UNIVERSITAT JAUME I

Trabajo Final de Máster: Relación entre Música y Matemáticas

Màster Professor/a d'Educacio Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Profesional i Ensenyaments d'Idiomes especialitat de Maemàtiques

Autor: *Samuel Diciembre Sanahuja*

Tutor: *Gil Lorenzo Valentín*

Curso 2018-2019

Resumen

Este documento es un trabajo de final del Máster en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional i Enseñanza de Idiomas de la Universitat Jaume I de Castellón. Por lo tanto, se trata de un trabajo orientado hacia el campo de la educación. Este trabajo forma parte de la especialidad de matemáticas del máster, por lo que todas las aportaciones que haga están pensadas para el aula de matemáticas.

El título del trabajo es “Relación entre Música y Matemáticas”, por lo que se trata de una ayuda para poder hacer ver a los alumnos y alumnas esta relación, que es mucho más profunda de lo que uno pudiera pensar en un principio. El documento no pretende indagar de una manera muy profunda en la teoría musical ni explicar conceptos matemáticos muy complicados. Se trata del resultado de una búsqueda bibliográfica sobre el tema expuesto en el título para ver la relación histórica que han tenido, diferentes técnicas que composición basadas en matemáticas que se han empleado y aportaciones al mundo de la música hechas por algunos matemáticos.

El documento aporta un material para el profesor de matemáticas que quiera hacer ver al alumnado esta importante relación. La música tiene su origen en las matemáticas, en el estudio de los números y sus relaciones. Esto hace que a lo largo de la historia esta relación no se haya separado. Durante mi investigación he encontrado una gran cantidad de artículos y trabajos elaborados por matemáticos que tratan de explicar esta relación o algún concepto concreto. Esto me ha hecho pensar que los matemáticos, efectivamente, tenemos mucho que decir a la hora de hablar de la música.

Podemos hacer muchas explicaciones, no solo respecto a la relación de las matemáticas con la música, sino de las matemáticas con la arquitectura o las matemáticas con la pintura. Sin embargo, resulta necesario averiguar si los alumnos asumen estos conocimientos, si están aprendiendo no solo que esta relación existe, sino que les permite aprender matemáticas a través de la música y música a través de las matemáticas. Para esto el trabajo también aporta una serie de actividades al final para ver esta relación.

Palabras clave: música, matemáticas, composición.

Índice

1. Introducción……………………………………………………..………………….…….1

2. Justificación……………………………………………..…..………..……………....2

3. Marco teórico………………………………………………………………………...3

4. Estado e la cuestión………………………………..…………………..…………..4

5. Objetivos……………………………………………………………………………..5

6. Música en la Antigua Grecia……………………………………………….………5

7. Escalas musicales………………………………………………………….………7

7.1. Sistema de afinación pitagórico……………………..…………………….…7

7.2 Sistema de afinación absoluta……………………..……………………..8

7.3. Como crear escalas musicales……………………..………………………...9

7.4. Círculo de quintas………………………………………..……………………15

8. Tiempo………………………………………………………………..……………20

8.1. El tempo…………………………………………………….……………20

8.2. El compás y subdivisiones………………………………………….………….21

8.3 Tipos de compás………………………………………………………………22

9. Geometría de la composición………………………………………………….……24

9.1. Transformaciones musicales………………………………………….….……26

10. Juego de dados de Mozart ……………………………..………………….……33

11. Actividades…………………………………………..……………………………35

12. Conclusiones…………………………………..……………………………..…40

13. Posibles extensiones…………………………………………………………….…41

14. Opinión personal…………………………………………………………..………...41

15. Bibliografía y webgrafía……………………………………………………..…...42

Anexos……………………………………………………………………………....43

1. Introducción

El trabajo intentará aportar un material que pueda resultar útil al profesorado de matemáticas para enseñar al alumnado la relación existente entre la música y las matemáticas.

Este documento se trata de un trabajo de final del Máster en profesor/a de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas. El máster ha sido presencial y durante las clases nos han ayudado para nuestro futuro trabajo como profesores. Nos han facilitado herramientas para la investigación en el campo de la educación y la redacción de unidades didácticas y actividades en el aula. Dentro de este máster, el trabajo entra dentro de la especialidad de matemáticas, es por eso que su aplicabilidad está orientada esencialmente a las clases de matemáticas, concretamente en secundaria y dentro de la modalidad de material didáctico.

El trabajo comienza con un apartado de justificación. En este apartado comento porqué he elegido este tema y no otro entre las muchas posibilidades que me ofrecía el máster. Aporto las experiencias personales y profesionales que me han llevado a querer investigar sobre este tema.

En el apartado del marco teórico explicaré los conceptos matemáticos que se van a tratar. A continuación, encontramos el estado de la cuestión. En este apartado comentaré la búsqueda que he realizado sobre el tema que quiero tratar. Los diferentes trabajos, artículos y libros que he podido consultar o bien para tener una idea general o bien para tomar citas y ejemplos que sirvieran de explicación de algunos de los conceptos que se verán a lo largo del trabajo.

Comenzaremos viendo la relación original entre la música y las matemáticas que se dio en la Antigua Grecia. En este apartado comentaré cómo los pitagóricos descubrieron las relaciones numéricas existentes entre los sonidos. En el siguiente apartado se aportan las diferentes formas de obtener las escalas musicales: la afinación pitagórica, la afinación absoluta y el círculo de quintas. También veremos cómo aplicar diferentes transformaciones geométricas a la composición musical. Podremos observar que estas transformaciones en música siguen reglas parecidas a las transformaciones en el plano. Por último, veremos como el compositor Mozart utilizaba la probabilidad y el azar para componer una de sus obras.

Para finalizar, después de ver toda la parte teórica del trabajo, aportaré una serie de actividades que pueden realizarse en el aula de matemáticas para ver esta relación existente entre música y matemáticas.

El trabajo concluye con una valoración personal en la que hago una breve reflexión sobre el trabajo que he realizado. Todos los conceptos necesarios para poder seguir de manera adecuada el trabajo se encuentran en los anexos.

2. Justificación

Lo que recuerdo de mi época de estudiante era que las matemáticas son una de las asignaturas menos populares entre el alumnado de secundaria, ya que entre mis compañeros y compañeras esta materia no gozaba del aprecio de la mayoría, pero ha sido en mis años como profesor particular y en academias donde se me ha confirmado esta idea. Esto se debe a diversas razones, una de las cuales puede ser el hecho de que no se puede aprobar estudiando y memorizando como en otras materias, es necesario un proceso manual, escribiendo y produciendo matemáticas para profundizar en la materia. Cuesta entender qué es un logaritmo, cómo se dividen decimales, qué representa una función, qué es una integral, qué es una derivada y muchos más procesos que no pasan por la simple memorización. Llevo muchos años explicando estos mismos conceptos a alumnos y alumnas que salían del aula del instituto o colegio sin acabar de comprenderlo. Otra de las razones es la poca utilidad que ven a los conceptos que se estudian en matemáticas y la poca relación que han encontrado con la vida real. Muchas veces el alumnado entiende el procedimiento mecánico para realizar los ejercicios o aprobar los exámenes, pero le cuesta mucho ver qué hay más allá. Es nuestro trabajo, el de todos los docentes, hacerles ver que las matemáticas están vivas e incluidas en la economía, las ciencias y el arte.

En este trabajo vamos a ver una aproximación a la relación que existe entre la música y las matemáticas. Una relación que se remonta al principio mismo de la aparición de la música y a la profundización en muchos campos de las matemáticas. ¿Por qué la música? Podríamos haber visto la relación entre las matemáticas y la astronomía, el deporte, la pintura, la arquitectura y muchas otras disciplinas. Se trata de una elección personal, el amor por la música y la intriga por las matemáticas me han motivado para buscar qué es lo que las une. Desde que estaba en 2º de la ESO me ha interesado profundamente la música, con los años he aprendido a apreciar y disfrutar diversos géneros, comencé a aprender a tocar la flauta travesera y el piano de forma autodidacta. Desde hace unos años disfruto también viendo análisis de bandas sonoras de películas y de piezas musicales famosas, donde se explica qué pretende explicar el autor en cada parte y cómo lo hace utilizando la melodía, los armónicos, el tempo, las escalas y muchas más herramientas a tener en cuenta a la hora de componer. La música habla de los sentimientos más profundos del ser humano y las matemáticas nos ayudan a ver cómo está construido el mundo. Estudiar la relación entre ambas es, cuanto menos, interesante.

3. Marco teórico

La teoría musical estudia los diferentes elementos de la música, entre los cuales podemos encontrar el desarrollo y la metodología para analizar, comprender, escuchar, y componer música. Según nos cuenta Tomasini (2007) los pitagóricos ya descubrieron que las matemáticas y la música estaban profundamente relacionadas. Conceptos como la simetría, la traslación, las progresiones y sucesiones forman parte de la composición musical. Conceptos como la tonalidad, la armonía, los intervalos, las escalas y los acordes tienen una explicación matemática. Todos estos elementos se relacionan a partir de unas propiedades matemáticas que conocemos y que se han estudiado a lo largo de la historia.

La música ha ido cambiando y creciendo a medida que también crecía la humanidad y avanzaba la ciencia. Esta relación no es casualidad puesto que como dicen Liern y Queralt (2008) "*Las matemáticas son la herramienta fundamental para el tratamiento de los procesos físicos que generan la música*" (pág 2). Conforme se ha ido comprendiendo las matemáticas se ha ido también aprendiendo las artes y disciplinas que necesitan de esta ciencia. Una de estas disciplinas es la música.

En este trabajo explicaré algunos de los conceptos de la teoría musical más importantes desde un punto de vista matemático. Para poder ver esta relación debemos tener una base del lenguaje musical y su vocabulario que podremos encontrar en el Anexo I. En este apartado nos centraremos en los conceptos matemáticos que vamos a trabajar.

Para construir las escalas musicales será necesario multiplicar fracciones. De esta manera podemos entender las escalas como sucesiones geométricas donde la razón es $^3/_2$ (relación de frecuencias entre una nota y su quinta). Eso sí, todos los valores de la sucesión deben valer entre 1 y 2. El hecho de que cada nota sea un producto multiplicativo de la nota anterior por un término nos llevara a una subdivisión de la escala musical lo más ajustada posible. Esto es importante entenderlo para la división que haremos. Por otro lado, el tiempo en música viene determinado por los compases, que están basados en fracciones, y las figuras musicales. La duración de las figuras musicales dependerá el tempo en el compás.

También estudiaremos las diferentes transformaciones geométricas y cómo algunos compositores las aplican en la composición de sus obras. Una transformación geométrica es una función que hace corresponder a cada punto del plano, otro punto del mismo plano al cual llamamos Imagen. En general, una Transformación geométrica es una operación geométrica que permite construir una nueva figura a partir de una que se ha dado inicialmente.

Terminaremos viendo una aplicación de la probabilidad en la composición y un ejemplo de variaciones con y sin repetición. La probabilidad de un suceso indica el grado de posibilidad de que dicho suceso ocurra. Se expresa mediante un valor en el intervalo [0, 1]. Las variaciones consisten en agrupar elementos, importando el orden, no tomamos todos los elementos y estos se pueden repetir o no.

4. Estado de la cuestión

Para llevar a cabo la elaboración del trabajo he tenido que realizar una profunda búsqueda de información. Comencé buscando trabajos del mismo máster de profesorado que anteriormente ya hubieran tratado esta temática de "Música y Matemáticas". El primer trabajo que consulté fue *Las matemáticas en la composición musical. Una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria* (Torrejón-Marín, M., 2015) el cual nos habla de cómo algunas propiedades matemáticas se han utilizado y se utilizan aún a la hora de componer piezas musicales. Conceptos como la simetría, la reflexión, la rotación e incluso las funciones fractales pueden ayudarnos a entender cómo componen algunos autores y porqué esta composición resulta agradable. Después de estudiar este trabajo me puse a buscar trabajos de otras universidades. Encontré, por ejemplo, un trabajo de final de grado *"Matemáticas a través de la música en Educación primaria: Reflexión y propuesta de actividades"* (Contreras de la Torre, G., 2017) y un artículo *"Música y matemáticas en educación primaria"* (Liern Carrión, V., 2011). El primer trabajo hace un repaso histórico más profundo sobre la relación que han tenido estas dos disciplinas y ofrece actividades que podrían resultarme útiles para mi trabajo. El segundo ofrece una serie de actividades didácticas para alumnos de primaria que les haga comprender ideas como la duración de las notas, el ritmo y el compás.

Para no quedarme únicamente con trabajos escritos decidí buscar en YouTube algún material visual que me pudiera servir para el trabajo. Encontré una conferencia muy interesante titulada *"Música y Matemáticas, una relación indisoluble"* dada por Erik Castaneda en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) en año 2017. Erik Castaneda es un ingeniero apasionado de la música que trata de mostrar algunas de las propiedades matemáticas que podemos apreciar en las piezas musicales.

Otro de los materiales que me han servido de gran ayuda para profundizar sobre este tema han sido el libro *La armonía es numérica* (Arbonés, J. y Milrud, P., 2011). Esta obra pretende hacernos ver cómo las matemáticas interfieren en la creación de las melodías, las armonías, los ritmos, los tonos y las notas. En esta línea también encontré otro documento: *Música y matemáticas*, (Liern, V. y Queralt, T., 2008) elaborado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Además de explicar muchos aspectos musicales desde un punto de vista matemático también propone una serie de juegos para aplicarlos en el aula de primaria y secundaria.

