturals corresponents a l'edat de tres persones que poden ser una dona, el seu pare i el seu fill.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució és correcta aplicant el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat de Rosa (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la suma de les edats (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema «*Rosa té 33 anys, 25 anys menys que el seu pare, Joan, i 26 anys més que el seu fill Albert. Quina és la suma de les edats de tots tres*?». Esperem que la suma de les edats siga 98 anys.

Fem els càlculs necessaris:

Rosa té 25 anys menys que el seu pare Joan, doncs, edat de Joan: 33 + 25 = = 58 anys.

Rosa té 26 anys més que el seu fill Albert, aleshores, edat d'Albert: 33 – 26 = = 7 anys.

La suma de les edats de tots tres serà: 33 + 58 + 7 = 98 anys; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema D.4

En un partit de bàsquet s'han venut un total de 1.200 entrades, de les quals 525 s'han venut a 5 euros cadascuna, 490 entrades a 6 euros cadascuna i la resta a 7 euros cadascuna. Quin ha sigut el total recaptat en aquest partit?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - S'han venut un total de 1.200 entrades.
  - 525 entrades s'han venut a 5 euros cadascuna.
  - 490 entrades s'han venut a 6 euros cadascuna.
  - La resta d'entrades s'han venut a 7 euros cadascuna.
- Incògnites:
  - Diners totals recaptats en aquest partit.

B) El problema és resoluble?

Si sumem la quantitat d'entrades venudes a 5 € i a 6 € i la restem a la quantitat total d'entrades venudes, obtindrem la quantitat d'entrades venudes a 7 €.

Multiplicant la quantitat d'entrades de cada tipus pel seu preu, respectivament, obtindrem els diners recaptats amb cada un dels tres tipus d'entrades, aleshores, sumant aquestes tres quantitats obtindrem els diners recaptats en el partit.

Per tant, el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem les entrades venudes a 7 €, per a això sumarem les entrades de 5 € i de 6 € i restarem aquesta quantitat del total d'entrades venudes.
b) Calcularem els diners recaptats amb cada tipus d'entrada, per a això multipliquem el nombre d'entrades de cada tipus pel seu preu.
c) Sumarem els diners recaptats amb cada tipus d'entrada i obtindrem els diners totals recaptats.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 525 + 490 = 1.015 entrades de 5 € o 6 € → 1.200 – 1.015 = 185 entrades de 7 €.
b) 525 · 5 = 2.625 € recaptats amb les entrades de 5 €.
490 · 6 = 2.940 € recaptats amb les entrades de 6 €.
185 · 7 = 1.295 € recaptats amb les entrades de 7 €.
c) 2.625 + 2.950 + 1.295 = 6.860 € de recaptació total en el partit.

Solució: 6.860 € de recaptació total en el partit.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Si les 1.200 entrades s'hagueren venut totes a 5 € s'haurien recaptat 6.000 € i si s'hagueren venut totes a 7 € s'haurien recaptat 8.400 €; com que la solució obtinguda venent unes entrades a 5 €, altres a 6 € i la resta a 7 € és 6.860 €, quantitat compresa entre 6.000 € i 8.400 €, la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el total recaptat al partit, 6.860 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i anem a calcular quantes entrades s'han venut en total (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*En un partit de bàsquet s'han recaptat 6.860 €, 525 entrades s'han venut a 5 euros cadascuna; 490 entrades a 6 euros cadascuna i la resta a 7 euros cadascuna. Quantes entrades s'han venut en total?*». Esperem que la resposta siga 1.200 entrades.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs:

Multipliquem el nombre d'entrades venudes a 5 € pel preu de cadascuna d'elles: 525 · 5 = 2.625 € recaptats amb les entrades de 5 €.

Fem el mateix amb les entrades venudes a 6 €: 490 · 6 = 2.940 €.

Sumem les dues quantitats anteriors per a saber els diners recaptats amb les entrades de 5 € i de 6 €: 2.625 + 2.940 = 5.565 €.

Per a saber els diners recaptats amb les entrades de 7 € restarem, als diners recaptats en total en el partit, els diners recaptats amb les entrades de 5 € i de 6 €: 6.860 – 5565 = 1.295 € recaptats amb les entrades de 7 €.

Calculem el nombre d'entrades de 7 € dividint el que s'ha recaptat amb la venda d'aquest tipus d'entrades entre el preu de cadascuna d'elles: 1.295 : 7 = = 185 entrades de 7 €.

Obtenim el total d'entrades venudes sumant la quantitat d'entrades venudes de cada tipus: 525 + 490 + 185 = 1.200 entrades venudes en total.

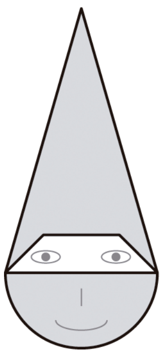
Com esperàvem, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

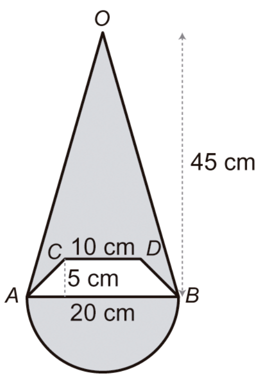
❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Com a alumnat d'Educació Primària es resoldria igual que com a estudiantat del Grau en Mestre/a d'Educació Primària.

Problema D.5

Amb motiu del Carnestoltes, i per a que els xiquets i les xiquetes de 3r de Primària es disfressen de gnoms, s'ha decidit fer una careta com la de la figura.





Per a comprar el material ens preguntem: «Quant mesura la superfície de la careta?».

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o El dibuix de la careta amb les mesures de les diferents parts que la configuren.
- Incògnites:
  - o Mesura de la superfície de la careta.

B) *El problema és resoluble?*

La careta està composta per un semicercle i un triangle isòsceles, sent el diàmetre del semicercle la base del triangle isòsceles.

Del semicercle coneixem la mesura del diàmetre i del triangle isòsceles la mesura de la base i de l'alçària, per això podem dibuixar les dues figures amb els instruments necessaris o programes de geometria dinàmica.

En posar-se la careta l'alumnat de 3r de Primària, per a poder veure l'exterior, l'entorn, en la figura que formen el semicercle i el triangle isòsceles hem de retallar i llevar un trapezi isòsceles, del que també tenim les mesures, per això també el podem dibuixar.

Finalment, amb un acetat centimetrat o amb centímetres quadrats de paper, tela, etc., podem mesurar la superfície de la careta, per això creiem que el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que sabem les mesures del semicercle, del triangle isòsceles i del trapezi isòsceles, calcularem:

a) L'àrea del semicercle, que denominarem «A_{SC}».
b) L'àrea del triangle isòsceles, que denominarem «A_{TRI}».
c) L'àrea del trapezi isòsceles, que denominarem «A_{TRA}».
d) Finalment, sumarem les àrees del semicercle i del triangle isòsceles, i li restarem l'àrea del trapezi isòsceles, de manera que tindrem la mesura de la superfície de la careta, que anomenarem «A_C».

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $A_{SC} = ½ (\pi \cdot 10^2) = ½ (\pi \cdot 100) = 50 \cdot \pi$ cm^2.
b) $A_{TRI} = ½ (20 \cdot 45) = ½ (900) = 450$ cm^2.
c) $A_{TRA} = [½ (20 + 10)] \cdot 5 = [½ (30)] \cdot 5 = ½\ 150 = 75$ cm^2.
d) $A_C = (A_{SC} + A_{TRI}) – A_{TRA} = (50 \cdot \pi + 450) – 75 = (157 + 450) – 75 = 532$ cm^2.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

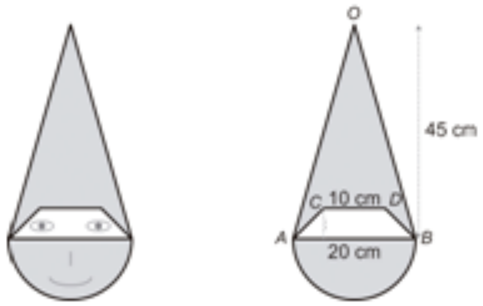
A) *La solució és raonable?*

La careta és part d'un rectangle de 55 cm d'alçària (10 cm del radi del semicercle i 45 cm d'alçària del triangle isòsceles) i 20 cm d'ample (els 20 cm del diàmetre del semicercle) i és més gran que el cercle complet.

L'àrea del rectangle és 55 · 20 cm^2 = 1.100 cm^2, més gran que la mesura de la superfície de la careta (532 cm^2), i l'àrea del cercle és 314 cm^2, més petita que la mesura de la superfície de la careta, per això creiem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, elegim la de «canvi de dada per incògnita i viceversa». Suposem que coneixem la mesura de la superfície de la careta, 532 cm^2 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la mesura de l'altura del trapezi isòsceles (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, l'enunciat del nou problema és: «*Amb motiu del Carnestoltes, i per a que els xiquets i les xiquetes de 3r de Primària es disfressen de gnoms, s'ha decidit fer una careta com la de la figura. Si la careta de cartó mesura 532 cm^2, quina és la mesura de l'altura del trapezi isòsceles que es retalla per a poder veure?*». Esperem que la resposta siga 5 cm.



ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs necessaris:

Pels càlculs de la 3a fase sabem que $A_{SC} = 50 \cdot \pi$ cm^2 i $A_{TRI} = 450$ cm^2.

Aleshores, $A_C = 532$ cm^2 $= (A_{SC} + A_{TRI}) - A_{TRA} = (50 \cdot \pi + 450) - A_{TRA} = (50 \cdot \pi + 450) - A_{TRA} = (157 + 450) - A_{TRA} = 607 - A_{TRA} \rightarrow A_{TRA} = 607 - 532 = 75$ cm^2.

Diem «a» a l'alçària del trapezi, tenim $A_{TRA} = 75$ cm^2 $= [½ (20 + 10)] \cdot a = [½ (30)] \cdot a = 15 \cdot a \rightarrow a = 75 : 15 = 5$ cm.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Segons el Decret 108/2014, en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, en el 5é curs d'Educació Primària, trobem el contingut «Fórmules per a calcular àrees de paral·lelograms i triangles», i en el 6é curs d'Educació Primària, els continguts «L'àrea del cercle» i «Càlcul de l'àrea i perímetre de figures planes i composicions d'aquestes», criteri d'avaluació BL4.2 «Calcular l'àrea i el perímetre de qualsevol figura plana (en entorns naturals, artístics, arquitectònics, etc.) utilitzant diverses estratègies (fórmules, descomposició, etc.) per a explicar el món que ens rodeja», de manera que es pot fer el càlcul de l'àrea del semicercle, del triangle isòsceles i, concretament, l'àrea del trapezi isòsceles es pot calcular descomponent el trapezi isòsceles en un rectangle i dos triangles rectangles iguals.

Per això creiem que el problema es pot plantejar en 6é curs d'Educació Primària.

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o El dibuix de la careta amb les mesures de les diferents parts que la configuren.
- Incògnites:
  - o Mesura de la superfície de la careta.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *El problema és resoluble?*

La careta està composta per un semicercle i un triangle isòsceles, sent el diàmetre del semicercle la base del triangle isòsceles.

Del semicercle coneixem la mesura del diàmetre i del triangle isòsceles la mesura de la base i de l'alçària, per això podem dibuixar les dues figures amb els instruments necessaris o programes de geometria dinàmica.

En posar-se la careta l'alumnat de 3r de Primària, per a poder veure l'exterior, l'entorn, en la figura que formen el semicercle i el triangle isòsceles hem de retallar i llevar un trapezi isòsceles, del que també tenim les mesures, per això també el podem dibuixar.

Finalment, amb un acetat quadriculat en centímetres quadrats o amb centímetres quadrats de paper, tela, etc., podem mesurar la superfície de la careta, per això creiem que el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que sabem les mesures del semicercle, del triangle isòsceles i del trapezi isòsceles:

a) Calcularem l'àrea del semicercle, que denominarem «A_{SC}».
b) Calcularem l'àrea del triangle isòsceles, que denominarem «A_{TI}».
c) El trapezi isòsceles el descompondrem en un rectangle i dos triangles rectangles iguals. El rectangle tindrà per base la base menor del trapezi, i per alçària, l'altura del trapezi. Els triangles rectangles tindran per base la meitat de la diferència entre la base major i la base menor del trapezi, i per alçària, l'altura del trapezi.
Calcularem l'àrea del trapezi isòsceles, que anomenarem «A_{TRA}», sumant-hi l'àrea del rectangle, que denominarem «A_{REC}», i les dels dos triangles rectangles iguals, que anomenarem «A_{TR}».
d) Finalment, sumarem les àrees del semicercle i del triangle isòsceles, i li restarem l'àrea del trapezi isòsceles, amb la qual cosa tindrem la mesura de la superfície de la careta, que denominarem «A_C».

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $A_{SC} = ½ (\pi \cdot 10^2) = ½ (\pi \cdot 100) = ½ (314) = 157\ cm^2$.
b) $A_{TI} = ½ (20 \cdot 45) = ½ (900) = 450\ cm^2$.
c) $A_{REC} = 10 \cdot 5 = 50\ cm^2$, $A_{TR} = ½\ 5 \cdot 5 = 12{,}5\ cm^2$.
$A_{TRA} = A_{REC} + 2 \cdot A_{TR} = 50 + 2 \cdot 12{,}5 = 50 + 25 = 75\ cm^2$.
d) $A_C = (A_{SC} + A_{TI}) – A_{TRA} = (157 + 450) – 75 = 532\ cm^2$.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

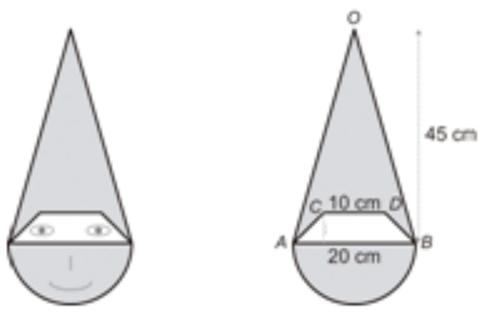
A) *La solució és raonable?*

La careta és part d'un rectangle de 55 cm d'alçària (10 cm del radi del semicercle i 45 cm d'alçària del triangle isòsceles) i 20 cm d'ample (els 20 cm del diàmetre del semicercle) i és més gran que el cercle complet.

L'àrea del rectangle és $55 \cdot 20$ cm^2 = 1.100 cm^2, més gran que la mesura de la superfície de la careta (532 cm^2), i l'àrea del cercle és de 314 cm^2, més petita que la mesura de la superfície de la careta, per això creiem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, elegim la de «canvi de dada per incògnita i viceversa». Suposem que coneixem la mesura de la superfície de la careta, 532 cm^2 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la mesura de l'alçària del trapezi isòsceles (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, l'enunciat del nou problema és: «*Amb motiu del Carnestoltes, i per a que els xiquets i les xiquetes de 3r de Primària es disfressen de gnoms, s'ha decidit fer una careta com la de la figura. Si la careta de cartó mesura 532 cm^2, quina és la mesura de l'altura del trapezi isòsceles que es retalla per a poder veure?*». Esperem que la resposta siga 5 cm.

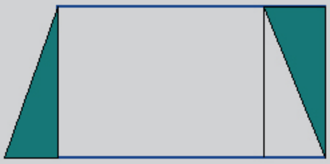


ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs necessaris:

Pels càlculs de la 3a fase sabem que $A_{SC} = 157$ cm^2 i $A_{TI} = 450$ cm^2.

Aleshores, $A_C = (A_{SC} + A_{TI}) - A_{TRA} \rightarrow 532 = (157 + 450) - A_{TRA} \rightarrow 532 = 607 - A_{TRA} \rightarrow A_{TRA} = 607 - 532 = 75$ cm^2



En la descomposició que hem fet del trapezi isòsceles, si agafem un dels triangles rectangles iguals (verd fosc), el girem 180º i el componem amb l'altre triangle rectangle igual, fent coincidir les dues hipotenuses, el trapezi isòsceles es converteix en un rectangle, per això les dues figures tindran la mateixa superfície i, per tant, la mateixa àrea, 75 cm^2.

Aquest rectangle té una base que fa (10 + 5) cm i, d'alçària, la del trapezi isòsceles; per tant, el producte de la mesura de la base, 15 cm, per la mesura de l'altura ens donarà l'àrea del rectangle, 75 cm^2. Aleshores, la mesura de l'alçària és un nombre que multiplicat per 15 dona 75, per conseguënt, la mesura de l'altura = 75 : 15 = 5 cm.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema D.6

Un apicultor té 65 ruscs amb una producció de dues collites a l'any, a raó de 9 quilos de mel per rusc en cada collita. La mel s'envasa en pots de mig quilo i es comercialitza en caixes de 6 pots que es venen a 24 euros la caixa. Quants ingressos anuals proporciona l'abellar?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o L'apicultor té 65 ruscs.
  - o Amb una producció de dues collites a l'any.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- A raó de 9 quilos per rusc en cada collita.
- La mel s’envasa en pots de mig quilo.
- La mel es comercialitza en caixes de 6 pots que es venen a 24 euros la caixa.

• Incògnites:

- Els ingressos anuals que proporciona l’abellar.

B) El problema és resoluble?

Cada rusc proporciona 9 quilos de mel en una collita i es fan dues collites a l’any, per tant, sabem quants quilos de mel proporciona cada rusc en un any.

Si l’apicultor té 65 ruscs, podem saber quants quilos de mel trau en un any.

Com que la mel s’envasa en pots de mig quilo i cada 6 pots fan una caixa, sabent que cada caixa es ven a 24 euros, podem saber per quant es ven cada pot de mig quilo i, per tant, a com es ven el quilo de mel.

Si podem saber quants quilos de mel trau en un any i a com es ven el quilo de mel, multiplicaríem aquestes quantitats per a calcular els ingressos d’un any, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Multiplicarem 9 quilos de mel en una collita per 2 collites a l’any, i obtindrem quants quilos de mel proporciona cada rusc en un any.
b) Multiplicarem els quilos de mel per rusc en un any pels 65 ruscs, i sabrem la quantitat de quilos que obté l’apicultor en un any.
c) Dividirem 24 euros per 6 i obtindrem el preu d’un pot de mel de mig quilo.
d) Obtindrem el preu del quilo de mel, multiplicant el valor d’abans per 2.
e) Per últim, multiplicarem la quantitat de quilos de mel que obté en un any pel preu del quilo de mel, i així calcularem els ingressos anuals de l’apicultor.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $9 \cdot 2 = 18$ quilos de mel per rusc en un any.
b) $18 \cdot 65 = 1.170$ quilos de mel en un any.
c) $24 : 6 = 4$ €, preu de mig quilo de mel.
d) $4 \cdot 2 = 8$ €, preu del quilo de mel.
e) $1.170 \cdot 8 = 9.360$ € en un any.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Com que en un any obté 1.170 quilos de mel, aproximadament 1.100 quilos, que a 8 € el quilo serien 8.800 €, el resultat de 9.360 € és una quantitat raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canvi de dades proporcionalment», concretament, duplicarem la dada «quantitat de ruscs que té l'apicultor», per això considerem el problema següent: «*Un apicultor té 130 ruscs amb una producció de dues collites a l'any, a raó de 9 quilos per rusc en cada collita. La mel s'envasa en pots de mig quilo i es comercialitza en caixes de 6 pots que es venen a 24 euros la caixa. Quins ingressos anuals proporciona l'abellar?*». Esperem que els ingressos siguen de 18.720 €, el doble que en el problema original.

Fem els càlculs corresponents:

a) 9 · 2 = 18 quilos de mel per rusc en un any.
b) 18 · 130 = 2.340 quilos de mel en un any.
c) 24 : 6 = 4 €, preu de mig quilo de mel.
d) 4 · 2 = 8 €, preu del quilo de mel.
e) 2.340 · 8 = 18.720 € en un any.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - L'apicultor té 65 ruscs.
  - Amb una producció de dues collites a l'any.
  - A raó de 9 quilos per rusc en cada collita.

- La mel s'envasa en pots de mig quilo.
- Es comercialitza en caixes de 6 pots que es venen a 24 euros la caixa.

• Incògnites:

- Quins ingressos anuals proporciona l'abellar.

B) El problema és resoluble?

Com que en un any l'apicultor té dues collites, veurem si podem saber quants ingressos té en una collita i després els multiplicarem per dos per a calcular els diners d'un any.

Cada rusc proporciona 9 quilos de mel en una collita, com que té 65 ruscs, podem saber quants quilos de mel recol·lecta en una collita.

Com que la mel s'envasa en pots de mig quilo, amb cada quilo de mel omplim dos pots, per tant, si sabem quants quilos de mel n'ha tret sabrem quants pots envasarà.

Sabent quants pots té, com que cada 6 pots omplen una caixa, podem calcular quantes caixes comercialitzarà.

I com que cada caixa es ven a 24 euros, podrem calcular quants ingressos obtindrà en una collita.

Aleshores, com ja hem dit, multiplicaríem per dos els ingressos que obtindrà en una collita per a calcular els diners d'un any, de manera que el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Multiplicarem el nombre de ruscs, 65, pels quilos de mel que recol·lecta en cadascun, 9, per a saber quants quilos de mel trau en una collita.
b) Com que amb cada quilo de mel omplim dos pots, multiplicarem per dos els quilos de mel i sabrem la quantitat de pots de mig quilo que obté.
c) Dividirem per 6 la quantitat de pots i sabrem quantes caixes comercialitza en una collita.
d) La quantitat de caixes obtinguda en el tercer pas la multiplicarem per 24 € i sabrem els ingressos que té en una collita.
e) Per últim, multiplicarem per dos els ingressos d'una collita per a calcular els diners d'un any.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 65 · 9 = 585 quilos de mel en una collita.
b) 585 · 2 = 1.170 pots de mig quilo de mel en una collita.
c) 1.170 : 6 = 195 caixes en una collita.
d) 195 · 24 = 4.680 € en una collita.
e) 4.680 · 2 = 9.360 € d'ingressos en un any.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Com que una caixa de 6 pots de mig quilo la ven a 24 €, el mig quilo el ven a 4 €, per tant, el quilo de mel el ven a 8 €, i en un any recol·lecta «585 · 2» quilos de mel, aproximadament 1.100 kg, que a 8 €/kg serien 8.800 €, per això creiem que el resultat 9.360 € és una quantitat raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canvi de dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem els ingressos anuals, 9.360 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem a quin preu ven cada caixa (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*Un apicultor té 65 ruscs amb una producció de dues collites a l'any, a raó de 9 quilos per rusc en cada collita. La mel s'envasa en pots de mig quilo i es comercialitza en caixes de 6 pots, havent obtingut uns ingressos anuals de 9.360 €. A quin preu ven cada caixa?*». Esperem que el preu siga de 24 €.