Por último, he podido consultar una serie de artículos que tratan de explicar, con mayor o menor profundidad, la relación entre la música y las matemáticas. Esta relación no solo ha sido abordada desde un punto de vista teórico como puede ser el primer análisis hecho por Pitágoras en la Antigua Grecia. Un ejemplo de este análisis son los artículos *"Matemáticas en la música"* (Pastor Martín, 2008) o "*Fundamentos matemáticos de la escala musical y sus raíces pitagóricas*" (Tomasini, 2007). Esta cuestión ha sido también analizada bajo el punto de vista didáctico para tratar de enseñar o mostrar esta relación. Durante la profundización en el tema encontré un artículo muy interesante en este aspecto: *"La Música también cuenta: combinado matemáticas y música en el aula"* (Casals, A., Carmen Carrillo, C. y C. González, C., 2014). Este artículo pretende ayudar a los docentes facilitándoles herramientas. Uno de los aspectos más relevantes que comenta es el proyecto *European Music Portofolio: Sounding*

Ways Mathematics (EMP-M)[1]. Descubrí este portal gracias al artículo anteriormente mencionado y en él podemos encontrar material para ver la relación entre la música y las matemáticas. En dicho recogí un manual muy interesante que hace un repaso histórico a la relación música-matemáticas *"Maths: Sounding Ways into Mathematics"* (Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R. & Zerlik, J., 2016) y ofrece una serie de actividades para trabajar nociones musicales y matemáticas en diferentes edades.

5. Objetivos

El presente TFM tiene como objetivos:

1. Profundizar en la relación de la música con las matemáticas.
2. Aportar un material didáctico en forma de actividades que resulten útiles para trabajar las matemáticas desde un punto de vista diferente que pueda proporcionar contexto, motivación e interés al alumnado de secundaria.

6. La música en la antigua Grecia

La gran mayoría de las ciencias y de los saberes tienen su origen en la Antigua Grecia. La música y las matemáticas no son una excepción. En esta época, Pitágoras y los pitagóricos "buscaban comprender la armonía del universo y consideraban los números y sus relaciones la expresión última de esta armonía" (Arbonés, J. y Milrud, P., 2011, p. 11) Los pitagóricos fueron los primeros en desarrollar una división de los saberes, a los que llamaban artes. Estas artes se dividían en dos tipos de saberes: los saberes exactos (*Quadrivium*) y los saberes humanos (*Trivium*). Dentro del quadrivium la música se consideraba una disciplina matemática que se dedicaba a manejar las relaciones de números, razones y proporciones. Se trata de algo que se podía medir y predecir, al igual que la geometría, la astronomía y la aritmética. Esta división de los saberes se mantuvo a lo largo de la Edad Media, por lo que resultaba necesario el estudio de ambas disciplinas. Las siete artes liberales, que se estudiaban durante la Edad Media diferenciaban el trívium (gramática, retórica y dialéctica) y el quadrivium, este último siguió considerando a la música como un subconjunto de las matemáticas.

[1] http://maths.emportfolio.eu/index.php

$$\textit{Las 7 artes liberales}\begin{cases}\textit{Quatrivium}\begin{cases}\textit{Geometría}\\ \textit{Aritmética}\\ \textit{Música}\\ \textit{Astronomía}\end{cases}\\ \textit{Trivium}\begin{cases}\textit{Gramática}\\ \textit{Dialéctica}\\ \textit{Retórica}\end{cases}\end{cases}$$

Muchos autores han trabajado el descubrimiento de los pitagóricos, es el caso de Pastor Martin (2008) y Tomasini (2007). Dado que los Pitagóricos consideraban la música una disciplina matemática, la estudiaban como tal, y fueron los primeros que sacaron un sistema de afinación musical. Este sistema lo obtuvieron a raíz de las observaciones que hacían sobre un instrumento llamado monocordio (*mono*=uno, *cordio*=cuerda). Comparaban pares de sonidos producidos por distintas longitudes de cuerda. Los experimentos que realizaron consistían en relaciones de longitudes con números pequeños: dividir la cuerda a la mitad, a la tercera parte, a dos tercios de la longitud original, etc. Hoy sabemos que los sonidos son simplemente vibraciones en forma de ondas que se transmiten a través del aire hasta nuestros oídos. Sabemos también que la altura de un sonido que producido por una cuerda viene dada por la velocidad a la que ésta vibra, es decir, a la frecuencia con la que la cuerda que vibra pasa por su posición inicial, y sabemos también que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Martín (2008) aporta una explicación de todo el estudio de los pitagóricos con el monocordio. El resultado fue que las longitudes relacionadas con números pequeños generaban los sonidos más agradables, los más armónicos. La relación más sencilla es la que se obtiene al pisar la una cuerda en la mitad de su longitud. La expresión numérica de esta relación es 2:1 y musicalmente se corresponde con un intervalo de octava (por ejemplo, la distancia de un *do* con el siguiente *do*) (ver Anexo I). La siguiente relación se obtiene pisando la cuerda a un tercio de la longitud total de la cuerda. La expresión numérica de esta relación es 3:2 y musicalmente se corresponde con un intervalo de quinta (la distancia de *do* a *la*). La siguiente relación seria pisando a un cuarto del total de su longitud, que se expresa con la relación 4:3 y musicalmente se conoce como un intervalo de cuarta (la distancia entre *do* y *fa*).

Estas tres relaciones podemos observarlas en la Figura 1.

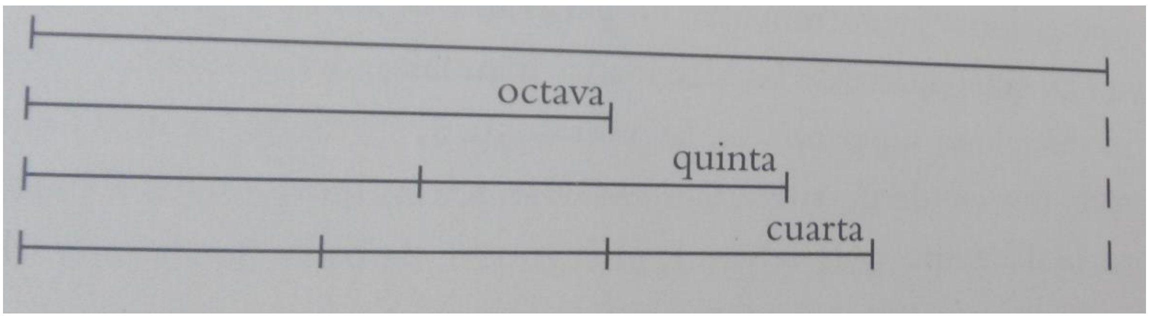


Figura 1: Longitud de la cuerda que genera un sonido, su octava, su quinta y su cuarta (Imagen tomada del libro *La armonía es numérica,* Arbonés, J. y Milrud, P. (2008))

Los pitagóricos continuaron el procedimiento y obtuvieron el resto de notas a partir de una misma cuerda. Podríamos decir que todas estas notas siguen un patrón según el cual los sonidos relacionados por fracciones de la forma $\frac{n+1}{n}$ son armónicos y agradables al oído.

7. Escalas musicales

7.1. Sistema de afinación pitagórico

Según nos cuentan Arbonés y Milrud (2008) considerando que los pitagóricos partían de la nota *do* y de su octava (*do*) hallaron su quinta (*sol*) y su cuarta (*fa*) (ver Anexo I). Después de ver las relaciones de proporcionalidad con una misma nota, el siguiente paso era establecer relaciones a partir de las notas que habían resultado de aquellas. De esta manera, los pitagóricos hallaron la quinta de *sol* (*re*) por medio de la multiplicación del valor de *sol* como quinta de *do* por él mismo, es decir: $3/_2 \cdot 3/_2 = 9/_4$. Al ser $9/_4$ mayor que dos, se salía de la octava en la que estaban operando, pero como habían descubierto con anterioridad, la nota de una cuerda y su mitad era la misma nota. Por lo tanto, decidieron dividir el resultado de $9/_4$ entre dos, para que estuviera dentro de la octava y seria lo que conocemos como *re* con el resultado final de $9/_8$. Esto podía continuar mientras el resultado fuesen números racionales sencillos. Así pudieron averiguar la quinta de *re* (*la*), siendo *la* igual a $27/_{16}$, resultado de multiplicar los $9/_8$ equivalentes a *re* por $3/_2$. Continuaron con el procedimiento. La quinta de *la* (*mi*), era igual a $81/_{64}$, resultado de multiplicar los $27/_{16}$ equivalentes a *la* por otra quinta $3/_2$ y dividir entre dos; y la quinta de *mi* (*si*), era igual a $243/_{128}$, repitiendo la misma operación que las anteriores: $81/_{64} \cdot 3/_2 = 243/_{128}$.

De esta forma hallaron las siete notas musicales ordenar de menor a mayor en función de los valores, de esta manera estarán también ordenados de más graves a más agudos, tal como se muestra en la Tabla 1.

Nota Base	*f*
	9/8·f
	81/64 ·f
Cuarta	*4/3·f*
Quinta	*3/2·f*
	27/16·f
	243/128·f
Octava	*2·f*

Tabla 1: Relación de frecuencias de las primeras 7 notas musicales

Tal y como hemos dicho al principio, si partimos de que la primera nota es un *do* y su octava es el siguiente *do,* las relaciones de las frecuencias de las notas a partir de la Tabla 1 nos daría las notas que vemos en la Figura 2.

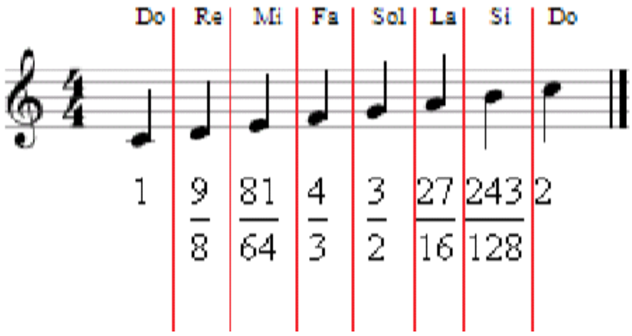


Figura 2: Valor de cada nota musical respecto del primer *do* (Imagen tomada de *Matemáticas a través de la música en educación primaria: reflexión y propuesta de actividades*, Contreras de la Torre, G. (2017)

)

Tal y como explica Peralta (2010) cuando tratamos de hallar intervalos que se forman entre las notas de la escala pitagórica, resulta necesario reducir recursivamente todos los intervalos que superen la octava. De esta forma, cuando llegamos a dos quintas de distancia (*do-sol-re*) ya se hace necesaria esta reducción hasta dejar el intervalo en su forma simple (*do-re*). Dada una frecuencia podemos hallar todas las notas multiplicando por $^3/_2$ y dividiendo entre dos cuando nos salgamos de la octava.

7.2. Sistema de afinación absoluta

Como dice Pastor Martín (2008) la altura de un sonido hace que lo clasifiquemos como grave o agudo. Esta altura depende únicamente de la frecuencia de las vibraciones del cuerpo emisor. La altura de los sonidos se mide en hercios (Hz). El oído humano es capaz de percibir vibraciones con frecuencias entre 20 y 20.000 hercios. Cada nota musical genera una frecuencia que la identifica de manera inequívoca. En el año 1939, en la Segunda Conferencia Internacional para el Diapasón, se estipuló que la frecuencia de la nota *la* era 440 Hz. Sabiendo además que podemos relacionar las notas mediante intervalos, podemos pensar en estos como una manera de comparar proporcionalmente las frecuencias de las notas. De esta forma podremos comparar dos notas a partir del intervalo que las separa y utilizando sus frecuencias. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Si hacemos sonar dos notas en un intervalo de cuarta, la más aguda tendrá una frecuencia igual a $^4/_3$ de la frecuencia de la más grave. El intervalo de *mi-la* es de cuarta (*mi-fa-sol-la*) y sabemos que la frecuencia de *la* es 440 Hz. Por tanto

$$F_{La} = \frac{4}{3} F_{Mi} \;\rightarrow\; \frac{F_{La} \cdot 3}{4} = F_{Mi} \;\rightarrow\; \frac{440 \cdot 3}{4} = F_{Mi} \;\rightarrow\; F_{Mi} = 330\,Hz$$

Ejemplo 2. Si hacemos sonar dos notas en un intervalo de quinta, la más aguda tendrá una frecuencia igual a $3/2$ de la frecuencia de la más grave. El intervalo de *la-mi* es de quinta (*la-si-do-re-mi*) y sabemos que la frecuencia de *la* es 440 Hz. Por tanto

$$F_{Mi} = \frac{3}{2} F_{La} \;\rightarrow\; F_{Mi} = \frac{3 \cdot 440}{2} \;\rightarrow\; F_{Mi} = 660\, Hz$$

Podemos apreciar que el *mi* que está por debajo del *la* y el que está por encima forman un intervalo de una octava (*mi-fa-sol-la-si-do-re-mi*). La relación entre sus frecuencias debería ser de doble. Si $F_{Mi} = 330\, Hz = F_1$ y $F_{Mi} = 660\, Hz = F_2$ vemos que se cumple que

$$F_1 = \frac{1}{2} F_2$$

ya que F_1 representa la nota más aguda.

El hecho de que las frecuencias de dos notas están en proporción permite calcular un sonido situado a la distancia del intervalo que se desee a partir de otro sonido conocido. Conocida una frecuencia F_1, podemos calcular la frecuencia F_2 que se encuentra una cuarta por encima, es decir, a $4/3$, del modo siguiente:

$$F_2 = \frac{4}{3} F_1$$

Supongamos ahora que queremos calcular la frecuencia F_3 de una nota que está a la tercera superior de F_2. Esto implica una relación $5/4$ entre F_2 y F_3 . Es posible calcular la relación entre F_1 y F_3 realizando sustituciones:

$$F_3 = \frac{5}{4} F_2 \;\rightarrow\; F_3 = \frac{5}{4}\left(\frac{4}{3} F_1\right) \rightarrow F_3 = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) F_1 \;\rightarrow F_3 = \frac{5}{3} F_1$$

Los cálculos también pueden hacerse en sentido inverso, dividiendo en lugar de multiplicar.