Fem els càlculs corresponents:

Sabem pels càlculs fets en la 3a fase que en una collita recol·lecta 195 caixes de mel, de manera que, com fa dues collites en un any, recol·lecta 195 · 2 = = 390 caixes de mel en dues collites.

Si venent les 390 caixes de mel ingressa 9.360 €, cada caixa de 6 pots de mel la ven a 9.360 : 390 = 24 €.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema D.7

Teresa és set anys més gran que el seu germà Antoni, i aquest dos anys més petit que la seua germana Blanca. Calcula l'edat de cada un sabent que la suma de les seus tres edats és de 36 anys.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - Teresa és set anys més gran que el seu germà Antoni.
    - Antoni és dos anys més petit que la seua germana Blanca.
    - La suma de les tres edats és de 36 anys.

- Incògnites:
    - L'edat de cadascun.

B) *El problema és resoluble?*

Si anomenem *x* l'edat de Blanca, l'edat d'Antoni serà «x – 2» i l'edat de Teresa és «(x – 2) + 7», aleshores, les dades del problema es poden traduir en la següent equació lineal d'una incògnita $[(x-2)+7]+(x-2)+x=36$ que és resoluble; per això, possiblement, el problema també ho serà.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Resoldrem l'equació anterior per a obtenir l'edat de Blanca.
b) Calcularem l'edat d'Antoni restant-li 2 anys a l'edat de Blanca.
c) Calcularem l'edat de Teresa sumant-li'n 7 a l'edat d'Antoni.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $[(x-2)+7]+(x-2)+x=36 \rightarrow [x+5]+(x-2)+x=36 \rightarrow x+5+x-2+$ $+x=36 \rightarrow 3x+3=36 \rightarrow 3x=36-3=33 \rightarrow x=33:3=11$

Verifiquem que l'equació $[(x-2)+7]+(x-2)+x=36$ està ben resolta substituint el valor trobat:

$[(x-2)+7]+(x-2)+x=[(11-2)+7]+(11-2)+11=[9+7]+9+11=$ $=16+9+11=36.$

Veiem que, efectivament, es verifica l'equació; doncs, l'equació està ben resolta.

Per tant, Blanca té 11 anys.

b) Edat d'Antoni: $11-2=9$ anys.
c) Edat de Teresa: $9+7=16$ anys.

Solució: Teresa té 16 anys; Antoni, 9 anys, i Blanca, 11 anys.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que la suma de les edats és 36 i, com que són tres germans, la mitjana de les edats és de 12 anys; així doncs, donat que les edats obtingudes són una mica major i/o una mica més petit que 12, la solució obtinguda és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat de Blanca, 11 anys (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem quant sumen les edats dels tres germans (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Teresa és set anys més gran que el seu germà Antoni, i aquest dos anys més petit que la seua germana Blanca, que té 11 anys. Calcula la suma de les edats dels tres germans*». Esperem que la resposta siga 36 anys.

Fem els càlculs:

Blanca té 11 anys, aleshores, edat d'Antoni: 11 – 2 = 9 anys, i edat de Teresa: 9 + 7 = 16 anys.

La suma de les edats dels tres germans és: 16 + 9 + 11 = 36 anys; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Teresa és set anys més gran que el seu germà Antoni.
  - o Antoni és dos anys més petit que la seua germana Blanca.
  - o La suma de les tres edats és de 36 anys.
- Incògnites:
  - o L'edat de cadascun.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *El problema és resoluble?*

Ho veurem per tempteig.

Com que Antoni té 7 anys menys que Teresa, aquesta no pot tenir menys de 8 anys, aleshores:

Edat de Teresa	Edat d'Antoni = = edat de Teresa – 7	Edat de Blanca = = edat d'Antoni + 2	Suma de les edats
8	8 – 7 = 1	1 + 2 = 3	8 + 1 + 3 = 12
9	9 – 7 = 2	2 + 2 = 4	9 + 2 + 4 = 15
10	10 – 7 = 3	3 + 2 = 5	10 + 3 + 5 = 18
11	11 – 7 = 4	4 + 2 = 6	11 + 4 + 6 = 21
12	12 – 7 = 5	5 + 2 = 7	12 + 5 + 7 = 24

Veiem en el tempteig que la suma de les edats sempre és un múltiple de 3, més gran que 12, i com que la suma real de les edats és 36, que és un nombre múltiple de 3 i més gran que 12, creiem que trobarem edats que acomplisquen les dades del problema, per això creiem que el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Continuarem el tempteig.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Edat de Teresa	Edat d'Antoni = = edat de Teresa – 7	Edat de Blanca = = edat d'Antoni + 2	Suma de les edats
13	13 – 7 = 6	6 + 2 = 8	13 + 6 + 8 = 27
14	14 – 7 = 7	7 + 2 = 9	14 + 7 + 9 = 30
15	15 – 7 = 8	8 + 2 = 10	15 + 8 + 10 = 33
16	16 – 7 = 9	9 + 2 = 11	16 + 9 + 11 = 36

Les edats trobades són: Teresa té 16 anys; Antoni, 9 anys, i Blanca, 11 anys.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són edats possibles de tres germans i la suma és de 36 anys.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem l'edat de Blanca, 11 anys (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem quant sumen les edats dels tres germans (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Teresa és set anys més gran que el seu germà Antoni, i aquest dos anys més petit que la seua germana Blanca, que té 11 anys. Calcula la suma de les edats dels tres germans*». Esperem que la resposta siga 36 anys.

Fem els càlculs:

Blanca té 11 anys, aleshores, edat d'Antoni: 11 – 2 = 9 anys, i edat de Teresa: 9 + 7 = 16 anys.

La suma de les edats dels tres germans és: 16 + 9 + 11 = 36 anys; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema D.8

En començar els estudis de Secundària, a l'estudiantat se li fa un test amb 30 qüestions sobre matemàtiques. Per cada qüestió contestada correctament se'ls dona 5 punts i per cada qüestió incorrecta o no contestada se'ls lleva 2 punts. Un estudiant va obtenir en total 94 punts. Quantes qüestions va respondre correctament?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Test amb 30 qüestions.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Per cada qüestió contestada correctament se'ls dona 5 punts i per cada qüestió incorrecta o no contestada se li lleven 2 punts.
- Un estudiant va obtenir, en total, 94 punts.

• Incògnites:

- Nombre de qüestions que va respondre correctament.

B) *El problema és resoluble?*

Si diem «C» a la quantitat de qüestions que va respondre correctament i «N» a la quantitat de qüestions que va respondre incorrectament o no va respondre, sent C i N nombres naturals, aleshores les dades es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$.

Procedim a triangularitzar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble: $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 7 = 154 \end{matrix}\right\}$.

Que és un sistema compatible determinat, per això el sistema és resoluble i, com que C serà un nombre natural, aleshores, possiblement el problema també serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

El sistema $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$ al triangularitzar-lo l'hem convertit en $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 7 = 154 \end{matrix}\right\}$.

De l'equació $C \cdot 7 = 154$ obtenim $C = 154 : 7 = 22$.

Aleshores, substituint en l'altra equació: $22 + N = 30 \rightarrow N = 30 - 22 = 8$.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$ està ben resolt:

$$\left\{\begin{matrix} C + N = 22 + 8 = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 22 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 110 - 16 = 94 \end{matrix}\right\}.$$

Efectivament, el sistema està ben resolt, per tant, la solució és la següent: l'estudiant va respondre correctament 22 qüestions.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, perquè és un nombre natural més petit que 30, donat que la quantitat de punts que va obtenir no va sobrepassar els 150.

B) *Comprovar la solució*

Apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la quantitat de qüestions respostes correctament, 22 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la quantitat de punts obtinguts (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*En començar els estudis de Secundària, a l'estudiantat se li fa un test amb 30 qüestions sobre matemàtiques. Per cada qüestió contestada correctament se'ls dona 5 punts i per cada qüestió incorrecta o no contestada se'ls lleva 2 punts. Un estudiant va respondre correctament 22 qüestions. Quants punts va obtenir?*». Esperem que la resposta siga 94 punts.

Fem els càlculs necessaris:

Si va respondre correctament 22 qüestions, aleshores, 8 foren les qüestions incorrectes o no contestades; per tant, el nombre total de punts que va obtenir foren: $22 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 110 - 16 = 94$.

Com esperàvem, doncs, pensem que el problema està correctament resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Test amb 30 qüestions.
  - o Per cada qüestió contestada correctament se'ls dona 5 punts i per cada qüestió incorrecta o no contestada se'ls lleva 2 punts.
  - o Un estudiant va obtenir, en total, 94 punts.

- Incògnites:
  - o Nombre de qüestions que va respondre correctament.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *El problema és resoluble?*

Si l'estudiant haguera respost correctament les 30 qüestions hauria obtingut 150 punts, com que en total va obtenir 94 punts, no les va respondre totes correctament, per això farem proves per a veure si hi ha un nombre de respostes correctes que proporcione un total de 94 punts.

Cada qüestió contestada correctament dona 5 punts i el nombre 94 no és múltiple de 5, suposem, doncs, que els punts obtinguts foren 95, que serien els corresponents a 95 : 5 = 19 qüestions correctes. Per tant, en aquest cas hipotètic, hi hauria 11 qüestions incorrectes o no contestades, i els punts obtinguts serien: $19 \cdot 5 - 11 \cdot 2 = 95 - 22 = 73$, menys que els punts obtinguts realment.

Provarem amb més respostes correctes i, per a veureu-ho millor, posem el tempteig en una taula:

Nombre de qüestions correctes	Nombre de qüestions incorrectes o no contestades (30 – correctes)	Punts	Punts = 94?
20	30 – 20 = 10	20 · 5 – 10 · 2 = 80	NO
23	30 – 23 = 7	23 · 5 – 7 · 2 = 101	NO

Veiem en la taula que amb 20 qüestions correctes no arriba als 94 punts i amb 23 qüestions correctes passa dels 94 punts, per això esperem que hi haja un nombre de qüestions correctes que proporcione un total de 94 punts i, per tant, que el problema tinga solució.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Esgotarem el tempteig.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre de qüestions correctes	Nombre de qüestions incorrectes o no contestades (30 – correctes)	Punts	Punts = 94?
21	30 – 21 = 9	21 · 5 – 9 · 2 = 87	NO
22	30 – 22 = 8	22 · 5 – 8 · 2 = 94	SÍ

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Per tant, 22 qüestions respostes correctament és la solució, i com que amb 21 i amb 23 qüestions respostes correctament, no arriba o se'n passa de 94 punts, respectivament, 22 qüestions respostes correctament és l'única solució.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, perquè és un nombre natural més petit que 30, donat que la quantitat de punts que va obtenir no va sobrepassar els 150.

B) *Comprovar la solució*

Per a comprovar la solució apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la quantitat de qüestions respostes correctament, 22 (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la quantitat de punts obtinguts (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*En començar els estudis de Secundària, a l'estudiantat se li fa un test amb 30 qüestions sobre matemàtiques. Per cada qüestió contestada correctament se'ls dona 5 punts i per cada qüestió incorrecta o no contestada se'ls lleva 2 punts. Un estudiant va respondre correctament 22 qüestions. Quants punts va obtenir?*». Esperem que la resposta siga 94 punts.

Fem els càlculs necessaris:

Si va respondre correctament 22 qüestions, aleshores, 8 foren les qüestions incorrectes o no contestades; per tant, el nombre total de punts que va obtenir fou: $22 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 110 - 16 = 94$.

Com esperàvem, doncs, pensem que el problema està correctament resolt.

Problema D.9

En el Festival Internacional de Música de Benicàsim (FIB) s'han conegut dos estudiants del Grau en Matemàtiques, ella de Benicàssim i ell de Gandia. Ella li pregunta a quants kilòmetres està Gandia i ell li diu: «Si a 288 se li suma el nombre de kilòmetres el resultat és igual a tres vegades l'excés del nombre de quilòmetres sobre 12». Quin és el nombre de quilòmetres?

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o 288 més el nombre de quilòmetres és igual a tres vegades l'excés del nombre de quilòmetres sobre 12.
- Incògnites:
  - o Els quilòmetres de distància de Gandia a Benicàssim.

B) *El problema és resoluble?*

Si denominem «x» el nombre de quilòmetres que hi ha entre Gandia i Benicàssim, les dades de l'enunciat del problema es traduirien en la següent equació lineal d'una incògnita 288 + «x» = 3 · (x – 12), que és resoluble, per això el problema pareix que serà resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem l'equació en què hem traduït l'enunciat.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$288 + x = 3 \cdot (x - 12) \rightarrow 288 + x = 3x - 36 \rightarrow 288 + 36 = 3x - x \rightarrow 324 = 2x \rightarrow$
$\rightarrow x = 324 : 2 \rightarrow x = 162.$

Comprovem que l'equació «288 + x = 3 · (x – 12)» està ben resolta substituint el valor trobat:

$$\left\{\begin{matrix} 288 + x = 288 + 162 = 450 \\ 3\cdot(x - 12) = 3\cdot(162 - 12) = 3\cdot 150 = 450 \end{matrix}\right\}.$$

Veiem que els dos membres de l'equació donen el mateix valor; així doncs, l'equació està ben resolta.
Solució: de Gandia a Benicàssim hi ha 162 quilòmetres.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Com estem treballant amb nombres naturals, 288 + x és més gran que zero, de manera que x – 12 també serà més gran que zero; és a dir, el nombre de quilòmetres ha de ser més gran que 12, i ho és.

A més, la suma 288 + x ha de ser múltiple de 3, perquè és el triple de l'excés, com 288 és múltiple de 3, el nombre de quilòmetres també haurà de ser múltiple de 3, i ho és.

Així doncs, creiem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la distància de Benicàssim a Gandia, 162 km (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem el nombre que sumem a la distància entre Benicàssim i Gandia (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Al FIB s'han conegut dos estudiants del Grau en Matemàtiques, ella és de Benicàssim i ell de Gandia, pobles que disten 162 km. Com que els dos són matemàtics se'ls ocorre l'endevinalla següent: "Si a un nombre se li sumen els 162 km, el resultat és igual a tres vegades l'excés de 162 sobre 12; quin és aquest nombre?"*». Esperem que la solució siga 288.

Fem els càlculs:

Si anomenem «y» el nombre que sumem a la distància entre Benicàssim i Gandia, les noves dades es tradueixen en l'equació $y + 162 = 3 \cdot (162 - 12)$:

$y + 162 = 3 \cdot (162 - 12) = 3 \cdot (150) = 450 \rightarrow y + 162 = 450 \rightarrow y = 450 - 162 = 288$.

Efectivament, 288 és la solució del nou problema; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o 288 més el nombre de quilòmetres és igual a tres vegades l'excés del nombre de quilòmetres sobre 12.
- Incògnites:
  - o Els quilòmetres de distància de Gandia a Benicàssim.

B) *El problema és resoluble?*

Per l'enunciat: «Si a 288 se li suma el nombre de quilòmetres el resultat és igual a tres vegades l'excés del nombre de quilòmetres sobre 12», com que la suma és «tres vegades...» es tracta d'un múltiple de 3, i com que 288 també és múltiple de 3, el nombre que busquem haurà de ser múltiple de 3.

A més, com a 288 li sumem un cert nombre aquesta suma serà més gran que zero i, aleshores, l'excés del nombre sobre 12 ha de ser més gran que zero, ja que el nombre ha de ser més gran que 12.

Per tant, la distància entre Benicàssim i Gandia haurà de ser més gran que 12 i múltiple de 3. Farem proves amb nombres que complisquen aquesta condició i que recollim en aquesta taula:

Nombre de quilòmetres	288 més el nombre de km	Tres vegades l'excés del nombre de km sobre 12	288 més el nombre de km és igual a tres vegades l'excés del nombre sobre 12?
90	288 + 90 = 378	3 · (90 – 12) = = 3 · 78 = 234	NO
120	288 + 120 = 408	3 · (120 – 12) = = 3 · 108 = 324	NO
150	288 + 150 = 438	3 · (150 – 12) = = 3 · 138 = 414	NO
180	288 + 180 = 468	3 · (180 – 12) = = 3 · 168 = 504	NO

Observem que en les proves fins al 150, el valor de la columna «288 més el nombre...» és més gran que el valor de la columna «tres vegades l'excés...», i que per 180, el valor de la columna «288 més el nombre...» és més petit que el valor de la columna «tres vegades l'excés...», per la qual cosa és possible que entre 150 i 180 km trobem un nombre per al qual es complisca la igualtat en el valor de les dues columnes. Per tant, creiem que el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Seguirem fent proves amb quantitats d'entre 150 i 180 quilòmetres que siguen múltiples de 3.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Nombre de quilometres	288 més el nombre de km	Tres vegades l'excés del nombre de km sobre 12	288 més el nombre de km és igual a tres vegades l'excés del nombre sobre 12?
153	288 + 153 = 441	3 · (153 – 12) = = 3 · 141 = 423	NO
156	288 + 156 = 444	3 · (156 – 12) = = 3 · 144 = 432	NO
159	288 + 159 = 447	3 · (159 – 12) = = 3 · 147 = 441	NO
162	288 + 162 = 450	3 · (162 – 12) = = 3 · 150 = 450	SÍ
165	288 + 165 = 453	3 · (165 – 12) = = 3 · 153 = 459	NO
168	288 + 168 = 456	3 · (168 – 12) = = 3 · 156 = 468	NO

Veiem que, tal com el nombre de quilòmetres és més gran que 162 km el valor de la columna «288 més el nombre...» és cada vegada més petit que el valor de la columna «tres vegades l'excés...», de manera que no hi tornaran a coincidir. Així doncs, 162 és l'únic nombre per al qual es compleix la igualtat dels valors d'aquestes columnes. Per tant, la solució: la distància entre Gandia i Benicàssim és de 162 km.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

En la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, fent proves amb quantitats de quilòmetres, veiem que havia de ser una distància entre 150 i 180 km. En la 3a fase trobem que la solució és 162 km, que està entre 150 i 180 km, per la qual cosa creiem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la distància de Benicàssim a Gandia, 162 km (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem el nombre que sumem a la distància entre Benicàssim i Gandia (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent «*Al FIB s'han conegut dos estudiants del Grau en Matemàtiques, ella és de Benicàssim i ell de Gandia, pobles que disten 162 km. Com que els dos són matemàtics se'ls ocorre l'endevinalla següent: "Si a un nombre se li sumen els 162 km, el resultat és igual a tres vegades l'excés de 162 sobre 12; quin és aquest nombre?"*». Esperem que la solució siga 288.

Fem els càlculs:

L'excés de 162 sobre 12 és 162 – 12 = 150, per tant, el triple d'aquest excés és 3 · 150 = 450.

Com que el nombre de quilòmetres més 162 ha de ser igual a 450, el nombre serà 450 – 162 = 288; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Tema 5: Problemes de divisibilitat en nombres naturals

5.1. Introducció

El tema 5 de MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (UJI, Pla d'Estudis 2010) o MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (reforma/modificació de 2018) i també el tema 3 d'Alcalde, Pérez i Lorenzo (2014) és «Divisibilitat en nombres naturals», nosaltres aquí aportem una sèrie de problemes per a col·laborar en la comprensió i aplicar-hi els continguts allí explicats.

En l'apartat 5.2, «Problemes de divisors», treballem els problemes de divisors i màxim comú divisor, mentre que en el 5.3, «Problemes de múltiples», ens dediquem als múltiples i al mínim comú múltiple.

5.2. Problemes de divisors

Problema E.1

Rosa ha tret de la vidriola un munt de monedes, totes iguals, i ha comprat un llapis de 70 cèntims. Després, ha tornat a la botiga on ha comprat un bolígraf de 80 cèntims. Quin pot ser el valor de cada una d'aquestes monedes si sempre ha donat el preu exacte?

❑ **ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA**

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Rosa ha tret de la vidriola un munt de monedes, totes iguals.

- o Ha comprat un llapis de 70 cèntims.
- o Després, ha tornat a la botiga on ha comprat un bolígraf de 80 cèntims.
- o Sempre ha donat el preu exacte.

• Incògnites:

- o El valor de cada una d'aquestes monedes.

B) *El problema és resoluble?*

Podrien ser monedes d'1 cèntim, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que les monedes són totes iguals i Rosa sempre ha donat el preu exacte, el valor de les monedes ha de ser un divisor de 70 cèntims i també de 80 cèntims, per això haurem de:

a) Buscar els divisors d'aquestes dues quantitats.
b) Elegir els divisors comuns.
c) Veure quins d'ells tenen monedes de cèntims del sistema monetari (1 cèntim, 2 cèntims, 5 cèntims, 10 cèntims, 20 cèntims i 50 cèntims).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $70 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \rightarrow \text{Card } [D(70)] = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$:
$D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$.
$80 = 2^4 \cdot 5^1 \rightarrow \text{Card } [D(80)] = (4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$:
$D(80) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$.
b) $D(70) \cap D(80) = \{1, 2, 5, 10\}$.
c) Tots els nombres de $D(70) \cap D(80)$ tenen la corresponent moneda en cèntims, per això la solució del problema pot ser qualsevol d'elles.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que són monedes de cèntims.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució és correcta aplicant el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», concretament, per tempteig.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Les monedes de cèntims del sistema monetari són: 1 cèntim, 2 cèntims, 5 cèntims, 10 cèntims, 20 cèntims i 50 cèntims; aleshores, veurem amb quines d'elles pot donar el preu exacte.

Amb monedes d'1 cèntim, sens dubte.

Com que els preus són 70 i 80 cèntims, amb monedes de 2 cèntims, 5 cèntims i 10 cèntims, també pot pagar el preu exacte, ja que 70 i 80 són múltiples de 2, 5 i 10.

Però amb monedes de 20 cèntims no podria pagar el preu exacte de 70 cèntims, i amb monedes de 50 cèntims, cap dels dos preus.

Per tant, solució: pot pagar el preu exacte amb monedes d'1 cèntim, de 2 cèntims, de 5 cèntims i de 10 cèntims.

Que coincideixen amb les que hem trobat en la 3a fase, per això pensem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Tal vegada, la diferència podria ser que si per als càlculs dels D(70) i D(80), l'estudiantat de Grau en Mestre/a aplicaria «l'algoritme d'arbre», l'alumnat de Primària calcularia aquests divisors per la definició del concepte de divisor (fent-hi multiplicacions o divisions).