7.3. Cómo crear escalas musicales

Ya sabemos cómo funciona la frecuencia en las notas musicales y cómo construir escalas sacando notas a partir de una nota inicial. Una pregunta que podríamos hacernos es, ¿por qué tenemos las notas que tenemos? Vamos a intentar explicarlo a partir de como lo hacen Harvey y Donald White (1980).

A partir de una nota cualquiera podemos sacar su frecuencia y multiplicar por $3/2$ sucesivamente para ir hallando quintas, notas nuevas. Podríamos multiplicar por 2 como vemos en la Figura 3, pero obtendríamos la octava y ya hemos visto que la octava de una nota representa esa misma nota, pero un tono más agudo.

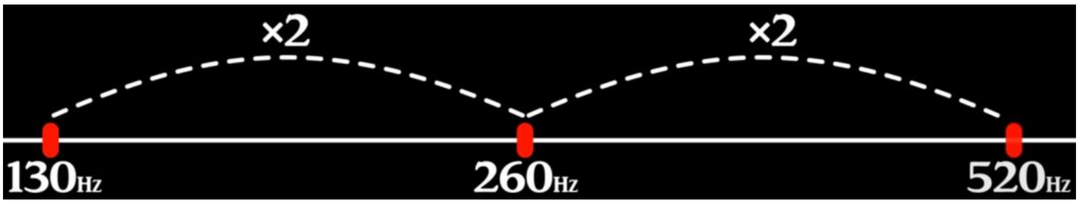


Figura 3: Obtención de notas multiplicando la frecuencia por 2 (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

En la Figura 4 vemos que estas nuevas notas son las mismas con distinta tonalidad (ver Anexo I).

Figura 4: Frecuencia de una nota y sus octavas mayores (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Para obtener quintas a partir de una nota multiplicamos por $^3/_2$ o dividimos entre $^2/_3$. Como hemos visto anteriormente, la quinta del *do* es el *sol.* En la Figura 5 vemos como obtenemos el *sol*.

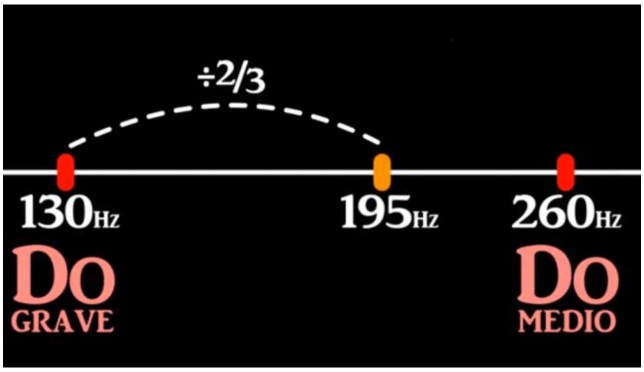


Figura 5: Obtención de quintas dividiendo la frecuencia entre $^2/_3$ (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

De la misma forma que hacían los pitagóricos, dividimos entre $^2/_3$ y dividimos entre dos para estar dentro de la misma octava. En las Figuras 6 y 7 vemos como con estas operaciones obtenemos nuevas notas.

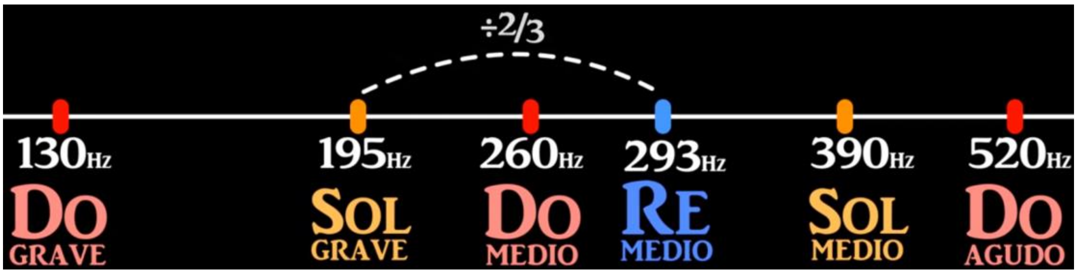


Figura 6: Obtenemos la quinta del *sol* (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

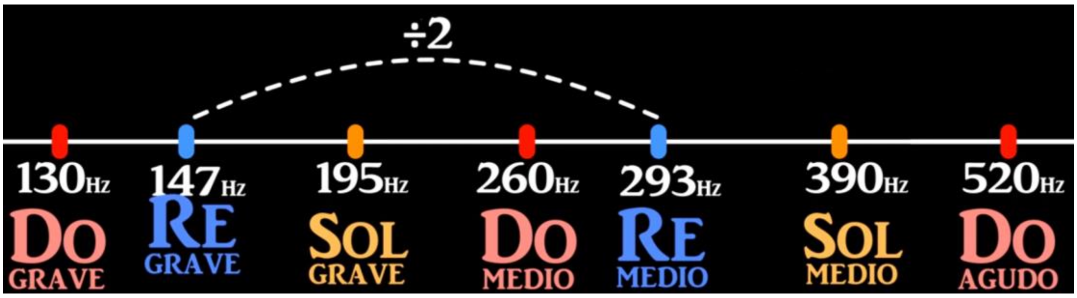


Figura 7: Dividimos entre 2 la frecuencia del *re* (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

De esta forma obtenemos notas dentro de una misma octava, pero, ¿cuándo paramos?, ¿cuándo consideramos que ya tenemos suficientes notas?

Vamos a entender cada octava como un círculo, de manera que si tomamos una nota como principio y calculamos su octava damos una vuelta entera al círculo. Veamos Nos centramos en buscar quintas que son las que nos generan nuevas notas. En la Figura 8 y la Figura 9 podemos ver visualmente esta búsqueda de octavas u quintas.

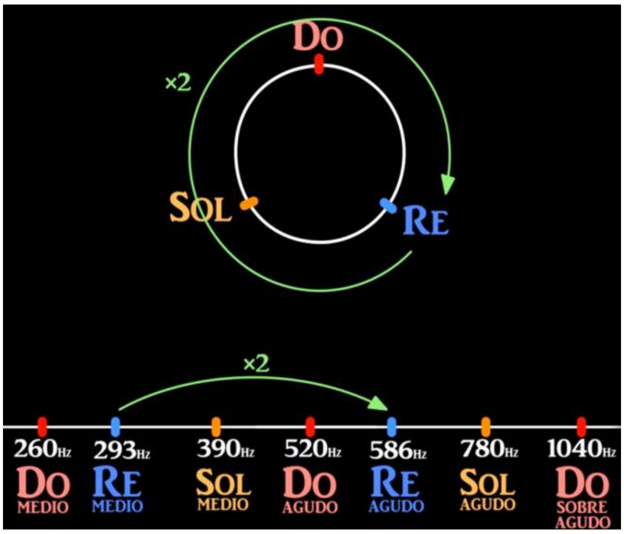


Figura 8: Obtener la octava de una nota (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

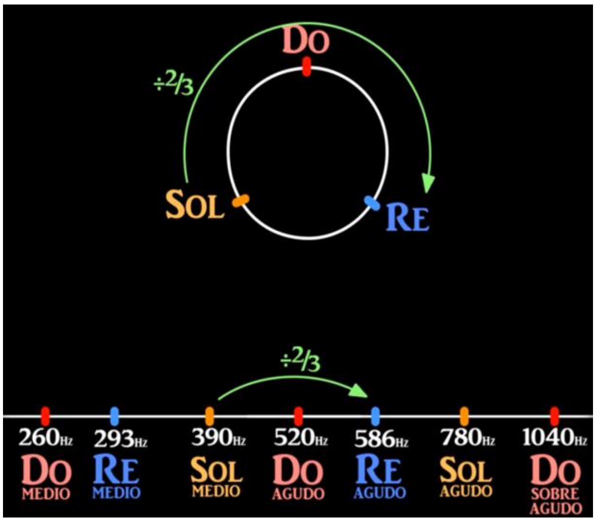


Figura 9: Obtener la quinta de una nota (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ

De esta forma, a partir de una frecuencia comenzamos a obtener notas. En la Figura 10 vemos como obtenemos la segunda nota de nuestra escala. En la Figura 11 la tercera y en la Figura 12 la cuarta.

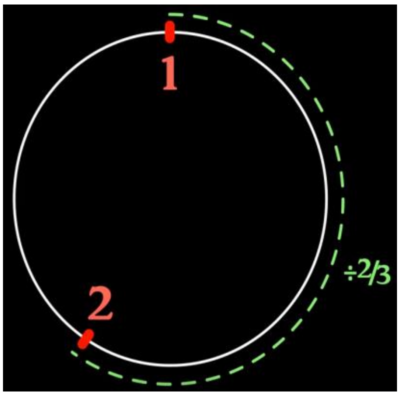


Figura 10: Obtención de la segunda nota (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

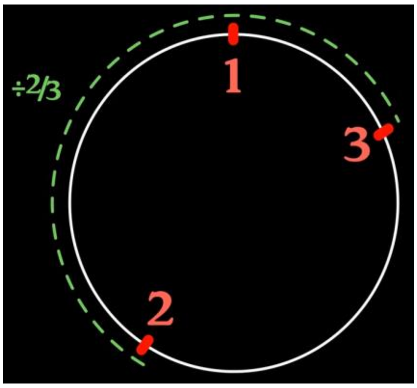


Figura 11: Obtención de la tercera nota (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

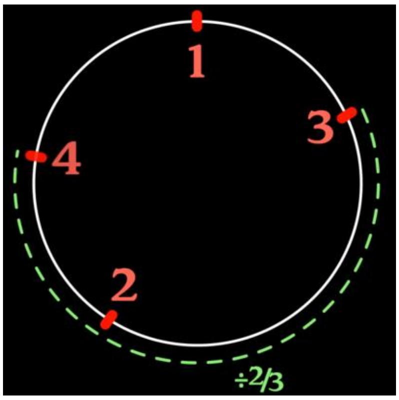


Figura 12: Obtención de la cuarta nota (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Lo que debemos hacer es intentar obtener un número de notas n de modo que la estrella de n puntas sea simétrica. En la Figura 13 vemos que con 5 notas musicales obtenemos una estrella simétrica.

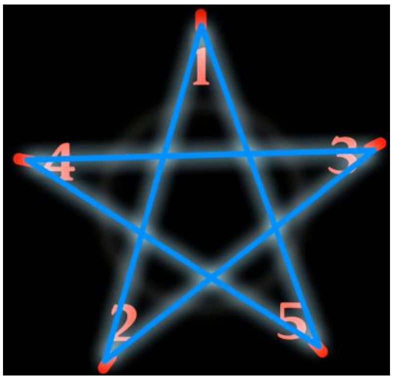


Figura 13: Estrella de la Escala Pentatónica (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Por tanto, según Harvey y Donald (1980) se puede crear una escala musical con solo 5 notas. Esta escala se conoce como escala Pentatónica y es muy utilizada en la cultura oriental. La razón es que para que la música sea estable y no genere sonidos extraños es necesario que haya el mismo número de notas entre una nota y su quinta. En la Figura 14 vemos cómo se representa dicha escala en el pentagrama.

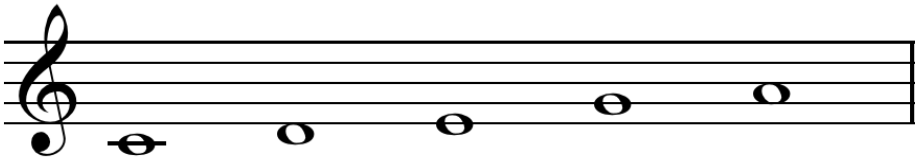


Figura 14. Escala Pentatónica (Imagen obtenida de www.wikipedia.org)

Como podemos observar en la Figura 15, una escala con 6 notas no es simétrica y no hay una armonía entre sus sonidos.

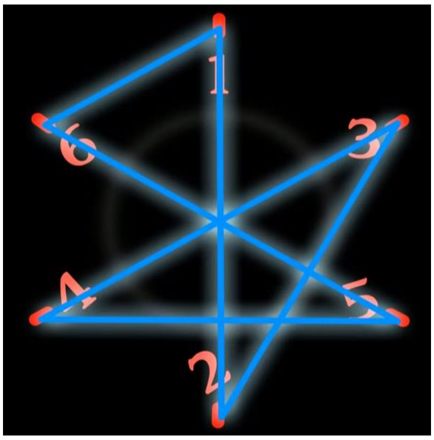


Figura 15: Estrella de 6 notas (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Si continuamos generando quintas vemos que con 7 notas obtenemos otra escala válida. Esta escala es la escala Heptatónica y se corresponde con las primeras 7 notas musicales que aprendemos (*do-re-mi-fa-sol-la-si*). Como podemos observar en la Figura 16 se trata de otra estrella simétrica. Estas notas son también las representadas por las teclas blancas de un piano.

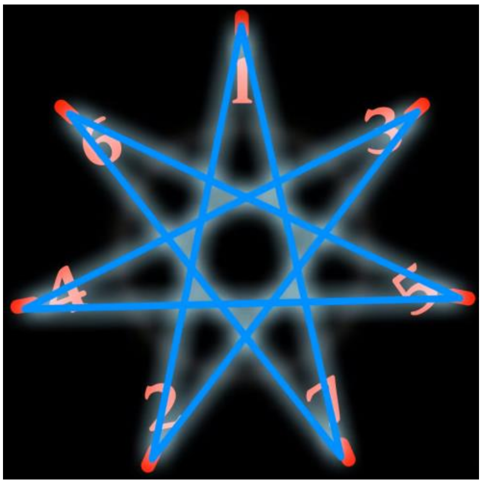


Figura 16: Estrella de la Escala Heptatónica (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Siguiendo con el procedimiento vemos que la siguiente escala que encontramos tiene 12 notas. Es la escala conocida como escala Cromática. Las cinco nuevas notas encontradas se corresponden con las teclas negras del piano. Vemos además que, si recorremos el círculo en sentido horario, las nuevas notas (teclas negras) quedan intercaladas entre las notas que ya teníamos y así es como se colocan en el piano. Podemos observar en la Figura 17 que las notas de color blanco se corresponden con las notas de la escala pentatónica y las rojas son las nuevas notas (teclas negras del piano).