Problema E.2

En dos carrers que mesuren de llarg 72 m i 84 m, respectivament, volem plantar arbres que estiguen igualment espaiats. Quina és la major distància possible entre dos arbres consecutius?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Dos carrers que mesuren de llarg 72 m i 84 m, respectivament.
  - Volem plantar arbres que estiguen igualment espaiats.
  - La distància entre els arbres ha de ser la major possible.
- Incògnites:
  - Distància entre dos arbres consecutius.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que podem plantar un arbre cada dos metres, atés que les longituds dels dos carrers són nombres parells.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que els arbres han d'estar igualment espaiats, la distància de separació entre dos arbres consecutius ha de ser un divisor comú de les longituds dels dos carrers, per tant, un divisor comú de 72 i de 84 m.

Però com també volem plantar-los a la major distància possible, aquesta distància haurà de ser el divisor comú de 72 i de 84 m més gran, és a dir, el mcd (72, 84).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcd (72, 84) per l'algoritme dels factors primers.

72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3; 84 = 2 · 2 · 3 · 7.
mcd (72, 84) = 2 · 2 · 3 = 12.

Solució: la distància entre dos arbres consecutius haurà de ser de 12 m.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 12 és un divisor de 72 i de 84, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, podríem reduir les dades de mesura a la meitat, de manera que tenim el nou problema: «*En dos carrers que mesuren de llarg 36 m i 42 m, respectivament, volem plantar arbres que estiguen igualment espaiats. Quina és la major distància possible entre dos arbres consecutius?*». Esperem que la resposta siga la meitat que en el problema original, 6 m.

Fem els càlculs:

Calcularem el mcd (36, 42) per l'algoritme dels factors primers.

36 = 2 · 2 · 3 · 3; 42 = 2 · 3 · 7.

mcd (36, 42) = 2 · 3 = 6.

Aleshores, la distància entre dos arbres consecutius haurà de ser 6 m; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

B) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Dos carrers que mesuren de llarg 72 m i 84 m, respectivament.
  - o Volem plantar arbres que estiguen igualment espaiats.
  - o La distància entre els arbres ha de ser la major possible.
- Incògnites:
  - o Distància entre dos arbres consecutius.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que podem plantar un arbre cada dos metres, atés que les longituds dels dos carrers són nombres parells.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que els arbres han d'estar igualment espaiats, la distància de separació entre dos arbres consecutius ha de ser un divisor comú de les longituds dels dos carrers, per tant, un divisor comú de 72 i de 84 m.

Però com que també volem plantar-los a la major distància possible, aquesta distància haurà de ser el divisor comú de 72 i de 84 m més gran, és a dir, el mcd (72, 84).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcd (72, 84) per l'algoritme conceptual.

a) Calcular tots els divisors de 72 i 84:

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$.

b) Calcular els divisors comuns:

$D(72) \cap D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

c) Triar el major divisor comú:

màx. [D(72) ∩ D(84)] = 12.
Aleshores, mcd (72,84) = 12.
Solució: la distància entre dos arbres consecutius haurà de ser de 12 m.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 12 és un divisor de 72 i de 84, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, que ve condicionada pel mcd, triem la de calcular-lo per un altre mètode, calculem el mcd (84, 72) per l'automatització del concepte, per l'algoritme dels factors primers.

72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3; 84 = 2 · 2 · 3 · 7.
mcd (72, 84) = 2 · 2 · 3 = 12.

Que coincideix amb l'obtinguda en la 3a fase, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema E.3

Calcula la dimensió del taulell quadrat més gran que hi podrem posar al terra d'una habitació, les dimensions de la qual són 51 dm per 77 dm, sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Una habitació de dimensions 51 dm per 77 dm.
  - Posar taulell quadrat al terra d'una habitació sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:

  - La dimensió del taulell quadrat més gran que hi podrem posar.

B) *El problema és resoluble?*

És a dir, podem posar taulells quadrats al terra d'aquesta habitació sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert?
Sí, per exemple, taulells quadrats de 1 dm per 1 dm.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que el taulell ha de ser quadrat, no s'ha de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert, la dimensió del costat del taulell haurà de ser un divisor de les dues dimensions de l'habitació, per tant, un divisor comú de 51 dm i 77 dm.
Però com que volem posar el taulell més gran possible, la dimensió del seu costat haurà de ser el divisor comú de 51 dm i 77 dm més gran, és a dir, el mcd (51, 77).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcd (51, 77) per l'algoritme dels factors primers.

$51 = 3 \cdot 17$; $77 = 7 \cdot 11$.
mcd (51, 77) = 1, donat que el nombre 1 és divisor de tots els nombres.

Solució: el taulell haurà de ser de 1 dm per 1 dm.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

Å) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 1 dm és un divisor de 51 dm i de 77 dm.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la dimensió lateral del taulell quadrat més gran que hi podrem posar al terra d'una habitació, sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert, 1 dm (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem les dimensions de l'habitació (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*La dimensió lateral del taulell quadrat més gran que hi podem posar al terra d'una habitació, sense haver de partir-ne cap i que tot*

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

el terra quede cobert, és d'1 dm. Quina dimensió té l'habitació». Esperem que siga de 51 dm per 77 dm.

Fem els càlculs necessaris:

La mesura d'1 dm de costat del taulell quadrat més gran que hi podrem posar al terra de l'habitació, sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert, és un divisor de les dimensions de l'habitació, de manera que 51 dm i 77 dm, que tenen com a mcd 1, són la solució esperada; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

B) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Una habitació de dimensions de 51 dm per 77 dm.
  - o Posar taulell quadrat al terra d'una habitació sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert.
- Incògnites:
  - o La dimensió del taulell quadrat més gran que hi podrem posar.

B) *El problema és resoluble?*

És a dir, podem posar taulells quadrats al terra d'aquesta habitació sense haver de partir-ne cap i que tot el terra quede cobert?

Sí, per exemple, taulells quadrats de 1 dm per 1 dm.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que el taulell ha de ser quadrat, no s'ha de partir-ne cap i tot el terra ha de quedar cobert, la dimensió del costat del taulell haurà de ser un divisor de les dues dimensions de l'habitació, per tant, un divisor comú de 51 dm i 77 dm.

Però com que volem posar el taulell més gran possible, la dimensió del seu costat haurà de ser el divisor comú de 51 dm i 77 dm més gran, és a dir, el mcd (51, 77).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcd (51, 77) per l'algoritme conceptual:

a) Calcular tots els divisors de 51 i 77:

51 = 3 · 17; 770 = 7 · 11.
D(51) = {1, 3, 17, 51}.
D(77) = {1, 7, 11, 77}.

b) Calcular els divisors comuns:

D(51) ∩ D(77) = {1}.

c) Triar el major divisor comú:

màx. [D(51) ∩ D(77)] = 1.

Solució: el taulell haurà de ser d'1 dm per 1 dm.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 1 dm és un divisor de 51 dm i de 77 dm.

B) *Comprovar la solució*

Podríem calcular el mcd (51, 77) per un altre procediment, per l'algoritme dels factors primers.

51 = 3 · 17; 77 = 7 · 11.
mcd (51, 77) = 1, donat que el nombre 1 és divisor de tots els nombres.

Que coincideix en la solució obtinguda en la 3a fase, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema E.4

Un fuster té tres llistons de fusta de 60 cm, 84 cm i 132 cm de longitud, respectivament, i vol tallar-los en trossos de la mateixa longitud, la més llarga possible i sense desaprofitar gens de fusta. Quant ha de mesurar la longitud de cada un dels trossos?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un fuster té tres llistons de fusta de 60 cm, 84 cm i 132 cm de longitud, respectivament.
  - Vol tallar-los en trossos de la mateixa longitud, la més llarga possible i sense desaprofitar gens de fusta.

- Incògnites:
  - La longitud de cada un dels trossos.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que veiem que les tres longituds són múltiples de 2 i de 3, per la qual cosa podríem tallar trossos de 6 cm de longitud.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que els trossos han de ser de la mateixa longitud i no ha de sobrar fusta, aquesta longitud ha de ser un divisor comú de les longituds dels tres llistons, per tant, un divisor comú de 60 cm, 84 cm i 132 cm.

Però com que també volem que la longitud siga la més llarga possible, aquesta haurà de ser el divisor comú de 60 cm, 84 cm i 132 cm més gran, és a dir, el mcd (60, 84, 132).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcd (60, 84, 132) per l'algoritme dels factors primers.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd $(60, 84, 132) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Per tant, la longitud de cada un dels trossos haurà de ser 12 cm.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 12 cm és un divisor de 60 cm, de 84 cm i de 132 cm, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la longitud dels trossos de fusta, 12 cm (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem quant mesuren les longituds dels llistons (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Un fuster té tres llistons de fusta de diferent longitud que ha tallat en trossos de la mateixa longitud, la més llarga possible i sense desaprofitar gens de fusta. Sabem que la longitud d'aquests trossos és de 12 cm. Quina era la longitud de cada un dels llistons?*». Esperem que la resposta siga 60 cm, 84 cm i 132 cm de longitud, respectivament.

Fem els càlculs necessaris:

Els 12 cm de longitud dels trossos, mesura que en tallar els llistons és la més llarga possible i sense que haja sobrat fusta, és un divisor comú de les mesures dels tres llistons que ha tallat, de manera que són múltiples de 12 cm.

Aleshores, calcularem els múltiples de 12 diferents de zero.

M* (12): 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144...

Veiem que entre els nombres apareixen 60, 84 i 132, que tenen com a mcd 12; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Un fuster té tres llistons de fusta de 60 cm, 84 cm i 132 cm de longitud, respectivament.

- Vol tallar-los en trossos de la mateixa longitud, la més llarga possible i sense desaprofitar gens de fusta.

• Incògnites:

- La longitud de cada un dels trossos.

A) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que veiem que les tres longituds són múltiples de 2, per la qual cosa podríem tallar trossos de 2 cm de longitud.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que els trossos han de ser de la mateixa longitud i no ha de sobrar fusta, aquesta longitud ha de ser un divisor comú de les longituds dels tres llistons, per tant, un divisor comú de 60 cm, 84 cm i 132 cm.

Però com que també volem que la longitud siga la més llarga possible, aquesta haurà de ser el divisor comú de 60 cm, 84 cm i 132 cm més gran; és a dir, el mcd (60, 84, 132).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcd (60, 84, 132) per l'algoritme conceptual.

a) Calculem tots els divisors de 60, 84 i 132:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.
$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$.
$D(132) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 11, 22, 33, 44, 66, 132\}$.

b) Calculem els divisors comuns:

$D(60) \cap D(84)\ ) \cap D(132) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

c) Elegir el major divisor comú:

màx. $[D(60) \cap D(84)\ ) \cap D(132)] = 12$.
Aleshores, mcd (60, 84, 132) = 12.

Solució: la longitud de cada un dels trossos haurà de ser 12 cm.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 12 cm és un divisor de 60 cm, de 84 cm i de 132 cm, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, que ve condicionada pel mcd, triem la de calcular-lo per un altre mètode, calculem el mcd (60, 84, 132) per l'automatització del concepte, per l'algoritme dels factors primers.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd (60, 84, 132) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ cm.

Per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema E.5

Es vol pavimentar amb rajoles quadrades tot el terra d'una habitació rectangular que té 50 dm de llarg per 45 dm d'ample. Calcula les dimensions d'una rajola i la quantitat d'elles, de tal manera que el nombre de les que s'hi posen siga el mínim i que no faça falta tallar-ne cap.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - Habitació de 50 dm per 45 dm.
    - Posar rajoles quadrades al terra d'una habitació sense haver de tallar-ne cap i que tot el sòl quede cobert.
    - La quantitat de rajoles ha de ser el mínim possible.
- Incògnites:
    - Les dimensions de la rajola quadrada.
    - La quantitat d'elles per posar.

B) *El problema és resoluble?*

Si posem rajoles d'1 dm per 1 dm cobrirem tot el terra de l'habitació sense tallar-ne cap, i posaríem 50 · 45 = 2.250 rajoles; aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que la rajola ha de ser quadrada, no se n'ha de tallar cap ni una i tot el terra ha de quedar cobert, la dimensió del costat de la rajola haurà de ser un divisor de les dues dimensions de l'habitació, per tant, un divisor comú de 50 dm i 45 dm. Però com que volem posar el mínim nombre de rajoles, necessitem que la rajola siga el més gran possible, és a dir, la dimensió d'un costat de la rajola haurà de ser el més gran possible; per tant, busquem el divisor comú de 50 dm i 45 dm més gran, és a dir, el mcd (50, 45).

b) Finalment, obtindrem el nombre de rajoles que posarem al llarg de l'habitació dividint 50 pel mcd (50, 45) i el nombre de rajoles que col·locarem a l'ample dividint 45 pel mcd (50, 45). Com que l'habitació és un rectangle multiplicarem els dos nombres obtenint la quantitat mínima de rajoles necessàries.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcd (50, 45) per l'automatització del concepte, per l'algoritme dels factors primers.

50 = 2 · 5 · 5; 45 = 3 · 3 · 5.
mcd (50, 45) = 5.
La rajola haurà de ser de 5 dm per 5 dm.

b) Per a calcular el menor nombre possible de rajoles:

50 : 5 = 10 rajoles que posarem al llarg de l'habitació.
45 : 5 = 9 rajoles que posarem a l'ample.
Quantitat mínima de rajoles necessàries: 10 · 9 = 90 rajoles.

Solució: la rajola haurà de ser de 5 dm per 5 dm i en necessitarem 90.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat, rajoles de 5 dm per 5 dm, pareix raonable, ja que 5 és divisor de 50 i 45 i, a més, ha fet que el nombre de rajoles fora més petit que el de la proposta

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, que ens donava 50 · 45 = 2.250 rajoles d'1 dm per 1 dm.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nosque la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la dimensió lateral de la rajola quadrada més gran que podrem posar al terra d'una habitació, sense haver de tallar cap rajola i que tot el sòl quede cobert, 5 dm, i el nombre de rajoles que hi posem, 90 (eren incògnites i passen a ser dades en el nou problema), i calcularem les dimensions de l'habitació (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*La dimensió lateral de la rajola quadrada més gran que podrem posar al terra d'una habitació, sense haver de tallar-ne cap i que tot el sòl quede cobert, és 5 dm, i posem 90 rajoles. Quines dimensions té l'habitació?*». Esperem que siga 50 dm per 45 dm.

Fem els càlcul necessaris.

Si posem 90 rajoles de dimensions 5 dm per 5 dm, cadascuna d'elles té una superfície de 5 · 5 = 25 dm^2, aleshores, l'habitació té una superfície de 90 · 25 = 2.250 dm^2.

Els 5 dm de dimensió lateral de la rajola quadrada més gran que podrem posar al terra d'una habitació, sense haver de tallar-ne cap i que tot el sòl quede cobert, és un divisor de les dimensions de l'habitació, per això les dimensions de l'habitació són un múltiple de 5.

Aleshores, calcularem els múltiples de 5 distints de zero.

M*(5): 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55…

Veiem que entre els múltiples apareixen 45 i 50, que tenen com a mcd 5, i a més, 45 · 50 = 2.250 dm^2; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Habitació de 50 dm per 45 dm.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Posar rajoles quadrades al terra d'una habitació sense haver de tallar-ne cap i que tot el sòl quede cobert.
- La quantitat de rajoles ha de ser el mínim possible.

• Incògnites:

- Les dimensions de la rajola quadrada.
- La quantitat d'elles per posar.

B) *El problema és resoluble?*

Si posem rajoles d'1 dm per 1 dm cobrirem tot el terra de l'habitació sense tallar-ne cap, i posaríem 50 · 45 = 2.250 rajoles; aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que la rajola ha de ser quadrada, no s'ha de tallar-ne cap i tot el terra ha de quedar cobert, la dimensió del costat de la rajola haurà de ser un divisor de les dues dimensions de l'habitació, per tant, un divisor comú de 50 dm i 45 dm. Però com que volem posar el mínim nombre de rajoles, necessitem que la rajola siga la més gran possible, és a dir, la dimensió del seu costat haurà de ser el més gran possible; per tant, busquem el divisor comú de 50 dm i 45 dm més gran, és a dir, el mcd (50, 45).

b) Finalment, obtindrem el nombre de rajoles que posarem al llarg de l'habitació dividint 50 pel mcd (50, 45) i les que col·locarem a l'ample dividint 45 pel mcd (50, 45). Com que l'habitació és un rectangle multiplicarem els dos nombres per a obtenir la quantitat mínima de rajoles necessàries.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcd (50, 45) per l'algoritme conceptual.

a.1) Calcular tots els divisors de 50 i de 45:

D(50) = {1, 2, 5, 10, 25, 50}.
D(45) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}.

a.2) Calcular els divisors comuns de 50 i de 45:

D(50) ∩ D(45) = {1, 5}.

a.3) Triar el major divisor comú de 50 i de 45:

màx. [D(50) ∩ D(45)] = 5 → mcd (50, 45) = 5.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

La rajola tindrà que ser de 5 dm per 5 dm.

b) Per a calcular el menor nombre possible de rajoles:

50 : 5 = 10 rajoles que ficarem al llarg de l'habitació.
45 : 5 = 9 rajoles que ficarem a l'ample.
Quantitat mínima de rajoles necessàries: 10 · 9 = 90 rajoles.

Solució: la rajola haurà de ser de 5 dm per 5 dm i en necessitarem 90.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A*) La solució és raonable?*

El resultat, rajoles de 5 dm per 5 dm, pareix raonable, ja que 5 és divisor de 50 i 45 i, a més, ha fet que el nombre de rajoles fora més petit que el de la proposta de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B*) Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, que ve condicionada pel mcd (50, 45), elegim la de calcular-lo per altre mètode, i la quantitat de rajoles també la calculem d'altra forma.

Calculem el mcd (50, 45) per l'automatització del concepte, l'algoritme dels factors primers.

50 = 2 · 5 · 5, 45 = 3 · 3 · 5.
mcd (50, 45) = 5.

Que coincideix amb l'obtingut en la 3a fase.
Per a calcular la quantitat de rajoles, calculem la superfície de l'habitació i la superfície de la rajola.

Superfície de l'habitació: 50 dm × 45 dm = 2.250 dm^2.
Superfície de la rajola: 5 dm × 5 dm = 25 dm^2.
Nombre de rajoles necessàries: 2.250 : 25 = 90, aleshores, la quantitat de rajoles coincideix amb l'obtinguda en la 3a fase.

Creiem, doncs, que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema E.6

Hem comprat la mateixa pesada de nespros que d'albercocs, havent-hi 84 nespros i 66 albercocs. Si volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes, però que tinguen la mateixa quantitat de fruites, sense barrejar-les i sense que queden fruites per repartir, quantes bossetes podrem fer?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Hem comprat 84 nespros i 66 albercocs.
  - Volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes.
  - Que tinguen la mateixa quantitat de fruites, sense barrejar-les i sense que en queden per repartir.
- Incògnites:
  - Nombre de bosses que podrem fer.

B) *El problema es resoluble?*

Si posem dues fruites en cada bosseta, sense barrejar-les, no queden fruites per repartir, ja que l'acció és possible i faríem 42 + 33 = 75 bossetes, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que volem repartir les fruites en bossetes que tinguen la mateixa quantitat, sense barrejar-les i sense que en sobre cap, el nombre de fruites de cada bossa ha de ser un divisor comú de la quantitat d'ambdós tipus de fruites; per tant, un divisor comú de 84 i de 66 fruites.
Però com que també volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes, aquesta quantitat haurà de ser el divisor comú més gran de 84 i de 66 fruites; és a dir, el mcd (84, 66).

b) Dividirem la quantitat de fruites de cada tipus entre el mcd obtingut i, així, obtindrem quantes bosses farem amb cada tipus de fruita.

c) Sumarem el nombre de bosses de cada tipus de fruites per a obtenir la quantitat total de bosses que farem.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcd (84, 66) per l'algoritme dels factors primers.

84 = 2 · 2 · 3 · 7; 66 = 2 · 3 · 11.
mcd (84, 66) = 2 · 3 = 6.
Aleshores, el nombre de fruites en cada bossa ha de ser 6.

b) 84 : 6 = 14 bosses de nespros, 66 : 6 = 11 bosses d'albercocs.

c) 14 + 11 = 25.

Solució: farem 25 bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat, 25 bossetes, sembla raonable doncs 6 és divisor de 84 i 66 i, a més, ha fet que el nombre de bossetes fora més petit que el de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, podríem reduir les dades de quantitat de fruites de cada tipus a la meitat, 42 nespros i 33 albercocs, amb la qual cosa tenim el nou problema «*Hem comprat la mateixa pesada de nespros que d'albercocs, havent-hi 42 nespres i 33 albercocs. Si volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes, però que tinguen la mateixa quantitat de fruites, sense barrejar-les i sense que en queden per repartir, quantes bossetes podrem fer?*».

Hem vist en la 2a i 3a fases que la resposta a la pregunta que formula el problema ve afectada pel mcd del nombre de fruites, i sabem que el mcd (42, 33) serà la meitat del mcd (84, 66).

Com que la resposta a la pregunta s'obté mitjançant una suma, on els sumands es calculen dividint la quantitat de fruites de cada tipus (42 nespros i 33 albercocs) entre la quantitat de fruites que posarem en cada bosseta, el mcd (42, 33), i veiem que en aquestes divisions s'ha reduït a la meitat tant el dividend com el divisor; així doncs, el quocient d'aquestes divisions serà el mateix que en el problema original i, per tant, la suma d'ambdues quantitats també, per la

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

qual cosa, esperem que la resposta del nou problema siga la mateixa que la del problema original, 25 bossetes.

Fem els càlculs.

a) Calcularem el mcd (42, 33) per l'algoritme dels factors primers.

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $33 = 3 \cdot 11$.
mcd (42, 33) = 3.

Aleshores, el nombre de fruites en cada bossa ha de ser 3.

b) 42 : 3 = 14 bosses de nespros, 33 : 3 = 11 bosses d'albercocs.

c) 14 + 11 = 25.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Hem comprat 84 nespros i 66 albercocs.
  - Volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes.
  - Que tinguen la mateixa quantitat de fruites, sense barrejar-les i sense que en queden per repartir.

- Incògnites:
  - Nombre de bosses que podrem fer.

B) *El problema es resoluble?*

Si posem dues fruites en cada bosseta, sense barrejar-les, no en queden per repartir, per tant l'acció és possible i faríem 42 + 33 = 75 bossetes; aleshores el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que volem repartir les fruites en bossetes que tinguen la mateixa quantitat, sense barrejar-les i sense que en sobre cap, el nombre de fruites de cada bossa ha de ser un divisor comú de la quantitat d'ambdós tipus de fruites, per tant, un divisor comú de 84 i de 66 fruites.
Però com que també volem fer el menor nombre de bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes, aquesta quantitat haurà de ser el divisor comú més gran de 84 i de 66 fruites, és a dir, el mcd (84, 66).

b) Dividirem la quantitat de fruites de cada tipus entre el mcd obtingut i així sabrem quantes bosses farem amb cada tipus de fruita.

c) Sumarem el nombre de bosses de cada tipus de fruites per a obtenir la quantitat total de bosses que farem.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcd (84, 66) per l'algoritme conceptual.

a.1) Calcular tots els divisors de 84 i 66:

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$.
$D(66) = \{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66\}$.

a.2) Calcular els divisors comuns:

$D(84) \cap D(66) = \{1, 2, 3, 6\}$.

a.3) Triar el major divisor comú:

màx. $[D(84) \cap D(66)] = 6$.

Aleshores, mcd (84, 66) = 6.
Per tant, cal posar 6 fruites en cada bosseta.

b) $84 : 6 = 14$, $66 : 6 = 11$.

c) $14 + 11 = 25$ bossetes.

Solució: farem 25 bossetes per a regalar als xiquets i les xiquetes.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat, 25 bossetes, sembla raonable doncs 6 és divisor de 84 i 66 i, a més, ha fet que el nombre de bossetes fora més petit que el de la proposta de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Hem vist en la 2a i 3a fases que la resposta a la pregunta que formula el problema ve condicionada pel mcd del nombre de fruites, aleshores, de les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, triem la de calcular-lo per un altre mètode.

Calculem el mcd (84, 66) per l'automatització del concepte, per l'algoritme dels factors primers.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd $(84, 66) = 2 \cdot 3 = 6$.

Creiem que el mcd (84, 66) està ben calculat i, per tant, pensem que la solució 25 bossetes és correcta.

Problema E.7

El dependent d'una papereria ha d'organitzar en pots 36 bolígrafs rojos, 60 bolígrafs blaus i 48 bolígrafs negres, de manera que tots els pots tinguen el mateix nombre de bolígrafs, sense mesclar els colors i sense que en queden per organitzar. Quants pots necessitarà si vol fer-ne servir el menor nombre possible?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Organitzar en pots 36 bolígrafs rojos, 60 bolígrafs blaus i 48 bolígrafs negres.
  - o Que tots els pots tinguen el mateix nombre de bolígrafs, sense mesclar els colors i sense que en queden per organitzar.
  - o Volem fer servir el menor nombre de pots possible.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

- Incògnites:
  - Nombre de pots que utilitzarà.

B) *El problema és resoluble?*

Com la quantitat de bolígrafs de cada color és parell, si, per exemple, posem 2 bolígrafs del mateix color en cada pot, en tots els pots n'hi haurà el mateix nombre sense mesclar els colors i sense que en queden per organitzar.

Així doncs, la feina d'organitzar els bolígrafs en les condicions de l'enunciat és possible, i en aquest cas utilitzaria 18 + 30 + 24 = 72 pots.

Aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Per a respondre a la pregunta, és a dir, trobar el resultat «mínim nombre de pots», com que la quantitat de pots depén del nombre de bolígrafs que posem en cada pot, calcularem primer quants en posarem en cada pot.
Tots els pots han de tenir el mateix nombre de bolígrafs, sense mesclar els colors i no poden quedar-ne per organitzar, per la qual cosa, el nombre de bolígrafs de cada pot ha de ser un divisor del nombre de bolígrafs de cada color, per tant, un divisor comú de 36, 60 i 48.
Es vol fer servir el menor nombre possible de pots per a organitzar els bolígrafs, aleshores, el nombre que cal posar-ne en cada pot haurà de ser el major possible.
Per tant, cal buscar el divisor comú de 36, 60 i 48, més gran possible; és a dir, hem de calcular el mcd (36, 60, 48).

b) A continuació, obtindrem el menor nombre de pots de bolígrafs que cal utilitzar dividint el nombre total de bolígrafs pel mcd (36, 60, 48) obtingut.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcd (36, 60, 48) per l'automatització del concepte, per l'algoritme dels factors primers.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
mcd $(36, 60, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.
Els pots hauran de tenir 12 bolígrafs.

b) Nombre total de bolígrafs per organitzar: 36 + 60 + 48 = 144 bolígrafs.
Nombre de pots necessaris: 144 : 12 = 12.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat, 12 pots de 12 bolígrafs, pareix raonable perquè el nombre de bolígrafs, 12, és divisor de 36, 60 i 48 i, a més, ha fet que el nombre de pots utilitzats, 12, siga més petit que el de la proposta de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, 72 pots.

B) *Comprovar la solució*

Ens assegurem que la solució és correcta aplicant el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», concretament, per tempteig.

Si posem tots els bolígrafs d'un mateix color en un pot, faríem servir sols un pot per color, en total tres pots, però els pots de bolígrafs dels diferents colors no tindrien la mateixa quantitat de bolígrafs (36, 60 i 48, respectivament).

Si posàrem la meitat dels bolígrafs de cada color en un pot, faríem servir dos pots per color, en total, sis pots, però els pots de bolígrafs dels diferents colors no tindrien la mateixa quantitat de bolígrafs (18, 30 i 24, respectivament).

En la taula següent recollim les proves anteriors, i d'altres, posant en la columna de l'esquerra el nombre de bolígrafs de cada color, en la capçalera de les altres columnes el nombre de pots en què els ajuntem, sense mesclar els colors i sense que queden bolígrafs per organitzar, i en la resta de les caselles el nombre de bolígrafs en cada pot:

		NOMBRE DE POTS				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
NOMBRE DE BOLÍGRAFS	*36*	36	18	12	9	
	60	60	30	20	15	12
	48	48	24	16	12	

Veiem en la taula que per a posar la mateixa quantitat de bolígrafs, del mateix color i sense que en queden per organitzar, aquesta quantitat hauria de ser 12 bolígrafs, de manera que utilitzaríem 3 pots per als bolígrafs rojos, 5 pots per als bolígrafs blaus i 4 pots per als bolígrafs negres, en total 12 pots.

El resultat ha sigut el mateix que en la 3a fase, aleshores, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D’EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l’enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Organitzar en pots 36 bolígrafs rojos, 60 bolígrafs blaus i 48 bolígrafs negres.
  - Que tots els pots tinguen el mateix nombre de bolígrafs, sense mesclar els colors i sense que en queden per organitzar.
  - Volem fer servir el menor nombre de pots possible.
- Incògnites:
  - Nombre de pots que utilitzarà.

B) *El problema és resoluble?*

Com que la quantitat de bolígrafs de cada color és parell, si, per exemple, posem 2 bolígrafs del mateix color en cada pot, tots els pots en tindran el mateix nombre, sense mesclar els colors i sense que queden bolígrafs per organitzar.

Per tant, la feina d’organitzar els bolígrafs en les condicions de l’enunciat és possible, i en aquest cas utilitzaria 18 + 30 + 24 = 72 pots.

Aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Per a respondre a la pregunta, és a dir, trobar el resultat «mínim nombre de pots», com que la quantitat de pots depén del nombre de bolígrafs que posem en cada pot, calcularem primer quants en posarem en cada pot.
Tots els pots han de tenir el mateix nombre de bolígrafs, sense mesclar els colors i no poden quedar bolígrafs per organitzar, per la qual cosa el nombre de bolígrafs de cada pot ha de ser un divisor del nombre de bolígrafs de cada color, per tant, un divisor comú de 36, 60 i 48.
Es vol fer servir el menor nombre possible de pots per a organitzar els bolígrafs, aleshores, el nombre que cal posar-ne en cada pot haurà de ser el major possible.
Per tant, cal buscar el divisor comú de 36, 60 i 48, més gran possible; és a dir, hem de calcular el mcd (36, 60, 48).

b) A continuació, obtindrem el nombre de pots de bolígrafs de cada color, dividint el nombre de bolígrafs de cada color pel mcd (36, 60, 48) obtingut.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

c) Finalment, per a calcular el menor nombre de pots que cal utilitzar, és a dir, el resultat, sumarem el nombre de pots per a cada color.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcd (36, 60, 48) per l'algoritme conceptual.

a.1) Calcular tots els divisors de 36, 60 i 48:

D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}.

a.2) Calcular els divisors comuns:

D(36) ∩ D(60) ∩ D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

a.3) Triar el major divisor comú:

màx. [D(36) ∩ D(60) ∩ D(48)] = 12.

Aleshores, mcd (36, 60, 48) = 12.
Els pots hauran de tenir 12 bolígrafs.

b) Nombre de pots de cada color.

De bolígrafs rojos, 36 : 12 = 3.
De bolígrafs blaus, 60 : 12 = 5.
De bolígrafs negres, 48 : 12 = 4.

c) Resultat: menor nombre possible de pots: 3 + 5 + 4 = 12 pots.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat, 12 pots de 12 bolígrafs, pareix raonable perquè el nombre de bolígrafs, 12, és divisor de 36, 60 i 48 i, a més, ha fet que el nombre de pots utilitzats, 12, siga més petit que el de la proposta de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, 72 pots.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», concretament, per tempteig.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Si posem tots els bolígrafs d'un mateix color en un pot, faríem servir sols un pot per color, en total tres pots.

Si posàrem la meitat els bolígrafs de cada color en un pot, faríem servir dos pots per color, en total, sis pots.

En la taula següent recollim les proves anteriors, i d'altres, posant en la columna de l'esquerra el nombre de bolígrafs de cada color, en la capçalera de les altres columnes, el nombre de pots en què els ajuntem, sense mesclar els colors i sense que queden bolígrafs per organitzar, i en la resta de les caselles el nombre de bolígrafs en cada pot:

		NOMBRE DE POTS				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
NOMBRE DE BOLÍGRAFS	*36*	36	18	12	9	
	60	60	30	20	15	12
	48	48	24	16	12	

Veiem en la taula que per a posar la mateixa quantitat de bolígrafs, del mateix color i sense que queden bolígrafs per organitzar, aquesta quantitat hauria de ser 12 bolígrafs, amb la qual cosa utilitzaríem 3 pots per als bolígrafs rojos, 5 pots per als bolígrafs blaus i 4 pots per als bolígrafs negres, en total 12 pots.

El resultat ha sigut el mateix que en la 3a fase; aleshores, creiem que el problema està ben resolt.

Problema E.8

Es vol tancar amb fil d'aram un terreny que té forma de quadrilàter irregular els costats del qual mesuren 320 m, 208 m, 396 m i 168 m, respectivament. Per a subjectar el fil d'aram es volen posar pals equidistants i que en cada vèrtex del quadrilàter n'hi haja un. Quina és la major distància a la qual poden col·locar-se els pals i quants se n'utilitzaran?

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un quadrilàter irregular els costats del qual mesuren: 320 m, 208 m, 396 m i 168 m, respectivament.
  - Per a subjectar el fil d'aram es volen posar pals equidistants i que en cada vèrtex del quadrilàter n'hi haja un.
- Incògnites:
  - La major distància a la qual poden col·locar-se els pals.
  - El nombre de pals que s'utilitzaran.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que podem posar un pal cada dos metres, atés que les longituds dels quatre costats del quadrilàter són nombres parells, i utilitzaríem 160 + 104 + 198 + + 84 = 546 pals.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que els pals han d'equidistar, la distància de separació entre dos pals consecutius ha de ser un divisor comú de les longituds dels costats del quadrilàter, per tant, un divisor comú de 320 m, 208 m, 396 m i 168 m, respectivament. Però com que també volem posar-los a la major distància possible, aquesta haurà de ser el divisor comú de 320 m, 208 m, 396 m i 168 m més gran possible; és a dir, el mcd (320, 208, 396, 168).

b) Dividirem el perímetre del quadrilàter irregular pel mcd obtingut i així obtindrem el nombre de trossos del contorn, de longitud el mcd, que coincideix amb el nombre de pals que haurem d'utilitzar per a tancar amb fil d'aram el terreny.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcd (320, 208, 396, 168) per l'algoritme dels factors primers.

$320 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$; $396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$; $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

mcd (320, 208, 396, 168) = 2 · 2 = 4.

Per tant, la major distància entre els pals ha de ser de 4 m.

b) 320 + 208 + 396 + 168 = 1.092 m → 1.092 : 4 = 273 pals.

Solució: la major distància entre els pals serà de 4 m, i utilitzarem 273 pals per a posar el fil d'aram.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El resultat de 4 m entre pals pareix raonable, ja que és divisor de 320, 208, 396 i 168, i a més millora la proposta citada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, 2 metres entre cada dos pals.

El resultat, 273 pals, sembla raonable perquè millora la proposta dita en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, 546 pals.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, podríem reduir a la meitat les dades de la longitud dels costats del terreny que volem tancar amb fil d'aram, amb la qual cosa tenim el nou problema: «*Es vol tancar amb fil d'aram un terreny que té forma de quadrilàter irregular els costats del qual mesuren 160 m, 104 m, 198 m i 84 m, respectivament. Per a subjectar el fil d'aram es volen posar pals equidistants i que en cada vèrtex del quadrilàter n'hi haja un. Quina és la major distància a la qual poden col·locar-se els pals i quants se n'utilitzaran?*». Esperem que la resposta a la primera pregunta, siga 2 m, la meitat que en el problema original i, com que la resposta a la segona pregunta s'obté mitjançant una divisió en la qual el dividend, el perímetre del nou quadrilàter irregular, serà la meitat que en el problema original, i el divisor esperem que siga la meitat que en el problema original, per tant, el quocient de la divisió serà el mateix que en el problema original, és a dir, s'utilitzaran 273 pals.

Fem els càlculs:

a) Calcularem el mcd (160, 104, 198, 84) per l'algoritme dels factors primers.

160 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5; 104 = 2 · 2 · 2 · 13; 198 = 2 · 3 · 3 · 11; 84 = 2 · 2 · 3 · 7.

mcd (160, 104, 198, 84) = 2.

Aleshores, la major distància entre els pals ha de ser de 2 m.

b) 160 + 104 + 198 + 84 = 546 → 546 : 2 = 273 pals.

Les respostes, 2 m i 273 pals, coincideixen amb les esperades; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Per a la resolució d'aquest problema hem de calcular el màxim comú divisor de quatre nombres, contingut que excedeix els establerts en el Decret 108/2014, raó per la qual no el resoldrem com a alumnat d'Educació Primària.

Problema E.9

Es disposa de tres extensions de terreny de 3.675 m^2, 1.575 m^2 i 2.275 m^2 de superfície que es volen dividir en parcel·les de la mateixa extensió. Quina ha de ser la superfície de cadascuna d'elles per a que el nombre de parcel·les siga el menor possible?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - Les mesures de les superfícies de les tres extensions de terreny: 3.675 m^2, 1.575 m^2 i 2.275 m^2.
- Incògnites:
  - La superfície de cada parcel·la per a que el nombre de parcel·les que s'obtinga siga el menor nombre possible.

B) El problema és resoluble?

Sí, perquè almenys es podrien fer parcel·les de 5 m^2 de superfície, ja que els tres nombres són múltiples de 5.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Volem dividir les tres extensions de terreny en parcel·les més menudes, però que tinguen la mateixa quantitat de superfície, per la qual cosa l'extensió de les parcel·les haurà de ser un divisor de la mesura de les superfícies de les tres extensions, i com que totes les parcel·les que obtinguem han de ser d'igual mesura

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

de superfície, aquesta haurà de ser un divisor de 3.675 m², 1.575 m² i 2.275 m², és a dir, un divisor comú.

Per a que el nombre de parcel·les que obtinguem siga el menor possible, la seua superfície haurà de ser el més gran possible; aleshores, haurem de calcular el mcd de les mesures de les tres extensions de terreny.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcd (3.675, 1.575, 2.275) per l'automatització del concepte, l'algoritme dels factors primers.

3.675 = 3 · 5 · 5 · 7 · 7; 1.575 = 3 · 3 · 5 · 5 · 7, i 2.275 = 5 · 5 · 7 · 13.
mcd (3.675, 1.575, 2.275) = 5 · 5 · 7 = 175.

Solució: la superfície de cada parcel·la serà de 175 m².

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Pareix que sí, doncs 175 m² és un divisor de les mesures de les tres extensions de terreny i, a més, ha millorat la proposta de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, dividint per 5 les dades, per això considerem el nou problema: «*Es disposa de tres extensions de terreny de 735 m², 315 m² i 455 m² de superfície que es volen dividir en parcel·les de la mateixa extensió. Quina ha de ser la superfície de cadascuna d'elles per a que el nombre de parcel·les siga el menor possible?*» Esperem que les noves parcel·les tinguen una extensió de 175 : 5 = 35 m².

Fem els càlculs:

Descomponem els nombres en factors primers.

735 = 3 · 5 · 7 · 7; 315 = 3 · 3 · 5 · 7; 455 = 5 · 7 · 13.

mcd (735, 315, 455) = 5 · 7 = 35.

Per tant, la superfície de cada parcel·la seria de 35 m².

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Per a la resolució d'aquest problema hem de calcular el màxim comú divisor de tres nombres i, a més, de quatre xifres cadascun, contingut que excedeix els establerts en el Decret 108/2014, per això no el resolem com a alumnat d'Educació Primària.

5.3. Problemes de múltiples

Problema F.1

Un rotllo de cable mesura més de 150 m i menys de 200 m. Quina és la seua longitud exacta, sabent que es pot dividir en trossos de 15 m i també de 18 m sense desaprofitar res?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un rotllo de cable mesura més de 150 m i menys de 200 m.
  - Es pot dividir en trossos de 15 m i també de 18 m sense desaprofitar res.
- Incògnites:
  - La longitud exacta del cable.

B) *El problema és resoluble?*

Si es pot dividir en trossos de 15 m i de 18 m sense desaprofitar res, vol dir que la seua longitud és múltiple de 15 m i de 18 m.

Com que mesura més de 150 m i menys de 200 m, la seua longitud hauria de ser un múltiple comú de 15 m i de 18 m comprés entre 150 m i 200 m.

Sabem que 180 m està entre 150 m i 200 m, és múltiple de 18 m i també de 15 m ([15 m] · 12), és a dir, hi ha una longitud que compleix les dades del problema, per tant, el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem tots els múltiples de 15 m entre 150 m i 200 m.
b) Calcularem tots els múltiples de 18 m entre 150 m i 200 m.
c) Veurem quines són les longituds comunes dels dos conjunts anteriors i eixes seran les solucions del problema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $\{x \in M(15) \,/\, 150 < x < 200\} = \{165, 180, 195\}$.
b) $\{x \in M(18) \,/\, 150 < x < 200\} = \{162, 180, 198\}$.
c) $\{x \in M(15) \,/\, 150 < x < 200\} \cap \{x \in M(18) \,/\, 150 < x < 200\} = \{180\}$.

Aleshores, l'única solució del problema és 180 m.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és una longitud que satisfà les dades del problema.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la longitud exacta del cable, 180 m (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem en trossos de quines longituds es pot dividir (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Un rotllo de cable fa 180 m. Sabent que també es pot dividir, a més d'en 18 m, en trossos d'una longitud entre 14 m i 20 m sense malgastar res, quina és la longitud exacta d'aquests altres trossos?*». Esperem que la resposta siga 15 m.

Fem els càlculs necessaris:

Haurem de calcular els divisors de 180 m i veure si hi ha algun diferent de 18 m que està entre 14 m i 20 m.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \rightarrow \text{Card}\,[D(180)] = (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

$D(180) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$.

Trobem que entre 14 m i 20 m, a més de 18 m, tenim 15 m; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un rotllo de cable mesura més de 150 m i menys de 200 m.
  - Es pot dividir en trossos de 15 m i també de 18 m sense desaprofitar res.
- Incògnites:
  - La longitud exacta del cable.

B) *El problema és resoluble?*

Si es pot dividir en trossos de 15 m i també en trossos de 18 m sense desaprofitar res, vol dir que la seua longitud és múltiple de 15 m i de 18 m.

Com mesura més de 150 m i menys de 200 m, la seua longitud hauria de ser un múltiple comú de 15 m i de 18 m comprés entre 150 m i 200 m.

Sabem que 180 m està entre 150 m i 200 m, és múltiple de 18 m i també de 15 m ([15 m] · 12), és a dir, hi ha una longitud que compleix les dades del problema; per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Calcularem tots els múltiples de 15 m entre 150 m i 200 m.
b) Calcularem tots els múltiples de 18 m entre 150 m i 200 m.
c) Veurem quines són les longituds comunes dels dos conjunts anteriors i eixes seran les solucions del problema.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Múltiples de 15 m entre 150 m i 200 m = {165, 180, 195}.
b) Múltiples de 18 m entre 150 m i 200 m = {162, 180, 198}.
c) Múltiples de 15 m i de 18 m entre 150 m i 200 m = {180}.

Aleshores, l'única solució del problema és 180 m.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és una longitud que satisfà les dades del problema.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», de manera que enunciem un nou problema duplicant les dades: «*Un rotllo de cable mesura més de 300 m i menys de 400 m. Quina és la longitud exacta, sabent que es pot dividir en trossos de 30 m i també de 36 m sense malgastar res?*». Esperem que la solució siga 360 m.

Fem els càlculs:

Haurem de calcular tots els múltiples de 30 m i de 36 m entre 300 m i 400 m i, finalment, veurem quines són les longituds comuns dels dos conjunts.

a) Múltiples de 30 m entre 300 m i 400 m = {330, 360, 390}.

b) Múltiples de 36 m entre 300 m i 400 m = {324, 360, 396}.

c) Múltiples de 30 m i de 36 m entre 300 m i 400 m = {360}.

Trobem que la longitud exacta del cable és de 360 m; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema F.2

Un cotxe necessita que li canvien l'oli cada 9.000 km i el filtre de l'aire cada 15.000 km. Amb quin nombre mínim de quilòmetres se li hauran de fer els dos canvis alhora?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Un cotxe necessita que li canvien l'oli cada 9.000 km.

   - I necessita que li canvien el filtre de l'aire cada 15.000 km.

- Incògnites:
   - Nombre mínim de quilòmetres en què caldrà fer-li els dos canvis alhora.

B) *El problema és resoluble?*

Anem a veure cada quants quilòmetres canviem l'oli: 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000…

Anem a veure cada quants quilòmetres canviem el filtre de l'aire: 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000…

Veiem que als 45.000 km es faran els dos canvis, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Coincidiran els dos canvis quan el cotxe haja fet una quantitat de quilòmetres que siga múltiple de 9.000 i de 15.000 km a la vegada, és a dir, quan haja fet una quantitat de quilòmetres que siga múltiple comú de 9.000 i 15.000 km.