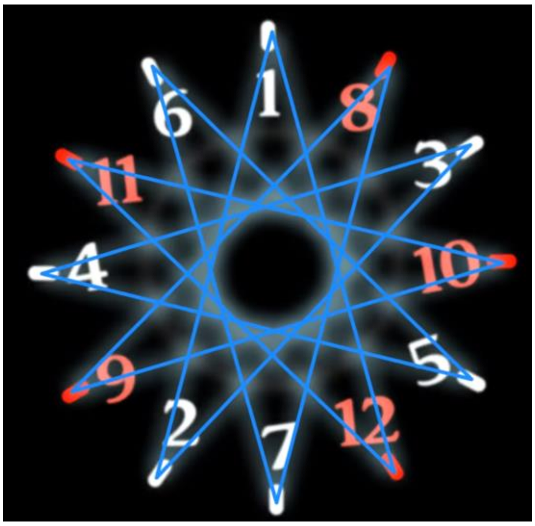


Figura 17: Estrella de la Escala Cromática (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

El descubrimiento de la escala cromática provocó un gran avance en la música occidental, ya que genera un sinfín de posibilidades a la hora de componer. En la Figura 18 vemos como se representa dicha escala en el pentagrama.

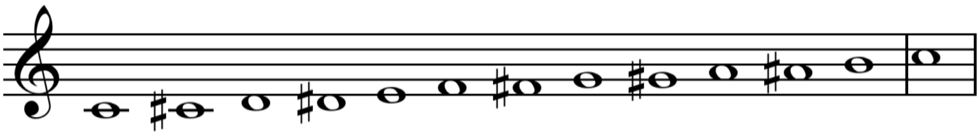


Figura 18. Escala cromática (Imagen obtenida de www.wikipedia.org)

Como curiosidad, se puede apuntar que podríamos continuar con el procedimiento para hallar más escalas musicales. Sacando quintas llegaríamos q que una escala de 17 notas musicales también nos serviría para crear música (una estrella de 17 puntas también es simétrica). Incluso con una escala de 53 notas sería posible hacer música. En la Figura 19 podemos ver las estrellas de las 5 escalas.

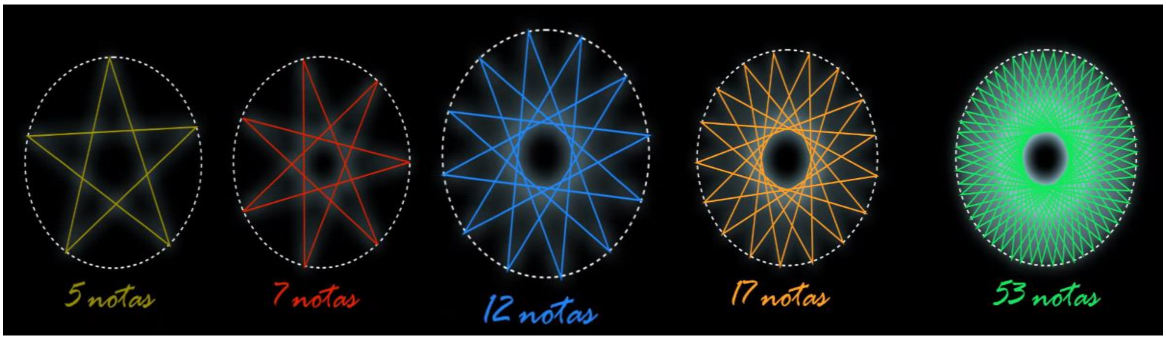


Figura 19: Escalas con las que se podría crear música (Imagen obtenida de https://www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

7.4. Círculo de quintas

Los músicos necesitaban un sistema de afinación que fuera independiente de la nota con la que se empieza. Hasta ahora hemos visto que era necesario realizar cálculos de quintas y "compensaciones" [2] para que todas las notas quedasen dentro de la misma octava. Sin embargo, este método siempre nos genera intervalos "desafinados". Según nos cuentan Arbonés y Milrud (2008, pág. 29), Vicenzo Galilei, padre de Galileo Galilei propuso en el siglo XVI una división de la octava en doce semitonos iguales. Si llamamos x a la relación de frecuencias que deben guardar dos semitonos consecutivos y sabemos que la relación de frecuencias entre una nota cualquiera y su octava es 2:1 podemos escribir

$$x^{12} = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[12]{2}$$

Por lo tanto, el valor es aproximadamente $x = 1{,}05946$ y con él podemos obtener una octava "perfecta". Si nos fijamos bien en la Figura 20, parece que la escala cromática divide el círculo en doce partes iguales, pero no es así del todo.

[2] Al hallar una nueva nota la dividimos su frecuencia entre 2 para que quede dentro de la octava de la que hemos partido.

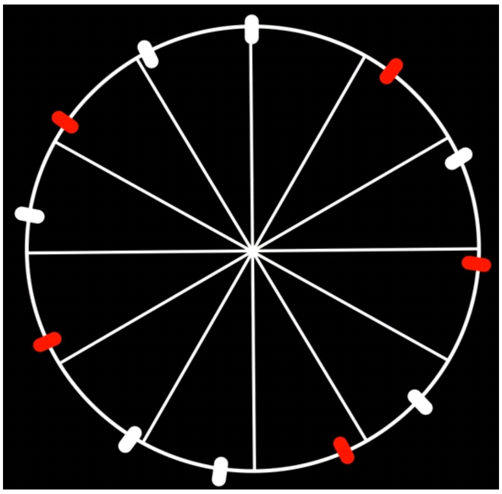


Figura 20: Círculo de quintas original (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

Sin embargo, desde hace siglos los músicos han desplazado la frecuencia de las notas para que coincidan con las doce partes iguales en las que se dividiría el círculo con el valor $x = 1{,}05946$. Los músicos crearon lo que se conoce en teoría musical como el "Círculo de quintas". En la Figura 21 se observa el Círculo de quintas con este desplazamiento.

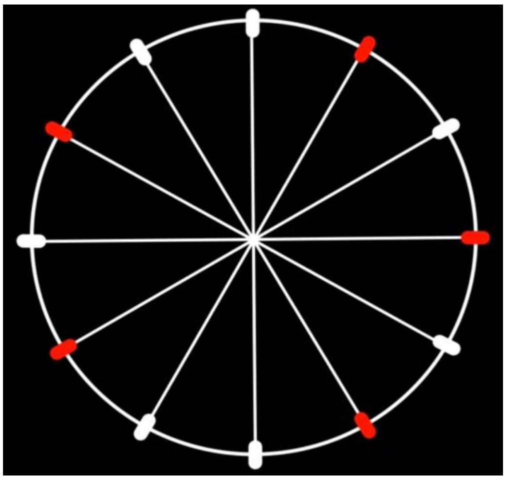


Figura 21: Círculo de quintas arreglado (Imagen obtenida de www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ)

La diferencia entre la frecuencia original y la actual es tan pequeña que el oído humano no es capaz de apreciarla y sigue sonándonos bien. Por otro lado, para recorrer el círculo entero, esto es, pasar de una nota a su octava, teníamos que multiplicar por dos. Ahora, para pasar de una nota a la siguiente tenemos que recorrer una doceava parte del círculo, por lo tanto, tendremos que multiplicar la frecuencia por $\sqrt[12]{2}$. Si consideramos que la primera nota de nuestro círculo de quintas es el *do* en la Tabla 2 podemos ver por qué número tenemos que multiplicar la frecuencia para hallar cada una de las notas.

Notas	Valor de los intervalos	
DO	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{0}$	1
DO♯	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{1}$	1,05946309
RE	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	1,12246205
RE♯	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{3}$	1,8920712
MI	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	1,25992105
FA	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$	1,33483985
FA♯	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{6}$	1,41421356
SOL	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$	1,49830708
SOL♯	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{8}$	1,58740105
LA	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$	1,68179283
SI ♭	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10}$	1,78179744
SI	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	1,88774863
DO	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$	2

Tabla 2: Notas musicales y la relación entre la frecuencia del do con el resto de notas

De esta manera, fijada la frecuencia de una nota cualquiera, para ir a la siguiente nota tendremos que multiplicar por $\sqrt[12]{2}$ y para ir a la anterior dividiremos entre $\sqrt[12]{2}$.

Siendo $F_{La} = 440\ Hz$ podemos escribir la expresión

$$F_n = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n}$$

Siendo n la posición que ocupa una nota hacia arriba o hacia abajo respecto del *la.* En consecuencia, los valores por los que hemos de multiplicar la frecuencia de nuestra primera nota para obtener la escala cromática son los que aparecen en la Tabla 3, donde también podemos ver las frecuencias de todas las notas partiendo de la fórmula anterior.

Notas	Frecuencias de las notas	
DO	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-9}$	$f = 261{,}626\ Hz$
DO♯	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-8}$	$f = 277{,}183\ Hz$
RE	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7}$	$f = 293{,}665\ Hz$
RE♯	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-6}$	$f = 311{,}127\ Hz$
MI	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-5}$	$f = 329{,}628\ Hz$
FA	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-4}$	$f = 349{,}228\ Hz$
FA♯	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3}$	$f = 369{,}994\ Hz$
SOL	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-2}$	$f = 391{,}995\ Hz$
SOL♯	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-1}$	$f = 415{,}305\ Hz$
LA	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{0}$	$f = 440\ Hz$
SI ♭	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{1}$	$f = 466{,}164\ Hz$
SI	$f = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$f = 493{,}883\ Hz$

Tabla 3: Frecuencia de las notas a partir del *la*

La novedad que trajo el sistema de afinación de Vicenzo Galilei facilitó muchísimo la labor de afinación de instrumentos musicales de afinación fija: el piano, la flauta, el oboe y clarinete entre otros. Sin embargo, aún se quiso investigar más en el campo de la afinación y la acústica musical. En 1885, el matemático británico Alexander John Ellis (1814-1890) inventó una unidad de medida logarítmica llamada "cent" empleada para medir intervalos de frecuencia muy pequeños. Ellis hizo innumerables medidas de instrumentos musicales, utilizando los "cents" para comparar las escalas empleadas.

El cent resulta de dividir un semitono en 100 microintervalos multiplicativos iguales. A pesar de que un cent es demasiado pequeño para que el oído humano pueda apreciarlo, resulta muy útil. Al tratarse de una medida logarítmica se encadenan mediante sumas y no mediante multiplicaciones como los casos anteriores. Los cálculos con cents resultan más sencillos.

Sea c un número que representa el valor del cent, tenemos que:

$$(c^{100})^{12} = 2 \quad \rightarrow \quad c^{1.200} = 2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt[1.200]{2}$$

Dado un intervalo *p* su medida en cents será:

$$c(p) = 1.200 \cdot \log_2 p$$

Con esta fórmula de conversión podemos recalcular todos los intervalos y expresarlos en cents, lo que facilita la comparación entre los distintos temperamentos. En la Tabla 4 vemos una comparación entre los dos sistemas de afinación que hemos visto utilizando los cents.

Notas	**Escala Pitagórica**		**Temperamento igual**	
	Relación proporcional	Cents	Relación proporcional	Cents
DO	1	-	1	-
RE	$^{9}/_{8}$	203,91	1,12246205	200
MI	$^{81}/_{64}$	407,82	1,25992105	400
FA	$^{4}/_{3}$	498,04	1,33483985	500
SOL	$^{3}/_{2}$	701,95	1,49830708	700
LA	$^{27}/_{16}$	905,86	1,68179283	900
SI	$^{243}/_{128}$	1109,77	1,88774863	1100
DO	2	1200	2	1200

Tabla 4: Cents en los diferentes sistemas de afinación

8. El tiempo

Hablar de ritmo es hablar de matemáticas porque “un ritmo es una serie de pequeñas divisiones del tiempo que se entienden con relación a un pulso subyacente con el cual suelen mantener una relación matemática sencilla” (Matthews, 2012, pág 185). Esto se debe a que el tiempo en música se mide en subdivisiones del compás, ya sea la mitad, el doble, la cuarta o la tercera parte. Cuando suena una canción, las personas sentimos muchas veces la necesidad de acompañar con un movimiento de mano, de pie o de cabeza. A esta primera agrupación rítmica que percibimos se le conoce como “pulso”. Dicho pulso puede subdividirse de forma binaria (en dos) o ternaria (en tres). Posteriormente hablaré de esto.

8.1. El tempo

En música, a la velocidad del pulso de una pieza se le llama tempo y se mide de la misma manera que los latidos del corazón: en latidos (pulsos) por minuto. Este tempo se indica al principio de la partitura de la pieza. Esto significa que dentro de una obra, una figura determinada (por lo general, una negra o una corchea) se establece como pulso y con el tempo indicamos el número de pulsos por minuto a la que se debe ejecutar dicha obra. Cuanto mayor es el *tempo*, mayor es el número de pulsos por minuto que se deben tocar y por tanto más rápidamente debe interpretarse la pieza. A pesar de tener el mismo número de compases, una obra musical puede tener una duración más o menos larga en función del tempo. De forma similar, cada figura musical (una redonda, una blanca o una negra) no tiene una duración específica y fija en segundos por definición, sino que depende del tempo que le ponemos. Se indica al principio de la partitura de la pieza musical. En la figura 22 vemos que en un minuto tendríamos 184 pulsos. A esta forma de medir los pulsos se le conoce como tempo.