Volem calcular el nombre mínim de quilòmetres en el qual caldrà fer-li els dos canvis alhora, per tant, necessitarem calcular el múltiple comú mínim de 9.000 i 15.000 km, diferent de zero. És a dir, calcularem el mcm (9.000, 15.000).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcm (9.000, 15.000) per l'algoritme dels factors primers.

$9.000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; $15.000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

mcm $(9.000, 15.000) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 45.000$.

Solució: el nombre mínim de quilòmetres al qual caldrà fer-li els dos canvis alhora serà 45.000 km.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és una quantitat de quilòmetres diferent de zero i múltiple de 9.000 i 15.000 km.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el nombre mínim de quilòmetres quan li canvien l'oli i el filtre de l'aire alhora, als 45.000 km

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

(era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem cada quants quilòmetres es canvia l'oli i cada quants quilòmetres es canvia el filtre d'aire (eren dades i ara passen a ser les incògnites), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Un cotxe necessita que li canvien l'oli i el filtre de l'aire cada cert nombre de quilòmetres. El nombre mínim de quilòmetres en què caldrà fer els dos canvis alhora és 45.000 km Cada quants quilòmetres se li canvien cada un d'aquests elements: oli i filtre de l'aire?*». Esperem que la resposta siga cada 9.000 i 15.000 km, respectivament.

Fem els càlculs:

Si els canvis d'aquests elements es fan tots dos alhora amb el nombre mínim de 45.000 km, aquesta quantitat és un múltiple comú del nombre de quilòmetres que tarda a fer-se cada canvi d'element, de manera que el període de canvi de cada element és un divisor de 45.000 km.

Aleshores, calcularem els divisors de 45.000.

$45.000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \rightarrow \text{Card}\,[D\,(45.000)] = (3+1) \cdot (2+1) \cdot (4+1) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$

D (45.000) = {1, 2, 3 ..., 9.000..., 15.000, 22.500, 45.000}.

Veiem que entre els nombres que tenen com a mcm 45.000 estan el 9.000 i el 15.000; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Un cotxe necessita que li canvien l'oli cada 9.000 km.
  - o I necessita que li canvien el filtre de l'aire cada 15.000 km.
- Incògnites:
  - o Nombre mínim de quilòmetres en què caldrà fer-li els dos canvis alhora.

B) El problema és resoluble?

Anem a veure cada quants quilòmetres canviem l'oli: 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000…

Anem a veure cada quants quilòmetres canviem el filtre de l'aire: 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000…

Veiem que als 45.000 km es faran els dos canvis, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Coincidiran els dos canvis quan el cotxe haja fet una quantitat de quilòmetres que siga múltiple de 9.000 i de 15.000 km a la vegada, és a dir, quan haja fet una quantitat de quilòmetres que siga múltiple comú de 9.000 i 15.000 km.

Volem calcular el nombre mínim de quilòmetres en el qual caldrà fer-li els dos canvis alhora, per tant, necessitarem calcular el múltiple comú mínim de 9.000 i 15.000 km, diferent de zero. És a dir, calcularem el mcm (9.000, 15.000).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calcularem el mcm (9.000, 15.000) per l'algoritme conceptual.

a) Múltiples de 9.000 i de 15.000, distints de zero:

M*(9.000): 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000, 99.000…
M*(15.000): 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000, 105.000…

b) Múltiples comuns de 9.000 i de 15.000, distints de zero:

M*(9.000) ∩ M*(15.000): 45.000, 90.000…

c) Menor múltiple comú de 9.000 i de 15.000, distint de zero:

mín. [M*(9.000) ∩ M*(15.000)] = 45.000.

Aleshores, mcm (9.000, 15.000) = 45.000.

Solució: el nombre mínim de quilòmetres al qual caldrà fer-li els dos canvis alhora serà 45.000 km.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és una quantitat de quilòmetres diferent de zero i múltiple de 9.000 i 15.000 km.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *Comprovar la solució*

Podríem calcular el mcm (9.000, 15.000) per un altre procediment, per l'algoritme dels factors primers.

9.000 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 · 5 · 5; 15.000 = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 · 5 · 5 · 5.
mcm (9.000, 15.000) = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 · 5 · 5 · 5 = 45.000.

Com que aquesta quantitat coincideix amb l'obtinguda en la 3a fase, pensem que el problema està ben resolt.

Problema F.3

Per a senyalitzar el recorregut d'una regata s'ha col·locat una boia cada 15 metres i una balisa cada 42 metres. Cada quants metres coincidiran una boia i una balisa?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - S'ha col·locat una boia cada 15 m i una balisa cada 42 m.
- Incògnites:
  - Cada quants metres coincidiran una boia i una balisa.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que si realitzem el producte dels metres als quals s'han col·locat les boies i les balises, trobaríem un múltiple comú, 15 · 42 = 630 m i, per tant, coincidirien.

2a FASE: ELABORAR UN PLAN

Les boies i les balises coincidiran en punts que la distància al punt de partida de la regata siga un múltiple comú dels metres a què es col·loquen cadascuna d'elles, per tant, haurem de calcular els múltiples comuns de 15 m i de 42 m, distints de zero.

Com que volem saber cada quants metres coincidiran, haurem de buscar el menor múltiple comú distint de zero, és a dir, el mínim comú múltiple de 15 m i de 42 m.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcm (15, 42) per l'automatització del concepte, l'algorisme dels factors primers.

15 = 3 · 5; 42 = 2 · 3 · 7.
mcm (15, 42) = 2 · 3 · 5 · 7 = 210.

Aleshores, cada 210 metres coincidiran una boia i una balisa.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 210 metres és un múltiple comú de 15 m i de 42 m i, a més, millora la proposta feta en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», per això suposem cada quant coincideixen una boia i una balisa, cada 210 m (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la distància a la qual es col·loca cada boia i cada balisa (eren dades i passen a ser incògnites en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*Per a senyalitzar el recorregut d'una regata s'han col·locat boies i balises, a la mateixa distància les boies i també les balises, sent diferents ambdues distàncies. Coincideixen una boia i una balisa cada 210 metres. Cada quants metres està col·locada una boia i una balisa?*». Esperem que siga cada 15 m i 42 m, respectivament.

Fem els càlculs necessaris:

Si una boia i una balisa coincideixen cada 210 m, aquesta quantitat és un múltiple de la distància a la qual es col·loca cada boia i cada balisa, per això la distància entre boies i la distància entre balises és un divisor de 210 m.

Aleshores, calcularem els divisors de 210.

210 = 2 · 3 · 5 · 7.
Card [D(210)] = (1 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) = 2 · 2 · 2 · 2 = 16.
D(210) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210}.

Veiem que entre els nombres que tenen com a mcm 210 hi ha el 15 i el 42; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o S'ha col·locat una boia cada 15 m i una balisa cada 42 m.
- Incògnites:
  - o Cada quants metres coincidiran una boia i una balisa.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, ja que si realitzem el producte dels metres als quals s'han col·locat les boies i les balises, trobaríem un múltiple comú, 15 · 42 = 630 m i, per tant, coincidirien.

2a FASE: ELABORAR UN PLAN

Les boies i les balises coincidiran en punts en què la distància al punt de partida siga un múltiple comú dels metres als quals es col·loquen cadascuna d'elles, per tant, haurem de calcular els múltiples comuns de 15 m i de 42 m, distints de zero.

Com que volem saber cada quants metres coincidiran, haurem de buscar el menor múltiple comú distint de zero, és a dir, el mínim comú múltiple de 15 m i de 42 m.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcm (15, 42) per l'algoritme conceptual.

a) Múltiples de 15 i de 42, distints de zero:

M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, …, 420, …, 630…
M*(42): 42, 84, 126, 168, 210, 252, …, 420, …, 630…

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

b) Múltiples comuns de 15 i de 42, distints de zero:

M*(15) ∩ M*(42): 210, 420, 630…

c) Menor dels múltiples comuns de 15 i de 42, distints de zero:

mín. [M*(15) ∩ M*(42)] = 210.

Aleshores: mcm (15, 42) = 210.

Solució: cada 210 metres coincidiran una boia i una balisa.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 210 metres és un múltiple comú de 15 m i de 42 m i, a més, millora la proposta feta en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, el mcm (15, 42), elegim la de calcular-lo per altre mètode.

Calculem el mcm (15, 42) per l'automatització del concepte, l'algoritme dels factors primers.

$15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.
mcm $(15, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Com que el mcm (15, 42) coincideix amb l'obtingut en la 3a fase, creiem que la solució és correcta; aleshores, pensem que el problema està ben resolt.

Problema F.4

Dos rètols lluminosos s'encenen amb intermitències de 48 s i 54 s, respectivament, i ho fan simultàniament a les 21 h 24 min. A quina hora tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - Intermitència 1r rètol: 48 s.
    - Intermitència 2n rètol: 54 s.
    - S'encenen simultàniament a les 21 h 24 min.

- Incògnites:
    - A quina hora tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada?

B) *El problema és resoluble?*

Sí, perquè quan a partir de les 21 h 24 min el 1r rètol s'encenga 54 vegades, hauran transcorregut 48 · 54 segons = 2.592 s, i en encendre's el 2n rètol 48 vegades, hauran transcorregut 54 · 48 segons = 2.592 s, per tant, coincidiran encesos.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) A partir de les 21 h 24 min es tornaran a encendre els dos a la vegada quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple de 48 s i de 54 s, és a dir, quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple comú de 48 s i de 54 s.
Però com que volem saber a quina hora ho faran per primera vegada, necessitem saber el menor múltiple comú de 48 s i de 54 s, distint de zero. Per tant, hem de calcular el mcm (48, 54).
b) Sumarem a 21 h 24 min el mcm (48, 54).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcm (48, 54) per l'automatització del concepte, l'algoritme dels factors primers.

48 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3; 54 = 2 · 3 · 3 · 3.
mcm (48, 54) = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 3 = 432.
b) 432 s = 7 min 12 s, aleshores, tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada: 21 h 24 min + 7 min 12 s = 21 h 31 min 12 s.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que a les 21 h 31 min 12 s, 432 s després de les 21 h 24 min, els 432 s són un interval de temps diferent de zero i múltiple de 48 s i de 54 s.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem quan tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada, a les 21 h 31 min 12 s (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la intermitència de cadascun (era dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*Dos rètols lluminosos s'encenen amb unes determinades intermitències. Ho fan simultàniament a les 21 h 24 min i tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada a les 21 h 31 min 12 s. Quina és la intermitència de cada rètol?*». Esperem que siga cada 48 s i 54 s, respectivament.

Fem els càlculs necessaris:

Si els rètols tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada a les 21 h 31 min 12 s, han atardat en encendre's tots dos junts per primera vegada 432 s, el mcm de les respectives intermitències, eixa quantitat és un múltiple del temps que tarden en tornar a encendre's; per això el temps d'intermitència de cada rètol és un divisor de 432 s.

Aleshores, calcularem els divisors de 432.

$432 = 2^4 \cdot 3^3 \rightarrow \text{Card}\,[D(432)] = (4 + 1) \cdot (3 + 1) = 5 \cdot 4 = 20.$

$D(432) = \{1, 2, 3, \ldots, 48, 54, \ldots, 144, 216, 432\}.$

Veiem que entre els nombres que tenen com a mcm 432 estan el 48 i el 54; com esperàvem, doncs, pensem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Intermitència 1r rètol: 48 s.
  - Intermitència 2n rètol: 54 s.
  - S'encenen simultàniament a les 21 h 24 min.
- Incògnites:
  - A quina hora tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada?

B) *El problema és resoluble?*

A partir de les 21 h 24 min veurem cada quants segons s'encén el 1r rètol:

48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432, 480, 532…

I ara el 2n rètol:

54, 108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, 486, 540…

Vegem que als 432 segons a partir de les 21 h 24 min coincidiran, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) A partir de les 21 h 24 min es tornaran a encendre els dos a la vegada quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple de 48 s i de 54 s, és a dir, quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple comú de 48 s i de 54 s.
Però com que volem saber a quina hora ho faran per primera vegada, necessitem saber el menor múltiple comú de 48 s i de 54 s, distint de zero. Per tant, hem de calcular el mcm (48, 54).
b) Sumarem a 21 h 24 min el mcm (48, 54).

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calculem el mcm (48, 54) per l'algoritme conceptual:

a.1) Múltiples de 48 i de 54, distints de zero:

M*(48): 48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432, 480, 532…
M*(54): 54, 108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, 486, 540…

a.2) Múltiples comuns de 48 i de 54, distints de zero:

M*(48) ∩ M*(54): 432, 864, 1.296…

a.3) Menor dels múltiples comuns de 48 i de 54, distints de zero:

mín. [M*(48) ∩ M*(54)] = 432.

Aleshores, mcm (48, 54) = 432.

b) 432 s = 7 min 12 s, per tant, tornen a encendre's tots dos junts per primera vegada: 21 h 24 min + 7 min 12 s = 21 h 31 min 12 s.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que és un interval de temps diferent de zero i múltiple de 48 s i de 54 s.

B) *Comprovar la solució*

Podríem calcular el mcm (48, 54) per altre procediment, per l'algorisme dels factors primers.

48 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3; 54 = 2 · 3 · 3 · 3.
mcm (48, 54) = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 3 = 432.

Que coincideix amb la solució obtinguda en la 3a fase; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema F.5

A l'aula de Plàstica del col·legi tenim rajoles rectangulars de 15 cm de llarg per 6 cm d'ample. La mestra, com una activitat interdisciplinària de Matemàtiques i Educació Plàstica, ens pregunta: ¿quina és la mesura del costat del quadrat

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

més petit que es pot formar unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Rajoles rectangulars de 15 cm de llarg per 6 cm d'ample.
  - Fer un quadrat unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap.

- Incògnites:
  - La mesura del costat del quadrat més petit que es pot formar.

B) *El problema és resoluble?*

Si per a fer el quadrat posem per al llarg 6 rajoles, unides pel costat que mesura 6 cm, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, aleshores tindrem un costat del quadrat de $6 \cdot 15$ cm = 90 cm, i si posem per a l'ample del quadrat 15 rajoles unides pel costat que mesura 15 cm, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, tindrem un altre costat del quadrat de $15 \cdot 6$ cm = 90 cm.

Aleshores, veiem que unint rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, tindríem un quadrat de 90 cm de costat, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que la figura que hem de fer amb les rajoles és un quadrat, els dos costats han de mesurar el mateix, per tant, la mesura del costat del quadrat haurà de ser un múltiple de les mesures de les rajoles, 15 cm i 6 cm, diferent de zero; és a dir, un múltiple comú diferent de zero.

I com que volem que el quadrat siga el més petit que es puga formar unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, la mesura del costat del quadrat haurà de ser el múltiple comú de 15 cm i 6 cm més petit, diferent de zero; aleshores, hem de calcular el mcm (15, 6).

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcm (15, 6) per l'algoritme dels factors primers.

$15 = 3 \cdot 5$; $6 = 2 \cdot 3$.
mcm $(15, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Així doncs, la mesura del costat del quadrat buscat és 30 cm.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 30 cm és un múltiple comú de 15 cm i de 6 cm, i el costat del quadrat és més petit que el trobat en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B*) Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem quant mesura el costat del quadrat, 30 cm (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la longitud de l'ample de la rajola rectangular (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*A l'aula de Plàstica del col·legi tenim rajoles rectangulars de 15 cm de llarg, totes iguals. La mestra, com una activitat interdisciplinària de Matemàtiques i Educació Plàstica, ens pregunta: ¿quina és la longitud de l'ample de la rajola si el costat del quadrat més petit que es pot formar mesura 30 cm, unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap?*». Esperem que la resposta siga 6 cm.

Fem els càlculs:

Si el costat del quadrat més petit que podem formar unint rajoles rectangulars de 15 cm de llarg sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap mesura 30 cm, aquesta longitud, és un múltiple de les mesures dels costats de la rajola rectangular, per la qual cosa, les dimensions de la rajola són divisors de 30 cm.

Aleshores, calcularem els divisors de 30.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{Card}\,[D\,(30)] = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
$D\,(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Veiem que entre els nombres que tenen com a mcm 30 hi ha el 6; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D’EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Llegit i comprés l’enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:

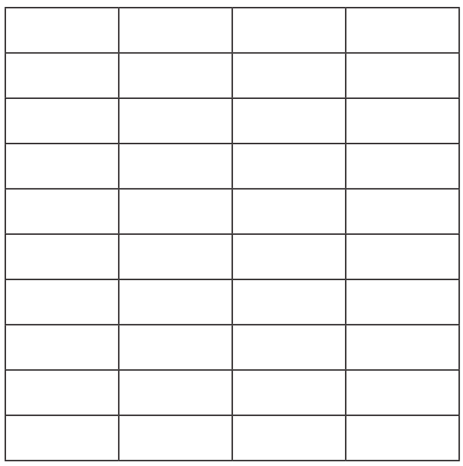
  - Rajoles rectangulars de 15 cm de llarg per 6 cm d’ample.
  - Fer un quadrat unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap.

- Incògnites:

  - La mesura del costat del quadrat més petit que es pot formar.

B) *El problema és resoluble?*

Experimentalment podem comprovar, com es mostra a la imatge:



que unint rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, tindríem un quadrat de $6 \cdot 10 = 4 \cdot 15 = 60$ cm de costat; aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Com que la figura que hem de fer amb les rajoles és un quadrat, els dos costats han de mesurar el mateix, per tant, la mida del costat del quadrat haurà de ser un

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

múltiple de les mesures de les rajoles, 15 cm i 6 cm, diferent de zero; és a dir, un múltiple comú diferent de zero.

I com que volem que el quadrat siga el més petit que es puga formar unint les rajoles sense deixar forats, sense que se superposen les unes a les altres i sense trencar-ne cap, la mesura del costat del quadrat haurà de ser el múltiple comú de 15 cm i 6 cm més petit, diferent de zero; aleshores, hem de calcular el mcm (15, 6).

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcm (15, 6) per l'algoritme conceptual.

a) Calculem múltiples de 15 i de 6, diferents de zero:

M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90…
M*(6): 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90…

b) Múltiples comuns de 15 i de 6, diferents de zero:

M*(15) ∩ M*(6): 30, 60, 90…

c) Menor dels múltiples comuns de 15 i de 6, diferent de zero:

mín [M*(15) ∩ M*(6)] = 30.

Aleshores, mcm (15, 6) = 30.

La solució serà un quadrat de 30 cm de costat.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 30 cm és un múltiple comú de 15 cm i de 6 cm, i el costat del quadrat és més petit que el trobat en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

B) *Comprovar la solució*

Calcularem el mcm (15, 6) per un altre procediment, per l'algoritme dels factors primers.

$15 = 3 \cdot 5$, $6 = 2 \cdot 3$.
mcm $(15, 6) = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

Doncs, la longitud del costat del quadrat serà de 30 cm, igual que a la 3a fase, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema F.6

Dos germans coincideixen en casa dels pares el 24 de desembre de 2019. Per motius de treball van a veure als pares cada 14 i 30 dies, respectivament. Tenint en compte que febrer de 2020 té 29 dies, es pregunten si es tornaran a veure abans de la Nit de Nadal de 2020 i quantes vegades.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Dos germans coincideixen en casa dels pares el 24 de desembre de 2019.
  - o Van a veure als pares cada 14 i 30 dies, respectivament.
  - o Febrer de 2020 té 29 dies.

- Incògnites:
  - o Es tornaran a veure abans de la Nit de Nadal de 2020?
  - o Quantes vegades?

B) *El problema és resoluble?*

El 24 de desembre de 2019 és el dia zero en el que començar a comptar els dies que passen fins a que es troben. Com febrer de l'any 2020 té 29 dies, fins el 24 de desembre de 2020 han de passar 366 dies, per això comptarem de 14 en 14 i després de 30 en 30 a veure si coincideixen:

M*(14): 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182, 196, 210, 224, 238, 252, 266, 280, 294, 308, 322, 336, 350, 364…

M*(30): 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210…

Veiem que sí que coincidiran, 210 dies després del 24 de desembre de 2019, que és dins de l'any 2020 i abans del 24 de desembre.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Després del 24 de desembre de 2019 es trobaran quan haja transcorregut una quantitat de dies que siga múltiple de 14 i de 30, doncs haurà de ser un múltiple comú diferent de zero, i, com també volem saber quantes vegades es trobaran en 2020, buscarem el menor múltiple comú de 14 i 30, diferent de zero; és a dir, el mcm (14, 30).

Per a saber quantes vegades coincidiran entre el 24 de desembre de 2019 i el de 2020, veurem quantes vegades cap el mcm (14, 30) en els 366 dies que hi ha entre ambdues dates.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

Calculem el mcm (14, 30) per l'algoritme conceptual.

a) Múltiples de 14 i de 30, distints de zero:

M*(14): 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182, 196, 210, 224, 238, 252, 266, 280, 294, 308, 322, 336, 350, 364…
M*(30): 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330…

b) Múltiples comuns de 14 i de 30, distints de zero:

M*(14) ∩ M*(30): 210, 420…

c) Menor dels múltiples comuns de 14 i de 30, distints de zero:
mín. [M*(14) ∩ M*(30)] = 210.

Aleshores, mcm (14, 30) = 210.

Com que 210 dies és una quantitat més petita que 366, sí que es troben abans del 24 de desembre de 2020 i com el mcm (14, 30) sols cap una vegada en 366 ($366 = 210 \cdot 1 + 156$, és a dir, 366 : 210 té com a quocient 1 i com a residu 156), sols es veuran una vegada entre les nits de Nadal de 2019 i de 2020.

Solució: sí que es troben abans del 24 de desembre de 2020 i sols una vegada.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que 210 dies és una quantitat més petita que 366 dies que hi ha entre les dues nits de Nadal.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *Comprovar la solució*

De les diferents maneres de comprovar la bondat de la solució, que ve condicionada pel mcm (14, 30), elegim la de calcular-lo per un altre mètode.
Calculem el mcm (14, 30) per l'automatització del concepte, l'algoritme dels factors primers.

$14 = 2 \cdot 7,\ \ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$
mcm $(14, 30) = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210.$

Com que el mcm (14, 30) està ben calculat, la solució «sí que es troben abans del 24 de desembre de 2020 i sols una vegada», és correcta.

Pensem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Creiem que la resolució podria ser igual.

Problema F.7

Tres empreses de transport de llarga distància fan el recorregut de Vila-real a Centreeuropa, sent la longitud del trajecte, aproximadament, de 3.000 km. La freqüència de sortida és de 10, 12 i 15 dies, respectivament. Si el 14 de març van fer un viatge simultani, troba la data següent en què tornaran a coincidir en el seu viatge.

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - o Tres empreses de transport de llarga distància fan el recorregut de Vila-real a Centreeuropa.
  - o La freqüència d'eixida és de 10, 12 i 15 dies, respectivament.
  - o El 14 de març van fer un viatge simultani.
- Incògnites:
  - o La data següent en què tornaran a coincidir en el seu viatge.

B) *El problema és resoluble?*

Sí, perquè a partir del 14 de març tornaran a coincidir les tres empreses en un viatge quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple de 10 dies, de 12 dies i de 15 dies: 10 · 12 · 15 = 1.800 dies.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) A partir del 14 de març tornaran a coincidir les tres empreses en un viatge quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple de 10 dies, de 12 dies i de 15 dies, és a dir, quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple comú de 10, de 12 i de 15 dies.
Però necessitem saber quants dies passaran fins que facen un viatge simultani per primera vegada després del 14 de març, és a dir, caldrà calcular el menor múltiple comú de 10, de 12 i de 15 dies, diferent de zero. Per tant, calcularem el mcm (10, 12, 15).

b) Com volem saber quin dia tornaran a fer un viatge simultani després del 14 de març, comptarem el mcm calculat a partir d'eixa data i obtindrem la data en la qual tornen a realitzar-lo.

3a FASE: EXCUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcm (10, 12, 15) per l'algoritme dels factors primers.

10 = 2 · 5; 12 = 2 · 2 · 3; 15 = 3 · 5.
mcm (10, 12, 15) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.

Així doncs, coincidiran 60 dies després del 14 de març.

b) Març té 31 dies, de manera que des del 14 de març falten 31 – 14 = 17 dies fins al 31.

Queden 60 – 17 = 43 dies, l'abril té 30 dies, aleshores, 43 – 30 = 13 dies quedaran per transcórrer després del 30 d'abril.

Per tant, tornaran a fer un viatge simultani el 13 de maig.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que el 13 de maig és 60 dies després del 14 de març, i 60 dies és un interval de temps diferent de zero, múltiple de 10, 12 i 15 dies i, a més, és més petita que els 1.800 dies de la primera fase, *B) El problema és resoluble?*

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem quan tornen a fer un viatge simultani, el 13 de maig (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem cada quants dies fa un viatge la primera companyia (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*Tres empreses de transport de llarga distància fan el recorregut de Vila-real a Centreeuropa, sent la longitud del trajecte, aproximadament, de 3.000 km. La freqüència d'eixida de la segona i tercera empresa és de 12 i 15 dies, respectivament. Si el 14 de març van fer un viatge simultani i van tornar a coincidir el 13 de maig, troba la freqüència de viatge de la primera empresa de transport*». Esperem que la resposta siga cada 10 dies.

Fem els càlculs:

Com hem vist en la 3a fase entre el 14 de març i el 13 de maig hi ha 60 dies.

Si els viatges de les tres companyes tornen a coincidir per primera vegada als 60 dies d'haver sortit simultàniament, aquesta quantitat, el mcm de les respectives freqüències de viatge, és un múltiple del temps que tarda a tornar a tenir una eixida cada companya, de manera que, el temps de freqüència de viatge de cada companya és un divisor de 60 dies.

Aleshores, calcularem els divisors de 60.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{Card } [D(60)] = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$

$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$

Veiem que entre els divisors de 60 està el 10, aleshores, entre els nombres que junt amb el 12 i el 15 poden tenir com a mcm 60 està el 10; com esperàvem, doncs, pensem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Tres empreses de transport de llarga distància fan el recorregut de Vila-real a Centreeuropa.

- La freqüència d'eixida és de 10, 12 i 15 dies, respectivament.
- El 14 de març van fer un viatge simultani.

• Incògnites:

- La data següent en què tornaran a coincidir en el seu viatge.

B) *El problema és resoluble?*

Veurem a partir del 14 de març cada quants dies té un viatge la primera empresa: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80...
Ara la segona: 12, 24, 36, 48, 60, 72...
I, finalment, la tercera: 15, 30, 45, 60, 75...
Veiem que als 60 dies a partir del 14 de març coincidiran, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) A partir del 14 de març tornaran a coincidir les tres empreses en un viatge quan haja transcorregut una quantitat de temps que siga múltiple de 10 dies, de 12 dies i de 15 dies, és a dir, quan haja transcorregut una quantitat de temps que sigui múltiple comú de 10, de 12 i de 15 dies.
Però necessitem saber quants dies passaran fins que facen un viatge simultani per primera vegada després del 14 de març, és a dir, caldrà calcular el menor múltiple comú de 10, de 12 i de 15 dies, diferent de zero. Per tant, calcularem el mcm (10, 12, 15).
b*)* Com volem saber quin dia tornaran a fer un viatge simultani després del 14 de març, comptarem el mcm calculat a partir d'eixa data i obtindrem la data en la qual tornen a realitzar-lo.

3a FASE: EXCUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcm (10, 12, 15) per l'algoritme conceptual.

a.1) Múltiples de 10, de 12 i de 15, distints de zero:

M*(10): 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130…
M*(12): 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132…
M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150…

a.2) Múltiples comuns de 10, de 12 i de 15, distints de zero:

M*(10) ∩ M*(12) ∩ M*(15): 60, 120…

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

a.3) Menor dels múltiples comuns de 10, de 12 i de 15, distints de zero:
mín. $[M^*(10) \cap M^*(12) \cap M^*(15)] = 60$.

Aleshores, mcm (10, 12, 15) = 60.
Així doncs, coincidiran dins de 60 dies.

b) Març té 31 dies, de manera que des del 14 de març falten 31 – 14 = 17 dies fins al 31.

Queden 60 – 17 = 43 dies, l'abril té 30 dies, aleshores, 43 – 30 = 13 dies quedaran per transcórrer després del 30 d'abril, que serà el 13 de maig.
Per tant, tornaran a fer un viatge simultani el 13 de maig.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) *La solució és raonable?*

Sí, ja que el 13 de maig és 60 dies després del 14 de març, i 60 dies és un interval de temps diferent de zero, múltiple de 10, 12 i 15 dies.

B) *Comprovar la solució*

Podríem calcular el mcm (10, 12, 15) per un altre procediment, per l'algoritme dels factors primers.

$10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$.
mcm (10, 12, 15) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Així doncs, coincidiran 60 dies després del 14 de març, és a dir, el 13 de maig, igual que a la 3a fase; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Tema 6: Altres problemes

6.1. Introducció

En aquest últim tema ens eixim del caràcter general dels problemes vistos fins a aquest moment, la vinculació amb l'assignatura MP1006 Didàctica de les Matemàtiques I (UJI, Pla d'Estudis 2010) o MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I (reforma/modificació de 2018) o amb el text d'Alcalde, Pérez i Lorenzo (2014), per a passar a exposar uns problemes que tenen vinculació amb les assignatures MP1019 Didàctica de les Matemàtiques II i/o MP1025 Didàctica de les Matemàtiques III (UJI, Pla d'Estudis 2010), els continguts de les quals són desenvolupats en Pérez, Alcalde i Lorenzo (2014) i en Lorenzo, Alcalde i Pérez (2015), respectivament.

Les assignatures MP1019 Didàctica de les Matemàtiques II i MP1025 Didàctica de les Matemàtiques III del Pla d'Estudis 2010 del Grau en Mestre/a d'Educació Primària en l'UJI, amb la reforma/modificació de 2018 es fondran en una mateixa assignatura, a excepció del tema «Nombres enters», que passa a l'assignatura MP1806 Didàctica de les Matemàtiques I.

6.2. Problemes

Problema G.1

En un termòmetre apareixen marcades les temperatures 0 ºC, –48 ºC i +60 ºC. Cal acabar-lo de graduar, de manera que la diferència entre dos senyals consecutius siga sempre del mateix nombre de graus, diferència que haurà de ser una quantitat de graus sencera i més gran que 1 ºC. Quin és el nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer?

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
    - En un termòmetre apareixen marcades les temperatures 0 ºC, –48 ºC i +60 ºC.
    - Cal acabar-lo de graduar, de manera que la diferència entre dos senyals consecutius siga sempre del mateix nombre de graus, diferència que haurà de ser una quantitat de graus sencera i més gran que 1 ºC.
- Incògnites:
    - Nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer.

B) *El problema és resoluble?*

Com que en el termòmetre hi ha la referència 0 ºC, en el problema cal graduar, fer parts iguals, dos trams del termòmetre de «longituds» 48 ºC i 60 ºC.
Ja que 48 ºC i 60 ºC són divisibles per 2, podríem graduar el termòmetre en les condicions establertes per l'enunciat fent-hi marques cada 2 ºC.
Per tant, el problema és resoluble, i el nombre de senyals seria 52.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que els senyals, les marques, han de ser sempre del mateix nombre de graus, que haurà de ser una quantitat de graus sencera, la separació entre dos senyals consecutius ha de ser un nombre natural divisor comú dels dos trams, de «longituds» 48 ºC i 60 ºC, és a dir, un nombre natural divisor comú de 48 ºC i de 60 ºC.
Però, com també volem el nombre mínim de marques, la distància, la separació entre elles, haurà de ser el nombre natural divisor comú de 48 ºC i de 60 ºC més gran, és a dir, el mcd (48, 60).

b) Per trobar el nombre mínim de senyals, dividirem la «longitud» total del termòmetre que cal graduar entre el mcd (48, 60), tot tenint en compte les marques que ja té el termòmetre, 0 ºC, –48 ºC i +60 ºC.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcd (48, 60) per l'algoritme dels factors primers.

48 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3; 60 = 2 · 2 · 3 · 5.
mcd (48, 60) = 2 · 2 · 3 = 12.

La distància entre dos senyals consecutius haurà de ser de 12 ºC.

b) Nombre mínim de senyals:

«Longitud» total del termòmetre a graduar 48 ºC + 60 ºC = 108 ºC.
108 : 12 = 9 és el nombre de parts iguals entre –48 ºC i +60 ºC, però com que ja tenim els senyals 0 ºC, –48 ºC i +60 ºC, en realitat, per a senyalitzar eixes 9 parts iguals, sols en fan falta 7.

Solució: el nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer és 7.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

12 ºC és un divisor de 48 ºC i de 60 ºC i, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, també fa que el nombre de marques siga menor; per tant, la solució 7 senyals, sí que és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar les dades proporcionalment», concretament, podríem reduir les dades a la meitat, de manera que tenim el nou problema: «*En un termòmetre apareixen marcades les temperatures 0 ºC, –24 ºC i +30 ºC. Cal acabar-lo de graduar, de manera que la diferència entre dos senyals consecutius siga sempre del mateix nombre de graus, diferència que haurà de ser una quantitat de graus sencera i més gran que 1 ºC. Quin és el nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer?*».

Tal com hem explicat en la 2a fase, per a trobar el nombre mínim de senyals, dividirem la «longitud» total del termòmetre que cal graduar entre el mcd (24, 30), tot tenint en compte les marques que ja té el termòmetre, 0 ºC, –24 ºC i +30 ºC.

La «longitud» total del termòmetre per graduar, 24 ºC + 30 ºC = 54 ºC, s'ha reduït a la meitat, i sabem que el mcd (24, 30) és la meitat del mcd (48, 60), per això tant el dividend com el divisor de la divisió s'han reduït a la meitat de la divisió de la 3a fase, b), i ara el quocient, en el nou problema, serà el mateix: 9 parts iguals entre –24 ºC i +30 ºC.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Com que ja tenim els senyals 0 ºC, –24 ºC i +30 ºC, en realitat, per a senyalitzar eixes 9 parts iguals, sols en fan falta 7.

Per tant, esperem que la solució del nou problema siga: el nombre mínim de senyals, marques, que s'hi poden fer és 7.

Fem els càlculs necessaris:

a) Calcularem el mcd (24, 30) per l'algoritme dels factors primers.

24 = 2 · 2 · 2 · 3; 30 = 2 · 3 · 5.
mcd (48, 60) = 2 · 3 = 6.
La distància entre dos senyals consecutius haurà de ser 6 ºC.

b) Nombre mínim de senyals:

«Longitud» total del termòmetre per graduar 24 ºC + 30 ºC = 54 ºC.
54 : 6 = 9 és el nombre de parts iguals entre –24 ºC i +30 ºC, però com que ja tenim els senyals 0 ºC, -24 ºC i +30 ºC, en realitat, per a senyalitzar eixes 9 parts iguals, sols en fan falta 7.

Com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - En un termòmetre apareixen marcades les temperatures 0 ºC, –48 ºC i +60 ºC.
  - Cal acabar-lo de graduar, de manera que la diferència entre dos senyals consecutius siga sempre del mateix nombre de graus, diferència que haurà de ser una quantitat de graus sencera i més gran que 1 ºC.
- Incògnites:
  - Nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer.

A) *El problema és resoluble?*

Com que en el termòmetre hi ha la referència 0 ºC, en el problema cal graduar, fer parts iguals, dos trams del termòmetre de «longituds» 48 ºC i 60 ºC.

Ja que 48 ºC i 60 ºC són divisibles per 2, podríem graduar el termòmetre en les condicions establertes per l'enunciat fent-hi marques cada 2 ºC.

Per tant, el problema és resoluble, i el nombre de senyals seria 52.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que els senyals, les marques, han de ser sempre del mateix nombre de graus, que haurà de ser una quantitat de graus sencera, la separació entre dos senyals consecutius ha de ser un nombre natural divisor comú dels dos trams, de «longituds» 48 ºC i 60 ºC, és a dir, un nombre natural divisor comú de 48 ºC i de 60 ºC.

Però com que també volem el nombre mínim de marques, la distància, la separació entre elles, haurà de ser el nombre natural divisor comú de 48 ºC i de 60 ºC més gran, és a dir, el mcd (48, 60).

b) Per trobar el nombre mínim de senyals, anirem fent les marques des de –48 ºC fins +60 ºC i les comptarem.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) Calcularem el mcd (48, 60) per l'algoritme conceptual:

D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}.
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
D(48) ∩ D(60) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.
mcd (48, 60) = 12.

La distància entre dos senyals consecutius haurà de ser 12 ºC.

b) Nombre mínim de senyals:

Marques: **–48 ºC**, –36 ºC, –24 ºC, –12 ºC, **0 ºC**, +12 ºC, +24 ºC, +36 ºC, +48 ºC, **+60 ºC**, aleshores, sols en fan falta 7.

Solució: el nombre mínim de senyals, de marques, que s'hi poden fer és 7.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

12 ºC és un divisor de 48 ºC i de 60 ºC i, a més de ser més gran que la distància proposada en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, també fa que el nombre de marques siga menor; per tant, la solució 7 senyals, sí que és raonable.

B) *Comprovar la solució*

El nombre de senyals, de marques, ve condicionat per la separació entre ells, el mcd (48, 60), raó per la qual, per a comprovar la solució, constatarem si

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

hem calculat bé el mcd (48, 60). El calcularem ara per l'algoritme dels factors primers.

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.
mcd $(48, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Com el valor obtingut en la 3a fase, i una vegada repassats els senyals fets entre -48 ºC i +60 ºC, són correctes, creiem que el problema està ben resolt.

Problema G.2

En una parada de fruites i verdures, els cinc sisens de la recaptació de les vendes d'un dia corresponen a l'apartat de fruites. Dels diners recaptats en la venda de fruita, els tres octaus (o vuitens) corresponen a les taronges. Si la venda de taronges puja a 89 euros, quina «caixa» ha fet l'establiment aquest dia?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o Els cinc sisens de la recaptació de les vendes d'un dia corresponen a l'apartat de fruites.
  - o Dels diners recaptats en la venda de fruita, els tres vuitens corresponen a les taronges.
  - o La venda de taronges puja a 89 euros.
- Incògnites:

o «Caixa» feta per l'establiment aquest dia.

A) El problema és resoluble?

Si diem «x» a la recaptació del dia, les dades de l'enunciat les podem traduir en l'equació: $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}x\right) = 89$.

Equació amb una incògnita, per això el problema és resoluble.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem l'equació.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$$\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}x\right) = 89 \rightarrow \frac{15}{48}x = 89 \rightarrow x = 89 : \frac{15}{48} = \frac{89 \cdot 48}{15} = \frac{4.272}{15} = 284{,}80\ €$$

Solució: la «caixa» feta per l'establiment aquest dia ha sigut de 284,80 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Si els 89 € de la venda de les taronges, els arrodonim a 90 €, com que són tres vuitens de la recaptació de les fruites, doncs 30 € seria quasi un vuité; aleshores, per les fruites s'haurien obtingut 30 · 8 = 240 €, que deurien ser els cinc sisens de la recaptació total, és a dir, cada un sisé serien aproximadament 48 €, que arrodonim a 50 €; per tant, l'estimació és que la recaptació del dia seria, més o menys, 50 · 6 = 300 €, sent-ne el valor real 284,80 €. Pensem, doncs, que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «canvi de dada per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la «caixa» feta per l'establiment aquest dia, 284,80 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem a quants euros puja la venda de taronges (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*En una parada de fruites i verdures, els cinc sisens de la recaptació de les vendes d'un dia corresponen a l'apartat de fruites. Dels diners recaptats en la venda de fruita, els tres vuitens corresponen a les taronges. Si la venda del dia puja a 284,80 €, quina «caixa» ha fet l'establiment per la venda de les taronges?*». Esperem que la resposta siga 89 €.

Fem els càlculs necessaris:

La venda de les taronges són els tres vuitens dels cinc sisens de la venda del dia, és a dir: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}$.

Si la venda del dia puja a 284,80 €, la recaptació per la venda de les taronges serà $\frac{15}{48}$ de 284,80 = $\frac{15}{48} \cdot 284{,}80 = 89$ €; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Els cinc sisens de la recaptació de les vendes d'un dia corresponen a l'apartat de fruites.
  - Dels diners recaptats en la venda de fruita, els tres vuitens corresponen a les taronges.
  - La venda de taronges puja a 89 euros.
- Incògnites:
  - «Caixa» feta per l'establiment aquest dia.

B) *El problema és resoluble?*

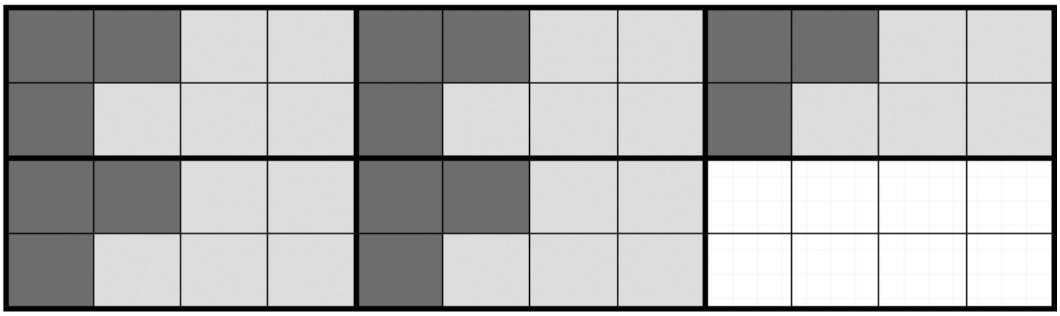
Per a veure si és resoluble el problema ho justifiquem mitjançant un dibuix.
Imaginem que la recaptació del dia, la «caixa» feta per l'establiment aquest dia, que es vol calcular, és representa per aquest rectangle:

Si els cinc sisens corresponen a la recaptació de fruita, per a saber quant de tros del rectangle representa les fruites caldrà dividir-lo en sis parts iguals i acolorir-ne cinc:

Com que tres octaus (o vuitens) de la recaptació de fruita corresponen a taronges, per a representar-les en el rectangle caldria dividir la superfície acolorida en

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

vuit parts iguals i agafar-ne tres. Però com això resulta problemàtic, és més fàcil, per exemple, fraccionar en vuit parts iguals cada divisió anterior (les sisenes parts del rectangle) i agafar-ne tres de cada vuit de les parts acolorides:



Com que sabem quant representa la part ombrejada fosca, 89 €, calcular quants euros representa la superfície total del rectangle és possible, per això el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Partint del darrer dibuix de la fase d'abans, calcularem quants rectangles ombrejats foscos representen la recaptació corresponent a les taronges.
b) Calcularem quants euros representa cada rectangle ombrejat fosc, dividint la quantitat d'euros obtinguts per la venda de les taronges entre el nombre de rectangles ombrejats foscos.
c) Calcularem quants rectangles de la grandària dels ombrejats foscos formen el rectangle gran, el rectangle que representa la «caixa» feta per l'establiment aquest dia.
d) Per últim, multiplicarem els euros que representa cada rectangle ombrejat fosc pel nombre de rectangles de la grandària dels ombrejats foscos, amb la qual cosa calcularem quants euros són la «caixa» feta per l'establiment aquest dia.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 3 rectangles ombrejats foscos en cada un dels 5 rectangles ombrejats fan un total de 3 · 5 = 15 rectangles ombrejats foscos.
b) 89 : 15 = 5,93 € representa cada rectangle ombrejat fosc.
c) 8 rectangles, de la grandària dels ombrejats foscos, en cada un dels 6 rectangles en què hem fraccionat el rectangle gran, fan un total de 8 · 6 = 48 rectangles de la grandària dels ombrejats foscos.
d) 5,93 · 48 = (89 : 15) · 48 = 284,80 €.

Solució: la «caixa» feta per l'establiment aquest dia ha sigut de 284,80 €.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Si els 89 € de la venda de les taronges, els arrodonim a 90 €, com que són 3/8 de la recaptació de les fruites, doncs 30 € serien quasi 1/8; aleshores, per les fruites s'hauria obtingut 30 · 8 = 240 €, que deurien ser els 5/6 de la recaptació total, és a dir, cada 1/6 seria aproximadament 48 €, que arrodonim a 50 €; per tant, l'estimació és que la recaptació del dia seria, més o menys, 50 · 6 = 300 €, sent-ne el valor real 284,80 €. Pensem, doncs, que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Per a assegurar-nos que la solució és correcta utilitzem el mètode «canvi de dada per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la «caixa» feta per l'establiment aquest dia, 284,80 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem a quants euros puja la venda de taronges (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*En una parada de fruites i verdures, els cinc sisens de la recaptació de les vendes d'un dia corresponen a l'apartat de fruites. Dels diners recaptats en la venda de fruita, els tres octaus (o vuitens) corresponen a les taronges. Si la venda del dia puja a 284,80 €, quina «caixa» ha fet l'establiment per la venda de les taronges?*». Esperem que la resposta siga 89 €.

Fem els càlculs necessaris:

La venda de les taronges són els tres vuitens dels cinc sisens de la venda del dia, és a dir: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}$.