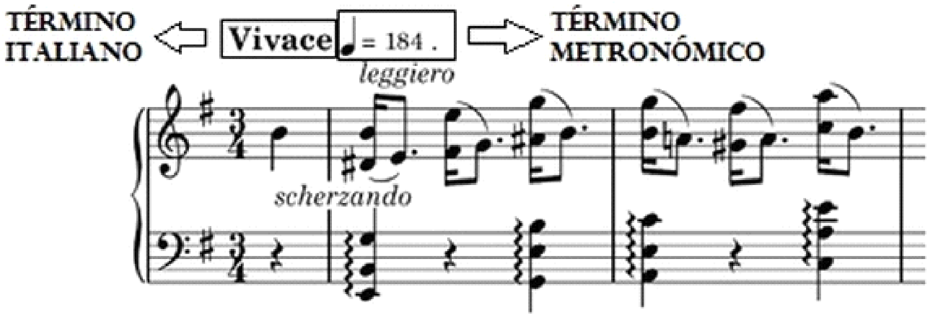


Figura 22: Indicación del tempo de una obra musical (Imagen obtenida de www.wikipedia.org)

También se emplean una serie de términos italianos para indicar el tempo de una pieza musical. Esto se debe a que hasta la invención del metrónomo (ver Anexo I) las piezas se interpretaban a una velocidad mayor o menor, pero de forma aproximada y, por tanto, no exacta. En la Tabla 5, se puede observar los pulsos por minuto de cada uno de estos términos.

Término italiano	**Pulsos por minuto (ppm)**
Grave	40-43
Largo	44-47
Larghetto	48-51
Adagio	52-54
Andante	55-65
Andantino	66-69
Moderato	70-95
Allegretto	96-112
Allegro	113-120
Vivace	121-140
Presto	141-175
Prestissimo	176-208

Tabla 5: Términos para el tempo

8.2. El compás y subdivisiones

Cuando analizamos el ritmo de una pieza musical, este queda al desnudo. Tenemos golpes de intensidad, altura y timbre variados en función de la melodía para embellecerlos. Pero al fin y al cabo el golpe está presente o no lo está, no hay más opciones. En la percusión, las secuencias cíclicas se caracterizan por la distribución de las articulaciones. Podemos distinguir hasta tres niveles de sensación rítmica, según el grado de intensidad:

- El primer nivel, la articulación más rápida, corresponde a las subdivisiones del pulso. Las numeramos a partir del primer pulso como 1, 2, 3, etc., hasta llegar a un nuevo pulso para comenzar de nuevo el conteo.
- El segundo nivel lo forman los pulsos, son todos los números 1 de la secuencia.
- El tercer nivel son aquellos pulsos que se oyen con mayor intensidad: los acentos.

Ejemplo. Tenemos en la Tabla 6 una secuencia rítmica expresada en los tres niveles descritos anteriormente:

1º	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	…
2º	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	…
3º	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	…

Tabla 6: Secuencia rítmica de una pieza musical

La segunda línea es la que nos muestra los pulsos. Como podemos observar en la Tabla 7, cada 1 representa un golpe, y cada 0, un silencio.

♩	𝄽	𝄽	=	1	0	0

Tabla 7: Significado de la segunda fila

La tercera línea representa los pulsos que se acentúan para crear belleza y que suene bien con la melodía. En nuestro ejemplo hemos visto además que por cada pulso tenemos 3 articulaciones. El número de articulaciones que le corresponde a cada pulso viene determinado por el compás.

8.3. Tipos de compás

El contenido de un compás se indica mediante una fracción, sin embargo, se leerá "por" en lugar de "entre". Antes de ver los compases tenemos que saber si la subdivisión del pulso será binaria (dos articulaciones por pulso) o ternaria (tres articulaciones por pulso). Las unidades de pulso más utilizadas son la negra (un golpe y un silencio por pulso) para la subdivisión binaria y la negra con puntillo (un golpe y dos silencios por pulso) para la subdivisión ternaria. En el compás simple o binario, el numerador indica la cantidad de pulsos que le corresponden a cada compás y el denominador indica la figura que mide el pulso.

Cuando tenemos dos pulsos por compás, a este se le llama 2/4. Si tenemos 3 pulsos por compás, se le llama 3/4. Si tenemos 4 pulsos por compás se le llama 4/4. Esto quiere decir que en un compás de 2/4 caben dos negras, en uno de 3/4 caben tres negras y en uno de 4/4 caben cuatro negras, tal y como se especifica en la figura 23. En la Figura 23 podemos ver un ejemplo de estos 3 tipos de compás

Figura 23: Ejemplos de diferentes tipos de compás (Obra de creación propia)

La razón de que el 4 en el denominador indique que tomamos la negra como unidad de medida se debe a que cuatro negras equivalen a una blanca, la figura de más duración que se utiliza actualmente en la música. Es decir, en función del valor de la redonda, las blanca se corresponde a $\frac{1}{2}$ de su duración y la negra a $\frac{1}{4}$ de su duración.

De esta forma podemos entender los compases de la siguiente forma:

$$\frac{2}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} \equiv 2\ negras\ por\ compás$$

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} \equiv 3\ negras\ por\ compás$$

$$\frac{4}{4} = 4 \cdot \frac{1}{4} \equiv 4\ negras\ por\ compás$$

En el caso de que la división del pulso sea ternaria, los compases son algo diferentes. Si tenemos dos pulsos por compás el compás será 6/8, si tenemos tres será 9/8 y si tenemos 4 será 12/8.

En el caso del compás 6/8 hay dos pulsos con 6 corcheas entre ambos pulsos. Dos corcheas equivalen a una negra, por lo que la duración de una corchea se corresponde con $\frac{1}{8}$ de la duración de una blanca. En el compás 9/8 tenemos nueve corcheas entre los tres pulsos y en el de 12/8 tenemos doce corcheas entre los cuatro pulsos.

$$\frac{6}{8} = 6 \cdot \frac{1}{8} \equiv 6\ corcheas\ por\ compás$$

$$\frac{9}{8} = 9 \cdot \frac{1}{8} \equiv 9\ corcheas\ por\ compás$$

$$\frac{12}{8} = 12 \cdot \frac{1}{8} \equiv 12\ corcheas\ por\ compás$$

Sabiendo el tipo de compás que tenemos y el tempo de la obra, podemos obtener cuánto tiene que durar cada compás y una pieza musical completa, como se especifica en la Figura 24.

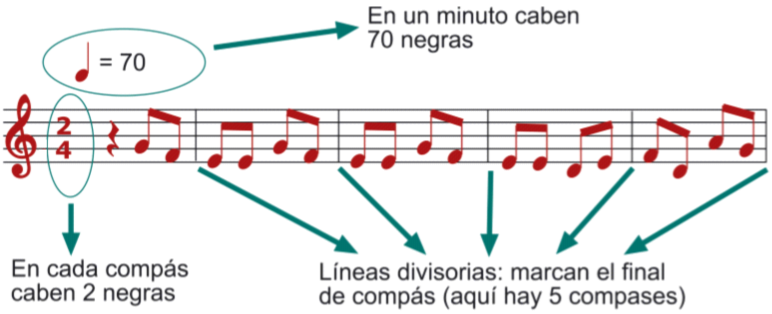


Figura 24: Compás de 2/4 con 70 ppm (Imagen obtenida de *Música y Matemáticas,* Liern, V. y Queralt, T. (2008))

En este fragmento tenemos 5 compases, cada uno formado por dos negras, puesto que es un 2/4, y el valor de la negra viene determinada por el tempo. Entonces,

$$5\ compases \times 2\ \frac{negras}{compás} \times \frac{1}{70}\frac{minutos}{negra} = \frac{10}{70}\ minutos = 8{,}57143\ segundos$$

Este fragmento durará 8,57143 segundos.

9. Geometría de la composición

La geometría también juega un papel importante en la música. La repetición es, probablemente, el procedimiento más usado en música, pero existen diferentes formas de repetir un tema o una idea. La partitura nos ayuda a ver cómo se comporta la música. Como vemos en la Figura 25 podemos considerar cierta semejanza con el eje de coordenadas cartesianas.

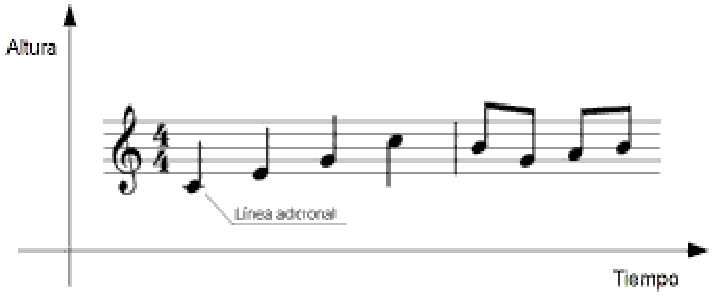


Figura 25: Semejanza del pentagrama y con el eje de coordenadas (Imagen obtenida de "*Las matemáticas en la composición musical. Una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria.*", Torrejón Marín, M. F. (2015))

Vemos que el eje de ordenadas determina la altura y el eje de abscisas el tiempo del sonido y sus silencios. Según dicen Arbonés y Milrud:

> La audición de la melodía a menudo hace que el oyente evoque una línea con curvas y tramos rectos, por momentos ascendentes y descendentes. Algunas melodías se nos presentan como curvas suaves, sin grandes sobresaltos; otras, en cambio, muestran marcados cambios de alturas. (Arbonés y Milrud, 2008, pág 68)

Resulta interesante ver como la partitura y esta imagen mental que podemos crearnos coinciden y puede verse como la gráfica de una función que representa la melodía de la pieza musical.

A continuación podemos ver dos ejemplos. En la Figura 26 vemos una melodía en la que la distancia entre las notas que suenan es pequeña y genera una melodía ascendente. En la Figura 27 vemos diferentes cambios de altura.

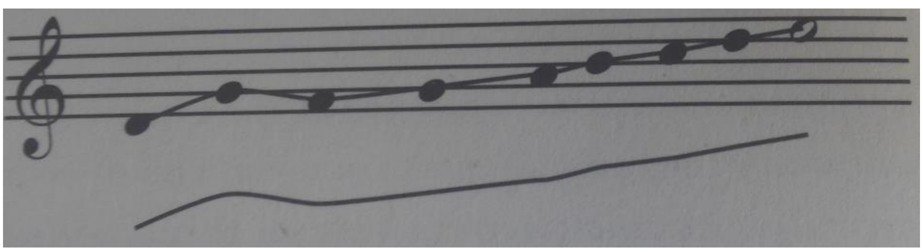


Figura 26. Melodía suave y la curva que la representa (Imagen tomada del libro *La armonía es numérica,* Arbonés y Milrud (2008))

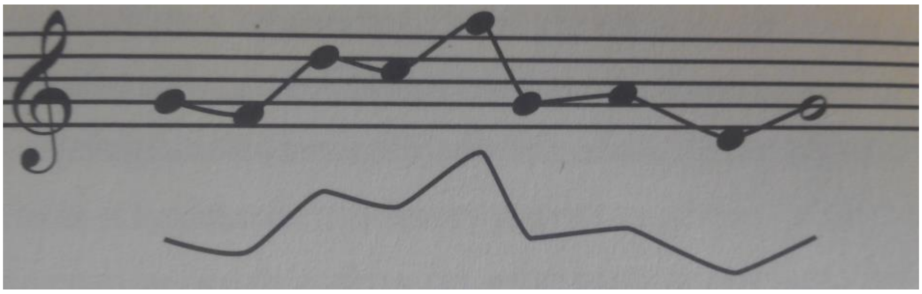


Figura 27. Melodía con grandes cambios de altura (Imagen tomada del libro *La armonía es numérica,* Arbonés y Milrud (2008))

9.1. Trasformaciones musicales

"*Muchas nociones de geometría han sido utilizadas por diversos compositores de manera deliberada como herramienta compositiva. En ciertos casos, el aspecto geométrico-musical se manifiesta visualmente en la partitura*" (Arbonés, J. y Milrud, P. 2008, pág. 69). Algunas composiciones musicales presentan estructuras formales con curiosidades geométricas, otras, sin embargo, emplean transformaciones geométricas como recurso compositivo.

Es necesario recalcar que cuando hablamos de transformaciones en el plano nos movemos en dos dimensiones en la misma magnitud. Sin embargo, cuando realizamos dichas transformaciones en el pentagrama nos novemos en dos dimensiones con magnitudes distintas (altura y tiempo) por lo que las transformaciones las tendremos que aplicar por separado.

Podemos diferenciar cuatro tipos de transformaciones o movimientos en el plano:

- **Traslaciones:** la figura es desplazada en una dirección conservando la forma y el tamaño.
- **Rotaciones:** hacemos girar la figura según el ángulo de giro indicado, respecto a un punto determinado y manteniendo la forma y el tamaño de la figura.
- **Reflexiones:** un objeto geométrico se mueve a través de una recta a través de la cual se refleja dicho objeto se llama la recta de reflexión o el eje de la reflexión.
- **Homotecia:** hace corresponder a una figura otra de igual forma, pero de distinto tamaño, ya sea mayor o menor.

Losada (2008) realiza una explicación muy detallada de los tipos de transformaciones que podemos encontrar en la composición musical en su artículo *Geometría musical.*

Homotecia

La homotecia en música podemos entender como reproducir una serie de notas, pero con una duración diferente. Es decir, cogeremos una melodía y utilizaremos otras figuras, eso sí, de manera que la reproducción de la melodía quede de forma proporcional (el doble de rápida o el doble de lenta, por ejemplo). En la Figura 28 vemos una melodía hecha con cuatro negras, y después la misma melodía (invertida) pero con corcheas.