Si la venda del dia puja a 284,80 €, la recaptació per la venda de les taronges serà $\frac{15}{48}$ de 284,80 = $\frac{15}{48} \cdot 284{,}80 = 89$ €; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema G.3

El Sr. Llorenç decideix repartir el seu capital en parts iguals entre els seus tres fills: Robert, Jordi i Glòria, reservant-se per a si mateix un cinqué del total. Al seu torn, Robert renuncia als seus drets a favor de les seues filles: Anna, Mercé i Maria, que es reparteixen allò que han heretat en parts iguals. Jordi, que és el padrí de Maria, li dona la meitat del que li correspon a ell, per tant, Maria rep en total 8.000 €. Amb quants euros es va quedar el Sr. Llorenç?

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - El Sr. Llorenç decideix repartir el seu capital en parts iguals entre els seus tres fills: Robert, Jordi i Glòria, reservant-se per a si mateix un cinqué del total.
  - Robert renuncia als seus drets a favor de les seues filles: Anna, Mercé i Maria, que es reparteixen allò que han heretat en parts iguals.
  - Jordi, que és el padrí de Maria, li dona la meitat del que li correspon a ell, per tant, Maria rep en total 8.000 €.
- Incògnites:
  - Quants euros es va quedar el Sr. Llorenç.

B) *El problema és resoluble?*

Com que el Sr. Llorenç es va quedar una cinquena part del que tenia, va repartir entre els seus tres fills quatre cinquens, alguns dels quals van repartir també tot o part del que van heretar.

Com que l'única quantitat d'euros que coneixem és la que va rebre Maria, si considerem «x» la quantitat que Maria rep del seu pare Robert, aleshores, la quantitat que rep Robert en herència del seu pare, que simbolitzem per «R», serà R = 3x, que és la mateixa que rep el seu germà Jordi, que la simbolitzem per «J», J = 3x, i que la seua germana Glòria.

L'herència total que rep Maria, 8.000 €, li prové del seu pare, «x», i del seu padrí, Jordi, que li dona la meitat del que li correspon a ell, $1/2 \cdot J = 1/2 \cdot (3x) = 1{,}5 \cdot x$, aleshores, $8.000\ € = 1x + 1{,}5 \cdot x = 2{,}5 \cdot x$, per tant, podem calcular x.

El Sr. Llorenç va repartir entre els seus tres fills quatre cinquens en parts iguals, com que Robert va rebre R = 3x, els quatre cinquens seran equivalents a 9x, i com que podem saber a quants euros equival el que considerem x, podem calcular quants euros són els quatre cinquens i, per tant, quant és un cinqué, quantitat que es va quedar el Sr. Llorenç; aleshores, el problema és resoluble.

2a FASE 2: ELABORAR UN PLA

Seguint el raonament fet en la primera fase, *B) El problema és resoluble?*:

a) Resoldrem l'equació $8.000 = 2{,}5 \cdot x$.

b) Calcularem la quantitat d'euros que va repartir el Sr. Llorenç entre els seus fills, $9 \cdot x$, que correspon a quatre cinquens dels diners que tenia.
c) Com el Sr. Llorenç es va quedar un cinqué dels diners que tenia, dividirem la quantitat obtinguda a l'apartat anterior entre 4 per a obtenir els diners que es va quedar el Sr. Llorenç.

3a FASE 3: EXECUTAR EL PLA

a) $8.000 = 2{,}5 \cdot x \rightarrow x = 8.000 : 2{,}5 = 3.200$ €.
b) $9 \cdot x = 9 \cdot 3.200 = 28.800$ €, que corresponen als quatre cinquens dels diners que tenia el Sr. Llorenç.
c) $28.800 : 4 = 7.200$ € són els diners que es va quedar el Sr. Llorenç.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El Sr. Llorenç va repartir entre els seus tres fills, en parts iguals, quatre cinquens del capital que tenia; per tant, cadascun va rebre quatre quinzens del capital.

Maria va rebre $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{45} + \frac{4}{30} = \frac{8}{90} + \frac{12}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ dels diners que tenia el Sr. Llorenç, que són 8.000 €.

El Sr. Llorenç es va quedar $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ dels seus diners, 7.200 €.

Com el Sr. Llorenç es va quedar $\frac{2}{10}$ dels seus diners i Maria va rebre $\frac{2}{9}$ dels diners que tenia el Sr. Llorenç, sent $\frac{2}{10} < \frac{2}{9}$, la quantitat de diners que es va quedar el Sr. Llorenç, 7.200 €, ha de ser més petita que la que va rebre Maria, 8.000 €, com així és; per tant, la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem amb quants euros es va quedar el Sr. Llorenç, 7.200 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la quantitat que rep Maria (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*El Sr. Llorenç decideix repartir el seu capital en parts iguals entre els seus tres fills: Robert, Jordi i Glòria, reservant-se per a si mateix un cinqué del total, que són 7.200 €. Al seu torn, Robert renuncia als seus drets a favor de les seues filles: Anna, Mercé i Maria, que es reparteixen allò que han heretat en parts iguals. Jordi, que és el padrí de Maria, li dona la meitat del que li correspon a ell. Quants euros va rebre Maria?»*. Esperem que la resposta siga 8.000 €.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Fem els càlculs:

Diem «y» als diners que tenia el Sr. Llorenç abans de repartir-los.

$7.200 = \frac{1}{5} \cdot y \rightarrow y = 5 \cdot 7.200 = 36.000$ €.

Reparteix en parts iguals entre els seus fills: $\frac{4}{5} \cdot 36.000 = 28.800$ €.

Cada fill rep: 28.800 : 3 = 9.600 €.

Robert li dona a Maria 9.600 : 3 = 3.200 €, i Jordi 9.600 : 2 = 4.800 €.

Maria rep en total: 3.200 + 4.800 = 8.000 €; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - o El Sr. Llorenç decideix repartir el seu capital en parts iguals entre els seus tres fills: Robert, Jordi i Glòria, reservant-se per a si mateix un cinqué del total.
  - o Robert renuncia als seus drets a favor de les seues filles: Anna, Mercé i Maria, que es reparteixen allò que s'ha heretat en parts iguals.
  - o Jordi, que és el padrí de Maria, li dona la meitat del que li correspon a ell, aleshores, Maria rep en total 8.000 €.
- Incògnites:
  - o Quants euros es va quedar el Sr. Llorenç.

B) El problema és resoluble?

Com que el Sr. Llorenç reparteix els quatre cinquens dels seus diners en parts iguals entre els seus tres fills, cadascun rep $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$. Robert li dona a la seua filla Maria un terç de la part que rep, és a dir, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{45}$. Jordi li dona a la seua fillola Maria un mig de la part que rep, és a dir, $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{30}$.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Maria rep $\frac{4}{45} + \frac{4}{30} = \frac{8}{90} + \frac{12}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ dels diners que reparteix el Sr. Llorenç, en total, 8.000 €. Així doncs, podem calcular els diners que hi tenia i després calcular una cinquena part d'aquesta quantitat per a saber així els diners que es queda el Sr. Llorenç.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Seguint el raonament fet en la primera fase, *B) ¿El problema és resoluble:?*

a) Calcularem la quantitat de la qual els dos novens són 8.000 €. Primer, ho dividirem entre 2 per a saber quant és un nové de la quantitat i, finalment, multiplicarem per 9 per a calcular quina és la quantitat de diners que tenia abans de repartir-los.
b) Com que el Sr. Llorenç es va quedar una cinquena part dels diners que tenia, dividirem la quantitat obtinguda en l'apartat anterior entre 5 per a quantificar els diners que es va quedar el Sr. Llorenç.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 8.000 : 2 = 4.000 → 4.000 · 9 = 36.000 € tenia abans de repartir-los.
b) 36.000 : 5 = 7.200 € es va quedar el Sr. Llorenç.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Maria va rebre $\frac{2}{9}$ dels diners que tenia el Sr. Llorenç, que són 8.000 €.
El Sr. Llorenç es va quedar $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ dels seus diners, 7.200 €.
Com que el Sr. Llorenç es va quedar $\frac{1}{5}$ dels seus diners i Maria va rebre $\frac{2}{9}$ dels diners que tenia el Sr. Llorenç, sent $\frac{1}{5} = \frac{9}{45}$ i $\frac{2}{9} = \frac{10}{45}$ sabem que $\frac{9}{45} < \frac{10}{45}$, aleshores $\frac{1}{5} < \frac{2}{9}$, per tant, la quantitat de diners que es va quedar el Sr.
Llorenç, 7.200 €, ha de ser més petita que la que va rebre Maria, 8.000 €, com així és, per tant, la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem amb

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

quants euros es va quedar el Sr. Llorenç, 7.200 € (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema) i calcularem la quantitat que rep Maria (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*El Sr. Llorenç decideix repartir el seu capital en parts iguals entre els seus tres fills: Robert, Jordi i Glòria, reservant-se per a si mateix un cinqué del total, que és 7.200 €. Al seu torn, Robert renuncia als seus drets a favor de les seues filles: Anna, Mercé i Maria, que es reparteixen allò que han heretat en parts iguals. Jordi, que és el padrí de Maria, li dona la meitat del que li correspon a ell. Quants euros va rebre Maria?*». Esperem que la resposta siga 8.000 €.

Fem els càlculs:

7.200 és $\frac{1}{5}$ dels diners que tenia el Sr. Llorenç, per tant, els diners que hi tenia són 7.200 · 5 = 36.000 €.

Reparteix en parts iguals entre els seus fills: $\frac{4}{5} \cdot 36.000 = 28.800$ €.

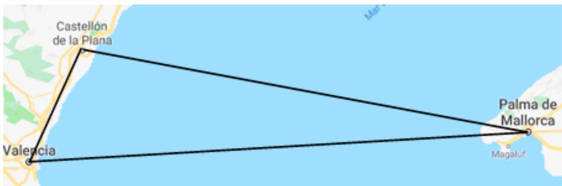
Cada fill rep: 28.800 : 3 = 9.600 €.

Robert li dona a Maria 9.600 : 3 = 3.200 €, i Jordi 9.600 : 2 = 4.800 €.

Maria rep en total: 3.200 + 4.800 = 8.000 €; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

Problema G.4

Sabent que una milla marina o milla nàutica equival a 1.852 m, troba la distància, en la unitat fonamental corresponent en el Sistema Internacional (SI), entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca, si sabem que hi ha 72 milles marines de València a Palma de Mallorca, 72 km de Castelló de la Plana a València i suposant que les tres ciutats se situen en els vèrtex d'un hipotètic triangle rectangle.



❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Una milla marina o milla nàutica equival a 1.852 m.
  - Hi ha 72 milles marines de València a Palma de Mallorca.
  - Hi ha 72 km de Castelló de la Plana a València.
  - Les tres ciutats se situen en els vèrtexs d'un hipotètic triangle rectangle.

- Incògnites:
  - La distància, en la unitat fonamental corresponent en el SI, entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca.

B) *El problema és resoluble?*

Com que el problema demana la distància «en la unitat fonamental corresponent en el SI», és a dir, en metres, haurem de passar totes les distàncies a metres.

Les tres ciutats se situen en els vèrtexs d'un hipotètic triangle rectangle, raó per la qual coneixeríem la mesura de la hipotenusa (València-Palma de Mallorca) i del catet menor (Castelló de la Plana-València), aleshores, pel teorema de Pitàgores sabem que podem calcular la mesura de l'altre catet, la distància entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Convertirem la distància de València a Palma de Mallorca de milles nàutiques (mn) a metres i la distància de Castelló de la Plana a València de kilòmetres a metres, amb la qual cosa tindrem totes les dades en metres.

b) Si diem «x» a la distància de Castelló de la Plana a Palma de Mallorca, aleshores, pel teorema de Pitàgores s'haurà d'acomplir que x^2 més la distància de Castelló de la Plana a València elevada al quadrat haurà de ser igual a la distància de València a Palma de Mallorca elevada al quadrat, per tant, tindrem una equació amb una incògnita.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) 72 mn · 1.852 m/mn = 133.344 m; 72 km = 72.000 m.
b*)* $x^2 + 72.000^2 = 133.344^2 \rightarrow x^2 = 133.344^2 - 72.000^2 = 17.780_{1}622.336 - 5.184_{1}000.000 = 12.596_{1}622.336 \rightarrow x = 112.234{,}67$ m.

Solució: la distància entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca és de 112.234,67 m.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable*?

Com la distància entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca és la longitud del catet major del triangle rectangle, 112.234,67 m, ha de ser més gran que la mesura del catet menor, la distància de Castelló de la Plana a València, 72.000 m, i més petita que la longitud de la hipotenusa, la distància de València a Palma de Mallorca, 133.344 m, i ho és, per això la solució és raonable.

B) Comprovar la solució

Per a veure la correcció de la solució utilitzem el mètode «canvi de dada per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem la distància entre Castelló de la Plana i Palma de Mallorca, 112.234,67 m (era incògnita i passa a ser dada en el nou problema), i calcularem la distància de València a Palma de Mallorca (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el nou problema: «*Troba la distància entre València i Palma de Mallorca (viatjant en vaixell) si sabem que de Castelló de la Plana a Palma de Mallorca hi ha 112.234,67 m i 72.000 m de Castelló de la Plana a València (viatjant en cotxe)*». Esperem que la resposta siga 133.344 m.

Fem els càlculs necessaris:

Les tres ciutats se situen en els vèrtexs d’un hipotètic triangle rectangle, coneixem la mesura del catet major, la distància Castelló de la Plana-Palma de Mallorca, la del catet menor, la distància Castelló de la Plana-València, i desconeixem la mesura de la hipotenusa, distància València-Palma de Mallorca, aleshores, pel teorema de Pitàgores la podem calcular.

Diem «y» a la distància de València a Palma de Mallorca, per tant:

$y^2 = 112.234{,}67^2 + 72.000^2 = 12.596_{1}621.150 + 5.184_{1}000.000 = 17.780_{1}621.150 \rightarrow y = 133.344$ m.

Com esperàvem, doncs, pensem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Pensem que la resolució del problema és igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que, com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària.

Però, en aquest concret, també hem aplicat el teorema per a calcular la mesura d'un catet conegudes la mesura de la hipotenusa i la de l'altre catet ($a^2 = h^2 - b^2$), cosa que hem justificat en el problema B.8, per tant, en utilitzar el teorema de Pitàgores d'aquesta manera, estem aplicant coneixements que l'alumnat de 6é curs deu tenir assolits.

Problema G.5

La mida de la pantalla d'una televisió es mesura, com saps, en polzades. De fet, el nombre de polzades d'una televisió indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Així doncs, troba les dimensions d'una pantalla de TV *de 32 polzades sabent que la proporció entre els seus costats és 4:3.*

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) Dades i incògnites

- Dades:
  - El nombre de polzades d'una televisió indica la longitud de la diagonal de la pantalla.
  - Una pantalla de TV de 32 polzades sabent que la proporció entre els seus costats és 4:3.
- Incògnites:
  - Les dimensions de la pantalla de TV.

B) El problema és resoluble?

Si anomenem «x» la mesura en polzades de l'ample de la pantalla de la TV i «y» a la mesura en polzades de l'alçària de la pantalla, aleshores, pel teorema de Pitàgores s'haurà d'acomplir: $x^2 + y^2 = 32^2$.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

D'altra banda, 4:3 és la proporció entre les longituds dels costats de la pantalla de la TV, aleshores: $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Les dades del problema es tradueixen en el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$.

Procedim a triangularizar el sistema d'equacions per a veure si és resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ 3x = 4y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ 3x - 4y = 0 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica, en dues dimensions, de la primera equació és una circumferència centrada en l'origen de coordenades i radi 32, i la de la segona equació és una recta que passa per l'origen de coordenades, de manera que ambdues figures es tallaran en dos punts, que seran les solucions del sistema d'equacions, per tant, el sistema és resoluble, aleshores, creiem que possiblement el problema també és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

Resoldrem el sistema d'equacions.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ x = \frac{4y}{3} \end{array}\right\}.$$

Substituint la segona equació en la primera, obtenim:

$$\left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1.024 \rightarrow \frac{16y^2}{9} + y^2 = 1.024 \rightarrow \frac{16y^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = 1.024 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25y^2}{9} = 1.024 \rightarrow y^2 = (1.024 \cdot 9) : 25 = 368{,}64 \rightarrow y = \sqrt{368{,}64} = 19{,}2$$

polzades d'alçària.

D'on, $x = \frac{4y}{3} = \frac{4 \cdot 19{,}2}{3} = 25{,}6$ polzades d'amplària.

Comprovem que el sistema $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$ està correctament resolt substituint els valors trobats:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = (25{,}6)^2 + (19{,}2)^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1.024 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}.$$

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Por tant, el sistema està correctament resolt.

Solució: la pantalla de la TV té 25,6 polzades d'amplària i 19,2 polzades d'alçària.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) La solució és raonable?

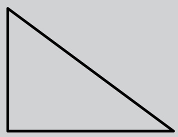
La solució és raonable, ja que les dimensions dels costats de la pantalla de la TV són menors que la dimensió de la seua diagonal.

B) Comprovar la solució

Apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem les dimensions de la pantalla de televisió, 25,6 i 19,2 polzades (eren incògnites i passen a ser dades en el nou problema), i calcularem la diagonal de la pantalla (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*La mida de la pantalla d'una televisió es mesura, com saps, en polzades. De fet, el nombre de polzades d'una televisió indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Així doncs, troba la mida d'una pantalla de TV sabent que mesura 25,6 polzades d'ample i 19,2 polzades d'alt. Quina és la proporció entre l'amplària i l'alçària de la pantalla?*». Esperem que tinga 32 polzades de diagonal i que la proporció siga 4:3.

Fem els càlculs necessaris:

Coneixem l'amplària i l'alçària de la pantalla de la TV, que lògicament és rectangular, i la dimensió que volem calcular és la seua diagonal; com veiem en el dibuix, els costats de la TV i la seua diagonal formen un triangle rectangle del que coneixem la mesura dels catets, 25,6 polzades i 19,2 polzades, i desconeixem la mesura de la hipotenusa, que anomenarem «h».



Pel teorema de Pitàgores tenim: $h^2 = 25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1024 \rightarrow h = \pm\sqrt{1024} = \pm 32$, com que estem calculant longituds ens quedem amb el valor positiu de l'arrel; per tant, la TV té 32 polzades de diagonal, com esperàvem.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

La proporció entre l'ample i l'alt de la pantalla és: $\frac{25,6}{19,2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} =$
$= \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, aleshores la relació entre els seus costats és 4:3, com esperàvem.

Les dues solucions són les esperades, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

Com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària.

Per altra banda, segons el Decret 108/2014, en el 6é curs d'Educació Primària, en el bloc 4: Geometria, de l'àrea de Matemàtiques, pels continguts «Escales» i «Reconeixement en els objectes i espais les proporcions entre el dibuix i la realitat i seua representació gràfica utilitzant escales», i el criteri d'avaluació BL4.1 «Reproduir i classificar figures de l'entorn (natural, artístic, arquitectònic...) basant-se alguna de les seues propietats, amb els recursos apropiats (cinta mètrica, fotografies, programes de geometria dinàmica,...), utilitzant el vocabulari adequat, per a explicar el món que ens envolta», es coneixen i es treballen figures semblants, cosa que hem aplicat en la resolució d'aquest problema.

Per tant, creiem que el problema pot plantejar-se en 6é curs d'Educació Primària.

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

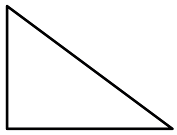
- Dades:
  - o El nombre de polzades d'una televisió indica la longitud de la diagonal de la pantalla.
  - o Una pantalla de TV de 32 polzades sabent que la proporció entre els seus costats és 4:3.
- Incògnites:
  - o Les dimensions de la pantalla de TV.

B) *El problema és resoluble?*

Considerant que la pantalla de la TV és un rectangle, la diagonal forma amb els costats un triangle rectangle, del qual coneixem la hipotenusa, 32 polzades, i la proporció entre els costats, 4:3.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Un triangle rectangle conegut és el de costats 3, 4 i 5 ($3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$), on 5 seria la mesura de la hipotenusa, i els catets compleixen la condició que entre ells la proporció és 4:3.



Si dupliquem la mesura dels costats, el triangle de costats 6, 8 i 10 també és rectangle ($6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$), on 10 seria la mesura de la hipotenusa, i la proporció entre els catets és 8:6 = 4:3, la mateixa que la que han de tenir els de la pantalla de la TV. Açò no és més que una aplicació de la proporcionalitat entre els costats de les figures semblants.

Podem buscar un valor que al multiplicar-lo per 5, hipotenusa del triangle rectangle inicial, ens done 32, mida de la pantalla de la TV. El valor obtingut el multiplicarem pels catets del triangle rectangle inicial, 3 i 4, i obtindrem així les dimensions, en polzades, de la pantalla de la TV i la proporció entre els catets serà 4:3.

Veiem que podem calcular les mesures de la pantalla de la TV, per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Com que l'amplària i l'alçària de la pantalla de TV i la seua diagonal formen un triangle rectangle, que és semblant a un triangle de costats 3, 4 i 5 polzades, calcularem la raó de semblança dividint la longitud de la diagonal de la pantalla de TV entre el valor de la hipotenusa d'aquest triangle.

b) Multiplicarem els costats del triangle de costats 3, 4 i 5 polzades per la raó de semblança calculada en *a*), i per la semblança de triangles obtindrem un altre triangle rectangle d'hipotenusa de 32 polzades.

3a FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 32 : 5 = 6,4.

b) $3 \cdot 6{,}4 = 19{,}2$ polzades; $4 \cdot 6{,}4 = 25{,}6$ polzades.

Comprovem que el triangle de costats 19,2 polzades, 25,6 polzades i 32 polzades és rectangle, i compleix que la proporció entre els seus costats és 4:3.

$25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1024 = 32^2$.

$$\frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Solució: la pantalla mesura 25,6 polzades d'amplària i 19,2 polzades d'alçària.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

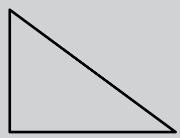
La solució és raonable, ja que les dimensions dels costats de la pantalla de la TV són menors que la dimensió de la seua diagonal.

B) *Comprovar la solució*

Apliquem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem les dimensions de la pantalla de televisió, 25,6 i 19,2 polzades (eren incògnites i passen a ser dades al nou problema), i calcularem la diagonal de la pantalla (era una dada i passa a ser incògnita en el nou problema), és a dir, considerem el problema següent: «*La mida de la pantalla d'una televisió es mesura, com saps, en polzades. De fet, el nombre de polzades d'una televisió indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Així doncs, troba la mida d'una pantalla de TV sabent que mesura 25,6 polzades d'ample i 19,2 polzades d'alt. Quina és la proporció entre l'amplària i l'alçària de la pantalla?*». Esperem que tinga 32 polzades de diagonal i que la proporció sigui 4:3.

Fem els càlculs necessaris:

Coneixem l'amplària i l'alçària de la pantalla de la TV, que lògicament és rectangular, i la dimensió que volem calcular és la seua diagonal; com veiem en el dibuix, els costats de la TV i la seua diagonal formen un triangle rectangle del que coneixem la mesura dels catets, 25,6 polzades i 19,2 polzades, i desconeixem la mesura de la hipotenusa, que anomenarem «h».



Pel teorema de Pitàgores tenim: $h^2 = 25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1024 \rightarrow h = \sqrt{1024} = 32$, per tant, la TV té 32 polzades de diagonal, com esperàvem.

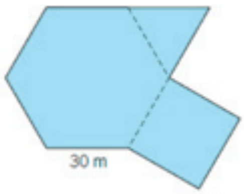
La proporció entre l'ample i l'alt de la pantalla és: $\frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, per tant, la relació entre els seus costats és 4:3, com esperàvem.

Les dues solucions són les esperades, així doncs, creiem que el problema està ben resolt.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Problema G.6

Cadascun dels cinc pisos d'un edifici té la planta d'aquesta figura (formada per un hexàgon regular, un triangle equilàter i un quadrat), sent el costat de l'hexàgon de 30 m. Si el sòl té una moqueta que costa 20 €/m², calcula el preu total pagat per la moqueta de l'edifici.



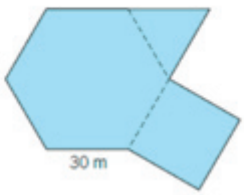
❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - Cadascun dels cinc pisos d'un edifici té la planta de la figura (hexàgon regular, triangle equilàter i un quadrat).



  - El costat de l'hexàgon mesura 30 m.
  - El sòl té una moqueta que costa 20 €/m².
- Incògnites:
  - El preu total pagat per la moqueta de l'edifici.

B) *El problema és resoluble?*

Si podem conèixer la mesura de la superfície de la planta de l'edifici, com que sabem que hi ha cinc pisos i el preu per metre quadrat de la moqueta, en sabrem el preu total.

És fàcil dibuixar amb compàs, escaire i cartabó o programes de geometria dinàmica, a escala 1:1000, per tant 1 mm en el dibuix equival a 1 m en la realitat, la planta de cada pis de l'edifici.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Agafem el compàs i amb obertura de 30 mm dibuixem una circumferència. Posem l'agulla del compàs en qualsevol punt de la circumferència i marquem dos punts amb l'altre extrem del compàs, i ja tenim tres vèrtexs de l'hexàgon regular. Posant ara l'agulla del compàs en algun d'aquests dos últims punts marcats, assenyalem amb l'altre extrem del compàs un nou punt. Així successivament fins a tenir marcats sis punts sobre la circumferència, que seran sis vèrtexs de l'hexàgon regular, i que en unir-los obtindrem el seu contorn.

Per a construir el triangle equilàter, posem l'agulla del compàs en un vèrtex de l'hexàgon (primer vèrtex del triangle) i tracem un arc exterior a l'hexàgon d'obertura 30 mm. Canviant l'agulla del compàs a un dels dos vèrtexs consecutius (segon vèrtex del triangle), tracem un altre arc que talle l'anterior. En el punt de tall tenim el tercer vèrtex del triangle equilàter, i en unir els tres vèrtexs obtindrem el seu contorn.

En el procés de dibuixar el quadrat, des d'un vèrtex comú al hexàgon i al triangle, i també des del vèrtex consecutiu a aquest en l'hexàgon i no pertanyent al triangle, tracem un segment, de 30 mm, perpendicular al costat de l'hexàgon. Finalment, unim els extrems d'aquests dos segments i tanquem el contorn del quadrat.

Un cop dibuixada la planta, podem agafar mil·límetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, tela...) o plantilles quadriculades en mil·límetres quadrats i/o centímetres quadrats i recobrir tota la superfície. Per tant, podrem mesurar la superfície de cada planta en mil·límetres quadrats i/o centímetres quadrats que transformarem en metres quadrats per a obtenir la mesura de la superfície de la planta de l'edifici.

Per tant, el problema és resoluble.

2a FASE: ELABORAR UN PLA

a) Per a calcular l'àrea de l'hexàgon, com és regular, el podem dividir en 6 triangles equilàters, a més tenim un altre triangle equilàter igual, component de la figura de la planta de l'edifici, per tant, començarem calculant l'altura del triangle equilàter, que anomenarem «h», utilitzant el teorema de Pitàgores.

b) Després, com que sabem la mesura de la base dels triangles, usant la fórmula de l'àrea del triangle calcularem l'àrea dels triangles equilàters, que anomenarem «A_{Tr}».

c) Si multipliquem per 6 l'àrea anterior obtenim l'àrea de l'hexàgon regular, que anomenarem «A_H».

d) A continuació, calculem l'àrea del quadrat, que anomenarem «A_C».

e) Sumem les tres àrees obtingudes, de manera que tindrem la mesura de la superfície de cada planta, que anomenarem «A_P».

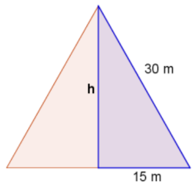
f) Multipliquem la mesura obtinguda a l'apartat anterior pel nombre de plantes de l'edifici, per a obtenir la mesura de la superfície total a emmoquetar, que anomenarem «A_T».

g) Multiplicarem la mesura de la superfície total de l'edifici per 20 €/m^2, així obtindrem el preu total pagat per la moqueta, que anomenarem «P».

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

a) $h^2 + 15^2 = 30^2 \rightarrow h^2 = 30^2 - 15^2 = 675\ m^2 \rightarrow h = \sqrt{675}\ m \cong 26\ m$

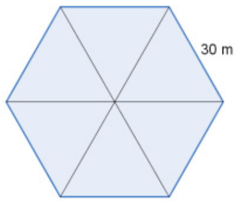


b) Àrea del triangle:

$$A_{Tt} = \frac{30 \cdot 26}{2} = 390\ m^2$$

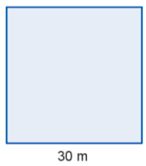
c) Àrea de l'hexàgon:

$A_H = 390 \cdot 6 = 2.340\ m^2$



d) Àrea del quadrat:

$A_C = 30^2 = 900\ m^2$



e) Àrea total de la planta:

$A_P = A_{Tt} + A_H + A_C = 390 + 2.340 + 900 = 3.630\ m^2$

f) Àrea de la superfície per emmoquetar de l'edifici:

$A_T = 5 \cdot 3.630 = 18.150\ m^2$

g) Preu total pagat per la moqueta:

$P = 18.150 \cdot 20 = 363.000$ €

Solució: el preu total pagat per la moqueta de l'edifici és de 363.000 €.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

El preu total de la moqueta ve determinat per la superfície d'una planta, el nombre de plantes i el preu per metre quadrat de la moqueta. Com que el nombre de plantes i el preu per metre quadrat de la moqueta estan determinats en

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

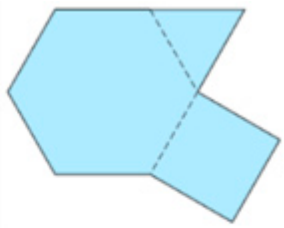
l’enunciat del problema, l’únic valor per calcular és la mesura de la superfície d’una planta, aleshores, veurem si el valor obtingut en la 3a fase és raonable.

Com que l’hexàgon regular de 30 m de costat es pot triangularitzar en 6 triangles equilàters de 30 m de costat i, la superfície de l’esmentat triangle equilàter és més petita que la d’un quadrat de 30 m de costat, sabem que: la superfície de la planta de l’edifici ha de ser més gran que una superfície formada per 8 triangles equilàters de 30 m de costat i més petita que una superfície formada per 8 quadrats de 30 m de costat.

Si passem a nombres, les àrees, l’àrea de la planta de l’edifici (3.600 m^2) ha de ser de ser més gran que l’àrea d’una superfície formada per 8 triangles equilàters de 30 m de costat ($8 \cdot 390\ m^2 = 3.120\ m^2$) i menor l’àrea d’una superfície formada per 8 quadrats de 30 m de costat ($8 \cdot 900\ m^2 = 7.200\ m^2$), i ho és. Per això creiem que la solució és raonable.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «canviar dades per incògnita i viceversa», de manera que suposem que coneixem el preu d’emmoquetar tot l’edifici i la superfície del quadrat (eren incògnites i passen a ser dades al nou problema) i calcularem quant costa el metre quadrat de moqueta (era dada i ara passa a ser la incògnita), amb la qual cosa considerem el problema següent: «*S’han pagat 363.000 € per l’emmoquetat de l’edifici. Sabem que cadascun dels cinc pisos de l’edifici té la planta d’aquesta figura (formada per un hexàgon regular, un triangle equilàter i un quadrat) i que l’àrea del quadrat és 900 m^2. Calcula el preu per metre quadrat de la moqueta*». Esperem que el preu del metre quadrat de la moqueta siga de 20 €/m^2.



Fem simplement els càlculs:

Primer calculem la mesura del costat del quadrat, l’anomenarem «c», que és també la mesura del costat de l’hexàgon: $c = \sqrt{900} = 30$ m.

Com que en l’enunciat del nou problema tenim dades que coincideixen amb les del problema original, podem aprofitar els càlculs fets en la 3a fase:

- àrea del triangle: $A_{Tr} = 390\ m^2$
- àrea de l’hexàgon: $A_H = 2.340\ m^2$

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Calculem l'àrea de la planta: $A_P = 900 + 390 + 2.340 = 3.630\ m^2$.

Com que hi ha cinc pisos, l'àrea de les 5 plantes de l'edifici serà: $A_T = 3.630 \cdot 5 = 18.150\ m^2$.

Dividim el preu de l'emmoquetat entre la superfície total que cal emmoquetar: 363.000 : 18.150 = 20.

Per tant, la moqueta valdrà 20 €/m²; com esperàvem, doncs, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució és pràcticament igual, ja que els conceptes i continguts utilitzats són propis dels últims cursos d'Educació Primària i la diferència podria ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Fet el dibuix al·lusiu a l'enunciat del problema a escala 1:1000, per exemple, mesurarem la superfície d'una planta mitjançant mil·límetres quadrats i/o centímetres quadrats (de paper, tela...) o plantilles quadriculades en mil·límetres quadrats i/o centímetres quadrats, obtenint una mesura molt aproximada a 3.630 mm², que al «desfer l'escala» són, aproximadament, els 3.630 m² de superfície d'una planta.

Multiplicant aquest valor pel nombre de plantes, 5, i pel preu del metre quadrat de moqueta, 20 €/m², ens dona, aproximadament, la solució del problema, 363.000 €; per tant, creiem que el problema està ben resolt.

Problema G.7

Volem guardar una canya de pescar d'1,85 m de longitud en una caixa amb forma d'ortoedre sense que se n'isca. Les dimensions de la caixa són 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 0,5 m d'alt. És possible fer-ho?

❑ ESTUDIANTAT DEL GRAU EN MESTRE/A D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

1a FASE: COMPRENDRE EL PROBLEMA

Llegit i comprés l'enunciat del problema:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

A) *Dades i incògnites*

- Dades:
  - La longitud de la canya de pescar es d'1,85 m.
  - Caixa amb forma d'ortoedre.
  - Les dimensions de la caixa són 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 0,5 m d'alt.

- Incògnites:
  - Saber si podem guardar la canya de pescar en la caixa sense que se n'isca.

B) *El problema és resoluble?*

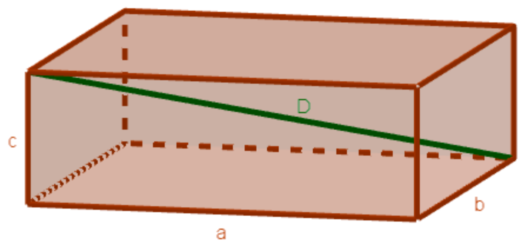
La distància més gran possible entre dos punts d'un ortoedre és la seua diagonal, per tant, si la canya de pescar mesura igual o menys que la diagonal de l'ortoedre podrem posar-la dins; aleshores, la incògnita real és la longitud de la diagonal de l'ortoedre.

Amb les dades que ens dona el problema, podem construir rectangles d'1 × × 1,5 m², d'1,5 × 0,5 m² i d'1 × 0,5 m² amb cartó o fusta i acoblar la caixa.

D'altra banda, si no tenim la canya de pescar a mà, podem tallar un llistó de fusta d'1,85 m de longitud i veure si cap en la caixa que hem construït.

Com que podem construir tant la caixa com la canya de pescar, el problema és resoluble.

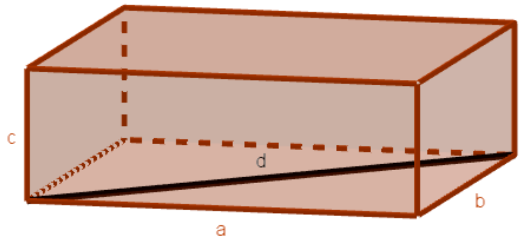
2a FASE: ELABORAR UN PLA



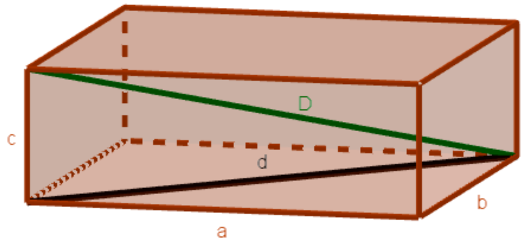
Si anomenem «a» la longitud del llarg de l'ortoedre, «b» la longitud de l'ample i «c» la longitud de l'altura, haurem de calcular la mesura de la diagonal de l'ortoedre, que denominarem «D»:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

a) En la base de l'ortoedre calcularem la mesura de la seua diagonal, que anomenarem «d», utilitzant el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle format pels costats de la base, de mesures *a* i *b*, i la seua diagonal.



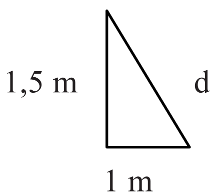
b) Calcularem la mesura de la diagonal de l'ortoedre, D, utilitzant el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle format per la diagonal de la base, de mesura *d*; l'altura de l'ortòedre, de mesura *c*, i la diagonal de l'ortoedre, de mesura D.



c) Compararem la longitud de la diagonal de l'ortoedre amb la longitud de la canya de pescar: si la mesura de la diagonal, D, és més gran o igual que la longitud de la canya, sí que hi cap a la caixa. En cas contrari, no.

3a FASE: EXECUTAR EL PLA

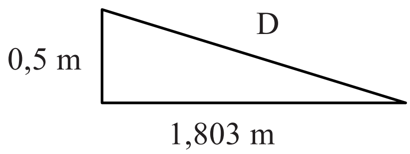
a) Els costats de la base mesuren 1 m i 1,5 m, respectivament, tenim doncs el triangle rectangle següent:



Utilitzant el teorema de Pitàgores: $d^2 = 1^2 + 1,5^2 \rightarrow d^2 = 1 + 2,25 = 3,25 \rightarrow$
$\rightarrow d = \sqrt{3,25} = 1,803$ m.

b) La diagonal de la base mesura 1,803 m, l'alçària de l'ortoedre 0,5 m, per tant, tenim el triangle rectangle següent:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166



Utilitzant el teorema de Pitàgores: $D^2 = 0{,}5^2 + 1{,}803^2 \rightarrow D^2 = 0{,}25 + 3{,}25 = 3{,}5 \rightarrow D = \sqrt{3{,}5} = 1{,}871$ m.

c) Com la longitud de la canya de pescar, 1,85 m, és més petita que el valor obtingut per la diagonal de la caixa, D = 1,871 m, sí que hi cap dins la caixa.

Solució: la canya de pescar sí que cap dins la caixa.

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

A) *La solució és raonable?*

Sí, perquè les diagonals, d i D, tenen mesures raonables per als triangles rectangles dels quals formen part.

B) *Comprovar la solució*

Com que en la 3a fase hem tingut en compte totes les dades del problema, per a assegurar-nos que la solució és correcta aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, com hem justificat a la primera fase, *B) El problema és resoluble?*, la incògnita real és la longitud de la diagonal de l'ortoedre, que calcularem utilitzant la fórmula coneguda de la mesura de la diagonal (D) d'un ortoedre de dimensions a, b i c: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Esperem que la diagonal de la caixa mesure 1,871 m.

Fem els càlculs necessaris:

$D^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 = 1 + 2{,}25 + 0{,}25 = 3{,}5 \rightarrow D = \sqrt{3{,}5} = 1{,}871$ m.

Hem obtingut la mateixa mesura, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

❑ ALUMNAT D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

La resolució del problema és pràcticament igual que per a l'estudiantat de Grau en Mestre/a d'Educació Primària, ja que, com hem justificat en el problema B.3, la utilització del teorema de Pitàgores ha de figurar entre els coneixements de l'alumnat de 6é curs d'Educació Primària i la diferència en la resolució podria ser:

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓ

B) Comprovar la solució

Per a fer la comprovació, aplicarem el mètode «resoldre el problema d'una altra manera», en concret, experimentalment.

Construïda la caixa i la canya de pescar al·lusives a l'enunciat del problema, introduiríem la canya dins la caixa veient que cap, per tant, creiem que el problema està ben resolt.

NOTA: La resolució del problema com a alumnat d'Educació Primària podria ser simplement experimental.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

Bibliografia

Abrantes, Paulo et al. 2002. *La resolución de problemas en matemáticas*. Colección Claves para la Innovación Educativa, 12. Barcelona: Graó.

Alcalde, Manuel. 2010. *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de Maestro en la Universitat Jaume I*. Tesi doctoral. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I. http://www.tdx.cat/TDX-0722110-121907.

Alcalde, Manuel et al. 2013. «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos». XVI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Palma de Mallorca, juliol 2013.

Alcalde, Manuel, Inmaculada C. Pérez i Gil Lorenzo. 2014. *Els nombres naturals a l'aula de Primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 89. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia89.

Alsina, Àngel. 2006. «¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas?». *Uno* [Versió electrònica], 43.

Alsina, Claudi et al. 1996. *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Ausubel, David Paul. 1968. *Educational Psychology. A Cognitive View* (1a ed.). Nova York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast. Roberto Helier, 1976. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* [1a ed.]. Mèxic: Trillas).

Ausubel, David Paul, Joseph D. Novak i Helen Hanesian. 1978. *Educational Psychology. A Cognitive View* (2a ed.). Nova York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast.: Mario Sandoval, 1983. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* [2a ed.; 4a reimpr., 1990]. Mèxic: Trillas).

Canals, Maria Antònia. 2010. *Problemes i més problemes*. Col·lecció Els Dossiers de Maria Antònia Canals, 107. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

Carrillo, José. 1998. «La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué». *Epsilon* 40: 21-25.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch i Josep Gascón. 1997. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Dewey, John. 1910. *How we think*. Boston (EUA): D. C. Heath and Company.

García Granell, Montserrat. 2017. *Anàlisi del mètode de Polya per a la resolució de problemes als llibres de text de matemàtiques de Primària* (treball final de grau). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

ISBN: 978-84-17900-44-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

García Jiménez, Juan Emilio. 2002. «Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas». En *La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiències*, Paulo Abrantes et al. Barcelona: Ed. Laboratorio Educativo-Graó.

Generalitat Valenciana. 2014. Decret 108/2014, de 4 de juliol, del Consell, pel qual establix el currículum i desplega l'ordenació general de l'Educació Primària a la Comunitat Valenciana. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, núm. 7311, 7 de juliol de 2014.

—. 2015. Decret 87/2015, de 5 de juny, del Consell, pel qual establix el currículum i desplega l'ordenació general de l'Educació Secundària Obligatòria i del Batxillerat a la Comunitat Valenciana. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, núm. 7544, 10 de juny de 2015.

Halmos, Paul Richard. 1980. «The Heart of Mathematics». *American Mathematical Monthly* 87 (7): 519-24.

Kilpatrick, Jeremy. 1985. «A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem-solving». En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiples Research Perspectives*, ed. Edward A. Silver. Hillsdale (New Jersey, EUA): Lawrence Erlbaum Associates.

Lorenzo, Gil, Manuel Alcalde i Inmaculada C. Pérez. 2015. *La geometria i l'estadística en l'aula de primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 110. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia110.

Mason, John, Leone Burton i Kaye Stacey. 1982: *Thinking Mathematically*. Massachusetts (EUA): Addison-Wesley.

Montero, Jesús et al. 2018. «Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria». *Suma* 87: 31-40.

National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia (EUA): National Council of Teachers of Mathematics. (Trad. cast.: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. 2003. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales).

Orton, Anthony. 1988. *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice*. Londres: Cassell. (Trad. cast.: Solana, Guillermo. 1990. *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia - Ed. Morata S. A.).

Perales, Francisco Javier 2000. *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis, S. A.

Pérez, Inmaculada C., Manuel Alcalde i Gil Lorenzo. 2012. «La Formación Inicial de los Maestros de Educación Infantil. Una aproximación desde la realidad en Didáctica de las Matemáticas». XII Congreso Internacional de Formación del Profesorado (AUFOP 2012): La Educación como Elemento de Transformación Social. 22-24 noviembre 2012, Valladolid (España).

—. 2014. *Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 96. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia96.

Polya, George. 1945. *How to solve it*. Princenton: Princeton University Press, Oxford (RU). (Trad. cast. George Polya, 1965, reimpreso 2010. *Cómo plantear y resolver problemas*. Mèxic D. F.: Trillas.)

Puig, Luis. 1996. *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
Puig, Luis i Fernando Cerdán. 1988. *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, S. A.
Sánchez Mendías, Javier, Isidoro Segovia i Antonio Miñán. 2011. «Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de Educación Primária». *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, vol. 15 (3): 297-311.
Schoenfeld, Alan. 1985. «*Mathematical problem solving*». Nova York: Academic Press.
Skemp, Richard R. 1971. *The Psychology of Learning Mathematics* (1a ed., reimp. 1977). Londres: Penguin Books Ltd. (Trad. cast.: Gonzalo Gonzalvo, 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata, S. A.)
Sobrino, Marta. 2016. *La resolución de problemas en tercero y cuarto curso de Educación Primaria según el método de Polya* (treball final de grau). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.
Traver, Cristian. 2015. *Estudi de la resolució de problemes pel mètode de Polya en Educació Primària* (treball final de grau). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.
WEBSTER'S. 1979. *New universal unabridged dictionary* (2a ed.). Nova York: Simon & Schuster.

ISBN: 978-84-17900-44-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166