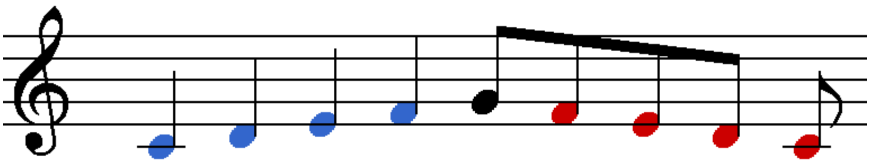


Figura 28: Homotecia en la melodía (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

Rotaciones

Las rotaciones de elementos del plano pueden realizarse con cualquier ángulo, siendo un ángulo positivo si la rotación es en sentido anti horario y con un ángulo negativo si la rotación es horaria. Sin embargo, en la composición musical sólo las rotaciones de 180° tienen sentido, pues las rotaciones de otros ángulos diferentes a 180° no tienen sentido puesto que la música no se puede escribir a 90° en el pentagrama, por ejemplo. Por tanto, una vez escrito un patrón musical, se puede interpretar de la manera original o girándolo 180º para que siga teniendo sentido su escritura en el pentagrama.

Vamos a ver el ejemplo de "El dueto del espejo". Se trata de un divertimento[3] para dos violines, atribuido a Mozart. La partitura está diseñada para que los dos violinistas puedan interpretarla a la vez, pero cada uno la lee en sentido contrario. Podemos ver dicha partitura en la Figura 29.

[3] Composición para un número reducido de instrumentos y suele ser de carácter diverrtido.

Figura 29: Partitura de “El dueto del espejo” (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

El truco para no perder la armonía en ningún momento se puede apreciar en la siguiente partitura. En la Figura 30 podemos ver la primera mitad de la partitura de la Figura 29 (para el primer violinista), a la que se le ha añadido la segunda mitad de la partitura de la Figura 29 girada 180° (que se corresponde con la primera mitad que interpreta el segundo violinista). Las figuras musicales están coloreadas en función del intervalo que separa cada dos notas ejecutadas al mismo tiempo. El color azul significa que se toca la misma nota (aunque sea en distinta octava), el verde que se tocan los intervalos de tercera, el dorado los de sexta y el rojo el resto.

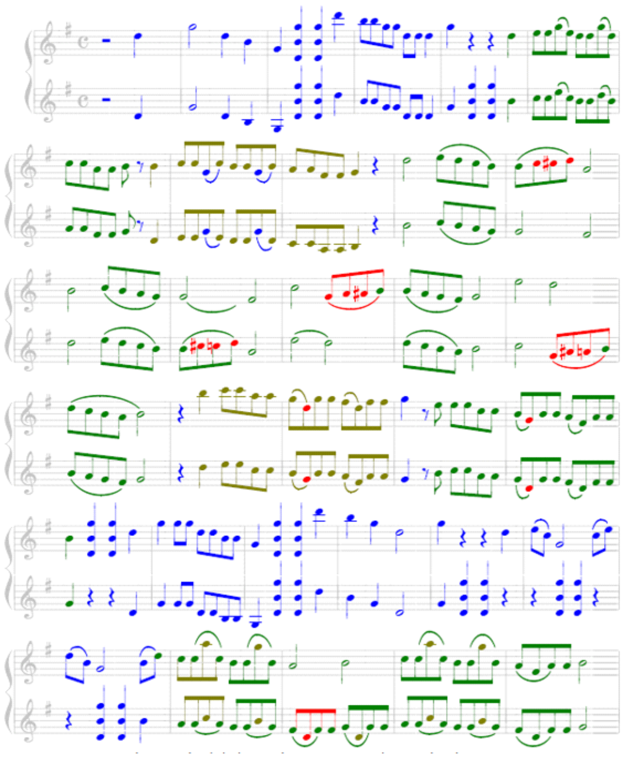


Figura 30: Similitudes en la melodía de "El dueto del espejo" (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

De esta forma, podemos comprobar que, a lo largo de la ejecución de la pieza, ambos violinistas están interpretando o bien las mismas notas o bien notas separadas por intervalos de tercera o sexta, dado que las veces que se desvían de esta norma (figuras rojas) se tratan de adornos. Así que la voz del segundo violinista no sólo armoniza con la del primero, sino que sigue un camino "casi paralelo" a ella. Con esto conseguimos que cuando reconstruimos la partitura completa, volviendo a girar 180 grados la segunda voz, al encontrarse ambas voces, nuestro oído no lo encuentre extraño.

En la Figura 31 podemos ver una parte de la sonata *Hammerklavier* de Beethoven, específicamente los compases comprendidos entre el 16 y el 22. Podemos observar que todos, a excepción de uno (en rojo) se vuelven a repetir exactamente al revés, nota por nota, nada menos que 132 compases más adelante. Esta aplicación se conoce como reflexión desplazada. Resulta evidente que, en este caso, Beethoven aplica esta transformación geométrica con toda la intención.

Figura 31: Extractos de "Hammerklavier" (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

Traslación

Podemos entender dos tipos de traslaciones: en el eje horizontal y en el eje vertical. La traslación horizontal implica una traslación en el tiempo. Podemos apreciar dos tipos:

- La repetición: consiste en repetir una melodía o fragmento varias veces, uno a continuación del otro. La Figura 32 nos muestra un ejemplo.

Figura 32: Extracto de "Ach! du lieber Augustin" (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

Podemos ver que los compases del primer y segundo pentagrama son idénticos. En el tercer pentagrama se repiten los compases 2, 3 y 4 del primer pentagrama. En el cuarto pentagrama vemos que se repiten los compases 1, 2 y 2 del primer pentagrama.

- El canon: se trata de una sección de una composición musical basada en la imitación entre dos o más voces separadas por un intervalo de tiempo. Una parte (vocal o instrumental) interpreta una melodía y, unos compases más tarde, una segunda voz repite esa misma melodía, o bien de manera exacta, o bien modificando su tonalidad. La Figura 33 nos muestra un ejemplo.

Figura 33: Ejemplo de canon (Obra de creación propia)

Por otro lado, la traslación vertical se conoce en teoría musical como un “transporte”. Obtenemos la misma melodía que en el fragmento original, pero con una entonación más aguda o más grave. En la Figura 34, el primer y el tercer compás son iguales, y el segundo y cuarto son una traslación hacia arriba de los otros. Vemos que la primera nota ha pasado de un *sol* a un *re*, al primer compás se le llamaría melodía original y al segundo compás se dice es una melodía transportada una 4º ascendente.

Figura 34: Ejemplo de traslación vertical (Obra de creación propia)

Reflexión

Al igual que con las traslaciones podemos clasificar la reflexión de dos maneras: horizontal y verticalmente. Reflexión sobre un eje vertical consiste en repetir las mismas notas que en la melodía original, pero en el sentido contrario. Podemos colocar el eje de simetrías entre dos compases o en una misma figura musical. En la Figura 35 colocamos el eje de simetría entre los dos compases.

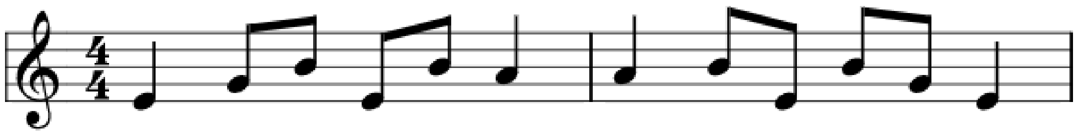


Figura 35: Ejemplo de reflexión (Obra de creación propia)

A la melodía del primer compás la llamaremos melodía original y a la del segundo compás melodía retrógrada. Si ejecutamos una a continuación de la otra estaremos ante un caso de “simetría melódica”. La Figura 36 nos muestra una simetría dentro de una misma figura.

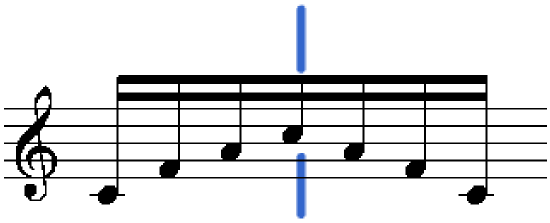


Figura 36: Ejemplo de reflexión vertical (Imagen obtenida de www.divulgamat.net)

Por otro lado, la reflexión sobre un eje horizontal se realizará a partir de una línea del pentagrama. En la Figura 37 vemos la melodía original en el primer compás y la misma melodía reflejada en el segundo compás con el eje de simetría en tercera línea, es decir, el *si*.

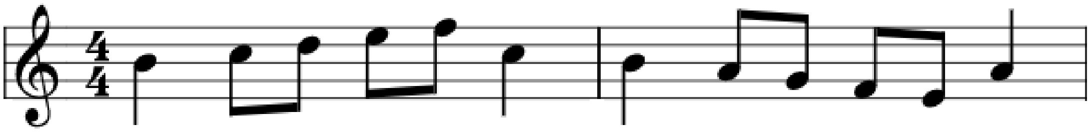


Figura 37: Ejemplo de reflexión horizontal (Obra de creación propia)

A continuación, en la Figura 38, vemos un ejemplo más detallado de cómo haríamos la reflexión horizontal, buscando que cada nota este a la misma distancia del eje que en la melodía original.

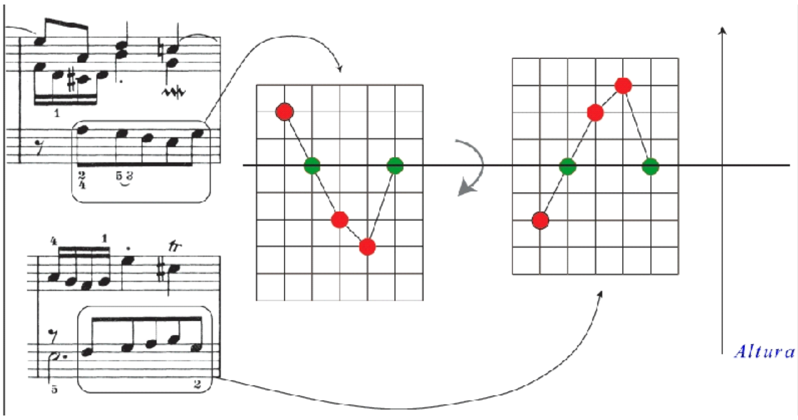


Figura 38: Reflexión desde un punto de vista matemático (Imagen obtenida de www.divulgamat.es)

10. Juego de dados de Mozart

Otra aplicación muy interesante de las matemáticas en la composición de obras musicales es partir de reglas y conceptos como la probabilidad aplicada a juegos de azar o modelos estadísticos. También podemos generar música por medio de computadoras programadas con ciertas reglas.

Tiburcio Solís (2002) nos explica, como Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) compuso la obra “Musikalisches Würfelspiel”. Esta creación no se trata solamente de una pieza para piano, sino de un generador de valses. Es decir, la obra no contiene una partitura para un pequeño vals de 16 compases, sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar muchos valses diferentes de 16 compases cada uno, como después veremos.

Cada uno de los compases del vals se escoge lanzando dos dados y anotando la suma del resultado. Si obtenemos un 1 en la primera tirada y otro 1 en la segunda el resultado será 2, Si obtenemos un 1 en la primera tirada y otro 2 en la segunda el resultado será 3, y así sucesivamente. Tenemos 11 resultados posibles (del 2 al 12) como se puede observar en la Tabla 8.

Dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabla 8: Posibles resultados al sumar los números de dos dados

Mozart compuso 176 (ver Anexo II) compases separados en dos tablas de 88 compases diferentes cada una: una tabla para la primera parte del vals y otra para la segunda. Dichas tablas podemos observarlas en la Figura 39. Cada resultado consta de 8 compases. Para obtener cada uno de los primeros compases (numerados del I al VIII) se lanzan dos dados y se anota la suma de puntos obteniéndose 8 parejas de valores: (n1, I), (n2, II), (n3, III), (n4, IV), (n5, V), (n6, VI), (n7, VII) y (n8, VIII). Cada pareja se asocia a un número de compás de la primera tabla generándose ocho: N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7 y N8. El procedimiento es el mismo para los 8 compases siguientes pero utilizando la segunda tabla.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura 39: Tablas del juego de dados de Mozart (Imagen obtenida de http://musimates.blogspot.com/2015/04/juego-de-dados-de-mozart.html)

Sin embargo, por la teoría de la probabilidad sabemos que no todas las combinaciones son igual de probables. Como hemos comentado, tenemos 11 resultados posibles al lanzar los dados, y las probabilidades de cada resultado son las siguientes:

$$\text{Prob}(2) = \frac{1}{36} = \text{Prob}(12) \qquad \text{Prob}(3) = \frac{2}{36} = \text{Prob}(11)$$

$$\text{Prob}(4) = \frac{3}{36} = \text{Prob}(10) \qquad \text{Prob}(5) = \frac{4}{36} = \text{Prob}(9)$$

$$\text{Prob}(6) = \frac{5}{36} = \text{Prob}(8) \qquad \text{Prob}(7) = \frac{6}{36}$$

Sabiendo que tenemos 176 compases y que nuestro vals tendrá solo 16 podemos sacar el número de combinaciones posibles que habrán:

$$V_{16}^{176} = \frac{176!}{(176-16)!} = \frac{176!}{160!} = 4{,}1975548 \times 10^{35}$$

Vemos que obtenemos un gran número variaciones posibles del vals. Teniendo en cuenta que disponemos de 2 tablas para repetir el proceso podemos obtener el número total de combinaciones a partir del juego de Mozart. Tenemos 16 compases y en cada uno podemos elegir entre 11 compases:

$$VR_{11}^{16} = 11^{16} = 5{,}594973 \times 10^{16}$$

Siguen siendo una cantidad considerable de compases, pero son bastantes menos que en la variación anterior.

11. Actividades

A lo largo del trabajo hemos visto diferentes relaciones de las matemáticas con el mundo de la música. En este apartado vamos a ver algunos ejemplos de cómo trabajar conceptos musicales a partir de ideas matemáticas y viceversa. Algunas de las actividades propuestas son ideas originales y otras están basadas en actividades que podemos encontrar en proyecto *European Music Portofolio: Sounding Ways Mathematics* que podemos encontrar resumidas en un manual (Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R. & Zerlik, J., 2016). Los objetivos de cada una de las actividades están sacados directamente del BOE (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre).

Actividad 1[4]

Curso: 2º de ESO

Resumen:

> Repartiremos a los alumnos unas fichas que tendrán que rellenar y servirán para trabajar la multiplicación y la división de fracciones. Se trata de ejercicios para buscar notas musicales que podemos utilizar para un acorde concreto o una escala (la teoría musical subyacente que se proporcionaría al alumnado se puede consultar en el Anexo I).

Contenidos:

- **Música:** intervalos de notas.
- **Matemáticas:** multiplicar fracciones y potencias de fracciones.
- **Relación música-matemáticas:** relación fraccionaria que guardan las notas.

Objetivos:

- Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.
- Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.
- Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.

Temporalización: 40 minutos.

Descripción de la actividad:

- Explicamos a los alumnos el método que empleaban los pitagóricos para hallar notas musicales (explicación en el apartado 7.1).

[4] Idea original

- Facilitamos a los alumnos y alumnas unas fichas que tendrán que rellenar en la cual se les dará una nota musical con una frecuencia (que para facilitar cálculos será un número entero) y tendrán que ir dando. Cuando una nota se salga de la octava, tendrán que hacer la división para encontrarla.

- Podemos pedirles que saquen 7 notas o 12, según veamos lo que les cueste realizar el ejercicio.

Material: Fichas elaboradas por el profesor, bolígrafos y papel.

Ejemplo de ficha

1º Nota	2º Nota	3º Nota	4º Nota	5º Nota	6º Nota	7º Nota
$f_1 = 130\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 260\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 440\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 560\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 90\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 880\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$
$f_1 = 330\ Hz$	$f_2 =$	$f_3 =$	$f_4 =$	$f_5 =$	$f_6 =$	$f_7 =$

Actividad 2[5]

Curso: 3º de ESO

Resumen:

A partir de piezas musicales elegidas por el profesor, los alumnos y alumnas van a crear las líneas melódicas y comprobar las transformaciones utilizadas si es que las hay. También se podrá realizar el estudio directamente viendo ejemplos de composiciones que emplean transformaciones geométricas.

Contenidos:

- **Música:** identificación de líneas melódicas y representación en papel de los cambios de altura.

- **Matemáticas:** transformaciones geométricas.

- **Relación música-matemáticas:** saber reconocer patrones dentro de las melodías y transformaciones que se aplican.

[5] Actividad basada en otra actividad del proyecto *European Music Portofolio: Sounding Ways Mathematics,* pero únicamente buscan líneas melódicas, no estudian los tipos de transformaciones que pueden haber.

Objetivos:

- Figuras semejantes.
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Temporalización: 40 min

Descripción de la actividad:

- El profesor pone una pieza musical para que los alumnos intenten sacar una línea melódica. Solo deben sacar un dibujo, eso sí, lo más aproximado posible, ya que esto facilitara el estudio.
- El profesor debería buscar piezas donde se vean varios ejemplos de transformaciones.
- En *youtube* podemos encontrar algunas "animated scores", que consisten en expresar la música a través de unas gráficas en movimiento donde se señala la altura y el tiempo que duran una o varias notas a la vez. Según la American Mathematical Society (Sociedad Americana de las Matemáticas), la visualización de estos vídeos puede ser beneficiosa para entender la expresión numérica en gráficas.

Material: bolígrafos, papel y canciones obras musicales buscadas previamente por el profesor, así como algún "animated scores".

Actividad 3[6]

Curso: 4º de ESO

Resumen:

Vamos a repasar probabilidad con el Juego de dados de Mozart y ver algún ejemplo de composición a partir de este método.

Contenidos:

- **Música:** Mozart y su composición del juego de dados.
- **Matemáticas:** Probabilidad y combinatoria.
- **Relación música-matemáticas:** Cómo utilizar la probabilidad y la combinatoria para componer.

[6] Actividad basada en otra actividad del proyecto *European Music Portofolio: Sounding Ways Mathematics,* pero únicamente sacan los compases para el vals, no realizan ningún tipo de cálculo.

Objetivos:

- Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.
- Experiencias aleatorias compuestas.

Temporalización: 50 min

Descripción de la actividad:

- El profesor explica a los alumnos el "Juego de dados" de Mozart. Mientras hace esta explicación puede proyectar en la pantalla las tablas que Mozart diseñó.

- Después de explicar el método del compositor, el profesor reparte dados a la clase para que los alumnos y alumnas vayan haciendo pruebas, viendo que secuencia de compases obtienen.

- Los alumnos tratan calcular la probabilidad de que salga cada una de las sumas. Después, tomando solo la primera tabla, vemos cual es la secuencia de compases más probable de obtener.

- Para finalizar podemos hacer un par de ejemplos en voz alta en un enlace web con un par de dados vamos sacando los compases y escuchamos como queda nuestro vals.

Material: bolígrafos, papel, ordenador portátil y un dado por alumnos (o cada dos alumnos).

Actividad 4[7]

Curso: 2º de la ESO

Resumen:

Viendo el tempo, el tipo de compás y el número de compases de una obra musical podemos saber de forma aproximada cual va a ser su duración. Vamos a comprobar que esto se puede hacer y ver algunos ejemplos.

Contenidos:

- **Música:** tempo y compás.

- **Matemáticas:** factor de conversión.

- **Relación música-matemáticas:** duración de un compás y una pieza musical.

[7] Idea original basada en el ejemplo de la Figura 24.

Objetivos:

- Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.
- Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.
- Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo

Temporalización: 40 min.

Descripción de la actividad:

- Hacemos un repaso de los tipos de compás que podemos tener. Un compás 2/4 representa que un compás durará dos negras, un compás 3/4 representa que un compás durará tres negras y un 4/4 representa que un compás durará cuatro negras.
- Explicamos el "tempo". El tempo nos indica cuantas figuras negras caben en un minuto de la pieza, por lo tanto, indica la velocidad a la que se va a tocar la obra.
- Tomaremos como ejemplo la Figura 24 del documento, aunque podemos elegir otra, y calculamos cuánto durará esa pequeña agrupación de cinco compases.

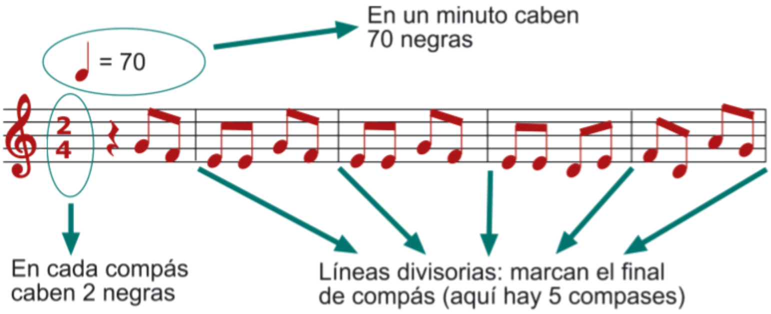


Figura 24: Compás de 2/4 con 70 ppm (Imagen obtenida de *Música y Matemáticas,* Liern, V. y Queralt, T. (2008))

$$5\ compases \times 2\ \frac{negras}{compás} \times \frac{1}{70} \frac{minutos}{negra} = \frac{10}{70}\ minutos = 8{,}57143\ segundos$$

- Tomamos algunos ejemplos de piezas para que los alumnos y alumnas calculen cuanto ha de durar la obra.
- Como variante, podemos darles la duración de una pieza, decirles el tempo y el número de compases y que averigüen el tipo de compás.

Material: bolígrafos, papel y partituras de ejemplo.

12. Conclusiones

La música y las matemáticas han estado ligadas desde la antigüedad. Esta sería la principal conclusión que he obtenido después de haber concluido este TFM. La simbiosis histórica que presentan ambas entiendo que es más utilitarista por parte de la música con las matemáticas que al revés, es decir, la música utiliza las matemáticas para crear, para regularse y para perfeccionarse como disciplina, como entidad en sí misma. Pero en el ámbito al que quiero aplicar esta relación, el aula de matemáticas, es posible que sea la música la que está aportando ese añadido de motivación y de interés que voy a utilizar para que el alumnado se acerque a las matemáticas desde otro punto de vista diferente. La diferencia, la novedad o simplemente la afinidad que pueden establecer algunos alumnos y alumnas con estas actividades generándoles ganas de comprender o mejorar su bagaje de matemáticas, considero que son justificaciones suficientes para realizar mi aportación.

Los pitagóricos se dieron cuenta de que las relaciones numéricas jugaban un papel muy importante en la armonía del sonido y a raíz de estas primeras observaciones se ha seguido indagando sobre la aplicabilidad de las matemáticas en la composición. Se han visto en el trabajo diferentes aproximaciones al mundo de la música a través de las matemáticas, utilizando ideas de la teoría musical se pueden trabajar conceptos matemáticos y así darles un contexto necesario para su aprendizaje significativo. A lo largo del trabajo hemos utilizado la música para trabajar propiedades geométricas, multiplicaciones y divisiones de fracciones y probabilidad que es nuestro objetivo en la clase de matemáticas.

La gran cantidad de material que hay al respecto nos habla muy bien del gran campo de investigación que tenemos y lo mucho que podemos aprender y aplicar quienes tenemos un gran interés en ambos campos. Hemos podido observar a lo largo de trabajo que las dos disciplinas están profundamente ligadas. Liern Carrión (2011) y Contreras de la Tore (2017) hablan mucho sobre esta relación y aporta diversas actividades para el aula de primaria. Sin embargo, resultaba muy difícil encontrar actividades para relacionar la música y las matemáticas en el aula de secundaria.

Respecto de los objetivos que me había marcado para la realización del presente trabajo, paso a comentar mis conclusiones:

1. Respecto del primero “profundizar en la relación de la música con las matemáticas”, para mí es innegable que he aprendido mucho, quizá no todo porque sería imposible, pero sí mucho de la relación tan íntima (me podría atrever a decir) que hay entre la música y las matemáticas. Estoy queriendo decir que me ha sorprendido que una ciencia social como la música, donde parece que la volubilidad de su manifestación tuviera que ver más con la anarquía de sujeciones a cánones establecidos, resulta que es más bella cuanto más exactos son los cálculos de su creación. Resulta que las matemáticas proporcionan esa estructura casi perfecta donde las notas y los compases flotan ordenadamente y de forma armónica.
2. Respecto del segundo “aportar un material didáctico en forma de actividades que resulten útiles para trabajar las matemáticas desde un punto de vista diferente que pueda proporcionar contexto, motivación e interés al alumnado de secundaria”,

considero que las actividades que proporciono cumplen este objetivo. Cierto que no las he puesto en práctica, pero intuyo que pueden resultar atractivas, al menos, a algunos.

13. Posibles extensiones

La relación que une la música y las matemáticas es muy estrecha. Este trabajo apenas ha dado unas pinceladas para poder realizar actividades sencillas. Sin embargo, en mi profundización en el tema encontré relaciones muy interesantes. Por ejemplo, la utilización de fractales para componer o el estudio de las ondas armónicas para hablar del sonido y de las diferentes tonalidades. Hay muchos libros y estudios que hablan sobre el tema. Sin embargo, este trabajo no ha querido explicar nada que se saliera de los conceptos matemáticos que los alumnos deben asumir en secundaria. En un trabajo académico de matemáticas sí que se podría profundizar más y ver más ejemplos de esta relación.

Las principales extensiones de mi trabajo son diseñar más actividades para que el profesorado de matemáticas disponga de más material para trabajar contenidos matemáticos a partir de la música.

14. Opinión personal

Para mí ha resultado un placer poder hacer este trabajo. Como comenté al principio del documento, soy un apasionado de la música y este trabajo me ha ayudado a aprender muchas cosas que antes no sabía. La forma en que las matemáticas están integradas, no solo en las ciencias experimentales, sino también en las sociales y en las artes es muy interesante. Es más, he aprendido que originalmente las matemáticas y la música se encontraban en el mismo campo de estudio.

Le he dedicado mucho tiempo al primer objetivo de mi TFM, aunque me habría gustado haber dedicado más para realizar una revisión más profunda y que abarcara más ámbitos. Gracias a mi revisión he podido descubrir revistas y trabajos muy interesantes que me serán muy útiles cuando en un futuro quiera continuar con esta línea que ahora considero que he comenzado para mí.

Muchos de los puntos que trabajo en el documento pueden resultar interesantes a cualquiera que le gusten ambas disciplinas o solo una de ellas, como he podido comprobar al comentar el trabajo con amigos y compañeros. También considero que es necesario una propuesta que integre en mayor medida estas áreas, puesto que no solamente están emparentadas, sino que además la una nace donde la otra.

Respecto del segundo objetivo del trabajo, es cierto que hubiera podido aportar más actividades. A pesar de ser un trabajo que cogía con muchas ganas y un tema que me interesaba mucho, no he podido dedicarle el tiempo que me hubiese gustado para hacer una revisión más profunda. Me costaba mucho unir el contenido específico de la matemática con el de la música a priori, sin haber experimentado ninguna actividad y sin saber si funcionaban realmente bien. Considero que es una propuesta modesta que puede ser ampliada en el futuro.

15. Bibliografía

Arbonés, J. y Milrud, P. (2008). *La armonía es numérica.* España: RBA Coleccionables.

Casals, A. Carrillo, C. y González, C. (2014). La Música también cuenta: combinado matemáticas y música en el aula. *Leeme,* Aplicación didáctica que pongan en relación la música y la educación. (34) 1-17. Recuperado de: http://musica.rediris.es/leeme/

Cordantonopulos, V. (2002). *Curso completo de Teoría Musical.*

Contreras de la Torre, G. (2017). *Matemáticas a través de la música en Educación primaria: Reflexión y propuesta de actividades* (Trabajo final de grado). Recuperado de: http://tauja.ujaen.es/

Liern, V. y Queralt, T. (2008). *Música y matemáticas.*

Liern Carrión, V. (2011). Música y matemáticas en educación primaria. *Suma, Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (66), 107-112. Recuperado de: http://revistasuma.es/

Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R. & Zerlik, J. (2016). *Maths: Sounding Ways into Mathematics*

Matthews, W. (2012). *Improvisando: la libre creación musical*

Pastor Martín, A. (2008). Matemáticas en la música. *Suma, Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (59), 17-21. Recuperado de: http://revistasuma.es/

Peralta, J. (2010). Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. *Educación matemática, Publicación dedicada a difundir artículos de investigación sobre temas de educación matemática en los distintos niveles escolares* (23) 67-90. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_serial&pid=1665-5826&lng=es&nrm=iso

Tiburcio Solís, S. (2002). *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea* (Tesis doctoral). Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/

Tomasini, M. C. (2007). El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas. *Revista de Ciencia y Tecnología*. Recuperado de: https://dspace.palermo.edu:8443/dspace/handle/10226/87

Torrejón Marín, M. F. (2015). *Las matemáticas en la composición musical. Una aproximación didáctica para estudiantes de secundaria.* (Trabajo final de máster). Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/

White, H. E. & White, D. H. (1980). *Physics and Music: The Science of Musical Sound.*

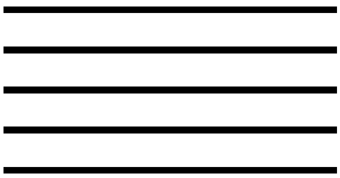
Webgrafía

- Losada, R. (2008). *Divulgamat*. Recuperado el 1 de Julio de 2008, de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=8700&Itemid=46, recuperado el 1 de Julio de 2008

ANEXO I

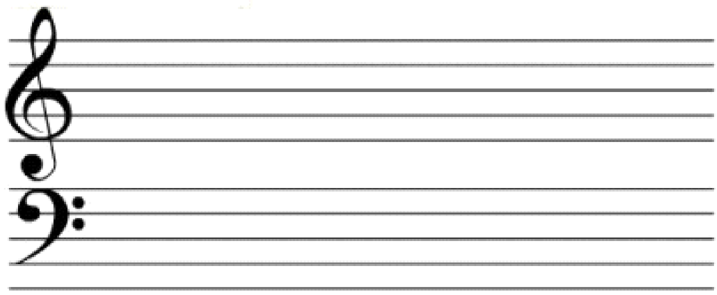
Pentagrama

Según nos cuenta Cordantonopulos (2002) el pentagrama es base sobre la que se escriben las notas y todos los demás signos musicales en el sistema de notación musical occidental. Está compuesto por cinco líneas horizontales y cuatro espacios equidistantes que se enumeran de abajo hacia arriba.



Pentagrama

Según el espacio o línea donde se encuentre una figura musical dentro del pentagrama, su nota recibirá un nombre u otro. Dicha asignación de los nombres de las notas estará en función de la clave que se utilice al principio del pentagrama. Es decir, la clave decide qué asignación tiene las notas en cada uno de los espacios y las líneas. Esto lo veremos mas adelante.



Fuente: https://www.profesorenlinea.cl/musica/Conceptos_Generales.htm

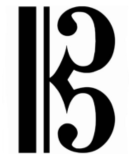
También se añaden líneas adicionales para arriba y abajo del pentagrama. En estas líneas adicionales ubicamos las notas más agudas o más graves. Generalmente, las piezas musicales vienen representadas por dos pentagramas. En el primero de ellos representaríamos la melodía de la pieza musical y en el segundo la armonía.

Clave

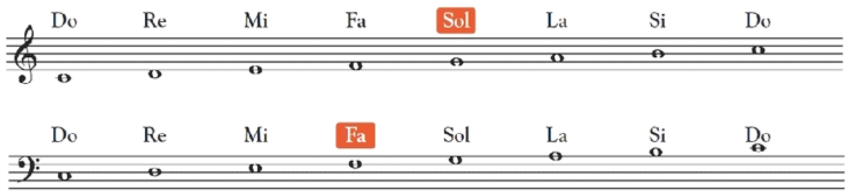
Se trata de una referencia para saber la ubicación de una determinada nota musical. La clave se coloca al principio de cada pentagrama y sirve para indicar el nombre que le corresponde a cada nota

Clave de Sol

Clave de Fa



Clave de Do



Diferencia de notas en clave de Sol y clave de Fa

Notas musicales

Podemos distinguir siete notas musicales, que en orden ascendente son: DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI. Esta secuencia de notas se conoce como el "alfabeto musical". En inglés, sin embargo, se conocen de otra forma:

Español	**Inglés**
DO	C
RE	D
MI	E
FA	F
SOL	G
LA	A
SI	B

Alteraciones

Son los signos que utilizamos para modificar la entonación o altura de los sonidos naturales y alterados. Las alteraciones más utilizadas son el bemol y el sostenido. El bemol baja el sonido un semitono y se representa con el signo ♭. El sostenido, por su parte, eleva el sonido un semitono y se representa con el signo ♯.

Figuras musicales

Cordantonopulos (2002) explica que una figura musical es un signo que se utiliza para la representación gráfica de una nota o un silencio. Por lo tanto, se trata de un gráfico que representa un cierto sonido en el marco de una obra musical.

Figuras musicales

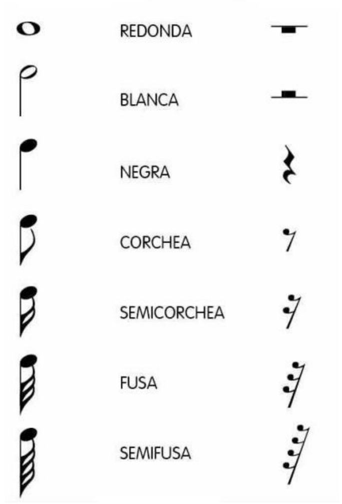
Estas son las principales figuras que empleamos para crear música, en la figura anterior se encuentran ordenadas de mayor a menor en función de su duración:

- Redonda
- Blanca
- Negra
- Corchea
- Semicorchea
- Fusa
- Semifusa

La figura que empleamos para representar la unidad de duración es la redonda. A partir de la redonda obtenemos la duración de todas las otras figuras musicales. Cada valor simple equivale a dos de su figura inmediata, de esta manera tenemos que:

- una redonda equivale a dos blancas;
- una blanca equivale a dos negras;
- una negra equivale a dos corcheas;
- una corchea equivale a dos semicorcheas;
- una semicorchea equivale a dos fusas;
- una fusa equivale a dos semifusas.

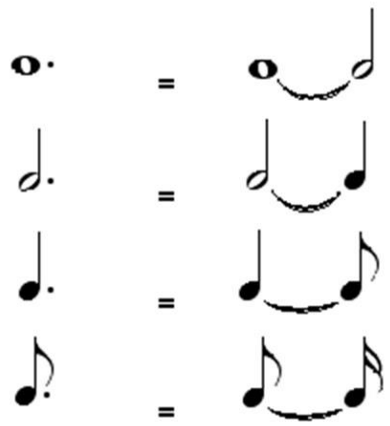
A cada figura musical le corresponde una figura de silencio con la misma duración:



Figuras y silencios

Puntillo

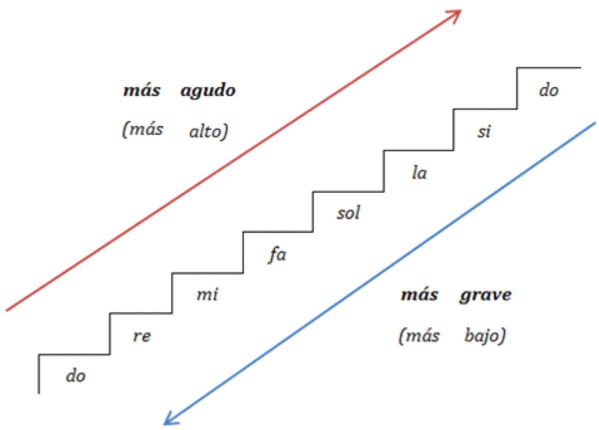
El signo de puntillo se dibuja a la derecha de la figura musical a la que acompañan. La función del puntillo aumenta la duración de la figura a la mitad de su valor original. Es decir, una blanca con puntillo tiene la duración de tres negras; en este caso el puntillo vale una negra porque es la mitad del tiempo de una blanca, que es la figura que precede al puntillo. Una nota con puntillo es equivalente a escribir esa nota ligada a otra nota de la mitad de su valor.



Figuras con puntillo

Escalas

Según Cordantonopulos (2002) las escalas musicales son secuencias de sonidos que se encuentran ordenados según su altura de manera que cada sonido nuevo que aparece es más agudo que el anterior a medida que la escala asciende, y más grave a medida que la escala desciende.



Fuente: https://www.escribircanciones.com.ar/teoria-musical/4440-escalas-musicales.html

La función que tienen las escalas es establecer la base de una tonalidad y, por tanto, de una melodía y su composición musical. Gracias a la serie de sonidos que forman una escala musical, se pueden realizar diferentes combinaciones entre ellos para generar nuevas sonoridades. No solo las melodías, también para las armonías resultan importantes las escalas musicales. Las escalas aportan los sonidos básicos para la formación de acordes, que son útiles para acompañar cualquier línea melódica.

Tonalidad

El tono es un conjunto de sonidos que sostienen en una misma nota principal llamada tónica. Las sucesiones de estas notas componen las escalas. La tonalidad designa cuál es la nota tónica, la nota dominante y la subdominante, en las que se apoyará la estructura musical. La tonalidad define cuales son las reglas que se siguen para interpretar una obra musical.

Intervalo

Dadas dos notas cualesquiera, la distancia que separa a estas se conoce como intervalo. Cada intervalo se nombra por la cantidad de notas que hay que pasar para llegar de una a otra. Por ejemplo, para llegar de *do* a *fa* hay que pasar por 4 notas: *do-re-mi-fa.* El intervalo *do-fa* se dice que es un intervalo “de cuarta”.

Octava

Dentro de los intervalos, se denominamos octava a aquel que tiene de ocho grados entre dos notas de la escala musical. El nombre de octava se debe al hecho de que en la escala occidental recorrer esta distancia equivale a dar siete pasos desde una nota a la misma nota con el doble de frecuencia. Es decir, este intervalo ***do***-*re-mi-fa-sol-la-si*-***do*** se denomina octava.

Armonía

La armonía en música es el estudio de la técnica para enlazar acordes (notas simultáneas). Generalmente, la armonía representa el equilibrio de las proporciones entre las diferentes partes de un todo, y su resultado siempre nos connota belleza. Podemos entender la armonía desde un punto de vista "vertical" (notas simultáneas, que en la partitura se escriben una sobre otra) y un punto de vista "horizontal" (la melodía, formada por la sucesión de notas, que se escriben una detrás de otra).

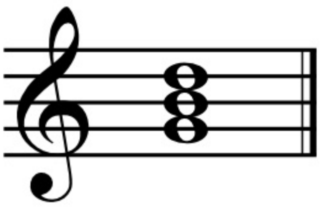
Un acorde posee entre tres y siete notas de las ocho que componen una octava; las notas pueden o bien pertenecer a la misma octava o bien a diferentes. Los intervalos musicales, combinados, determinan los diferentes tipos de acordes. Cada tipo de acorde puede presentar como una nota tónica cualquiera de las doce notas musicales de la escala cromática (do, do♯, re, mi♭, mi, fa, fa♯, sol, la♭, la, si♭, si). Esta nota tónica determina la tonalidad del acorde y constituye la referencia para sus intervalos.

A una sucesión de acordes se la denomina progresión armónica. En una pieza musical, ya sea canción o instrumental, las progresiones armónicas determinan en líneas generales el camino que debe seguir la música de acompañamiento y, el que, en bastante medida, suele seguir la melodía principal, que por razones de armonía debe y suele adaptarse en cierto grado al fondo musical.

La tonalidad, las escalas, los enlaces, la tensión, los movimientos o el reposo son algunos de los elementos que se deben tener en cuenta a la hora de establecer la armonía de una obra musical o bien a la hora de analizar la misma.

Acorde

Es un conjunto de tres o más notas diferentes que suenan simultáneamente y forman una unidad armónica. Todas las notas de un acorde vienen determinadas por la nota tónica, que sería la más grave.



Acorde de Sol

Las combinaciones de dos notas suelen llamarse díadas, las de tres, tríadas, las de cuatro, etradas, las de cinco, quintíadas, las de seis, sextíadas, y las de siete, septíadas.

Melodía

Una melodía es una sucesión de sonidos (notas musicales) que es percibida como una sola entidad. Estos sonidos se desenvuelven en una secuencia lineal, es decir a lo largo del tiempo, y tiene una identidad y significado propio. Suele estar basada en los acordes que se están utilizando en la pieza musical pero también puede utilizar notas fuera de estos acordes. La melodía es lo más fácil de recordar, la esencia de la canción y lo que la hace reconocible.

Metrónomo

El metrónomo se trata de un aparato utilizado para indicar el pulso que deben seguir las composiciones musicales. Produce regularmente una señal, ya sea visual o acústica, que permite a un músico mantener un pulso constante durante la interpretación de una obra musical.

Anexo II

A continuación, se muestran los 176 compases que Mozart compuso para su juego de dados.


49. 50. 51. 52. 53. 54 55. 56.
57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64.
65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72.
73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80.
81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88.
2.
1.


89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96.
97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104.
105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112.
113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120.
121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128.
2.
1.


129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136.
137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144.
145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152.
153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160.
161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168.
169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176.